Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Сапронов, А. Е. Шишков, Асимптотическое поведение носителей решений квазилинейных многомерных параболических уравнений типа нестационарной диффузии-конвекции, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 5, 125–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:46:03

УДК 517.9

Д. А. Сапронов, А. Е. Шишков

Асимптотическое поведение носителей решений квазилинейных многомерных параболических уравнений типа нестационарной диффузии-конвекции

Изучается эффект конечности скорости распространения носителей обобщенных энергетических решений смешанных задач для широкого класса дважды вырождающихся параболических уравнений высокого порядка, модельным представителем которых является уравнение

$$(|u|^{q-1}u)_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha (|D_x^\alpha u|^{p-1} D_x^\alpha u) + (|u|^{\lambda-1}u)_{x_1} = 0,$$

$m \geq 1$, $p > 0$, $q > 0$, $\lambda > 0$.

Установлены в определенном смысле точные оценки начальной эволюции носителей решений (в частности, “правого” и “левого” фронтов носителей), зависящие от локальных свойств начальной функции и параметров уравнения. Исследовано также поведение носителей при больших значениях времени.

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение

В области $G_T = (0, T) \times \Omega$, где Ω – произвольная (возможно, и неограниченная) область в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, рассматривается задача Коши–Дирихле для следующего класса квазилинейных параболических уравнений порядка $2m$, $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_q(u) + A_p^{(2m)}(u) + B_\lambda(u) \\ \equiv (|u|^{q-1}u)_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(t, x, u, D_x u, \dots, D_x^m u) \\ + \chi \cdot \nabla b(t, u) = 0, \quad q > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega), \quad (1.2)$$

$$D_x^\alpha u|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1. \quad (1.3)$$

Здесь $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, а непрерывные функции $a_\alpha(t, x, \xi)$ и $b(t, s)$ удовлетворяют условиям коэрцитивности и роста:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha \geq d_0 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^{p+1} \\ \forall (t, x, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad p > 0, \quad d_0 > 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$|a_\alpha(t, x, \xi)| \leq d_1 \sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^p \quad \forall (t, x, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_1 < \infty, \quad (1.5)$$

$$|b(t, s)| \leq d_2 |s|^\lambda \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad d_2 < \infty, \quad \lambda > 0, \quad (1.6)$$

$$b(t, s)s - \int_0^s b(t, \tau) d\tau \geq d_3 |s|^{\lambda+1} \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad d_3 > 0, \quad (1.7)$$

где $N(m)$ – число различных n -мерных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m$.

Уравнения структуры (1.1) при $m = 1$ моделируют нелинейные диффузно-конвективные процессы. Модельный пример – одномерное уравнение ньютоновской фильтрации с конвективным переносом вдоль положительного направления оси ox_1 :

$$(|u|^{q-1}u)_t - u_{xx} + \chi(|u|^{\lambda-1}u)_x = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^1, \quad 0 < \chi = \text{const}, \quad (1.8)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq u_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^1). \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) при $q < 1$ (уравнение медленной диффузии) моделирует, к примеру, фильтрацию жидкости через однородную пористую среду, теплопроводность, теплоемкость и теплоперенос в которой зависят от температуры в каждой ее точке степенным образом, течение тонкой вязкой пленки по наклонной плоскости, диффузию газа, при $q > 1$ (уравнение быстрой диффузии) – перенос термальной энергии в плазме и т.д. Ряд физических моделей (эволюция тонких пленок, бинарных расплавов) приводит к квазилинейным вырождающимся параболическим уравнениям высокого (в частности, четвертого) порядка, близким к (1.1).

Уравнения структуры (1.1) являются вырождающимися (“дважды” вырождающимися при $q \neq 1, p \neq 1$) квазилинейными параболическими уравнениями. Изучение разрешимости граничных задач для этих уравнений было начато в известной статье О. А. Олейник, А. С. Калашникова, Чжоу Юй-линь [1], в которой введено понятие непрерывного обобщенного решения задачи Коши для уравнения структуры (1.8) с $\chi = 0$ и установлены его существование и единственность. В дальнейшем построению теории вырождающихся параболических уравнений было посвящено огромное количество работ (см. обзор [2], книгу [3] и библиографию к ним). Так, разрешимость смешанных задач для одномерных уравнений ньютоновской фильтрации с нелинейной конвекцией изучалась в [4]–[7].

Хорошо известна основанная на методе монотонности теория разрешимости граничных задач для общих уравнений (1.1) с $q = 1, B_\lambda(u) = 0$ (см. книги [8], [9]). Некоторые результаты о разрешимости “дважды” вырождающихся уравнений структуры (1.1) с $q \neq 1, p \neq 1$ при наличии младших членов типа нелинейной абсорбции установлены в [10], [11]. Существование и единственность слабого решения задачи Коши–Дирихле в ограниченной области с нулевым граничным условием для уравнения многомерной фильтрации с конвекцией при некоторых дополнительных ограничениях на показатели нелинейности были установлены в [12], а в [13] – однозначная разрешимость этой задачи для более широкого класса параболических уравнений второго порядка, в который входит и уравнение (1.1) при $m = 1$. Кроме того, в работе [13] установлены также близкие к (1.4)–(1.7) естественные ограничения на нелинейности уравнения, при которых слабое решение является энергетическим.

Одним из характерных свойств решений вырождающихся параболических уравнений (уравнение (1.8) вырождается при $u = 0$) является свойство конечности скорости распространения носителей их решений. Так, при

$$\text{supp } u_0(x) = [-a, a], \quad 0 < a < \infty, \quad q < 1, \quad \lambda > q$$

носитель произвольного решения $u(t, x)$ задачи (1.8), (1.9) является компактным множеством и имеет два непрерывных фронта (свободные поверхности), отделяющих область, где $u(t, x) \equiv 0$, от области, где $u(t, x) > 0$ (см. [2], [14]–[17]):

$$\begin{aligned}\eta_+(t) &= \sup\{x : u(t, x) > 0\} - \text{правый фронт,} \\ \eta_-(t) &= \inf\{x : u(t, x) > 0\} - \text{левый фронт.}\end{aligned}\quad (1.10)$$

“Несимметричность” конвективного оператора приводит к тому, что $\eta_-(t)$ и $\eta_+(t)$ имеют различную асимптотику по t : в частности, $\eta_+(t) \geq -\eta_-(t) \quad \forall t > 0$ при $\chi > 0$ и $u_0(x) = u_0(-x)$ (см. [14]–[17]).

Характер поведения обоих фронтов решения задачи Коши для уравнения медленной диффузии со слабой конвекцией ($\lambda > (q+1)/2$) при $t \rightarrow \infty$ установлен в работе [16], а в [17] найдены главные члены их возможного асимптотического разложения. Начальная эволюция правого и левого фронтов обобщенных непрерывных решений задач Коши для уравнения медленной диффузии со слабой ($\lambda > (q+1)/2$) и “не очень” сильной ($q < \lambda < (q+1)/2$) конвекцией, а также левого фронта носителей решений этих задач для уравнений диффузии с “очень” сильной ($\lambda < 1$, $\lambda < q$) конвекцией были установлены в работах [14], [15]. В частности, в них были получены необходимые и достаточные условия на рост $u_0(x)$ в окрестности ее носителя, обеспечивающие нерасширение носителя решения в течение некоторого времени, называемого временем ожидания (эффект временной задержки носителя решения или ЗРН-эффект), а также оценки минимальной скорости расширения носителя в случае, если эти условия не выполнены. Для уравнений диффузии с “очень” сильной конвекцией установлено также условие на поведение $u_0(x)$ в окрестности $\eta_-(0)$, при выполнении которого стартовое движение левого фронта носителя происходит в противоположном диффузии направлении (обратное движение носителя). В работах [18], [19] найдены некоторые (неточные) оценки скорости движения обоих фронтов носителя решения уравнения (1.8) с сингулярной $u_0^q(x) = \delta(x)$.

Случаи, когда решения не обладают свойством конечности скорости распространения носителя, рассмотрены в [20]–[22]. В частности, в [21] показано, что оба фронта решения задачи Коши для уравнения быстрой диффузии со слабой и “не очень” сильной конвекцией обращаются в бесконечность при любых $t > 0$, а в случае диффузии с “очень” сильной конвекцией – только правый фронт. В работе [22] найдены ограничения на поведение $u_0(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, при которых левый фронт носителя решения уравнения диффузии с “очень” сильной конвекцией становится конечным за конечное время, даже если в начальный момент времени он находился на бесконечности (эффект мгновенной компактификации носителя или МКН-эффект). МКН-эффект для энергетических решений задачи Коши (1.1), (1.2) при $m = 1$ был установлен в [23]. Гладкость фронтов решения уравнения медленной диффузии с конвекцией изучалась в [24].

Эволюция левого фронта носителя энергетического решения уравнения типа многомерной медленной диффузии с конвекцией без учета поведения $u_0(x)$ в окрестности ее носителя была исследована в работе [25]. Некоторые оценки сверху размеров носителей энергетических решений задачи (1.1), (1.2) при $q < p$, $\lambda > 0$ без учета локальных свойств $u_0(x)$ были получены в работах [26], [27], соответственно, для больших и малых значений времени. В случае $n = 1$ многими авторами изучалось асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решений полулинейных уравнений с конвективным членом (см., например, [28]–[30]).

Целью настоящей работы является исследование эволюции носителей энергетических решений (1.1)–(1.3) как при малых, так и при больших значениях времени. В частности, найдены близкие к точным условия на поведе-

ние $u_0(x)$ в окрестности ее носителя, обеспечивающие возникновение ЗРН-эффекта. В случае невыполнения этих условий установлены в определенном смысле точные оценки скорости расширения носителя, а также ограничения на показатели нелинейности уравнения, при которых эта скорость не зависит ни от начальной функции, ни от размерности Ω . Для уравнений типа диффузии с “очень” сильной конвекцией найдены близкие к точным условия, обеспечивающие обратное стартовое движение левого фронта, а также установлены точные оценки скорости этого движения. Метод исследования эволюции носителей в работе основан на получении различных локальных энергетических оценок решений (оценок типа принципа Сен-Венана в теории упругости [31], [23], [27]) и не использует никаких вариантов барьерной техники, применимой только в уравнениях второго порядка.

§ 2. Формулировка основных результатов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Энергетическим обобщенным решением $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию

$$u(t, x) \in V(G_T) = \left\{ v(t, x) : \begin{array}{l} v \in L_{p+1}(0, T; W) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega), \\ (|v|^{q-1}v)_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W^*) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}((0, T) \times \Omega) \end{array} \right\},$$

$$W(\Omega) = \{v \in W_{p+1}^m(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega) : D_x^\alpha v|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq m-1\},$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle (|u|^{q-1}u)_t, w \rangle dt + \int_0^T \langle \chi \cdot \nabla b(t, u), w \rangle dt \\ & + \sum_{|\alpha|=m} \int_{G_T} a_\alpha(t, x, u, D_x u, \dots, D_x^m u) D_x^\alpha w dx dt = 0 \end{aligned}$$

для произвольной функции $w \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^m(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega)$, а также условию (1.2) в смысле пространства $C([0, T]; L_{q+1}(\Omega))$. Здесь $\langle u, w \rangle$ – спаривание элементов пространств W и W^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае ограниченной области Ω , $u_0(x) \in L_\infty(\Omega)$, при $m=1$, $q < p$, $\lambda \leq p + (p+1)(q+1)/n$ или при $m=1$, $\lambda < p \leq q$, а также при $m=1$, $\lambda \leq p(q+1)/(p+1)$, $u_0(x) \in L_q(\Omega)$, существование и единственность энергетического решения задачи (1.1)–(1.3) следует из работы [13] и леммы 8.3 из дополнения.

Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что

$$\chi = (\chi_1, 0, 0, \dots, 0), \quad \chi_1 = \text{const} \neq 0.$$

Введем теперь следующие семейства подобластей:

- 1) конусов раствора Λ с вершиной в точке $(y_1 + s, y') \in \mathbb{R}^n$

$$\Omega^{(1)}(\Lambda, y, s) = \{x \in \Omega : x_1 < s + y_1 - \Lambda|x' - y'|\} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \Lambda > 0; \quad (2.1)$$

- 2) полупространств

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)}(y, \psi, s) &= \{x \in \Omega : (\psi, x) < s + l\} \\ \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad y &= l\psi, \quad l \in \mathbb{R}^1, \quad |\psi| = 1, \quad \psi_1 \geq 0, \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

По этим семействам определим соответственно семейства функций, характеризующих эволюцию носителя произвольного энергетического решения задачи (1.1)–(1.3):

$$\eta^{(1)}(\Lambda, y, t) = \sup\{s : \text{supp } u(t, \cdot) \cap \Omega^{(1)}(\Lambda, y, s) = \emptyset\}, \quad (2.3)$$

$$\eta^{(2)}(y, \psi, t) = \sup\{s : \text{supp } u(t, \cdot) \cap \Omega^{(2)}(y, \psi, s) = \emptyset\}. \quad (2.4)$$

При этом, учитывая определение правого и левого фронтов из (1.10), в случае $\chi_1 > 0$ функцию $\eta^{(1)}(\Lambda, y, t)$ ($\eta^{(2)}(y, \psi, t)$) будем обозначать $\eta_-^{(1)}(\Lambda, y, t)$ ($\eta_-^{(2)}(y, \psi, t)$) и говорить об эволюции левого фронта носителя; соответственно при $\chi_1 < 0$ функцию $\eta^{(1)}(\Lambda, y, t)$ ($\eta^{(2)}(y, \psi, t)$) будем обозначать $\eta_+^{(1)}(\Lambda, y, t)$ ($\eta_+^{(2)}(y, \psi, t)$) и говорить об эволюции правого фронта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Энергетическое решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) обладает свойством конечности скорости распространения возмущений (КСР-свойством), если существует $\tau > 0$ такое, что выполнено $|\eta^{(1)}(\Lambda, y, t)| < \infty$ ($|\eta^{(2)}(y, \psi, t)| < \infty$) $\forall t, 0 < t < \tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что имеет место *задержка распространения носителя* (ЗРН-эффект) решения $u(t, x)$, если существует $T^* > 0$ такое, что $\eta^{(1)}(\Lambda, y, t) \geq \eta^{(1)}(\Lambda, y, 0)$ ($\eta^{(2)}(y, \psi, t) \geq \eta^{(2)}(y, \psi, 0)$) при любых $0 < t \leq T^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Некоторую неубывающую неотрицательную непрерывную функцию $h(s)$ назовем *правильно монотонной*, если для произвольного δ_1 , $0 < \delta_1 < \delta_0 \leq 1$, существует $0 < \delta_2 = \delta_2(\delta_1) < 1$ такое, что $h((1 - \delta_1)s) \geq \delta_2 h(s)$ $\forall s > 0$.

Введем теперь семейства функций, характеризующие поведение начальной функции $u_0(x)$ в окрестности ее носителя:

$$h_0^{(1)}(\Lambda, y, s) = \int_{\Omega^{(1)}(\Lambda, y, s)} |u_0(x)|^{q+1} dx, \quad h_0^{(2)}(y, \psi, s) = \int_{\Omega^{(2)}(y, \psi, s)} |u_0(x)|^{q+1} dx.$$

Обозначим через $h^{(1)}(\Lambda, y, s)$ и $h^{(2)}(y, \psi, s)$:

$$0 \leq h_0^{(1)}(\Lambda, y, s) \leq h^{(1)}(\Lambda, y, s) < \infty,$$

$$0 \leq h_0^{(2)}(y, \psi, s) \leq h^{(2)}(y, \psi, s) < \infty,$$

минимальные правильно монотонные мажоранты соответственно функций $h_0^{(1)}(\Lambda, y, s)$ и $h_0^{(2)}(y, \psi, s)$.

