Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Антипова, Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:31:31

УДК 517.55

И. А. Антипова

Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений

Для всякой пары выпуклых областей $U, \Theta \subset \mathbb{R}^n$ вводятся зеркально-симметричные векторные пространства M_Θ^U и W_U^Θ , состоящие из голоморфных функций в подходящих областях и переводимые друг в друга прямым и обратным преобразованиями Меллина. В качестве применения получено обобщение классического интегрального представления Меллина для решения $y(x)$ общего алгебраического уравнения, а также найдена область сходимости гипергеометрического интеграла Меллина–Барнса, представляющего решение $y(x)$.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Преобразования Меллина для функций одного переменного были введены им в 1896 году [1]. Эти преобразования отличаются от преобразований Лапласа лишь тем, что заменой $x = e^{-t}$ сводятся к последним. С их помощью Меллин [2] рассмотрел естественный класс функций, для которых справедлива формула обращения. Применительно к преобразованию Лапласа такая формула обращения играет большую роль в операционном исчислении и в теории обработки сигналов.

Видимо, первое применение многомерного преобразования Меллина было сделано также им в 1921 году в работе [3], где было доказано, что решение общего алгебраического уравнения представляется гипергеометрическим рядом от переменных коэффициентов уравнения. Однако в краткой статье [3] Меллин ничего не писал о справедливости многомерной формулы обращения – вероятно, в нужном ему примере он знал ее обоснование с помощью повторных одномерных процедур.

Преобразование Меллина функции $\Phi(x)$, заданной в ортанте $\mathbb{R}_+^n$ (произведении положительных вещественных полуосей), определяется интегралом

$$M[\Phi](z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x) x^{z-I} dx, \quad (1)$$

где мультииндексная запись x^{z-I} означает $x_1^{z_1-1} \dots x_n^{z_n-1}$. Соответственно обратное преобразование Меллина функции $F(z)$, заданной в мнимом (вертикальном) подпространстве $a + i\mathbb{R}^n$, где a – фиксированный вектор из вещественного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00517) и гранта Шведской королевской академии наук.

подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, – это интеграл

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(z)x^{-z} dz. \quad (2)$$

Цель настоящей работы – ввести подходящие классы функций многих переменных, на которых справедливы обе формулы обращения $MM^{-1} = I = M^{-1}M$ для прямого и обратного преобразований Меллина M и M^{-1} . Формулу обращения для преобразования (2) мы доказываем с помощью интегрального представления Коши–Фанташье, известного в многомерном комплексном анализе [4], а обращение преобразования (1) сводится к формуле обращения для преобразования (2).

В качестве применения приводится интегральная формула, выражающая решение общего алгебраического уравнения в терминах его коэффициентов. Эта формула обобщает и улучшает классический результат Меллина [3].

§ 2. Классы M_Θ^U , W_Θ^U и формулировки теорем обращения

Введем два класса голоморфных функций от n переменных, сопоставленных паре выпуклых областей. Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$ переменных u и θ . Выберем в них выпуклые области $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем Θ ограничена и содержит начало координат: $0 \in \Theta$. Область U порождает в комплексном пространстве трубчатую область $U + i\mathbb{R}^n$ (трубу над U), а Θ – секториальную область (сектор S_Θ над Θ). Более точно, секториальные области будем брать в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$, которое представляет собой область наложения над комплексным тором $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Точки $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ ($r \in \mathbb{R}_+^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n$) проектируются в векторы

$$re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{T}^n.$$

Тогда сектор над Θ – это множество $S_\Theta = \{x \in \mathfrak{S} : \theta \in \Theta\}$. На $\mathbb{T}^n$ обращение этой проекции можно рассматривать как многозначное отображение, если Θ не помещается в куб со стороной длины 2π (например, одна из ветвей функции одного переменного $1/(1+\sqrt{z})$ голоморфна в секторе над интервалом $|\theta| < 2\pi$). Итак, пусть

- M_Θ^U – векторное пространство функций $\Phi(x)$, голоморфных в какой-либо области

$$S_{k\Theta} = \{x \in \mathfrak{S} : \arg x \in k\Theta\}, \quad k > 1$$

(k зависит от Φ , а $k\Theta$ означает гомотетию Θ с коэффициентом k) и удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq C(a)|x^{-a}| \quad \text{для всех } x \in S_{k\Theta}, \quad a \in U, \quad (3)$$

где $C(a)$ не зависит от x ;

- W_Θ^U – векторное пространство функций $F(z) = F(u + iv)$, голоморфных в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и убывающих в ней экспоненциально по v :

$$|F(u + iv)| \leq K(u)e^{-kH_\Theta(v)}, \quad k > 1, \quad (4)$$

где $H_\Theta(v) := \sup_{\theta \in \Theta} \langle \theta, v \rangle$ – опорная функция для Θ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $0 \in \Theta$, существует постоянная $\varkappa = \varkappa(\Theta) > 0$ такая, что $H_\Theta(v) \geq \varkappa|v|$. Тем самым, оценка (4) действительно выражает экспоненциальное убывание F по v .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выпуклость областей U и Θ естественно предполагать в определении классов M_Θ^U и W_U^Θ ввиду теоремы Бохнера о голоморфной продолжимости функции в трубчатую область над выпуклой оболочкой основания [5].