Введем также следующие множества параметров (Λ, y) и (y, ψ) :

$$V_1 = \{(\Lambda, y) : \text{supp } u_0(x) \cap \Omega^{(1)}(\Lambda', y, 0) = \emptyset, \\ \text{supp } u_0(x) \cap \overline{\Omega^{(1)}(\Lambda, y, 0)} \neq \emptyset\} \quad \forall \Lambda' \in (0, \Lambda), \quad (2.5)$$

$$V_2 = \{(y, \psi) : \text{supp } u_0(x) \cap \Omega^{(2)}(y, \psi, 0) = \emptyset, \\ \text{supp } u_0(x) \cap \overline{\Omega^{(2)}(y, \psi, 0)} \neq \emptyset\}. \quad (2.6)$$

Из определения множеств V_1 и V_2 , очевидно, вытекает, что

$$\begin{aligned} (\Lambda, y) \in V_1 &\Rightarrow \operatorname{supp} u_0(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega^{(1)}(\Lambda, y, 0) \Rightarrow \eta^{(1)}(\Lambda, y, 0) = 0 \\ &\Rightarrow h^{(1)}(\Lambda, y, 0) = 0, \\ (y, \psi) \in V_2 &\Rightarrow \operatorname{supp} u_0(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega^{(2)}(y, \psi, 0) \Rightarrow \eta^{(2)}(y, \psi, 0) = 0 \\ &\Rightarrow h^{(2)}(y, \psi, 0) = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $(\Lambda, y) \in V_1$, $(y, \psi) \in V_2$, а параметры (Λ, y) , (y, ψ) и индексы $^{(1)}$, $^{(2)}$ в формулировках, справедливых для $\eta^{(1)}(\Lambda, y, t)$ и $\eta^{(2)}(y, \psi, t)$, для краткости будем опускать.

2.1. Прямое движение левого фронта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям $\chi_1 > 0$, $q < p < \lambda$. Зафиксируем произвольно постоянную δ_3 , $0 < \delta_3 < \infty$, и определим функцию

$$v_1(t) = \inf \{s : (\operatorname{th}(s))^{\frac{p-q}{q+1}}\}^{\beta_1} < \delta_3 s\} \quad \forall t > 0. \quad (2.7)$$

Тогда произвольное энергетическое решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) обладает КСР-свойством и для левого фронта носителя верна оценка:

$$\eta_-(t) \geq a_1 \max\{\eta^{(d)}(t), \eta_-^{(c)}(t)\} \quad \forall t > 0, \quad a_1 = a_1(\delta_3) = \operatorname{const} > 0, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \eta^{(d)}(t) &= -(\operatorname{th}(v_1(t))^{\frac{p-q}{q+1}})^{\beta_1}, \quad \beta_1 = \frac{q+1}{m(p+1)(q+1) + n(p-q)}, \\ \eta_-^{(c)}(t) &= \begin{cases} -\chi_1^{-\frac{p-q}{\lambda-p}\beta_2} t^{\beta_2}, & h_0(s) = h_0^{(1)}(\Lambda, y, s), \quad \beta_2 = \frac{\lambda-p}{m(p+1)(\lambda-q) - p+q}, \\ -\infty, & h_0(s) = h_0^{(2)}(y, \psi, s). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ПРИМЕР 1. Пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что соответствующая функция $h_0(s)$ удовлетворяет неравенству

$$h_0(s) \leq h(s) \equiv k_1 s^\alpha, \quad k_1 > 0, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_1 \equiv n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-q}. \quad (2.11)$$

Тогда, очевидно,

$$v_1(t) = (\delta_3^{-\beta_1^{-1}} k_1^{\frac{p-q}{q+1}})^{\beta(\alpha)} t^{\beta(\alpha)}, \quad \beta(\alpha) = \frac{q+1}{m(p+1)(q+1) + (n-\alpha)(p-q)} \quad (2.12)$$

и, следовательно,

$$\eta^{(d)}(t) = -\delta_3 v_1(t) \quad \forall t > 0. \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что функция $v_1(t)$ из (2.7), строящаяся по $h(s)$ из примера 1, при $\alpha = \alpha_1$ тождественно равна нулю на некотором интервале $(0, T^*)$, $T^* > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко проверить, что $\beta(\alpha)$ из (2.12) и β_2 из (2.10) удовлетворяют неравенству $\beta(\alpha) \geq \beta_2$ при следующих соотношениях на параметры:

- а) $0 \leq \alpha < \alpha_1$, $\lambda \leq \lambda_{cr_1} \equiv p + \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{n}$ либо
 б) $\alpha_2 \equiv n - \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{\lambda - p} \leq \alpha < \alpha_1$, $\lambda > \lambda_{cr_1}$.

Пример 1 и замечания 2, 3 легко приводят к следующим следствиям из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1 (стартовое распространение носителя).

1. Если $u_0(x)$ удовлетворяет следующему условию малости:

$$h_0(s) \leq ks^{\alpha_1} \quad \forall s, \quad 0 \leq s < s_0, \quad k < \infty, \quad \alpha_1 = n + \frac{m(p+1)(q+1)}{p-q}, \quad (2.14)$$

то имеет место ЗРН-эффект.

2. Если же условие (2.14) не выполняется, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow 0} h_0(s)s^{-\alpha_1} = \infty, \quad (2.15)$$

то возможны следующие варианты:

- а) при $\lambda \leq \lambda_{cr_1} = p + \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{n}$ существует $0 < T^* < \infty$ такое, что оценка (2.8) эквивалентна оценке

$$\eta_-(t) \geq a_2 \eta_-^{(d)}(t) \quad \forall t < T^*, \quad a_2 = a_2(\delta_3) = \text{const} > 0; \quad (2.16)$$

- б) при $\lambda > \lambda_{cr_1}$ имеет место следующая универсальная оценка, не зависящая от начальной функции $u_0(x)$:

$$\eta_-(t) \geq a_3 \eta_-^{(c)}(t) \quad \forall t < T^*, \quad a_3 = \text{const} > 0; \quad (2.17)$$

если к тому же дополнительно выполнено следующее условие малости для $u_0(x)$:

$$h_0(s) \leq k_1 s^{\alpha_2} \quad \forall s, \quad 0 \leq s < s_0 < \infty, \quad k < \infty, \quad \alpha_2 = n - \frac{(m(p+1)-1)(q+1)}{\lambda - p}, \quad (2.18)$$

то оценка (2.8) эквивалентна (2.16).

СЛЕДСТВИЕ 2 (эволюция носителя при $t \rightarrow \infty$). Пусть $\lambda \geq \lambda_{cr_1}$. Тогда оценка (2.8) эквивалентна оценке

$$\eta_-(t) \geq -A_1 t^{\beta_1} \quad \forall t > T^* > 0, \quad A_1 = \text{const} > 0, \quad \beta_1 - \text{из (2.9)}. \quad (2.19)$$

Если же $\lambda < \lambda_{cr_1}$, то оценка (2.8) эквивалентна оценке

$$\eta_-(t) \geq a_3 \eta_-^{(c)}(t) \quad \forall t > T^*, \quad a_3 = \text{const} > 0. \quad (2.20)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям $q < \lambda = p$, $\chi_1 > 0$. Тогда произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) обладает КСР-свойством и существует $0 < T^*(\psi_1) < \infty \quad \forall \psi_1 > 0$ такое, что для левого фронта носителя верна оценка (2.16) при $0 < t < T^*$, а также выполнено

$$\eta_-(t) \geq -A_2(\psi_1 \chi_1) \ln t \quad \forall t \geq T^*, \quad A_2 = A_2(\psi_1 \chi_1) = \text{const} > 0. \quad (2.21)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям $\chi_1 > 0$, $q < p$, $\lambda \leq p$. Зафиксируем произвольно постоянную $\delta_4 > 0$ и определим число $s_1 = s_1(\psi_1\chi_1) \geq 0$ – максимальный корень уравнения

$$(\psi_1\chi_1)^{(\nu-1)(1+\mu)\beta_3} (s^{1-\nu}h(s)^{1+\mu})^{\mu\beta_3} + s^{\beta_4}(\psi_1\chi_1)^{(\nu-1)(1+\mu)(1-\beta_4)\beta_3} (s^{1-\nu}h(s)^{1+\mu})^{\mu\beta_3(1-\beta_4)} = \delta_4 s, \quad (2.22)$$

где

$$\beta_3 = (m(p+1)(1+\mu) - 1 + \nu)^{-1}, \quad \beta_4 = (1-\nu)(m(p+1)(1+\mu))^{-1}, \\ \nu = n(p-\lambda)[m(p+1)(q+1) + n(p-\lambda)]^{-1}, \quad \mu = mn^{-1}(p+1)\nu. \quad (2.23)$$

Тогда произвольное энергетическое решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) обладает КСР-свойством и для левого фронта верна оценка

$$\eta_-(t) \geq a_4 \max\{\eta_-^{(d)}(t), \eta_-^{(sc)}(\psi_1\chi_1)\} \quad \forall t > 0, \quad a_4 = a_4(\delta_3, \delta_4) = \text{const} > 0, \quad (2.24)$$

где $\eta_-^{(d)}(t)$, $\delta_3 > 0$ – из теоремы 1, $\eta_-^{(sc)}(\psi_1\chi_1) = -\delta_4 s_1(\psi_1\chi_1)$. Кроме того, существует $k_2(\psi_1\chi_1) > 0$ такое, что при выполнении условия малости

$$h_0(s) \leq k_2 s^{\alpha_2} \quad \forall s, \quad 0 \leq s < s_0 \leq \infty, \quad \alpha_2 = n + \frac{(m(p+1) - 1)(q+1)}{p - \lambda} \quad (2.25)$$

имеет место ЗРН-эффект с $T^* = T^*(s_0, \psi_1\chi_1)$, причем $T^*(s_0, \psi_1\chi_1) \rightarrow \infty$ при $s_0 \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно проверить, что неравенство $\alpha_2 \leq \alpha_1$ эквивалентно неравенству $\lambda \leq \lambda_{cr2} = q + (p - q)(m(p+1))^{-1}$.

Из теорем 1–3 и замечания 4, очевидно, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в (1.1) дополнительно выполнено $\lambda > \lambda_{cr2}$. Тогда если $u_0(x)$ удовлетворяет условию малости (2.14), то имеет место ЗРН-эффект. Если же $\lambda \leq \lambda_{cr2}$, то для возникновения ЗРН-эффекта достаточно выполнения более слабого, чем (2.14), условия (2.25).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $n = m = p = 1$, $\lambda_{cr2} < \lambda < \lambda_{cr1}$, $t \rightarrow \infty$ оценки (2.8), (2.21), (2.24) соответствуют результатам работы [17].

ТЕОРЕМА 4. Пусть уравнение (1.1) является уравнением типа быстрой диффузии с “очень сильной” конвекцией:

$$\chi_1 > 0, \quad \lambda < p \leq q, \quad p \geq \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)}. \quad (2.26)$$

Тогда произвольное энергетическое решение рассматриваемой задачи обладает конечным левым фронтом и имеет место следующая оценка:

$$\eta_-(t) \geq a_5 \max\{\eta_-^{(c)}(t), \eta_-^{(sc)}(\psi_1\chi_1)\} \quad \forall t > 0, \quad a_5 = a_5(\delta_4) = \text{const} > 0, \quad (2.27)$$

где $\eta_-^{(c)}(t)$, $\eta_-^{(sc)}(\psi_1\chi_1)$ определяются равенствами (2.10) и (2.24) соответственно. Кроме того, при выполнении условия малости (2.25) имеет место ЗРН-эффект с $0 < T^* = T^*(s_0, \psi_1\chi_1)$, причем $\lim_{s_0 \rightarrow \infty} T^*(s_0, \psi_1\chi_1) = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Из оценок (2.24), (2.27) легко получить следующее соотношение:

$$\eta_-(t) \geq -\tilde{a}_5(\chi_1)\psi_1^{-\frac{1-\nu}{m(p+1)-1+\nu}} \quad \forall t > 0, \quad \tilde{a}_5(\chi_1) = \text{const} > 0.$$

2.2. Обратное движение левого фронта носителя.

ТЕОРЕМА 5. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$\chi_1 > 0, \quad \lambda < p, \quad \lambda < q, \quad p \geq \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)}. \quad (2.28)$$

Тогда существует положительная постоянная $k_3 < k_2$ (k_2 – из теоремы 3) такая, что при выполнении условия малости

$$h_0(s) \leq k_3 s^{\alpha_2} \quad \forall 0 \leq s < s_0 \leq \infty \quad (2.29)$$

для левого фронта носителя произвольного энергетического решения выполнено

$$\eta_-(t) \geq a_5 f^{-1}(a_6(\psi_1 \chi_1)^{1-\nu_1} t) \quad (2.30)$$

$$\forall t < T^*(s_0, \psi_1 \chi_1), \quad a_5 = \text{const} > 0, \quad a_6 = \text{const} > 0,$$

где $f^{-1}(s)$ – функция, обратная к функции $f(s) = s^{1-\nu_1} h(s)^{\mu_1}$, $h(s)$ – из теоремы 1, $\lim_{s_0 \rightarrow \infty} T^*(s_0, \psi_1 \chi_1) = \infty$,

$$\nu_1 = n(q - \lambda)(m(p + 1)(q + 1) + n(p - \lambda))^{-1}, \quad \mu_1 = mn^{-1}(p + 1)\nu_1. \quad (2.31)$$

Также существует время $T^{**}(s_1(\psi_1 \chi_1)) \geq T^*(s_0, \psi_1 \chi_1)$ ($s_1(\psi_1 \chi_1)$ – из (2.22)) такое, что

$$\eta_-(t) \geq A_3 \psi_1 \chi_1 t^{\beta_5} \quad \forall t > T^{**}, \quad A_3 = \text{const} > 0, \quad (2.32)$$

$$\beta_5 = \frac{m(p + 1)(q + 1) + n(p - \lambda)}{m(p + 1)(q + 1) + n(p - q)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Последнее ограничение в (2.26) и (2.28) имеет “техническую” природу (обеспечивает соответствующее вложение) и не встречается в работах [14], [15], основанных на барьерной технике.

2.3. Движение правого фронта носителя.

ТЕОРЕМА 6. Пусть параметры уравнения (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$q < \lambda < p + m(p + 1)(q + 1)n^{-1}, \quad q < p, \quad \chi_1 < 0.$$

Зафиксируем произвольно постоянную $0 < \delta_5 < \infty$ и определим функцию

$$v_2(t) = \inf\{s : -\psi_1 \chi_1 t^{\beta_5} h(s)^{\beta_6} < \delta_5 s\} \quad \forall t > 0, \quad (2.33)$$

$$\beta_6 = \frac{m(p + 1)(\lambda - q)}{m(p + 1)(q + 1) + n(p - q)},$$

β_5 – из (2.32), $h(s)$ – из теоремы 1. Тогда произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) обладает КСР-свойством и для правого фронта носителя решения имеет место оценка

$$\eta_+(t) \geq a_7 \min\{\eta^{(d)}(t), \eta_+^{(c)}(t)\} \quad \forall t > 0, \quad a_7 = a_7(\delta_3, \delta_5) = \text{const} > 0, \quad (2.34)$$

где $\eta_+^{(c)} = \psi_1 \chi_1 t^{\beta_5} h(v_2(t))^{\beta_6}$, $\eta^{(d)}(t)$ и $\delta_3 > 0$ – из теоремы 1.

ПРИМЕР 2. Пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что соответствующая ей функция $h_0(s)$ удовлетворяет следующему условию:

$$h_0(s) \leq h(s) = ks^\alpha, \quad 0 < \alpha < \alpha_3 = \frac{n(p-q)}{m(p+1)(\lambda-q)} + \frac{q+1}{\lambda-q}, \quad k < \infty. \quad (2.35)$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} v_2(t) &= (-\psi_1 \chi_1 \delta_5^{-1} k^{\beta_6})^{(1-\alpha\beta_6)^{-1}} t^{\tilde{\beta}(\alpha)}, \\ \tilde{\beta}(\alpha) &= \frac{m(p+1)(q+1) + n(p-\lambda)}{m(p+1)(q+1-\alpha(\lambda-q)) + n(p-q)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

и, следовательно, $\eta_+^{(c)}(t) = -\delta_5 v_2(t) \quad \forall t, 0 < t < T^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Очевидно, что функция $v_2(t)$ из (2.33), строящаяся по $h(s)$ из примера 2, при $\alpha = \alpha_3$ тождественно равна нулю на некотором интервале $(0, T^*)$, $T^* > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Нетрудно проверить, что $\beta(\alpha)$ из (2.12) и $\tilde{\beta}(\alpha)$ из (2.36) удовлетворяют неравенствам $\beta(\alpha) \geq \tilde{\beta}(\alpha)$, $0 \leq \alpha < \min\{\alpha_1, \alpha_3\}$ при следующих соотношениях параметров:

- а) $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$, $\lambda < \lambda_{cr_2} = q + \frac{p-q}{m(p+1)}$, α_2 – из (2.18), α_3 – из (2.35), или
- б) $0 \leq \alpha < \alpha_2$, $\lambda > \lambda_{cr_1} = p + (m(p+1) - 1)(q+1)n^{-1}$.

Примеры 1, 2 и замечания 2, 7, 8 позволяют получить следующие следствия из теоремы 6.

СЛЕДСТВИЕ 5 (стартовое движение носителя). При

$$\lambda > \lambda_{cr_1} = p + \frac{(m(p+1) - 1)(q+1)}{n}$$

существует $0 < T^* < \infty$ такое, что оценка (2.34) эквивалентна оценке

$$\eta_+(t) \geq a_8 \eta_+^{(c)}(t) \quad \forall t < T^*, \quad a_8 = \text{const} > 0. \quad (2.37)$$

Если к тому же $u_0(x)$ удовлетворяет условию малости (2.18), то (2.34) эквивалентна оценке

$$\eta_+(t) \geq a_9 \eta_+^{(d)}(t) \quad \forall t < T^*, \quad a_9 = \text{const} > 0. \quad (2.38)$$

При выполнении более сильного условия малости (2.14) имеет место ЗРН-эффект.

При $\lambda_{cr_2} \leq \lambda \leq \lambda_{cr_1}$ оценка (2.34) эквивалентна соотношению (2.38) при всех $t < T^*$. Если $u_0(x)$ удовлетворяет условию малости (2.14), то имеет место ЗРН-эффект.

При $\lambda < \lambda_{cr_2}$ оценка (2.34) эквивалентна (2.38). При выполнении для $u_0(x)$ условия малости (2.18) оценка (2.34) эквивалентна (2.37). Если же $u_0(x)$ удовлетворяет более сильному условию малости

$$h_0(s) \leq k_4 s^{\alpha_3} \quad \forall s, 0 < s < s_0 < \infty, \quad k_4 < \infty, \quad (2.39)$$

то имеет место ЗРН-эффект с $T^* = T^*(k_4, \psi_1 \chi_1) < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 6 (эволюция носителя при $t \rightarrow \infty$). При $\lambda \leq \lambda_{cr_1}$ для правого фронта носителя решения имеет место оценка

$$\eta_+(t) \geq A_4 \psi_1 \chi_1 t^{\beta_5} \quad \forall t, t > T^* > 0, \quad A_4 = \text{const} > 0, \quad \beta_5 - \text{из (2.32)}. \quad (2.40)$$

Если же $\lambda > \lambda_{cr_1}$, то

$$\eta_+(t) \geq -A_5 t^{\beta_1} \quad \forall t, t > T^* > 0, \quad A_5 = \text{const} > 0, \quad \beta_1 - \text{из (2.9)}. \quad (2.41)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть в (1.1) $m = n = p = 1$, $\lambda > \lambda_{cr_2} = 2^{-1}(q+1)$, $q < 1$, $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^1)$. Тогда для выполнения условия малости (2.14), а следовательно, и для возникновения ЗРН-эффекта достаточным условием является:

$$0 \leq u_0(x) \leq kx^{\frac{2}{1-q}} \quad \forall x, 0 \leq x < x_0, \quad k < \infty,$$

что соответствует результатам, установленным в [14], [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть в уравнении (1.1) $m = n = p = 1$, $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^1)$, $\lambda \leq \lambda_{cr_2} = 2^{-1}(q+1)$, $q < 1$, $\chi_1 > 0$ или $\lambda < 1 \leq q$, $\chi_1 > 0$. Тогда для выполнения условия малости (2.25), обеспечивающего возникновение ЗРН-эффекта, достаточным является условие:

$$0 \leq u_0(x) < \tilde{k} x^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \forall x, 0 \leq x < x_0 < \infty, \quad \tilde{k} < (k_2 \alpha_2)^{\frac{1}{q+1}}, \quad \alpha_2 = 1 + \frac{q+1}{1-\lambda},$$

где $k_2 > 0$ – из теоремы 3. Это соответствует результатам работ [14], [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть в условиях замечания 10 для $u_0(x)$ выполнено следующее:

$$u_0(x) = \tilde{k} x^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \forall x, 0 < x < x_0 < \infty. \quad (2.42)$$

Тогда, очевидно, $h(s) = \alpha_2^{-1} \tilde{k}^{q+1} s^{\alpha_2}$ и если $\tilde{k} > (\alpha_2 k_2)^{1/(q+1)}$ (k_2 – из теоремы 3), то соотношения (2.24) и (2.27) эквивалентны оценке

$$\eta_-(t) \geq -a_{10} t^{\frac{1-\lambda}{q+1-2\lambda}} \quad \forall t < T^* < \infty, \quad a_{10} = \text{const} > 0.$$

Если же в (2.42) выполнено $\tilde{k} < (k_3 \alpha_2)^{1/(q+1)}$ (k_3 – из теоремы 5), то оценка (2.30) эквивалентна оценке

$$\eta_-(t) \geq a_{11} t^{\frac{1-\lambda}{q+1-2\lambda}} \quad \forall t < T^* < \infty, \quad a_{11} = \text{const} > 0,$$

что также соответствует результатам работ [14], [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пусть в (1.1) $q = \lambda < p$, $b(t, u) \equiv |u|^{q-1}u$. Тогда, сделав замену переменных $u(t, x) = v(t, x_1 - \chi_1 t, x')$, легко проверить, что функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с $b(t, v) \equiv 0$, следовательно, для левого (правого) фронта носителя решения $v(t, x)$ в силу теоремы 1 $\tilde{\eta}_{\pm}(t) \geq -a_{12} \eta^{(d)}(t) \quad \forall t > 0$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем оценку

$$\eta_{\pm}(t) \geq \mp |\psi_1 \chi_1| t - a_{12} \eta^{(d)}(t) \quad \forall t > 0, \quad a_{12} = \text{const} > 0. \quad (2.43)$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\eta_+(t) > 0 \quad \forall t > 0$.

2.4. Геометрия носителей энергетических решений. Из (2.1)–(2.6), очевидно, вытекает, что для носителя произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) имеет место включение $\forall t > 0$

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \left[\bigcup_{(\Lambda, y) \in V_1, (y, \psi) \in V_2} (\Omega^{(1)}(\Lambda, y, \eta^{(1)}(\Lambda, y, t)) \cup \Omega^{(2)}(y, \psi, \eta^{(2)}(y, \psi, t)) \right].$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) при $\chi_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\text{supp } u_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$, $R > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если в (1.1) дополнительно выполнено условие $q < \lambda < p$, то для носителя решения верно включение $\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D^{(1)} \cap D_t^{(2)} \quad \forall t > 0$,

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= \{x \in \Omega : x_1 \geq -R - A_6 + A_7|x'|^{\beta_7}\}, \\ \beta_7 &= m(p+1) + n(p-\lambda)(q+1)^{-1}, \\ D_t^{(2)} &= \{x \in \Omega : x_1 \leq A_8 t^{\beta_5} + [(R + A_9 t^{\beta_1})^2 - |x'|^2]^{\frac{1}{2}}\}, \end{aligned}$$

β_1, β_5 – из (2.7) и (2.32) соответственно;

- 2) пусть в (1.1) $q < p$, $b(t, u) \equiv |u|^{q-1}u$; тогда $\forall t > 0$

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(3)} = \{x \in \Omega : (x_1 - t)^2 + |x'|^2 \leq (R + A_{10} t^{\beta_1})^2\} \subseteq D^{(1)};$$

- 3) в случае $\lambda < q < p$ существует $T^* > 0$ такое, что

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(4)} \cap D_t^{(5)} \subseteq D^{(1)} \quad \forall t > T^*,$$

$$\text{где } D_t^{(4)} = \{x \in \Omega : x_1 \geq -R + A_{11} t^{\beta_5}\}, D_t^{(5)} = \{x \in \Omega : |x'| \leq R + A_{12} t^{\beta_1}\};$$

- 4) если в (1.1) $q < p < \lambda$, то

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(2)} \cap D_t^{(6)} \quad \forall t > 0,$$

$$D_t^{(6)} = \{x \in \Omega : x_1 \geq -R - A_{13} t^{\beta_8}\}, \quad \beta_8 = \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^{-1}, \quad \beta_2 \text{ – из (2.10)};$$

- 5) в случае $\lambda < p < q$, $p \geq \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)}$ существует $T^* > 0$ такое, что

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D^{(1)} \cap D_t^{(4)} \quad \forall t > T^*;$$

- 6) при $q < \lambda = p$ существует $T^* > 0$ такое, что

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(2)} \cap D_t^{(7)} \quad \forall t > T^*, \quad D_t^{(7)} = \{x \in \Omega : x_1 \geq -R - A_{14} \ln t\};$$

- 7) если же $\lambda < p = q$, то

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(8)} = \{x \in \Omega : x_1 \geq A_{15} t^{\beta_5} - [(R + A_{16} t^{\beta_1})^2 - |x'|^2]^{\frac{1}{2}}\} \subseteq D^{(1)}$$

$$\forall t > 0, 0 < A_i < \infty, i = \overline{6, 16}.$$

§ 3. Вспомогательные построения и утверждения

По семейству областей $\Omega(s)$ из (2.1) и (2.2) определим следующие семейства подобластей:

$$K(s, \delta) = \Omega(s) \setminus \Omega(s - \delta) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0,$$

$$G_{t_1}^{t_2}(s) = (t_1, t_2) \times \Omega(s), \quad Q_{t_1}^{t_2}(s, \delta) = (t_1, t_2) \times K(s, \delta).$$

В дальнейшем нами систематически будет использоваться интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга, которое в случае областей $K(s, \delta)$ примет вид

$$\|D_x^j v\|_{a, K(s, \delta)} \leq d_4 \delta^{-j - \frac{n(a-d)}{ad}} \|v\|_{d, K(s, \delta)} + d_5 \|D_x^m v\|_{b, K(s, \delta)}^\theta \|v\|_{d, K(s, \delta)}^{1-\theta}, \quad (3.1)$$

$0 \leq |j| < m$. Здесь $v(x)$ – произвольная функция из пространства

$$W_b^m(K(s, \delta)) \cap L_d(K(s, \delta)), \quad \|v\|_{a, B}^a = \int_B |v|^a dx,$$

где $d > 0$, $a > 1$, $b > 1$, $\theta \in [j/m, 1]$ определяется из равенства

$$a^{-1} - jn^{-1} = (b^{-1} - mn^{-1})\theta + (1 - \theta)d^{-1},$$

а постоянные $d_4 < \infty$, $d_5 < \infty$ зависят только от известных параметров (в том числе и от Λ) и не зависят от s, δ . Введем неотрицательные срезающие функции $\eta(\tau) \in C^m(\mathbb{R}^1)$, $\zeta(\tau) \in C^m(\mathbb{R}^1)$, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= 1 \quad \forall \tau \leq -\frac{15}{16}, \quad \eta(\tau) = 0 \quad \forall \tau \geq 0, \quad 0 \leq \eta(\tau) \leq 1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1, \\ \eta'(\tau) &\leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1, \quad -\eta'(\tau) \geq d_6 > 0 \quad \forall \tau \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{16}\right), \\ \zeta(\tau) &= \frac{1}{16} \quad \forall \tau < \frac{1}{32}, \quad \zeta(\tau) = \tau \quad \forall \tau \geq \frac{1}{8}, \quad \zeta''(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определим семейство основных срезающих функций следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_{s, \delta}(x) &= \eta((2 - i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1}) + (\psi_1^{i-1}x_1 + (i - 1)(\psi', x') - s)\delta^{-1}) \\ &\quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

В силу неравенств (3.2) легко проверяются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \eta_{s, \delta}(x) &= 0 \quad \forall x, \quad \psi_1^{i-1}x_1 + (i - 1)(\psi', x') \geq s - (2 - i)\delta\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1}), \\ \eta_{s, \delta}(x) &= 1 \quad \forall x, \quad \psi_1^{i-1}x_1 + (i - 1)(\psi', x') \leq s - \delta\left(\frac{15}{16} + (2 - i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right), \\ |D_x^\alpha \eta_{s, \delta}(x)| &\leq d_7 |\psi|^{i-1} \delta^{-|\alpha|} \quad \forall \alpha, \quad 1 \leq |\alpha| \leq m, \\ \forall x, \quad s - \delta\left(\frac{15}{16} + (2 - i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right) &\leq \psi_1^{i-1}x_1 + (i - 1)(\psi', x') \\ &\leq s - (2 - i)\delta\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1}), \quad d_7(|\psi|^{i-1}) < \infty, \\ -D_{x_1} \eta_{s, \delta}(x) &\geq d_8 \psi_1^{i-1} \delta^{-1} > 0 \\ \forall x, \quad s - \delta\left(\frac{3}{4} + (2 - i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right) &\leq \psi_1^{i-1}x_1 + (i - 1)(\psi', x') \\ &\leq s - \delta\left(\frac{3}{16} + (2 - i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right), \quad d_8 > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нетрудно проверить справедливость следующих включений:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(i)}(s) &\supset \{x : \psi_1^{i-1}x_1 + (i-1)(\psi', x') \leq s - (2-i)\delta\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\}, \\
 \Omega^{(i)}(s-\delta) &\subset \left\{x : \psi_1^{i-1}x_1 + (i-1)(\psi', x') \leq s - \delta\left(\frac{15}{16} + (2-i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right)\right\}, \\
 K^{(i)}(s, \delta) &\equiv \Omega^{(i)}(s) \setminus \Omega^{(i)}(s-\delta) \supset \left\{x : s - \delta\left(\frac{15}{16} + (2-i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right) \right. \\
 &\quad \left. \leq \psi_1^{i-1}x_1 + (i-1)(\psi', x') \leq s - (2-i)\delta\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right\}, \\
 K^{(i)}\left(s - \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}\right) &\subset \left\{x : s - \delta\left(\frac{3}{4} + (2-i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right) \right. \\
 &\quad \left. \leq \psi_1^{i-1}x_1 + (i-1)(\psi', x') \leq s - \delta\left(\frac{3}{16} + (2-i)\zeta(\Lambda|x'|\delta^{-1})\right)\right\},
 \end{aligned}$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$. Здесь $\Omega^{(1)}(s) \equiv \Omega^{(1)}(\Lambda, y, s)$, $\Omega^{(2)}(s) \equiv \Omega^{(2)}(y, \psi, s)$, где $\Omega^{(1)}(\Lambda, y, s)$, $\Omega^{(2)}(y, \psi, s)$ – из (2.1), (2.2) соответственно.