ТЕОРЕМА 1. Если $\Phi(x) \in M_\Theta^U$, то ее преобразование Меллина существует, принадлежит W_U^Θ и справедлива формула $M^{-1}M[\Phi] = I[\Phi]$, т.е.

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} x^{-z} dz \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(\zeta) \zeta^{z-I} d\zeta = \Phi(x), \quad x \in S_{k\Theta}, \quad (5)$$

где $a \in U$.

ТЕОРЕМА 2. Если $F(z) \in W_U^\Theta$, то ее обратное преобразование Меллина существует, принадлежит M_Θ^U и справедлива формула $MM^{-1}[F] = I[F]$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} dx \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(t) x^{-t} dt = F(z), \quad z \in U + i\mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где $a \in U$.

Сначала докажем теорему 2 (§3), а затем на ее основе получим утверждение теоремы 1 (§4).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть функция $F(z)$ принадлежит W_U^Θ . Рассмотрим ее обратное преобразование Меллина

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(z) x^{-z} dz, \quad a \in U. \quad (7)$$

Заметим, что

$$|x^{-z}| = |e^{-\langle z, \ln x \rangle}| = e^{-\langle u, \ln|x| \rangle + \langle v, \theta \rangle}; \quad (8)$$

здесь $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\theta = (\arg x_1, \dots, \arg x_n)$. На множестве интегрирования в формуле (7) имеем

$$|x^{-z}| \Big|_{a+i\mathbb{R}^n} = |x^{-a}| e^{\langle \theta, v \rangle}.$$

Поэтому в силу условия (4) для интеграла (7) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |M^{-1}[F](x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} |F(z) x^{-z}| dz \\ &\leq |x^{-a}| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(a) e^{-kH_\Theta(v) + \langle \theta, v \rangle} dv. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $x \in S_{k'\Theta}$, $1 < k' < k$, то $\theta = \arg x \in k'\Theta$ и экспонента в (9) допускает оценку

$$e^{-kH_\Theta(v) + \langle \theta, v \rangle} = e^{-H_{k\Theta}(v) + \langle \theta, v \rangle} \leq e^{-\varepsilon|v|},$$

где

$$\varepsilon = \min_{|v|=1, \theta \in k'\Theta} (H_{k\Theta}(v) - \langle \theta, v \rangle) > 0.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в правом интеграле из (9) экспоненциально убывает, поэтому интеграл (7) сходится абсолютно и равномерно по x на компактах в $S_{k\Theta}$. Следовательно, этот интеграл определяет голоморфную функцию в $S_{k\Theta}$ и, тем более, в $S_{k'\Theta}$. Кроме того, из (9) следует оценка (3) для $M^{-1}[F]$ с константой

$$C(a) = \frac{K(a)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|v|} dv$$

и первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Применим к функции $M^{-1}[F](x)$ преобразование Меллина M , получим

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} M^{-1}[F](x) x^{z-I} dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} dx x^{z-I} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(t) x^{-t} dt. \quad (10)$$

Сделаем замену переменных $x_j = e^{\eta_j}$, $j = 1, \dots, n$, в интеграле (10). Получим интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} M^{-1}[F](x) x^{z-I} dx = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a+i\mathbb{R}^n} F(t) e^{-\langle \eta, t-z \rangle} dt. \quad (11)$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ переменной η введем сферические координаты

$$\eta_j = \rho \chi_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

предполагая, что $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ пробегает единичную сферу $S^{n-1} = \{\|\eta\| = 1\}$, а затем в правой части равенства (11) проинтегрируем по ρ . Но прежде заметим, что внутренний интеграл в (11) не зависит от выбора $a \in U$, поэтому для каждого фиксированного $\chi \in S^{n-1}$ выберем a в виде

$$a = \operatorname{Re} z + \varepsilon \chi,$$

где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что сфера $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с центром в точке $\operatorname{Re} z \in U$ и радиуса ε содержится в U . Далее, поскольку $d\eta_j = \chi_j d\rho + \rho d\chi_j$ и $\bigwedge_{j=1}^n d\chi_j = 0$ (так как χ параметризует $(n-1)$ -мерное многообразие S^{n-1}), получаем: $d\eta = \sigma \wedge \rho^{n-1} d\rho$, где σ — это дифференциальная $(n-1)$ -форма

$$\sigma(\chi) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \chi_k d\chi[k].$$

Таким образом, интеграл (11) примет вид

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \sigma(\chi) \int_{\operatorname{Re} z + \varepsilon \chi + i\mathbb{R}^n} dt F(t) \int_0^\infty e^{-\rho \langle \chi, t-z \rangle} \rho^{n-1} d\rho.$$