Следуя выводу формулы интегрирования по частям из работы [11], из определения 1 выводим для произвольного $T_0 \leq T$ следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned}
 &\frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u(T_0, x)|^{q+1} \phi(T_0, x) dx + \int_{G_{T_0}} \left[-\frac{q}{q+1} |u(t, x)|^{q+1} \phi'_t(t, x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(t, x, u, D_x u, \dots, D_x^m u) D_x^{\alpha}(u \cdot \phi) - B(t, u)(\chi, \nabla_x \phi(t, x)) \right] dx dt \\
 &= \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u_0(x)|^{q+1} \phi(0, x) dx, \quad B(t, u) = b(t, u)u - \int_0^u b(t, s) ds, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

для произвольной функции $\phi(t, x) \in C_{t,x}^{1,m}(\overline{G})$, где $C_{t,x}^{1,m}(\overline{G})$ – множество непрерывно дифференцируемых по t и m раз непрерывно дифференцируемых по x в $\overline{G}$ функций.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{t_1}^{t_2}(s, h) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^h dt \quad \forall h > 0, \quad E_T(s, \tau) = \Psi_{T-\tau}^T(s, 1), \\
 I_T(s, \tau) &= \int_{G_{T-\tau}^T(s)} |u|^{p+1} dx dt, \quad J_T(s, \tau) = \int_{G_{T-\tau}^T(s)} |u|^{\lambda+1} dx dt, \\
 F_T(s, \tau) &= \int_{G_{T-\tau}^T(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx dt, \quad H_T(s) = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_t(s)} |u|^{q+1} dx, \\
 I_T(s) &= I_T(s, T), \quad E_T(s) = E_T(s, T), \quad J_T(s) = J_T(s, T), \quad F_T(s) = F_T(s, T), \\
 \Delta I_T(s, \delta, \tau) &= I_T(s, \tau) - I_T(s - \delta, \tau), \quad \Delta J_T(s, \delta, \tau) = J_T(s, \tau) - J_T(s - \delta, \tau), \\
 \Delta F_T(s, \delta, \tau) &= F_T(s, \tau) - F_T(s - \delta, \tau), \quad \Delta I_T(s, \delta) = I_T(s) - I_T(s - \delta), \\
 \Delta J_T(s, \delta) &= J_T(s) - J_T(s - \delta), \quad \Delta F_T(s, \delta) = F_T(s) - F_T(s - \delta) \\
 &\quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \tau \geq 0.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.1 (см. [27]). Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) при $\chi_1 \geq 0$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta) + T^{-1}E_T(s - \delta) + F_T(s - \delta) + \psi_1\chi_1\delta^{-1}J_T\left(s - \frac{5\delta}{8}, \frac{\delta}{4}\right) \\ \leq c(\delta^{-m(p+1)}\Delta I_T(s, \delta) + h_0(s)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$. Здесь и далее c, c_i – различные положительные постоянные, зависящие лишь от известных параметров задачи.

ЛЕММА 3.2 (см. [27]). Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) при $\chi_1 \leq 0$. Тогда верно следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta) + T^{-1}E_T(s - \delta) + F_T(s - \delta) \\ \leq c(\delta^{-m(p+1)}\Delta I_T(s, \delta) - \psi_1\chi_1\delta^{-1}\Delta J_T(s, \delta) + h_0(s)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) при $\chi_1 > 0$. Тогда выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta) + F_T(s - \delta, \tau - \omega) + \psi_1\chi_1\delta^{-1}\Delta J_T(s - \delta, \delta, \tau - \omega) \\ \leq c(\delta^{-m(p+1)}I_T(s, \tau) + \omega^{-1}\Psi_{T-\tau}^{T-\tau+\omega}(s, 1)) \equiv R_T(s, \delta, \tau, \omega) \quad (3.7) \\ \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall 0 < \omega < \tau \leq T. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (3.4) в качестве пробной функции $\varphi(t, x) = \eta_{s, \delta}(x_1 - \delta, x')\psi(t)$, где $\psi(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ – срезающая функция такая, что $\psi(t) = 0$ при $t \leq T - \tau - \omega$, $\psi(t) = 1$ при $t \geq T - \tau$, $0 \leq \psi(t) \leq 1 \quad \forall t > 0$, $|D\psi(t)| \leq d_8\omega^{-1} \quad \forall 0 < \omega < \tau < T, \forall T > \tau + \omega, d_8 < \infty$. После очевидных преобразований с использованием неравенств (1.4)–(1.7), (3.3), а также свойств функции $\psi(t)$, приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta) + F_T(s - \delta, \tau) + \psi_1\chi_1\delta^{-1}\Delta J_T\left(s + \frac{3\delta}{4}, \frac{\delta}{2}, \tau\right) \\ \leq c\left(\sum_{|\beta|=0}^{m-1} \delta^{-m+|\beta|} \int_{Q_{T-\tau-\omega}^T(s+\delta, \delta)} |D_x^m u|^p |D_x^\beta u| dx dt \right. \\ \left. + \omega^{-1}\Psi_{T-\tau-\omega}^T(s + \delta, 1)\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$. Используя для оценки первого слагаемого в правой части (3.8) неравенство Гёльдера, интерполяционное неравенство (3.1) при $a = b = d = p + 1$ и неравенство Юнга с ε , получаем соотношение

$$\begin{aligned} H_T(s) + F_T(s, \tau) + \psi_1\chi_1\delta^{-1}J_T\left(s + \frac{3\delta}{4}, \frac{\delta}{2}, \tau\right) \leq \varepsilon\Delta F_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega) \\ + c(\varepsilon)(\delta^{-m(p+1)}\Delta I_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega) + \omega^{-1}E_T(s + \delta, \tau + \omega)) \quad (3.9) \\ \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольно $s = s_0, \delta = \delta_0, \tau = \tau_0, \omega = \omega_0$ и определим последовательности $s_i = s_{i-1} + \delta_{i-1}, \delta_i = 2^{-i}\delta_0, \tau_i = \tau_{i-1} + \omega_{i-1}, \omega_i = 2^{-i}\omega_0$,

$i = 1, 2, \dots$. Из (3.9) получим теперь серию соотношений, фиксируя каждый раз $s = s_i$, $\delta = \delta_i$, $\tau = \tau_i$, $\omega = \omega_i$. Итерируя эти соотношения k раз, получаем

$$\begin{aligned} H_T(s) + F_T(s, \tau) + \psi_1 \chi_1 \delta^{-1} \Delta J_T \left(s + \frac{3\delta}{4}, \frac{\delta}{2}, \tau \right) &\leq \varepsilon^{k+1} \Delta F_T(s + 2\delta, 2\delta, \tau + 2\omega) \\ &+ c(\varepsilon) \left(\omega^{-1} \sum_{j=0}^k (2\varepsilon)^j \Psi_{T-\tau-2\omega}^T(s + 2\delta, 1) \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^k (2^{m(p+1)} \varepsilon)^j \delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s + 2\delta, 2\delta, \tau + 2\omega) \right) \end{aligned}$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1$, $\forall \delta > 0$. Полагая здесь $\varepsilon = 2^{-m(p+1)-1}$, устремляя $k \rightarrow \infty$ и заменяя в полученном неравенстве аргументы, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} H_T(s - \delta) + F_T(s - \delta, \tau - \omega) + \psi_1 \chi_1 \delta^{-1} \Delta J_T \left(s - \frac{5\delta}{8}, \frac{\delta}{4}, \tau - \omega \right) \\ \leq c(\delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s, \delta, \tau) + \omega^{-1} \Psi_{T-\tau}^{T-\tau+\omega}(s, 1)) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Записывая это неравенство для $s = s_0$, $s_i = s_{i-1} - \delta/4$, $i = 1, 2, \dots, 6$, и складывая полученные соотношения, приходим к требуемому соотношению. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение задачи (1.1)–(1.3) при $\chi_1 > 0$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^T(s - \delta, h_2) \leq c \Psi_{T-\tau}^T(s, h_1) R_T(s, \delta, \tau, \omega)^{h_2-h_1} \quad (3.11)$$

$\forall 0 < h_1 < h_2 < \infty$, $\forall s \in \mathbb{R}^1$, $\forall \delta > 0$, $\forall \tau, \omega$, $0 < \omega < \tau < T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательную функцию

$$X_h(t) = \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, \theta)|^{q+1} \eta_{s,\delta}(x) \psi(\theta - \omega) dx \right)^h d\theta,$$

где $\psi(t)$ – функция из леммы 3.3. В силу теоремы Фубини имеет место соотношение

$$\Phi_{T-\tau}^T(s, h+1) \equiv X_{h+1}(T) = \int_{G_{T-\tau}^T(s)} |u|^{q+1} \eta_{s,\delta}(x) \psi(t - \omega) \frac{d}{dt} X_h(t) dx dt. \quad (3.12)$$

Подставляя в интегральное тождество (3.4) в качестве срезающей функции

$$\varphi(x, t) = \psi(t - \omega) X_h(t) \eta_{s,\delta}(x),$$

получаем, учитывая неравенство (3.12), следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi_{T-\tau}^T(s, h+1) &= \Phi_{T-\tau}^T(s, h) \int_{\Omega_T(s)} |u|^{q+1} \eta_{s,\delta}(x) dx \\ &+ \frac{q+1}{q} \int_{G_{T-\tau}^T(s)} \left[\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x, u, D_x u, \dots, D_x^m u) D_x^\alpha (u \eta_{s,\delta}(x)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \chi_1 B(t, u) D_{x_1} \eta_{s, \delta}(x) \Big] \psi(t - \omega) X_h(t) dx dt \\
 & - \int_{G_{T-\tau}^{T-\tau+\omega}(s)} |u|^{q+1} \eta_{s, \delta} \psi'(t - \omega) X_h(t) dx dt.
 \end{aligned}$$

После преобразований с использованием оценок (1.5)–(1.7), свойств функций $\psi(t)$, $X_h(t)$, неравенства Гёльдера, интерполяционного неравенства (3.1) при $a = b = d = p + 1$, неравенства Юнга и соотношения (3.7), приходим к следующему выражению

$$\Phi_{T-\tau}^T(s, h + 1) \leq c \Phi_{T-\tau}^T(s, h) R_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega) \quad \forall h > 0.$$

Итерируя последнее неравенство, получаем, что

$$\Phi_{T-\tau}^T(s, h) \leq c \Phi_{T-\tau}^T(s, h - l) R_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^l \quad \forall h > 0, \quad \forall h > l \in \mathbb{N},$$

откуда в силу неравенства Гёльдера вытекает соотношение

$$\Phi_{T-\tau}^T(s, h_2) \leq c \Phi_{T-\tau}^T(s, h_1) R_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{h_2 - h_1} \quad \forall 0 < h_1 < h_2. \quad (3.13)$$

Заметим, что справедливо следующее очевидное неравенство:

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^T(s - \delta, h) \leq \Phi_{T-\tau}^T(s, h) \leq \Psi_{T-\tau}^T(s, h).$$

Отсюда с учетом неравенства (3.13) получаем, что

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^T(s - \delta, h_2) \leq c \Psi_{T-\tau}^T(s + \delta, h_1) R_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^{h_2 - h_1}.$$

После замены аргументов в последнем соотношении приходим к (3.11). Лемма доказана.

§ 4. Прямое движение левого фронта

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из интерполяционного неравенства (3.1) при $\delta \rightarrow \infty$, $j = 0$, $a = b = p + 1$, $d = q + 1$ следует, что

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^\theta \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}(1-\theta)} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (4.1)$$

где $\theta = \frac{n(p-q)}{m(p+1)(q+1) + n(p-q)}$. Интегрируя (4.1) по t и применяя неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$I_T(s) \leq c F_T(s)^\theta \Psi_0^T \left(s, \frac{p+1}{q+1} \right)^{1-\theta} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (4.2)$$

откуда следует неравенство

$$I_T(s) \leq c F_T(s)^\theta E_T(s)^{1-\theta} H_T(s)^{\frac{p-q}{q+1}(1-\theta)} \quad (4.3)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1$. Из (4.3) в силу леммы 3.1 вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
 I_T(s - \delta) & \leq c_1 T^{1-\theta} (\delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s) + h(s))^{1+\alpha} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \\
 \alpha & = \frac{m(p+1)(p-q)}{n(p-q) + m(p+1)(q+1)}.
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Полагая в неравенстве (4.4) $\delta = \delta(s, T) = T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(\alpha+1)}} I_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}}$, после очевидных преобразований приходим к соотношению

$$I_T(s - \delta(s, T)) \leq c_2(I_T(s) + T^{1-\theta} h_0(s)^{1+\alpha}) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad c_2 = c_1(c_1 + 1)^{-1} < 1.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень $\alpha/(m(p+1)(1+\alpha))$ и умножив затем на $T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}}$, получим следующее соотношение:

$$P_T(s - P_T(s)) \leq \kappa_1(P_T(s) + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h_0(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (4.5)$$

$$P_T(s) \equiv \delta(s, T), \quad \kappa_1 = c_2^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}} < 1.$$

Вернемся теперь к соотношению (4.4). Полагая в нем $\delta = 2^{-1}s$ и устремляя в полученном неравенстве $s \rightarrow \infty$, в силу ограниченности и монотонности функций $I_T(s)$, $h_0(s)$ для функции $P_T(s)$ получаем следующее соотношение:

$$P_T(\infty) \leq c_3 T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h_0(\infty)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}, \quad c_3 = c_1^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что существует $s_1 < \infty$ такое, что выполнено

$$P_T(s) \leq L \kappa_1 T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h_0(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} \quad \forall s > s_1, \quad L > \max\{c_3 \kappa_1^{-1}, (1 - \kappa_1)^{-1}\}. \quad (4.7)$$

Обратимся к неравенству (4.5). Из него, очевидно, следует соотношение

$$P_T(s - P_T(s)) \leq \kappa_1 P_T(s) \quad \forall s \leq 0. \quad (4.8)$$

Из (4.8) в силу леммы 8.1 из дополнения имеем

$$P_T(s) \equiv 0 \quad \forall s \leq s_0 - (1 - \kappa_1)^{-1} P_T(s_0), \quad \forall s_0 \leq 0 \quad (4.9)$$

или, иначе,

$$\eta_-(T) \geq s_0 - (1 - \kappa_1)^{-1} T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}} I_T(s_0)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}} \quad \forall s_0 \leq 0. \quad (4.10)$$

Следствием неравенства (4.9) является следующее соотношение:

$$\eta_-(T) \geq -(1 - \kappa_1)^{-1} P_T(0). \quad (4.11)$$

Из неравенств (4.5), (4.7) в силу леммы 8.2 из дополнения получаем, что

$$P_T(0) \leq c T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h(\tilde{v}_1(T))^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}, \quad (4.12)$$

где $\tilde{v}_1(T) = \inf\{T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} < \kappa_2 s\}$, $\kappa_2 = (L \kappa_1)^{-1}(1 - \kappa_1 - L^{-1})$. Оценивая правую часть (4.11) с помощью (4.12), получаем, что

$$\eta_-(T) \geq -c T^{\beta_1} h(\tilde{v}_1(T))^{\frac{p-q}{q+1} \beta_1} \quad \forall T > 0. \quad (4.13)$$

Оценим теперь $I_T(s)$ иначе. Заметим предварительно, что при

$$\Omega(s) = \Omega(\Lambda, y, s)$$

справедливо следующее неравенство:

$$\text{mes}\{\Omega(s) \cap \text{supp } u(\cdot, t)\} \leq c(\Lambda)(s - \eta_-(t))_+^n, \quad c(\Lambda) < \infty, \quad a_+ = \max\{a, 0\}. \quad (4.14)$$

Полагая в (3.5) $s = s_0 + \delta$, $s_i = s_{i-1} - \delta/4$, $i = 1, 2, \dots$, и суммируя полученные неравенства, приходим к соотношению

$$F_T(s) + \chi_1 \delta^{-1} J_T(s) \leq C \delta^{-m(p+1)} I_T(s + \delta) \quad \forall \delta > 0, \quad s + \delta \leq 0. \quad (4.15)$$

Применяя к правой части (4.15) неравенство Юнга с ε и оценивая правую часть полученного выражения с помощью (4.14), приходим к соотношению

$$F_T(s) + \chi_1 \delta^{-1} J_T(s) \leq \varepsilon \chi_1 \delta^{-1} J_T(s + \delta) + \chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} c(\varepsilon) T(-\eta_-(T))^n \delta^{-m(p+1) \frac{\lambda+1}{\lambda-p} + \frac{p+1}{\lambda-p}} \quad (4.16)$$