Легко вычислить внутренний интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-\rho\langle\chi, t-z\rangle} \rho^{n-1} d\rho = \frac{(n-1)!}{\langle\chi, t-z\rangle^n},$$

и мы приходим к повторному интегралу

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \sigma(\chi) \int_{\operatorname{Re} z + \varepsilon\chi + i\mathbb{R}^n} \frac{F(t)}{\langle\chi, t-z\rangle^n} dt.$$

Этот интеграл можно трактовать как интеграл по $(2n-1)$ -мерной поверхности $S_\varepsilon + i\mathbb{R}^n$,

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{S_\varepsilon + i\mathbb{R}^n} F(t) \frac{\sigma(\lambda(t, z)) \wedge dt}{\langle\lambda(t, z), t-z\rangle^n}, \quad (12)$$

где вектор-функция $\lambda(t, z)$ определяется по формуле

$$\lambda(t, z)|_{S_\varepsilon + i\mathbb{R}^n} = \lambda(\operatorname{Re} z + \varepsilon\chi + i\operatorname{Im} t, z) = \chi$$

для $t \in S_\varepsilon + i\mathbb{R}^n$ и $z \in B_\varepsilon + i\mathbb{R}^n$, где $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ есть шар радиуса ε с центром в точке $\operatorname{Re} z$.

Заметим, что на множестве интегрирования знаменатель подынтегральной формы в (12) не обращается в нуль:

$$|\langle\lambda(t, z), t-z\rangle| = |\langle\chi, \varepsilon\chi + i\operatorname{Im}(t-z)\rangle| \geq \varepsilon|\chi|^2 = \varepsilon.$$

Таким образом, в интеграле (12) множителем при $F(t)$ является ядро Коши–Фанташье [4].

Исчерпаем неограниченную область $B_\varepsilon + i\mathbb{R}^n$ последовательностью ограниченных областей $B_\varepsilon + iB_R$, $R \rightarrow \infty$, где $B_R \subset \mathbb{R}^n$ – это шар радиуса R с центром в нуле. Граница области $D_R = B_\varepsilon + iB_R$ кусочно гладкая и состоит из куска $S_\varepsilon + iB_R$ – множества интегрирования в (12) и куска $B_\varepsilon + iS_R$, где $S_R = \partial B_R$. Наша цель – продолжить вектор-функцию $\lambda = \lambda(t, z)$ в (12) на границу ∂D_R так, чтобы полный интеграл превратился в интеграл Коши–Фанташье [4]. Естественно выбрать на куске $S_\varepsilon + iB_R$ вектор-функцию

$$\lambda_1(t, z) = \frac{1}{\langle\chi, t-z\rangle} \chi$$

(здесь $\chi = \chi(\operatorname{Re}(t-z))$ – множество направлений в $\mathbb{R}^n$ переменного $\operatorname{Re} t$ с началом в точке $\operatorname{Re} z$). На части границы $B_\varepsilon + iS_R$ выберем вектор-функцию

$$\lambda_2(t, z) = \frac{1}{\langle i\chi, t-z\rangle} i\chi,$$

где $\chi = \chi(\operatorname{Im}(t-z))$. Однако построенные вектор-функции $\lambda_k(t, z)$ на частях границы не составляют непрерывную функцию на всей границе области D_R . Поэтому на стыке кусков, следуя идеям Лере и Хенкина, можно определить вектор-функцию в виде выпуклой комбинации

$$\lambda_{12}(t, z, \tau) = \tau\lambda_1(t, z) + (1-\tau)\lambda_2(t, z),$$

где $\tau \in [0, 1]$. Построенная таким образом вектор-функция $\lambda(t, z)$ удовлетворяет условию

$$\langle \lambda(t, z), t - z \rangle = 1.$$

Подынтегральное выражение в (12) однородно степени нуль относительно $\lambda(t, z)$, поэтому интеграл (12) запишется в виде

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{S_\varepsilon + iB_R} F(t) \sigma(\lambda_1(t, z)) \wedge dt.$$

В силу условия (4) функция $F(t)$ убывает экспоненциально, поэтому интегралы

$$\int_{B_\varepsilon + iS_R} F(t) \sigma(\lambda_2(t, z)) \wedge dt \quad \text{и} \quad \int_{(S_\varepsilon + iS_R) \times [0, 1]} F(t) \sigma(\lambda_{12}(t, z, \tau)) \wedge dt$$

стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, по формуле Коши–Фантапье интеграл (12) представляет функцию $F(z)$ на множестве $B_\varepsilon + i\mathbb{R}^n$.

В силу произвольности выбора точки z функция $F(z)$ представляется интегралом (12) на множестве $U + i\mathbb{R}^n$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в частном случае, когда (2) представляет собой интеграл Меллина–Барнса (в (2) функция $F(z)$ есть произведение гамма-функций Эйлера от линейных аргументов: $\prod \Gamma(\langle A_j, z \rangle + b_j)$), формула его обращения была доказана в [6].