$\forall \delta > 0$, $s + \delta \leq 0$, $\forall \varepsilon > 0$. Применяя к неравенству (4.16) итеративную процедуру, аналогичную представленной в доказательстве леммы 3.3, приходим к следующему соотношению:

$$F_T(s) \leq c T(-\eta_-(T))^n (-s)^{-m(p+1) \frac{\lambda+1}{\lambda-p} + \frac{p+1}{\lambda-p}} \chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} \quad \forall s < 0. \quad (4.17)$$

В силу неравенства Пуанкаре

$$I_T(s_0) \leq c(-\eta_-(T))^{m(p+1)} F_T(s_0) \quad \forall s_0 \leq 0. \quad (4.18)$$

Оценивая правую часть (4.18) с помощью (4.17), получаем, что

$$I_T(s_0) \leq c \chi_1^{-\frac{p+1}{\lambda-p}} T(-\eta_-(T))^{n+m(p+1)} (-s_0)^{-\frac{(m(\lambda+1)-1)(p+1)}{\lambda-p}} \quad \forall s_0 < 0. \quad (4.19)$$

Из (4.10) в силу (4.19) вытекает, что

$$\begin{aligned} \eta_-(T) &\geq s_0 - c \chi_1^{-\frac{\alpha(p+1)}{m(p+1)(\alpha+1)(\lambda-p)}} T^{\frac{1-\theta+\alpha}{m(p+1)(\alpha+1)}} (-\eta_-(T))^{\frac{\alpha(n+m(p+1))}{m(p+1)(\alpha+1)}} \\ &\quad \times (-s_0)^{-\frac{\alpha(m(\lambda+1)-1)}{m(\lambda-p)(1+\alpha)}} \equiv \varphi(s_0). \end{aligned}$$

Оптимизируя функцию $\varphi(s)$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \max_{-\infty < s_0 < 0} \varphi(s_0) &= \varphi(s_{\text{opt}}), \quad s_{\text{opt}} = -c T^{\gamma_1} (-\eta_-(T))^{\gamma_2} \chi_1^{-\gamma_3}, \\ \gamma_1 &= \frac{(1-\theta+\alpha)(\lambda-p)}{(p+1)((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1))}, \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha(\lambda-p)(n+m(p+1))}{(p+1)((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1))}, \\ \gamma_3 &= \frac{\alpha}{(p+1)((m(\lambda+1)-1)\alpha + m(\lambda-p)(\alpha+1))}. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство

$$\eta_-(T) \geq -c T^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_2}} \chi_1^{-\frac{\gamma_3}{1-\gamma_2}} = -c T^{\beta_2} \chi_1^{-\frac{p-q}{\lambda-p} \beta_2} \quad \forall T > 0. \quad (4.20)$$

Утверждение теоремы 1 вытекает из оценок (4.13) и (4.20) в силу правильной монотонности функции $h(s)$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Справедливость оценки (4.13) при $q < p$ доказана в теореме 1. Выведем теперь оценку (2.21). Из (3.5), очевидно, вытекает соотношение

$$\Delta I_T \left(s - \frac{5\delta}{4}, \frac{\delta}{4} \right) \leq c (\psi_1 \chi_1)^{-1} \delta^{1-m(p+1)} \Delta I_T \left(s, \frac{\delta}{4} \right) \quad \forall s \leq 0, \quad \forall \delta > 0. \quad (4.21)$$

Полагая в (4.21) последовательно $s_i = s - i\delta/4$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и складывая полученные неравенства, приходим к соотношению

$$I_T(s - \delta) \leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \delta^{1-m(p+1)} I_T(s) \quad \forall s \leq 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Зафиксируем теперь δ следующим образом:

$$c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \delta^{1-m(p+1)} = 2^{-1} \Rightarrow \delta = (2c(\psi_1 \chi_1)^{-1})^{\gamma_T} = h = \text{const},$$

$$\gamma_T = (m(p+1) - 1)^{-1},$$

откуда, очевидно, следует, что $I_T(s - h) \leq 2^{-1} I_T(s) \quad \forall s \leq 0$. Итерируя предыдущее неравенство j раз, получаем, что

$$I_T(s - jh) \leq 2^{-j} I_T(s) \quad \forall s \leq 0, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

откуда приходим к соотношению

$$I_T(s_2) \leq 2 \exp(-c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T} (s_1 - s_2)) I_T(s_1) \quad \forall s_2 < s_1 \leq 0$$

или, иначе,

$$I_T(s_0) \leq 2 \exp(c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T} s_0) I_T(0) \quad \forall s_0 \leq 0.$$

Из (4.10) в силу предыдущего неравенства вытекает, что

$$\eta_-(T) \geq s_0 - cT^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}} I_T(0)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)}} \exp(c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T} s_0) \quad \forall s_0 \leq 0. \quad (4.22)$$

Полагая в (3.5) $\delta = 2^{-1}s$ и устремляя в полученном соотношении $\delta \rightarrow \infty$, приходим к следующему неравенству:

$$F_T(s) \leq ch_0(\infty) \quad \forall s \leq 0.$$

Из (4.18) в силу последнего соотношения следует, что

$$I_T(0) \leq C(-\eta_-(T))^{m(p+1)}. \quad (4.23)$$

Оценим (4.22) с помощью (4.23). Имеем

$$\eta_-(T) \geq s_0 - CT^{\frac{1-\theta}{m(p+1)(1+\alpha)}} \exp(c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T} s_0) (-\eta_-(T))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \quad \forall s_0 \leq 0,$$

откуда в силу неравенства Юнга с ε , очевидно, вытекает, что

$$\eta_-(T) \geq \varepsilon(\eta_-(T)) + s_0 - cT^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} \exp(c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T(1+\alpha)} s_0) \quad \forall s_0 \leq 0.$$

Полагая в предыдущем неравенстве $\varepsilon = 2^{-1}$, приходим к соотношению

$$\eta_-(T) \geq 2(s_0 - cT^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} \exp(c(\psi_1 \chi_1)^{\gamma_T(1+\alpha)} s_0)) \equiv \varphi(s_0).$$

Оптимизировав функцию $\varphi(s)$, найдем s_{opt} : $\varphi(s_{\text{opt}}) = \max_{s_0 < 0} \varphi(s_0)$. Имеем

$$s_{\text{opt}} = c(\psi_1 \chi_1)^{-\gamma_T(1+\alpha)} \left(-C - \frac{1-\theta}{m(p+1)} \ln((\psi_1 \chi_1)^{-\gamma_T(1+\alpha)} T) \right) < 0,$$

откуда

$$\eta_-(T) \geq -C(\psi_1 \chi_1)^{-\gamma_T(1+\alpha)} \ln((\psi_1 \chi_1)^{-\gamma_T(1+\alpha)} T) \quad \forall T \geq T^*(\chi_1) > 0.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем сначала наличие ЗРН-эффекта при выполнении условия малости (2.25). Пусть в (1.1) выполнено условие $q < \lambda < p$. Из интерполяционного неравенства (3.1) при $a = b = p + 1$, $d = \lambda + 1$, $\delta \rightarrow \infty$ вытекает, что

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_1} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{(1-\theta_1) \frac{p+1}{\lambda+1}}, \quad (4.24)$$

$$\theta_1 = \frac{n(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1)}.$$

Из того же неравенства при $\delta \rightarrow \infty$, $a = \lambda + 1$, $b = p + 1$, $d = q + 1$ следует, что

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \leq d_5^{\lambda+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1}} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-\theta_2) \frac{\lambda+1}{q+1}}, \quad (4.25)$$

$$\theta_2 = \frac{n(p+1)(\lambda-q)}{(\lambda+1)(n(p-q) + m(p+1)(q+1))}.$$

Оценивая правую часть (4.24) с помощью (4.25), приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx &\leq c \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_1 + h\theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1}} \\ &\times \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{p+1}{\lambda+1}(1-\theta_1)-h} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{\lambda+1}{q+1}(1-\theta_2)h} \\ &\forall s \in \mathbb{R}^1, \quad 0 \leq h < (p+1)(\lambda+1)^{-1}(1-\theta_1). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Зафиксируем теперь h так, чтобы было выполнено соотношение

$$\theta_1 + h\theta_2(\lambda+1)(p+1)^{-1} + (1-\theta_1)(p+1)(\lambda+1)^{-1} - h = 1.$$

Оно справедливо при

$$h = \frac{m(p+1)(p-\lambda)}{m(p+1)(\lambda+1) + n(p-\lambda)} \cdot \frac{n(p-q) + m(p+1)(q+1)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)}.$$

Подставив это значение h в (4.26), получим, что

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{p+1} dx \leq c \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^\nu \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{1-\nu} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^\mu \quad (4.27)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1$, где ν, μ – из (2.23). Интегрируя (4.27) по t и применяя неравенство Гёльдера, приходим к следующему соотношению:

$$I_T(s) \leq c F_T(s)^\nu J_T(s)^{1-\nu} H_T(s)^\mu \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \quad (4.28)$$

Выведем теперь соотношение (4.28) в случае $\lambda < q < p$. В силу интерполяционного неравенства (3.1) при $\delta \rightarrow \infty$, $a = q + 1$, $b = p + 1$, $d = \lambda + 1$ имеем

$$\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \leq d_5^{q+1} \left(\int_{\Omega(s)} |D_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_3 \frac{q+1}{p+1}} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{\lambda+1} dx \right)^{(1-\theta_3) \frac{q+1}{\lambda+1}}, \quad (4.29)$$

$$\theta_3 = \frac{n(p+1)(q-\lambda)}{(q+1)(n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1))} < 1.$$

Возводя обе части неравенства (4.29) в степень

$$\xi = \left(\frac{\theta_3(q+1)}{p+1} + \frac{(1-\theta_3)(q+1)}{\lambda+1} \right)^{-1} = \frac{n(p-\lambda) + m(p+1)(\lambda+1)}{n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)} < 1,$$

интегрируя по t и применяя неравенство Гёльдера, получаем соотношение

$$\Psi_0^T(s, \xi) \leq c F_T(s)^{\nu_1} J_T(s)^{1-\nu_1} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (4.30)$$

где ν_1 – из (2.31). Из (4.2), очевидно, следует неравенство

$$I_T(s) \leq F_T(s)^\theta \Psi_T(s, \xi)^{1-\theta} H_T(s)^{(1-\theta)(\frac{p+1}{q+1}-\xi)} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1.$$

Применяя теперь для оценки второго сомножителя в правой части предыдущего выражения неравенство (4.30), приходим к неравенству (4.28).

В случае $\lambda = q < p$ неравенство (4.28) эквивалентно неравенству (4.3).

Обратимся теперь к соотношению (3.5). Полагая в нем $s = s_0$, $s_i = s_{i-1} - 4^{-1}\delta$, $i = 1, 2, \dots$, и суммируя полученные соотношения, приходим к неравенству

$$J_T(s - \delta) \leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \delta^{1-m(p+1)} \left(I_T(s) + \delta \sum_{i=0}^{\infty} h_0 \left(s - i \frac{\delta}{4} \right) \right). \quad (4.31)$$

В силу монотонности $h_0(s)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\delta \sum_{i=0}^{\infty} h_0 \left(s - i \frac{\delta}{4} \right) \leq 4 \int_{-\infty}^{s+4^{-1}\delta} h_0(\theta) d\theta \leq 4 \left(s + \frac{\delta}{4} \right) h_0 \left(s + \frac{\delta}{4} \right).$$

Оценивая с помощью последнего соотношения правую часть (4.31) и производя в полученном неравенстве замену аргументов, приходим к соотношению

$$J_T(s - \delta) \leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} (\delta^{1-m(p+1)} I_T(s) + s h_0(s)). \quad (4.32)$$

Применяя для оценки правой части (4.28) неравенства (3.5) и (4.32), получаем, что

$$I_T(s - \delta) \leq c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} (\delta^{-m(p+1)} I_T(s) + h_0(s))^{\nu+\mu} (\delta^{1-m(p+1)} I_T(s) + s h_0(s))^{1-\nu}, \quad (4.33)$$

откуда, очевидно, следует неравенство

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} (\delta^{-m(p+1)(1+\mu)+1-\nu} I_T(s)^{1+\mu} \\ &\quad + \delta^{-m(p+1)(\nu+\mu)} I_T(s)^{\nu+\mu} h_0(s)^{1-\nu} s^{1-\nu} \\ &\quad + \delta^{(1-m(p+1))(1-\nu)} I_T(s)^{1-\nu} h_0(s)^{\nu+\mu} + s^{1-\nu} h_0(s)^{1+\mu}) \\ &\quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Оценив правую часть последнего выражения с помощью неравенства Юнга, получим, что

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} (\delta^{-m(p+1)(1+\mu)+1-\nu} I_T(s)^{1+\mu} \\ &\quad + \delta^{-m(p+1)(1+\mu)} s_+^{1-\nu} I_T(s)^{1+\mu} + s^{1-\nu} h_0(s)^{1+\mu}) \\ &\quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Положим в последнем неравенстве

$$\delta = \delta(s, T, \chi_1 \psi_1) \equiv \left((4c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1})^{\mu^{-1}} I_T(s) \right)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)+\nu-1}} + \left((4c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} s^{1-\nu})^{\mu^{-1}} I_T(s) \right)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}} \quad \forall s > 0.$$

В результате имеем

$$I_T(s - \delta(s, T, \psi_1 \chi_1)) \leq 2^{-1} I_T(s) + c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} s^{1-\nu} h_0(s)^{1+\mu} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \quad (4.34)$$

Возведя обе части (4.34) в степень $\mu\beta_3$, β_3 – из (2.23), и умножив затем на $(4c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1})^{\beta_3}$, для функции $R_T(s) = ((4c(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1})^{\mu^{-1}} I_T(s))^{\mu\beta_3}$ получим следующее соотношение:

$$R_T(s - R_T(s) - R_T(s)^{1-\beta_4} s^{\beta_4}) \leq \kappa_3 R_T(s) + f(s) \quad \forall s > 0, \quad (4.35)$$

β_4 – из (2.23), $\kappa_3 = 2^{-\mu\beta_3} < 1$, $f(s) = c_4(\psi_1 \chi_1)^{-(1+\mu)(1-\nu)\beta_3} (s^{1-\nu} h_0(s)^{1+\mu})^{\mu\beta_3}$. Из априорной оценки (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} I_T(s) &\leq cT^{1-\theta} h_0(\infty)^{1+\alpha} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1 \\ \Rightarrow R_T(s) &\leq CT^{\mu(1-\theta)\beta_3} (\psi_1 \chi_1)^{(\nu-1)\beta_3} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

К функции $R_T(s)$ применим лемму 8.2 из дополнения (§8). Проверим сначала условие (8.7). Очевидно, что

$$R_T(s_0) \leq CT^{\mu(1-\theta)\beta_5} (\psi_1 \chi_1)^{(\nu-1)\beta_5} \leq 2(1 - \kappa_3)^{-1} f(s_0), \quad (4.36)$$

если выполнено

$$T = T(s_0) < C((\psi_1 \chi_1)^{-1} s_0^{1-\nu} h_0(s_0)^{1+\mu})^{(1-\theta)^{-1}}.$$

Из соотношения (4.35) при выполнении условия (4.36) в силу леммы 8.2 следует, что

$$R_T(s) \leq 2c_4(1 - \kappa_3)^{-1} f(s) \quad \forall s, \quad 0 < s < s_0, \quad \forall t, \quad 0 < t < T(s_0), \quad (4.37)$$

если выполнено условие малости

$$\begin{aligned} h_0(s) &\leq k_2 s^{\frac{m(p+1)-1+\nu}{\mu}} = k_2 s^{\alpha_2} \\ \Rightarrow f(s) &< c_4(\psi_1 \chi_1)^{(1+\mu)(\nu-1)\beta_3} k^{\mu\beta_3(1+\mu)} s \quad \forall s, \quad 0 < s < s_2, \end{aligned}$$

где $s_2 = 2^{-1}(1 - \kappa_3)s_0$, а k_2 удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} &(2(1 - \kappa_3)^{-1} c_4(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} k_2^\mu)^{(1+\mu)\beta_3} \\ &+ (2(1 - \kappa_3)^{-1} c_4(\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} k_2^\mu)^{(1-\beta_4)(1+\mu)\beta_3} < 2^{-1}(1 - \kappa_3). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Тем самым, доказано наличие ЗРН-эффекта при условии (2.25).

Оценка (2.16) при $q < p$ выведена в теореме 1. Оценим теперь левый фронт иначе. Из (4.35), очевидно, следует, что

$$R_T(s - R_T(s)) \leq \kappa_3 R_T(s) \quad \forall s < 0, \quad \kappa_3 = 2^{-\mu\beta_3} < 1, \quad (4.39)$$

откуда в силу леммы 8.1

$$\eta_-(T) \geq -R_T(0) \quad \forall T \geq 0. \quad (4.40)$$

Оценим $R_T(0)$ сверху. Из (4.35) в силу леммы 8.2 из дополнения вытекает, что

$$\begin{aligned} R_T(0) &\leq c(\chi_1^{-(1+\mu)(1-\nu)\beta_3} (\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1)^{1-\nu} h(\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1))^{1+\mu})^{\mu\beta_3} \\ &\quad + \tilde{s}_1(\psi_1\chi_1)^{\beta_4} (\psi_1\chi_1)^{-(1+\mu)(1-\nu)(1-\beta_4)\beta_3} \\ &\quad \times (\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1)^{1-\nu} h(\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1))^{1+\mu})^{\mu\beta_3(1-\beta_4)}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

где $\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1) \geq 0$ – максимальный корень уравнения

$$\begin{aligned} c_4(\psi_1\chi_1)^{-(1+\mu)(1-\nu)\beta_3} (s^{1-\nu} h(s)^{1+\mu})^{\mu\beta_3} \\ + s^{\beta_4} (c_4(\psi_1\chi_1)^{-(1+\mu)(1-\nu)\beta_3} (s^{1-\nu} h(s)^{1+\mu})^{\mu\beta_3})^{1-\beta_4} = 2^{-1}(1 - \kappa_3)s. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть неравенства (4.40) с помощью (4.41), приходим к соотношению

$$\eta_-(t) \geq -c\tilde{s}_1(\psi_1\chi_1) \quad \forall t > 0. \quad (4.42)$$

Справедливость оценки (2.24), очевидно, вытекает из соотношений (2.16) и (4.42) в силу правильной монотонности функции $h(s)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Докажем сначала возникновение ЗРН-эффекта при выполнении условия малости (2.25). В силу неравенства Гёльдера имеем, что

$$\begin{aligned} I_T(s - \delta) &\leq E_T(s - \delta)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} J_T(s - \delta)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} \\ &\leq \Psi_0^T(s - \delta, \xi)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} J_T(s - \delta)^{\frac{q-p}{q-\lambda}} H_T(s - \delta)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}(1-\xi)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0, 0 < \xi < 1$. Оценивая правую часть (4.43) с помощью неравенства (4.30) и применяя последовательно для оценки правой части полученного выражения соотношения (4.30), (4.32) и (3.5), приходим к (4.33). Используя монотонность и непрерывность функции $I_T(s)$ по s и T и повторяя далее рассуждения, содержащиеся в предыдущей теореме, приходим к требуемому. Так же, как и в теореме 3, выводится и оценка (4.42).

Оценим левый фронт в случае $\lambda < p < q$. Из (3.5) при $\Omega(s) = \Omega(\Lambda, y, s)$ в силу неравенства Юнга с ε и соотношения (4.14) вытекает, что

$$T^{-1}E_T(s) \leq \varepsilon T^{-1}E_T(s + \delta) + c(\varepsilon)T^{\frac{q+1}{q-p}}\delta^{\frac{m(p+1)(q+1)}{q-p}}(-\eta_-(T))^n$$

$\forall \delta > 0, s + \delta < 0, \forall \varepsilon > 0$. Полагая в предыдущем неравенстве

$$\varepsilon = 2^{-\frac{m(p+1)(q+1)}{q-p}-1}$$

и применяя к нему итеративную процедуру, аналогичную содержащейся в доказательстве леммы 3.3, получаем оценку

$$T^{-1}E_T(s) \leq cT^{\frac{q+1}{q-p}}(-s)^{\frac{m(p+1)(q+1)}{q-p}}(-\eta_-(T))^n \quad \forall s < 0. \quad (4.44)$$

Из (4.39) в силу леммы 8.1 из дополнения вытекает, что

$$\eta_-(T) \geq s_0 - c(\chi_1^{-\frac{1-\nu}{\mu}} I_T(s_0))^{\mu\beta_3} \quad \forall s_0 < 0. \quad (4.45)$$

Оценив правую часть (4.45) с помощью неравенства Гёльдера, с учетом (4.14) получим, что

$$\eta_-(T) \geq s_0 - c(\chi_1^{-\frac{1-\nu}{\mu}} (T(-\eta_-(T))^n)^{\frac{q-p}{q+1}} E_T(s_0)^{\frac{p+1}{q+1}})^{\mu\beta_3} \quad \forall s_0 < 0.$$

Применяя для оценки правой части предыдущего выражения неравенство (4.44), приходим к соотношению

$$\eta_-(T) \geq s_0 - c(\chi_1^{-\frac{1-\nu}{\mu}} T^{\frac{q+1}{q-p}} (-\eta_-(T))^n (-s_0)^{-\frac{m(p+1)^2}{q-p}})^{\mu\beta_3} \equiv \phi(s_0) \quad \forall s_0 < 0.$$

Оптимизируя функцию $\phi(s)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \max_{-\infty < s_0 < 0} \phi(s_0) &= \phi(s_{\text{opt}}), \quad s_{\text{opt}} = -cT^{\gamma_4} |\eta_-(T)|^{\gamma_5} \chi_1^{-\gamma_6}, \\ \gamma_4 &= \frac{\mu(q+1)}{m(p+1)(q+1)\mu + (q-p)(m(p+1) - 1 + \nu)}, \\ \gamma_5 &= \frac{n(q-p)}{q+1} \gamma_4, \quad \gamma_6 = \frac{(1-\nu)(q-p)}{\mu(q+1)} \gamma_4, \end{aligned}$$

откуда вытекает следующее неравенство:

$$\eta_-(T) \geq -c\chi_1^{-\frac{\gamma_6}{1-\gamma_5}} T^{\frac{\gamma_4}{1-\gamma_5}} = -c(\chi_1^{-\frac{q-p}{p-\lambda}} T)^{\beta_2} \quad \forall T > 0. \quad (4.46)$$

Вывод оценки (4.46) в случае $\lambda < p = q$ содержится в доказательстве теоремы 5.

Справедливость (2.27), очевидно, вытекает из оценок (4.42), (4.46) в силу правильной монотонности $h(s)$. Теорема 4 доказана.

§ 5. Обратное движение левого фронта

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим сначала случай $\lambda < q < p$. Интегрируя (4.1) по t и применяя затем неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c\Psi_{T-\tau+\omega}^T \left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1} \right)^{1-\theta} F_T(s - \delta, \tau - \omega)^\theta \quad (5.1)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$. Возводя обе части неравенства (4.29) в степень ξ , интегрируя по t и применяя затем неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^T(s - \delta, \xi) \leq cF_T(s - \delta, \tau - \omega)^{\nu_1} J_T(s - \delta, \tau - \omega)^{1-\nu_1} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0. \quad (5.2)$$

В силу леммы 3.4 также имеем, что

$$\Psi_{T-\tau+\omega}^T \left(s - \delta, \frac{p+1}{q+1} \right) \leq c\Psi_{T-\tau}^T(s, \xi) R_T(s, \delta, \tau, \omega)^{\frac{p+1}{q+1}-\xi}. \quad (5.3)$$

Оценим правую часть (5.3) с помощью неравенства (5.2), а полученное соотношение применим для оценки первого сомножителя в (5.1). В результате имеем, что

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq cR_T(s + \delta, \delta, \tau + \omega, \omega)^\mu F(s, \tau)^\nu J_T(s, \tau)^{1-\nu} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0, \quad (5.4)$$

$\forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T, \mu, \nu$ — из (2.23). Полагая в (3.7) $s = s_0, s_i = s_{i-1} - \delta, i = 1, 2, \dots$, и суммируя полученные неравенства, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} J_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \delta \sum_{i=0}^{\infty} (\delta^{-m(p+1)} I_T(s - i\delta, \tau) + \omega^{-1} E_T(s - i\delta, \tau)) \\ &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \int_{-\infty}^{s+\delta} (\delta^{-m(p+1)} I_T(\theta, \tau) + \omega^{-1} E_T(\theta, \tau)) d\theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из (5.5), очевидно, вытекает неравенство

$$J_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} \int_{-\infty}^s (\delta^{-m(p+1)} I_T(\theta, \tau) + \omega^{-1} E_T(\theta, \tau)) d\theta. \quad (5.6)$$

В теоремах 3, 4 показано, что при выполнении условия малости (2.25) $I_T(0) = E_T(0) = 0 \quad \forall T, 0 < T < T^*(s_0)$, поэтому в силу монотонности функций $I_T(s, \tau)$ и $E_T(s, \tau)$ из (5.6), очевидно, следует соотношение

$$\begin{aligned} J_T(s - \delta, \tau - \omega) &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} s (\delta^{-m(p+1)} I_T(s, \tau) + \omega^{-1} E_T(s, \tau)) \\ &\quad \forall s, \quad 0 < s < s_0, \quad \forall \delta > 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$\forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T < T^*$. Используя теперь для оценки правой части (5.4) неравенства (3.7) и (5.7), после замены в полученном неравенстве аргументов приходим к соотношению

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu} (\delta^{-m(p+1)} I_T(s, \tau) + \omega^{-1} E_T(s, \tau))^{1+\mu} \quad (5.8)$$

$\forall s, 0 < s < s_0, \forall \delta > 0, \forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T < T^*$.

Для функции $E_T(s, \tau)$ установим теперь соотношение, аналогичное неравенству (5.8). Положив в (3.11) $h_2 = 1, h_1 = \xi$, получим, что

$$E_T(s - \delta, \tau - \omega) \equiv \Psi_{T-\tau+\omega}^T(s - \delta, 1) \leq \Psi_{T-\tau}^T(s, \xi) R_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1-\xi} \quad (5.9)$$

$\forall s, 0 < s < s_0, \forall \delta > 0, \forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T < T^*$. Оценим первый сомножитель в правой части (5.9) с помощью неравенства (5.2). В результате имеем, что

$$E_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c F_T(s, \tau)^{\nu_1} J_T(s, \tau)^{1-\nu_1} R_T(s, \delta, \tau, \omega)^{1-\xi}. \quad (5.10)$$

Оценивая теперь правую часть (5.10) с помощью (3.7) и (5.7), после замены в полученном неравенстве аргументов приходим к соотношению

$$E_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} (\delta^{-m(p+1)} I_T(s, \tau) + \omega^{-1} E_T(s, \tau))^{1+\mu_1} \quad (5.11)$$

$\forall s, 0 < s < s_0, \forall \delta > 0, \forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T < T^*$, где ν_1, μ_1 — из (2.31).

Выведем теперь соотношение (5.8) для случая $\lambda < p \leq q$. В силу неравенства Гёльдера

$$I_T(s - \delta, \tau - \omega) \leq E_T(s - \delta, \tau - \omega)^{\frac{p-\lambda}{q-\lambda}} J_T(s - \delta, \tau - \omega)^{\frac{q-p}{q-\lambda}}. \quad (5.12)$$

Используя для оценки первого сомножителя в правой части (5.12) неравенство (3.11) при $h_2 = 1, h_1 = \xi$ и оценивая правую часть полученного соотношения с помощью (3.7) и (5.7), приходим к (5.8).

Возведем теперь (5.8) в степень $1 + \mu_1$ и умножим на $((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1-\nu_1)(1+\mu)}$, а (5.11) – в степень $1 + \mu$ и умножим на $((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1-\nu)(1+\mu_1)}$. Складывая полученные неравенства, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} N_T(s - \delta, \tau - \omega) &\equiv ((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1-\nu_1)(1+\mu)} I_T(s - \delta, \tau - \omega)^{1+\mu_1} \\ &\quad + ((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1-\nu)(1+\mu_1)} E_T(s - \delta, \tau - \omega)^{1+\mu} \\ &\leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1-\nu_1)(1+\mu)+(1-\nu)(1+\mu_1)} \\ &\quad \times (\delta^{-m(p+1)(1+\mu)(1+\mu_1)} I_T(s, \tau)^{(1+\mu)(1+\mu_1)} \\ &\quad + \omega^{-(1+\mu)(1+\mu_1)} E_T(s, \tau)^{(1+\mu)(1+\mu_1)}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$\forall s, 0 < s < s_0, \forall \delta > 0, \forall \tau, \omega, 0 < \omega < \tau < T < T^*$. Определим теперь аргументы δ, ω следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(s, \tau, \psi_1 \chi_1) = c_5((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{\frac{1-\nu}{m(p+1)(1+\mu)}} I_T(s, \tau)^{\frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)}}, \\ \omega &= \omega(s, \tau, \psi_1 \chi_1) = c_6((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{\frac{1-\nu_1}{1+\mu_1}} E_T(s, \tau)^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}}, \\ c_5 &= (4c)^{\frac{1}{m(p+1)(1+\mu)(1+\mu_1)}}, \quad c_6 = c_5^{m(p+1)}, \end{aligned}$$

$c = \text{const}$ – из (5.13). Учитывая монотонность $I_T(s, \tau)$ и $E_T(s, \tau)$ по обоим аргументам, из (5.13) получаем следующее соотношение:

$$N_T(s - c_5((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{\gamma_7} N_T(s, \tau)^{\rho_1}, \tau - c_6((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{\gamma_8} N_T(s, \tau)^{\rho_2}) \leq 2^{-1} N_T(s, \tau),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_7 &= \frac{1-\nu}{m(p+1)(1+\mu)} - \frac{\mu(1-\nu_1)}{m(p+1)(1+\mu_1)}, & \gamma_8 &= \frac{1-\nu_1}{1+\mu_1} - \frac{\mu_1(1-\nu)}{1+\mu}, \\ \rho_1 &= \frac{\mu}{m(p+1)(1+\mu)(1+\mu_1)}, & \rho_2 &= \frac{\mu_1}{(1+\mu)(1+\mu_1)}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства в силу леммы 8.1 из дополнения вытекает, что

$$\begin{aligned} N_T(s, T) &= 0 \quad \forall (s, T) \in \{s \leq s' - c_7((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{\gamma_7} N_T(s', T')^{\rho_1}, \\ &\quad T^* \geq T \geq c_8((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{\gamma_8} N_T(s', T')^{\rho_2}\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$c_7 = c_5(1 - 2^{-\rho_1})^{-1}, \quad c_8 = c_6(1 - 2^{-\rho_2})^{-1}.$$

Оценим теперь $N_T(s, T)$ сверху. Полагая в выражении (3.5) $s = s_0, s_i = s_{i-1} - \delta/4, i = 1, 2, \dots$, складывая полученные неравенства и производя вычисления, аналогичные проведенным при выводе соотношения (5.7), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} J_T(s - \delta) &\leq c(\psi_1 \chi_1)^{-1} s (\delta^{-m(p+1)} I_T(s) + h(s)) \\ &\quad \forall \delta > 0, \quad \forall s, 0 < s < s_0, \quad \forall T < T^*. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Оценим $E_T(s)$:

$$E_T(s) \leq \Psi_0^T(s, \xi) H_T(s)^{1-\xi} \quad \forall s > 0, \quad \forall T < T^*. \quad (5.16)$$