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть функция $\Phi(x)$ принадлежит M_Θ^U , т.е. голоморфна в $S_{k\Theta}$ для некоторого $k > 1$ и удовлетворяет условию (3). Рассмотрим ее преобразование Меллина

$$M[\Phi](z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x) x^{z-I} dx, \quad (13)$$

где $z = u + iv$ будем брать из трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$.

Докажем, что $M[\Phi](z) \in W_\Theta^\Theta$, т.е. что преобразование Меллина для Φ голоморфно в трубчатой области над U и убывает экспоненциально по v с показателем $kH_\Theta(v)$ (см. (4)).

Покажем, что для любого $\delta \in k\Theta$ в интеграле (13) множество интегрирования $\mathbb{R}_+^n$ можно заменить на произведение лучей $l_{\delta_1} \times \cdots \times l_{\delta_n}$, где

$$l_{\delta_j} = \{x_j = te^{i\delta_j}, t \geq 0\}.$$

Сначала докажем равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x) x^{z-I} dx = \int_{l_{\delta_1} \times \mathbb{R}_+^{n-1}} \Phi(x) x^{z-I} dx. \quad (14)$$

Рассмотрим $(n+1)$ -мерную цепь $h_r = G_r \times (\gamma_r)^{n-1}$, где $(\gamma_r)^{n-1}$ – декартова степень отрезка $\gamma_r = [r, 1/r] \subset \mathbb{R}$, а $G_r \subset \mathbb{C}$ – усеченный сектор, ограниченный

отрезками γ_r , $e^{i\delta_1}\gamma_r$ и дугами окружностей $C_r = \{|x_1| = r\}$, $C_{1/r} = \{|x_1| = 1/r\}$ (здесь всюду $r \ll 1$). Ее граница ∂h_r представляет собой сумму цепей

$$\sigma_1 = \partial G_r \times (\gamma_r)^{n-1}, \quad \sigma_2 = \sum_{j=2}^n \pm G_r \times \gamma_r \times \cdots \times \partial \gamma_r \times \cdots \times \gamma_r.$$

Очевидно, сужение $dx|_{\sigma_2} = 0$ (так как $dx_j|_{\partial \gamma_r} = 0$), поэтому с учетом замкнутости формы $\omega = \Phi(x)x^{z-I} dx$ и формулы Стокса

$$0 = \int_{\partial h_r} \omega = \int_{\sigma_1} \omega = \int_{(\gamma_r)^n} \omega - \int_{e^{i\delta_1}\gamma_r \times (\gamma_r)^{n-1}} \omega + \int_{C_{1/r} \times (\gamma_r)^{n-1}} \omega - \int_{C_r \times (\gamma_r)^{n-1}} \omega. \quad (15)$$

При $r \rightarrow 0$ два последних слагаемых обращаются в нуль. Действительно, по условию (3) для функции Φ класса M_Θ^U при любых $a \in \Omega$ и $x \in S_{k\Theta}$ (в частности, при $x \in C_r \times (\gamma_r)^{n-1}$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r \times (\gamma_r)^{n-1}} \Phi(x)x^{z-I} dx \right| &\leq \int_{C_r \times (\gamma_r)^{n-1}} C|x^{-a}||x^z| \left| \frac{dx}{x} \right| \\ &= C \int_0^{\delta_1} r^{-a_1+u_1} e^{-v_1\theta_1} d\theta_1 \prod_{j=2}^n \int_r^{1/r} x_j^{-a_j+u_j} \frac{dx_j}{x_j}. \end{aligned}$$

Каждый из последних $n-1$ интегралов мы разобьем на сумму интегралов по отрезкам $[r, 1]$, $[1, 1/r]$ и, пользуясь свободой выбора a , в интегралах по $[0, \delta_1]$ и по $[r, 1]$ возьмем $a_j < u_j$, $j = 1, \dots, n$, а в интегралах по $[1, 1/r]$ возьмем $a_j > u_j$, $j = 2, \dots, n$. Очевидно, при таком выборе a последний интеграл в (15) обращается в нуль при $r \rightarrow 0$.

Рассуждения аналогичны для предпоследнего интеграла в (15).

Таким образом, из (15) получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{(\gamma_r)^n} \omega = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{e^{i\delta_1}\gamma_r \times (\gamma_r)^{n-1}} \omega = \int_{l_{\delta_1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \omega,$$

т.е. равенство (14) доказано.

Теперь, итерируя по всем переменным интегрирования x_j процесс замены $\mathbb{R}_+$ на l_{δ_j} , получаем для любого $\delta \in k\Theta$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(x)x^{z-I} dx = \int_{l_{\delta_1} \times \cdots \times l_{\delta_n}} \Phi(x)x^{z-I} dx. \quad (16)$$

Из (16) и (3) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} |M[\Phi](z)| &\leq C(a) \prod_{j=1}^n \int_0^\infty t^{-a_j+u_j} e^{-\delta_j v_j} \frac{dt}{t} \\ &= C(a) e^{-\langle \delta, v \rangle} \prod_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{-a_j+u_j} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{-a_j+u_j} \frac{dt}{t} \right), \end{aligned}$$

выполняемое для любых $a \in U$, $\delta \in k\Theta$; здесь сходимость интегралов по $[0, 1]$ и по $[1, \infty)$ обеспечивается выбором $a_j < u_j$ и $a_j > u_j$ соответственно. Ввиду произвольности выбора $\delta \in k\Theta$ в этом неравенстве можно заменить $e^{-(\delta, v)}$ на $e^{-kH_\Theta(v)}$. Тем самым, заменяя в последнем выражении константу $C(a)$ на $C(u)$, получаем условие (4) для $M[\Phi]$, и первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства формулы обращения (5) выберем в ней любое $a \in U$ и параллелепипед $\Pi_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, содержащий a и вписанный в U . Рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(\omega) := \Phi(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_n}) \prod_{j=1}^n e^{i\omega_j(\alpha_j + \beta_j)/2} \quad (17)$$

комплексных переменных $\omega_j = p_j + iq_j$, $j = 1, \dots, n$. Поскольку $\Phi \in M_\Theta^U$, эта функция голоморфна в трубчатой области $\Theta + i\mathbb{R}^n$. В силу условия (3) на $\Phi(x)$ при любом a из параллелепипеда $\Pi_{\alpha\beta}$ для функции (17) справедлива оценка

$$|\tilde{F}(p + iq)| \leq C(a) \prod_{j=1}^n e^{(a_j - (\alpha_j + \beta_j)/2)q_j} \leq C(a) \prod_{j=1}^n e^{-(\beta_j - \alpha_j)|q_j|/2} \quad (18)$$

(здесь мы воспользовались правом выбора a , положив $a_j = \alpha_j$ при $q_j > 0$ и $a_j = \beta_j$ при $q_j < 0$). Таким образом, функция (17) принадлежит классу W_Θ^Π , где Π – параллелепипед $\{\varphi \in \mathbb{R}^n : |\varphi_j| < (\beta_j - \alpha_j)/2, j = 1, \dots, n\}$. Введем обозначение

$$t_j = t_j(z_j) = e^{((\alpha_j + \beta_j)/2 - z_j)i} = |t_j|e^{i\varphi_j} \quad (19)$$

и определим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{(i)^n} \int_{\delta + i\mathbb{R}^n} \Phi(e^{i\omega}) \prod_{j=1}^n e^{i\omega_j(\alpha_j + \beta_j)/2} t(z)^{-\omega} d\omega, \quad (20)$$

где $\delta \in \Theta$. Параметр $z = u + iv$ будем выбирать так, чтобы $\arg t(z) =: \varphi$ принадлежал Π . В силу (19) это означает, что $\alpha_j \leq u_j \leq \beta_j$.

Применим формулу обращения (6) для функции (17)

$$\begin{aligned} & \Phi(e^{i\xi_1}, \dots, e^{i\xi_n}) \prod_{j=1}^n e^{i(\alpha_j + \beta_j)\xi_j/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} t^{\xi - I} dt \int_{a + i\mathbb{R}^n} \Phi(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_n}) \prod_{j=1}^n e^{i\omega_j(\alpha_j + \beta_j)/2} t^{-\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Сделаем в последнем интеграле подстановку

$$t_j = e^{((\alpha_j + \beta_j)/2 - z_j)i}, \quad e^{i\xi_j} = x_j,$$

получим

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{a + i\mathbb{R}^n} F(z) x^{-z} dz \quad (21)$$

с вектором $a = (\alpha + \beta)/2$. Но если в (20) положить $e^{i\omega_j} = \xi_j$, то получим

$$F(z) = \int_{e^{i\delta} \mathbb{R}_+^n} \Phi(\xi) \xi^{z-I} d\xi, \quad \delta \in \Theta.$$

Так как по условию Θ содержит нуль, то мы можем положить здесь $\delta = 0$ и при подстановке последнего интеграла в (21) придем к формуле обращения (5).

Теорема 1 доказана.

§ 5. Применение формул обращения к решению алгебраических уравнений

5.1. Общее алгебраическое уравнение и интегральная формула для его решения. Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$x_n y^n + \dots + x_1 y + x_0 = 0 \quad (22)$$

с комплексными коэффициентами $x_0, \dots, x_n$. Известно, что решением этого уравнения является многозначная алгебраическая функция, которая обладает свойством двойной однородности (см. [7]). Следовательно, достаточно рассмотреть уравнение вида

$$x_n y^n + \dots + y^q + \dots + y^p + \dots + x_1 y + x_0 = 0, \quad (23)$$

где коэффициенты при двух мономах y^q и y^p “заморожены”.