Применяя для оценки правой части (5.16) неравенство (4.30), а затем соотношения (5.15) и (3.5), после замены в полученном выражении аргументов приходим к соотношению

$$E_T(s - \delta) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} (\delta^{-m(p+1)} I_T(s) + h_0(s))^{1+\mu_1} \quad (5.17)$$

$\forall s, 0 < s < s_0, \forall \delta > 0, \forall T < T^*$. Из (4.37), очевидно, следует, что

$$I_T(s) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu} h(s)^{1+\mu} \quad \forall s, 0 < s < s_2 < s_0, \quad (5.18)$$

если выполнено соотношение (4.38). Положив в (5.17)

$$\delta = \delta(s, T, \psi_1 \chi_1) \equiv (((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu} I_T(s)^\mu)^{\frac{1}{m(p+1)(1+\mu)}},$$

после вычислений с использованием оценки (5.18) приходим к соотношению

$$E_T(s - c_9((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{\frac{1-\nu}{m(p+1)}} h(s)^{\frac{\mu}{m(p+1)}}) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} h(s)^{1+\mu_1}$$

$\forall s, 0 < s < s_2, \forall T < T^*$, откуда в силу (2.29) вытекает неравенство

$$E_T(s(1 - c_9(\psi_1 \chi_1)^{\frac{\nu-1}{m(p+1)}} k_3^{\frac{\mu}{m(p+1)}})) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} h(s)^{1+\mu_1} \quad (5.19)$$

$\forall s, 0 < s < s_2, \forall T < T^*$. Потребуем, чтобы k_3 удовлетворяло условию

$$k_3 < ((2c_9)^{-1}(\psi_1 \chi_1)^{\frac{1-\nu}{m(p+1)}})^{\frac{m(p+1)}{\mu}}.$$

Из (5.19) в силу предыдущего неравенства имеем

$$E_T(2^{-1} s) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} h(s)^{1+\mu_1} \quad \forall s, 0 < s < s_2,$$

откуда в силу правильной монотонности функции $h(s)$ вытекает оценка

$$E_T(s) \leq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{1-\nu_1} h(s)^{1+\mu_1} \quad \forall s < 2^{-1} s_2. \quad (5.20)$$

Вспомнив определение функции $N_T(s, T)$, подставим оценки (5.18) и (5.20) в выражение (5.14). В результате придем к следующему соотношению:

$$N_T(s, T) = 0 \quad \forall (s, T) \in \{s \leq s' - c_{10}((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{\frac{1-\nu}{m(p+1)}} h(s')^{\frac{\mu}{m(p+1)}}, \\ T^* \geq T \geq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{1-\nu_1} h(s)^{\mu_1}\} \quad (5.21)$$

$\forall s, 0 < s < 2^{-1} s_2$. Потребуем теперь, чтобы k_3 удовлетворяло также условию

$$1 - c_{10}((\psi_1 \chi_1)^{\nu-1} k_3^\mu)^{\frac{1}{m(p+1)}} = \omega(k_3) > 0.$$

Из (5.21) в силу предыдущего неравенства имеем

$$N_T(s, T) = 0 \quad \forall (s, T) \in \{s \leq \omega(k_3) s', \\ T^* \geq T \geq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{1-\nu_1} h(s')^{\mu_1}\} \quad (5.22)$$

$\forall s, 0 < s < 2^{-1} s_2$, откуда вытекает оценка (2.30).

Покажем справедливость (2.27) в случае $\lambda < p = q$. Полагая в неравенстве (3.5) $\delta = s/2$ и устремляя в полученном соотношении $s \rightarrow \infty$, приходим к оценке

$$I_T(s) = E_T(s) \leq cTh_0(\infty) \quad \forall s < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Оценивая функцию $N_T(s, T)$ с помощью последнего неравенства, приходим к соотношению

$$N_T(s, T) \leq (c_{11}T)^{1+\mu}((\psi_1 \chi_1)^{-1} s)^{(1+\mu)(1-\nu)} h_0(\infty)^{1+\mu} \quad \forall s < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Полагая в предыдущем выражении

$$s = s'(T) = (\psi_1 \chi_1) (c_8^{-(1+\mu)} (c_{11} h_0(\infty))^{-\mu} T)^{(1-\nu)^{-1}}$$

и подставляя полученную оценку в (5.14), приходим к неравенству

$$\eta_-(T) \geq c h_0(\infty)^{-\frac{p-\lambda}{p+1}} \psi_1 \chi_1 T^{\beta_5} - c T^{\frac{1}{m(p+1)}} \quad \forall T > 0, \quad (5.23)$$

откуда вытекает (2.27).

Докажем справедливость оценки (2.32). Используя теоремы 3, 4 и повторяя рассуждения, аналогичные проведенным при выводе соотношения (5.22), получаем, что

$$N_T(s, T) = 0 \quad \forall (s, T) \in \{s \leq cs', T \geq c((\psi_1 \chi_1)^{-1} s')^{1-\nu_1} h(\infty)^{\mu_1}, s' > s_1(\psi_1 \chi_1)\},$$

$s_1(\psi_1 \chi_1)$ – из (2.22), откуда, очевидно, вытекает (2.32). Теорема доказана.

§ 6. Прямое движение правого фронта

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Интегрируя (4.25) по t и применяя неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$J_T(s - \delta) \leq c F_T(s - \delta)^\sigma \Psi_0^T(s - \delta, \sigma_1)^{1-\sigma} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0,$$

$$1 > \sigma = \frac{n(\lambda - q)}{n(p - q) + m(p + 1)(q + 1)}, \quad \sigma_1 = \frac{m(p + 1)(\lambda + 1) + n(p - \lambda)}{m(p + 1)(q + 1) + n(p - \lambda)},$$

откуда, очевидно, вытекает неравенство

$$J_T(s - \delta) \leq c T^{1-\sigma} F_T(s - \delta)^\sigma H_T(s - \delta)^{\sigma_1(1-\sigma)} \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0.$$

Оценивая правую часть предыдущего соотношения с помощью (3.6), получаем, что

$$J_T(s - \delta) \leq c T^{1-\sigma} (\delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s) - \psi_1 \chi_1 \delta^{-1} \Delta J_T(s) + h_0(s))^{1+\beta_6} \quad (6.1)$$

$$\forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \forall \delta > 0,$$

β_6 – из (2.33). Оценивая правую часть (4.3) с помощью соотношения (3.6), получаем, что

$$I_T(s - \delta) \leq c T^{1-\theta} (\delta^{-m(p+1)} \Delta I_T(s) - \psi_1 \chi_1 \delta^{-1} \Delta J_T(s) + h_0(s))^{1+\alpha} \quad (6.2)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0$. Возводя (6.1) в степень $1 + \alpha$ и умножая на $T^{(1-\theta)(1+\beta_6)}$, а (6.2) – в степень $1 + \beta_6$ и умножая на $T^{(1-\sigma)(1+\alpha)}$, приходим к соотношениям

$$A_T(s - \delta) \leq c (T^d \Delta A_T(s))^{1+\alpha} \delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)} \\ + T^l \Delta B_T(s)^{1+\beta_6} (-\psi_1 \chi_1 \delta^{-1})^{(1+\alpha)(1+\beta_6)} \\ + c T^{(1-\sigma)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta_6)} h_0(s)^{(1+\alpha)(1+\beta_6)}, \quad (6.3)$$

$$B_T(s - \delta) \leq c (T^d \Delta A_T(s))^{1+\alpha} \delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)} \\ + T^l \Delta B_T(s)^{1+\beta_6} (-\psi_1 \chi_1 \delta^{-1})^{(1+\alpha)(1+\beta_6)} \\ + c T^{(1-\sigma)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta_6)} h_0(s)^{(1+\alpha)(1+\beta_6)} \quad (6.4)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0,$

$$\begin{aligned} A_T(s) &= T^{(1-\sigma)(1+\alpha)} I_T(s)^{1+\beta_6}, & B_T(s) &= T^{(1-\theta)(1+\beta_6)} J_T(s)^{1+\alpha}, \\ d &= (1-\theta)(1+\beta_6) - \alpha(1-\sigma)(1+\alpha), & l &= (1-\sigma)(1+\alpha) - \beta_6(1-\theta)(1+\beta_6), \\ \Delta A_T(s) &= A_T(s) - A_T(s-\delta), & \Delta B_T(s) &= B_T(s) - B_T(s-\delta). \end{aligned}$$

Складывая (6.3) и (6.4), получаем, что

$$\begin{aligned} L_T(s-\delta) &\equiv A_T(s-\delta) + B_T(s-\delta) \\ &\leq c \Delta L_T(s) (T^d L_T(s)^\alpha \delta^{-m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)} \\ &\quad + T^l L_T(s)^{\beta_6} (-\psi_1 \chi_1 \delta^{-1})^{(1+\alpha)(1+\beta_6)}) \\ &\quad + c T^{(1-\sigma)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta_6)} h(s)^{(1+\alpha)(1+\beta_6)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, \forall \delta > 0, \Delta L_T(s) = L_T(s) - L_T(s-\delta)$. Положим в (6.5)

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(s, T) = T^{\frac{d}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)}} L_T(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)}} \\ &\quad - \psi_1 \chi_1 T^{\frac{l}{(1+\alpha)(1+\beta_6)}} L_T(s)^{\frac{\beta_6}{(1+\alpha)(1+\beta_6)}} \equiv Q_T(s). \end{aligned}$$

Отсюда после очевидных преобразований приходим к следующему соотношению:

$$L_T(s - Q_T(s)) \leq \kappa_4 (L_T(s) + T^{(1-\sigma)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta_6)} h_0(s)^{(1+\alpha)(1+\beta_6)}) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad (6.6)$$

$\kappa_4 = c(1+c)^{-1} < 1$, c – из (6.5). Возведем (6.6) в степень

$$\frac{\alpha}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)}$$

и умножим на $T^{\frac{d}{m(p+1)(1+\alpha)(1+\beta_6)}}$, затем возведем (6.6) в степень

$$\frac{\beta}{(1+\alpha)(1+\beta_6)}$$

и умножим на $-\psi_1 \chi_1 T^{\frac{l}{(1+\alpha)(1+\beta_6)}}$. Сложив полученные неравенства, придем к следующему соотношению:

$$Q_T(s - Q_T(s)) \leq \kappa_5 (Q_T(s) - \psi_1 \chi_1 T^{1-\sigma} h_0(s)^{\beta_6} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h_0(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}) \quad (6.7)$$

$\forall s \in \mathbb{R}^1, 0 < \kappa_5 < 1$. В силу леммы 8.1 из дополнения из (6.7) вытекает соотношение

$$Q_T(s) = 0 \quad \forall s \leq s_0 - (1 - \kappa_5)^{-1} Q_T(s_0), \quad \forall s_0 \leq 0. \quad (6.8)$$

Оценим $Q_T(s_0)$ сверху. Положив в (6.5) $\delta = 2^{-1}s$ и устремив в полученном неравенстве $s \rightarrow \infty$, придем к соотношению

$$L_T(s_0) \leq c T^{(1-\sigma)(1+\alpha)+(1-\theta)(1+\beta_6)} h(\infty)^{(1+\alpha)(1+\beta_6)} \quad \forall s_0 \in \mathbb{R}^1,$$

следовательно, для $Q_T(s)$ выполнено

$$Q_T(s_0) \leq c_{12} (-\psi_1 \chi_1 T^{1-\sigma} h(\infty)^{\beta_6} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}} h(\infty)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}) \quad \forall s_0 \in \mathbb{R}^1. \quad (6.9)$$

Из (6.9) в силу непрерывности $h_0(s)$ следует, что существует $s_3 < \infty$ такое, что

$$Q_T(s_0) \leq L\kappa_5(-\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(s))^{\beta_6} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h_0(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} \quad \forall s > s_3, \quad (6.10)$$

$L > (1 - \kappa_5)^{-1}$, $L\kappa_5 > c_{12}$. В силу (6.7) и леммы 8.1 из дополнения имеем

$$\eta_+(T) \geq -(1 - \kappa_4)^{-1}Q_T(0) \quad \forall T > 0. \quad (6.11)$$

Оценим $Q_T(0)$ сверху. Из (6.7), (6.10) в силу леммы 8.2 следует, что

$$\begin{aligned} Q_T(0) &\leq \kappa_5(-\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(v_3(T)))^{\beta_6} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(v_3(T))^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} \quad \forall T > 0, \\ v_3(T) &= \inf\{s : \kappa_5(-\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(s))^{\beta_6} + T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} < \delta_5 s\}, \\ \delta_5 &= L^{-1}(1 - \kappa_5 - L^{-1}). \end{aligned}$$

В силу предыдущего неравенства из (6.11) вытекает, что

$$\eta_+(T) \geq -c \max\{-\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(v_4(T))^{\beta_6}, T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(v_4(T))^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}\} \quad \forall T > 0, \quad (6.12)$$

$$v_4(T) = \max\{\inf\{s : -\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(s)^{\beta_6} < \delta_6 s\}, \inf\{s : T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} < \delta_6 s\}\},$$

$\delta_6 = (2\kappa_5)^{-1}\delta_5$. Из (6.12), очевидно, следует оценка

$$\begin{aligned} \eta_+(T) &\geq -c \max\{-\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(\tilde{v}_2(T))^{\beta_6}, T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(\tilde{v}_1(T))^{\frac{\alpha}{m(p+1)}}\} \quad \forall T > 0, \quad (6.13) \\ \tilde{v}_2(T) &= \inf\{s : -\psi_1\chi_1 T^{1-\sigma}h(s)^{\beta_6} < \delta_6 s\}, \\ \tilde{v}_1(T) &= \inf\{s : T^{\frac{1-\theta}{m(p+1)}}h(s)^{\frac{\alpha}{m(p+1)}} < \delta_6 s\}. \end{aligned}$$

Соотношение (2.34) вытекает из (6.13) в силу правильной монотонности $h(s)$. Теорема 6 доказана.

§ 7. Эволюция геометрии носителей

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть в (1.1) $\lambda < q$, $\lambda < p$ или $\lambda < p \leq q$,

$$p \geq \frac{nq - m(q+1)}{n + m(q+1)}.$$

Покажем, что $\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D^{(1)}$. В силу следствия 4 имеет место включение

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq \tilde{D}^{(1)} = \bigcap_{\psi} \{x : (\psi, x) \geq -R - C\psi_1^{-\frac{1-\nu}{m(p+1)-1+\nu}}\} \quad \forall t > 0.$$

Очевидно, $\tilde{D}^{(1)}$ есть тело вращения некоторой кривой вокруг оси $0x_1$, которая, в свою очередь, является огибающей следующего семейства прямых, лежащих в плоскости $x_1 0x_2$:

$$x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi = -R - C \cos \phi^{-\frac{1-\nu}{m(p+1)-1+\nu}}, \quad \phi \in [0, 2^{-1}\pi). \quad (7.1)$$

Найдем эту огибающую. Дифференцируя (7.1) по ϕ , получаем

$$-x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi = -C_1 \cos \phi^{-\frac{m(p+1)}{m(p+1)-1+\nu}} \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2^{-1}\pi), \quad (7.2)$$

$C_1 = C(1 - \nu)(m(p + 1) - 1 + \nu)^{-1}$. Решая систему (7.1), (7.2), приходим к уравнению искомой огибающей: $x_1 = \Phi_1(\phi)$, $x_2 = -\Phi_2(\phi)$, $x_3 = \dots = x_n = 0$, $\phi \in [0, 2^{-1}\pi]$, где

$$\begin{aligned}\Phi_1(\phi) &= -R - \cos \phi^{-\frac{m(p+1)}{m(p+1)-1+\nu}} (C_2 \cos^2 \phi - C_1), & C_2 &= C + C_1, \\ \Phi_2(\phi) &= \sin \phi (R + C_2 \cos \phi^{-\frac{1-\nu}{m(p+1)-1+\nu}}).\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\tilde{D}^{(1)} = \{x : x_1 \geq \Phi_1(\phi), |x'| \leq \Phi_2(\phi), \phi \in [0, 2^{-1}\pi]\}.$$

Нетрудно проверить, что $\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} \Phi_1(\phi)\Phi_2(\phi)^{-\frac{m(p+1)}{1-\nu}} < \infty$, следовательно, существуют постоянные $A_6 > 0$, $A_7 > 0$ такие, что $\tilde{D}^{(1)} \subseteq D^{(1)}$. Тем самым, доказаны соответствующие включения в утверждениях 1)–3), 5), 7).