В случае, когда $p = 0$, $q = n$, Х. Меллин (см. [3]) выписал для решения $y(x)$ интегральное представление в виде интеграла Меллина–Барнса. С помощью этого представления он получил разложения Тейлора для ветвей $y(x)$ в точке $x = 0$. В работе Р. Биркелана [8] с помощью классического метода Лагранжа выписаны $q - p$ решений уравнения (23) в виде степенных рядов для произвольной пары (p, q) . С помощью формулы обращения (5) мы предъявим в этом пункте интегральное представление в виде интеграла Меллина–Барнса для пары $(0, q)$.

Итак, рассмотрим алгебраическое уравнение

$$x_n y^n + \dots + y^q + \dots + x_1 y - 1 = 0 \quad (24)$$

(знак “минус” перед единицей взят для удобства). Вектор $(x_1, \dots, [q], \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ обозначим через x и рассмотрим ветвь $y(x)$ решения (24) вблизи $x = 0$, выделенную условием $y(0) = 1$. Такую ветвь назовем *главным решением* уравнения (24).

Для $\mu > 0$ рассмотрим преобразование Меллина функции y^μ (где $y(x)$ – главное решение)

$$M[y^\mu](z) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} y^\mu(x) x^{z-I} dx, \quad (25)$$

полагая $z = (z_1, \dots, [q], \dots, z_n)$.

ЛЕММА 1. Для любого $\mu > 0$ преобразование Меллина (25) равно

$$\frac{\mu}{q} \frac{\Gamma(z_1) \cdot \dots \cdot \Gamma(z_n) \Gamma\left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{q} \langle \alpha, z \rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q} + \frac{1}{q} \langle \beta, z \rangle + 1\right)}, \quad (26)$$

где $\alpha = (1, \dots, [q], \dots, n)$, $\beta = (q-1, \dots, [q], \dots, q-n)$. Интеграл (25) сходится для всех z из области $U + i\mathbb{R}^{n-1}$, где U – это открытый симплекс

$$U = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : u_j > 0, \ j = 1, \dots, [q], \dots, n, \ \langle \alpha, u \rangle < \mu\}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления интеграла (25) введем замену переменной $x = x(\xi)$ вида

$$x_j = \xi_j W^{(j-q)/q}, \quad j = 1, \dots, [q], \dots, n, \quad W = 1 + \sum_{j \neq q} \xi_j, \quad (28)$$

причем ветвь радикала $W^{1/q}$ выбрана условием ее положительности при $\xi_j > 0$. Обозначим вектор $(\xi_1, \dots, [q], \dots, \xi_n)$ через ξ . Якобиан этой замены равен

$$W^{-n+1/q+\dots[q]+\dots+n/q} \left(1 + \frac{1}{q} \xi_1 + \dots + \frac{q-1}{q} \xi_{q-1} + \frac{q+1}{q} \xi_{q+1} + \dots + \frac{n}{q} \xi_n\right).$$

Отметим, что замена (28) линеаризует уравнение (24) и в переменных ξ решение $y(x)$ приобретает простой вид

$$y(x(\xi)) = W^{-1/q}.$$

Далее, она биективно отображает пространство $\mathbb{R}_+^{n-1}$ на $\mathbb{R}_+^{n-1}$. В самом деле, на каждой гиперплоскости

$$\alpha_r = \left\{ \xi \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \sum_{j \neq q} \xi_j = r \right\}$$

эта замена представляет собой обычное растяжение, поэтому она инъективна на таких плоскостях. При разных r плоскости α_r не пересекаются в ортанте $\mathbb{R}_+^{n-1}$, тем же свойством обладают образы этих плоскостей. Следовательно, замена (28) инъективна, а ее сюръективность вытекает из того, что при $r > 0$ образы α_r исчерпывают весь ортант $\mathbb{R}_+^n$.

В результате интеграл (25) запишется в виде суммы интегралов

$$M[y^\mu](z) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \frac{\xi^{z-I}}{W^\omega} d\xi + \sum_{j \neq q} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \frac{j \xi_j \xi^{z-I}}{q W^\omega} d\xi, \quad (29)$$

где

$$\omega = \frac{\mu}{q} + \sum_{j \neq q} \frac{(q-j)}{q} z_j + 1.$$

Эти интегралы могут быть вычислены по формуле (см. [9; формула 4.638(2)])

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \frac{\xi^{z-I}}{W^\omega} d\xi = \frac{\Gamma(z_1) \cdot \dots \cdot [q] \cdot \dots \cdot \Gamma(z_n) \Gamma(\omega - z_1 - \dots [q] \cdot \dots - z_n)}{\Gamma(\omega)}. \quad (30)$$

Интеграл (30) сходится, если выполняются следующие неравенства на вещественные части: $\operatorname{Re} z_j > 0$, $\operatorname{Re} \omega > \operatorname{Re} \sum_{j \neq q} z_j$. Поэтому интегралы (29) и (25) будут сходиться при условиях

$$\operatorname{Re} z_j > 0, \quad \operatorname{Re} \left(\mu - \sum_{j \neq q} j z_j \right) > 0.$$

Применив формулу (30), получим утверждение леммы 1.

Формулы обращения (5) и лемма 1 используются для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $y(x)$ – главное решение уравнения (24). Для любого $\mu > 0$ функция $y^\mu(x)$ представляется следующим интегралом Меллина–Барнса

$$y^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{a+i\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mu}{q} \frac{\Gamma(u_1) \cdots [q] \cdots \Gamma(u_n) \Gamma\left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{q}\langle\alpha, u\rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q} + \frac{1}{q}\langle\beta, u\rangle + 1\right)} x^{-u} du. \quad (31)$$

Вектор $a = (a_1, \dots, [q], \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ берется из симплекса (27). Область сходимости интеграла (31) в переменных $\theta = \arg x$ определяется неравенствами

$$|\theta_\nu| < \frac{\pi\nu}{q}, \quad \nu \in I_q, \quad |j\theta_k - k\theta_j| < \pi j, \quad j, k \in I_q, \quad j < k, \quad (32)$$

где I_q – набор индексов $\{1, \dots, [q], \dots, n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как указывалось выше, в случае $q = n$ формула (31) была известна Меллину, однако он гарантировал сходимость интеграла в значительно меньшей области

$$|\theta_\nu| < \frac{\pi\nu}{2n}, \quad \nu = 1, \dots, n-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для того чтобы сопоставить область сходимости интеграла (31) с сингулярным множеством полной (многозначной) алгебраической функции $y(x)$, заметим, что последнее множество есть не что иное, как дискриминантная гиперповерхность ∇ уравнения (24). Рассмотрим образ ∇ при отображении $\operatorname{Arg}: \mathbb{T}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$:

$$(x_1, \dots, [q], \dots, x_n) \rightarrow (\arg x_1, \dots, [q], \dots, \arg x_n).$$

По терминологии, предложенной М. Пассаре и А. Цихом, указанный образ назовем *коамебой* гиперповерхности $\nabla \subset \mathbb{T}^n$ (по той причине, что образ ∇ при проекции $(x_1, \dots, [q], \dots, x_n) \rightarrow (\log |x_1|, \dots, [q], \dots, \log |x_n|)$ называют *амебой* для ∇ [10]). Например, для кубического уравнения ($n = 3$, $p = 0$, $q = 3$) дискриминант равен

$$\Delta(x) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2 - x_1^2x_2^2,$$

а его коамеба изображена на рис. 1 в пределах квадрата $|\theta_1| \leq \pi$, $|\theta_2| \leq \pi$. В данном случае коамебу удобнее строить не по дискриминанту, а по параметризации его нулевого множества ∇ (см. замечание 6 ниже).

Рис. 1. Коамеба дискриминанта кубического уравнения

Рис. 2. Область сходимости интеграла Меллина–Барнса

При этом область сходимости интеграла (31), определяемая неравенствами (32) на $\arg x_j = \theta_j$

$$|\theta_1| < \frac{\pi}{3}, \quad |\theta_2| < \frac{2\pi}{3}, \quad |\theta_2 - 2\theta_1| < \pi,$$

изображается в виде затемненного шестиугольника (см. рис. 2). Следует обратить внимание на то, что область сходимости пересекает дискриминантную кривую, поскольку указанный шестиугольник содержит два треугольника, принадлежащих коамебе и соприкасающихся по вершине в точке $\theta = 0$. Это объясняется тем, что в прообразах этих треугольников содержатся точки, сингулярные для других ветвей полной алгебраической функции уравнения (24).

5.2. Секториальная область голоморфности главного решения.

Чтобы применить теорему 1 в доказательстве теоремы 3, нам надо описать секториальную область S_Θ , где главное решение $y(x)$ (или $y^\mu(x)$) голоморфно, а также область U изменения показателей a в степенной оценке вида (3) для $y(x)$. Для простоты записи положим $q = n$, $\mu = 1$. Сначала опишем секториальную область голоморфности для функции $y(x(\xi)) = (1 + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1})^{-1/n}$, голоморфной (как многозначная функция) вне гиперплоскости

$$L = \{\xi \in \mathbb{T}^{n-1} : 1 + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} = 0\}.$$

ЛЕММА 2. *Максимальная секториальная область, вписанная в дополнение к гиперплоскости L , определяется следующими условиями на аргументы:*

$$|\arg \xi_l| < \pi, \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad |\arg \xi_j - \arg \xi_k| < \pi, \quad 1 \leq j < k \leq n-1. \quad (33)$$

Тем самым, функция $y(x(\xi))$ голоморфна (и однозначна) в секториальной области $S_{\mathcal{T}}$ над выпуклым многогранником

$$\mathcal{T} = \{\tau \in \mathbb{R}^{n-1} : |\tau_l| < \pi, \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad |\tau_j - \tau_k| < \pi, \quad 1 \leq j < k \leq n-1\},$$

который является внутренностью дополнения к коамебе гиперплоскости L (см. рис. 3 при $n = 3$).