Пусть в (1.1) $q < \lambda < p + m(p + 1)(q + 1)n^{-1}$, $q < p$. Покажем, что $\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(2)}$. Сделав замену переменных $u(t, x) = \tilde{u}(t_1, -x_1, x')$, легко проверить, что $\tilde{u}(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с $\chi = (-1, 0, \dots, 0)$, поэтому в силу теоремы 6 для носителя решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3)

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(2)} = \bigcap_{\psi} \{x \in \mathbb{R}^n : (\psi, x) \leq R + A_8 t^{\beta_1} + A_9 \psi_1 t^{\beta_5}\} \quad \forall t > 0.$$

Область $D_t^{(2)}$ есть тело вращения вокруг оси $0x_1$, огибающей семейства прямых

$$(x_1 - A_9 t^{\beta_5}) \cos \phi + x_2 \sin \phi = R + A_8 t^{\beta_1}, \quad \phi \in [0, 2^{-1}\pi], \quad x_3 = \dots = x_n = 0,$$

которые являются касательными к дуге окружности

$$\{x : (x_1 - A_9 t^{\beta_5})^2 + |x_2|^2 = (R + A_8 t^{\beta_1})^2, x_1 \geq R + A_9 t^{\beta_5}, x_3 = \dots = x_n = 0\},$$

а также луча

$$\{x : x_2 = R + A_8 t^{\beta_1}, x_1 \leq R + A_9 t^{\beta_5}, x_3 = \dots = x_n = 0\}.$$

Отсюда, очевидно, вытекает искомое включение. Тем самым, доказаны соответствующие включения в утверждениях 1), 4), 6) теоремы 7.

Пусть в (1.1) $q < p$. Тогда в силу теорем 1–3, 6

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq \bigcap_{\psi: \psi_1=0} \{x \in \mathbb{R}^n : (\psi, x) \leq R + A_{12} t^{\beta_1}\} = D_t^{(5)} \quad \forall t > 0.$$

Включения

$$\begin{aligned}\text{supp } u(t, \cdot) &\subseteq D_t^{(4)} \quad \text{при} \quad \lambda < p, \quad \lambda < q, \quad p \geq \frac{nq - m(q + 1)}{n + m(q + 1)}, \\ \text{supp } u(t, \cdot) &\subseteq D_t^{(6)} \quad \text{при} \quad q < p < \lambda, \\ \text{supp } u(t, \cdot) &\subseteq D_t^{(7)} \quad \text{при} \quad q < p = \lambda\end{aligned}$$

вытекают из теорем 5, 1, 2 соответственно. Используя неравенства (2.43), (5.23) и проводя вычисления, аналогичные представленным в выводе включения

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(2)},$$

нетрудно также доказать справедливость, соответственно, включений

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(3)}$$

в утверждении 2) и

$$\text{supp } u(t, \cdot) \subseteq D_t^{(8)}$$

в утверждении 7). Теорема 7 доказана.

§ 8. Дополнение

ЛЕММА 8.1. Пусть $f(s_1, s_2)$ – неотрицательная непрерывная неубывающая по каждому из своих аргументов функция, удовлетворяющая следующему соотношению:

$$f(s_1 - c_1 s_{1+}^{\alpha_1} f(s_1, s_2)^{\beta_1}, s_2 - c_2 s_{1+}^{\alpha_2} f(s_1, s_2)^{\beta_2}) \leq \varepsilon f(s_1, s_2) \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \forall s_i < \tilde{s}_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < c_i < \infty, \\ 0 \leq \alpha_i < \infty, \quad 0 < \beta_i < \infty, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда для $\forall s_1^{(0)} < \tilde{s}_1^{(0)}, \forall s_2^{(0)} < \tilde{s}_2^{(0)}$

$$f(s_1, s_2) = 0 \quad \forall (s_1, s_2) \in \{s_i \leq s_i^{(0)} - c_i(1 - \varepsilon^{\beta_i})^{-1}(s_{1+})^{\alpha_i} f(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})^{\beta_i}, i = 1, 2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $s_i^{(0)}, i = 1, 2$, и построим последовательности $\{s_1^{(i)}\}, \{s_2^{(i)}\}$ по следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} s_1^{(i)} &= s_1^{(i-1)} - c_1(s_{1+}^{(i-1)})^{\alpha_1} f(s_1^{(i-1)}, s_2^{(i-1)})^{\beta_1}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ s_2^{(i)} &= s_2^{(i-1)} - c_2(s_{1+}^{(i-1)})^{\alpha_2} f(s_1^{(i-1)}, s_2^{(i-1)})^{\beta_2}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В силу неотрицательности функции $f(s_1, s_2)$ имеем

$$s_1^{(i)} \leq s_1^{(i-1)}, \quad s_2^{(i)} \leq s_2^{(i-1)} \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Согласно неравенству (8.1) и построенному рекуррентному соотношению имеем

$$f(s_1^{(i+1)}, s_2^{(i+1)}) \leq \varepsilon f(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) \leq \varepsilon^{i+1} f(s_1^{(0)}, s_2^{(0)}). \quad (8.2)$$

Оценим снизу $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, i = 1, 2, \dots$. В силу (8.2) верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} s_1^{(i)} &= s_1^{(0)} - \sum_{k=0}^{i-1} c_1(s_{1+}^{(k)})^{\alpha_1} f(s_1^{(k)}, s_2^{(k)})^{\beta_1} \geq s_1^{(0)} - c_1 \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^{k\beta_1} (s_{1+}^{(0)})^{\alpha_1} f(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})^{\beta_1} \\ &\geq s_1^{(0)} - c_1(1 - \varepsilon^{\beta_1})^{-1} (s_{1+}^{(0)})^{\alpha_1} f(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})^{\beta_1}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Аналогично получаем, что

$$s_2^{(i)} \geq s_2^{(0)} - c_2(1 - \varepsilon^{\beta_2})^{-1} (s_{1+}^{(0)})^{\alpha_2} f(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})^{\beta_2}. \quad (8.4)$$

Устремляя $i \rightarrow \infty$ в (8.2)–(8.4), в силу неубывания $f(s_1, s_2)$ приходим к требуемому. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть неотрицательные непрерывные неубывающие функции $f(s)$, $g(s)$ удовлетворяют соотношению

$$f(s - f(s) - \gamma s^\alpha f(s)^{1-\alpha}) \leq \varepsilon f(s) + g(s) \quad (8.5)$$

$\forall s \geq 0, \gamma \geq 0, 0 < \varepsilon < 1, 0 \leq \alpha < 1$.

Тогда при выполнении следующих требований:

1) существуют $s'_0 < \infty$ и $k > (1 - \varepsilon)^{-1}$ такие, что

$$f(s) \leq kg(s) \quad \forall s > s'_0 > \tilde{s}_1 \geq 0; \quad (8.6)$$

2) для $g(s)$ выполнено

$$g(s) \leq as \quad \forall s \geq \tilde{s}_1, \quad (8.7)$$

где

$$ka + \gamma(ka)^{1-\alpha} < 1 - \varepsilon - k^{-1};$$

3) $g(s)$ удовлетворяет условию правильной монотонности:

$$g(s(1 - ka - \gamma(ka)^{1-\alpha})) \geq (1 - ka - \gamma(ka)^{1-\alpha})g(s) \quad \forall s \geq \tilde{s}_1, \quad (8.8)$$

имеет место следующее соотношение:

$$f(s) \leq kg(s) \quad \forall s \geq \tilde{s}_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольно $s_0 > s'_0$ и построим последовательность $\{s_i\}$, $i = 1, 2, \dots$:

$$s_i = s_{i-1} - f(s_{i-1}) - \gamma s_{i-1}^\alpha f(s_{i-1})^{1-\alpha}, \quad s_{i-1} \geq \tilde{s}_1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

В силу (8.6) $f(s_0) \leq kg(s_0)$. Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$

$$f(s_i) \leq kg(s_i), \quad s_i \geq \tilde{s}_1. \quad (8.10)$$

Докажем справедливость (8.10) для $i := i + 1$. В силу (8.5), (8.7), предположения (8.10) и соотношения (8.8) имеем, что

$$f(s_{i+1}) \leq \varepsilon f(s_i) + g(s_i) \leq (k\varepsilon + 1)(1 - ka - \gamma(ka)^{1-\alpha})^{-1}g(s_{i+1}) \leq kg(s_{i+1}). \quad (8.11)$$

Покажем теперь, что если $\tilde{s}_1 = 0$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = 0$. Из неравенств (8.11) и (8.7) следует, что

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= s_i - f(s_i) - \gamma s_{i+}^\alpha f(s_i)^{1-\alpha} \geq s_i - kg(s_i) - \gamma s_{i+}^\alpha (kg(s_i))^{1-\alpha} \\ &\geq s_i(1 - ka - \gamma(ka)^{1-\alpha}) \geq 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

В силу монотонного невозрастания последовательность $\{s_i\}$ имеет предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \tilde{s}.$$

Устремляя $i \rightarrow \infty$ в (8.12), получаем $f(\tilde{s}) = g(\tilde{s}) = 0$, откуда $\tilde{s} = 0$. В силу произвольности выбора стартовой точки s_0 приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 8.3. Пусть Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда если $q < p$, $\lambda \leq p + \frac{m(p+1)(q+1)}{n}$ или $\lambda < p \leq q$, имеет место вложение

$$C([0, T]; L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{p+1}(0, T; \overset{\circ}{W}_{p+1}^m(\Omega)) \subset L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega). \quad (8.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \leq \tilde{d}_5 \|D_x^m u\|_{L_{p+1}(\Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{1-\tilde{\theta}}, \quad (8.14)$$

где $u(t, x)$ – произвольная по x функция из пространства $\mathring{W}_{p+1}^m(\Omega) \cap L_{q+1}(\Omega)$,

$$\tilde{d}_5 > 0, \quad 0 < \tilde{\theta} = \frac{n(\lambda - q)(p + 1)}{(\lambda + 1)(n(p - q) + m(p + 1)(q + 1))} < 1.$$

Возведя неравенство (8.14) в степень $\lambda + 1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гёльдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0,T) \times \Omega)} \leq \tilde{d}_5 T^{\frac{1-\sigma}{\lambda+1}} \|D_x^m u\|_{L_{p+1}((0,T) \times \Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{C([0,T]; L_{q+1}(\Omega))}^{1-\tilde{\theta}},$$

$0 < \sigma = \tilde{\theta}(\lambda + 1)/(p + 1) < 1$, откуда следует (8.13). В случае $\lambda < q$, $\lambda < p$ искомое вложение, очевидно, вытекает из вложений $L_{q+1}(\Omega) \subset L_{\lambda+1}(\Omega)$ и $\mathring{W}_{p+1}^m(\Omega) \subset L_{\lambda+1}(\Omega)$. Лемма доказана.

Список литературы

- [1] О. А. Олейник, Калашников А. С., Чжоу Юй-линь, “Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 667–704.
- [2] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных порождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42**:2 (1987), 135–176.
- [3] E. Di Benedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] А. С. Калашников, “О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными параболическими уравнениями”, *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, № 1, Изд-во МГУ, М., 1975, 135–144.
- [5] B. H. Gilding, L. A. Peletier, “The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **61** (1976), 127–140.
- [6] J. I. Diaz, R. Kersner, “On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium”, *J. Differential Equations*, **69** (1987), 368–403.
- [7] B. H. Gilding, “Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **16**:2 (1989), 165–224.
- [8] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [9] Ю. А. Дубинский, “Нелинейные эллиптические и параболические уравнения”, *Современные проблемы математики*, **9**, ВИНТИ, М., 1976, 5–130.
- [10] O. Grange, F. Mignot, “Sur la résolution d’une équation et d’une inéquation paraboliques non linéaires”, *J. Funct. Anal.*, **11**:1 (1972), 77–92.
- [11] F. Bernis, “Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 373–394.
- [12] H. W. Alt, S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations”, *Math. Z.*, **183** (1983), 311–341.
- [13] Ph. Benilan, P. Wittbold, “On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems”, *Adv. Differential Equations*, **1**:6 (1996), 1053–1073.

- [14] L. Alvarez, J. I. Diaz, R. Kersner, "On the initial growth of the interfaces in nonlinear diffusion-convection processes", *Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states I*, eds. W.-M. Ni, L. A. Peletier, J. Serrin, Springer-Verlag, New York, 1987, 1–20.
- [15] L. Alvarez, J. I. Diaz, "Sufficient and necessary initial mass conditions for the existence of a waiting time in nonlinear-convection processes", *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 378–393.
- [16] B. H. Gilding, "Properties of solutions of an equation in the theory of infiltration", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **65** (1977), 203–225.
- [17] R. E. Grundy, "Asymptotic solution of a model nonlinear convective diffusion equation", *IMA J. Appl. Math.*, **31** (1983), 121–137.
- [18] Ph. Laurencot, F. Simondon, *Source-type solutions to porous medium equations with convection*, Preprint №96/17, Universite de Franche Comte.
- [19] Ph. Laurencot, F. Simondon, "Source-type solutions to porous medium equations with convection II", *Preprint N 96/33*.
- [20] J. I. Diaz, R. Kersner, "Non existence d'une des frontières libres dans une équation dégénérée en théorie de la filtration", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **296** (1983), 505–508.
- [21] B. H. Gilding, "The occurrence of interfaces in nonlinear diffusion-advection processes", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **100**:3 (1988), 243–263.
- [22] B. H. Gilding, R. Kersner, "Instantaneous shrinking in nonlinear diffusion-convection", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1990), 385–394.
- [23] A. E. Shishkov, "Instantaneous shrinking phenomenon for solutions of higher-dimensional nonlinear diffusion-convection equations", *Methods Funct. Anal. Topology*, **5**:3 (1999), 54–76.
- [24] M. Guedda, D. Hilhorst, C. Picard, "The one-dimensional porous medium equation with convection: Continuous differentiability of interfaces after the waiting time", *Appl. Math. Lett.*, **5**:1 (1992), 59–62.
- [25] S. Bonafede, G. R. Cirmi, A. F. Tedeev, "Finite speed of propagation for the porous media equation with lower order terms", *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **6**:2 (2000), 305–314.
- [26] Б. Гилдинг, А. Е. Шишков, "Распространение носителей решений уравнений типа многомерной нелинейной диффузии с конвекцией", *УМН*, **53**:4 (1998), 142.
- [27] Д. А. Сапронов, А. Е. Шишков, "Распространение возмущений в квазилинейных многомерных параболических уравнениях с конвективным членом", *Укр. матем. журн.*, **53**:7 (2001), 953–969.
- [28] E. Zuazua, "Weakly nonlinear large time behavior in scalar convection-diffusion equations", *Differential Integral Equations*, **6**:6 (1993), 1481–1491.
- [29] S. Claudi, F. R. Guarguaglini, "Large time behaviour for the heat equation with absorption and convection", *Adv. Appl. Math.*, **16**:4 (1995), 377–401.
- [30] F. Bernis, "Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations", *Houston J. Math.*, **14**:3 (1988), 319–352.
- [31] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, "Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений", *УМН*, **31**:6 (1976), 142–166.

Д. А. Сапронов (D. A. Sapronov)
 Донецкий национальный университет,
 Украина
E-mail: dsapronov@yahoo.com

Поступила в редакцию
 04.01.2003 и 13.05.2005

А. Е. Шишков (A. E. Shishkov)
 Институт прикладной математики и механики
 НАН Украины, г. Донецк
E-mail: shishkov@iamm.ac.donetsk.ua