Рис. 3. Коамеба комплексной прямой $1 + \xi_1 + \xi_2 = 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ принадлежит некоторой секториальной области из $\mathbb{T}^{n-1} \setminus L$, т.е. $(r_1\xi_1, \dots, r_{n-1}\xi_{n-1}) \notin L$ для любых $r_j > 0$. Если хотя бы для одной пары координат ξ_j, ξ_k (мы считаем, что их аргументы по модулю меньше π) выполняется противоположное неравенство $|\arg \xi_j - \arg \xi_k| > \pi$, то, выбирая достаточно малыми модули всех оставшихся координат ξ_l , $l \neq j, k$, можно добиться, чтобы

$$\left| \arg \left(\xi_j + \sum_{l \neq j, k} \xi_l \right) \right| < \pi, \quad |\arg \xi_k| < \pi, \quad \left| \arg \left(\xi_j + \sum_{l \neq j, k} \xi_l \right) - \arg \xi_k \right| > \pi.$$

Теперь умножением $\xi_j + \sum_{l \neq j, k} \xi_l$ и ξ_k на подходящие вещественные положительные числа (тем самым, сохраняя аргументы вектора ξ) мы сможем получить равенство $1 + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} = 0$, вопреки первоначальному выбору ξ .

Обратно, если для координат вектора $\xi \in \mathbb{T}^{n-1}$ выполняется (33), то для любых $r_j > 0$

$$-\pi < m < \arg(r_1\xi_1 + \dots + r_{n-1}\xi_{n-1}) < M < \pi,$$

где m и M – это минимум и максимум $\arg \xi_j$ соответственно. Поэтому $1 + r_1\xi_1 + \dots + r_{n-1}\xi_{n-1} \neq 0$ для любых $r_j > 0$, т.е. ξ входит в секториальную область из $\mathbb{T}^{n-1} \setminus L$. Лемма 2 доказана.

Теперь наша задача состоит в нахождении максимальной секториальной области, вписанной в образ $S_{\mathcal{T}}$ при замене $x = x(\xi)$. Зафиксируем $\tau \in \mathcal{T}$. Напомним, что $\tau_j = \arg \xi_j$, а аргумент переменной x_j обозначим θ_j . В секторе $S_{\mathcal{T}}$ над точкой $\tau \in \mathcal{T}$ расположен ортант

$$e^{i\tau} \mathbb{R}_+^{n-1} = \{\xi = (r_1 e^{i\tau_1}, \dots, r_{n-1} e^{i\tau_{n-1}}) : r_j > 0\},$$

свободный от точек гиперплоскости $L = \{1 + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. На самом деле, указанный ортант также свободен от точек гиперплоскости $L' = \{1 + \langle \alpha, \xi \rangle / n = 0\}$ (напомним, что $\alpha = (1, \dots, n-1)$), так как коамебы указанных гиперплоскостей совпадают, ибо коэффициенты их уравнений отличаются на положительные множители. Напомним, что последняя гиперплоскость представляет собой нулевое множество якобиана $\partial x / \partial \xi$ замены $x(\xi)$, которое переходит при этой замене в множество ветвления алгебраической функции $y(x)$, т.е. в дискриминантное множество ∇ уравнения (24) (при $q = n$). Поскольку L' допускает параметризацию

$$\xi_j = -\frac{ns_j}{\langle \alpha, s \rangle},$$

то с помощью (28) получаем следующую (n -значную) параметризацию дискриминантного множества ∇ :

$$x_j = \frac{ns_j}{\langle \beta, s \rangle} \left(-\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{j/n}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

(напомним, что $\beta = (n-1, \dots, 1)$). Эта параметризация другим способом была получена в [7].

В соответствии с замечанием 6 главная ветвь $y(x)$ голоморфно продолжается в образ $S_{\mathcal{T}}$.

Найдем асимптотические аргументы $\theta = \theta(\tau)$ образов $x(\xi)$, когда $\tau = \arg \xi \in \mathcal{T}$ фиксировано, а $r = (r_1, \dots, r_{n-1})$ (где $r_j = |\xi_j|$) стремится к бесконечности. Для k -координаты замены $x(\xi) = x(re^{i\tau})$ имеем

$$x_k(\xi) = \frac{r_k e^{i\tau_k}}{(1 + r_1 e^{i\tau_1} + \dots + r_{n-1} e^{i\tau_{n-1}})^{(n-k)/n}}. \quad (34)$$

Поскольку $|\tau_j - \tau_k| < \pi$ для $\tau \in \mathcal{T}$, при таком фиксированном τ аргументы величины $r_1 e^{i\tau_1} + \dots + r_{n-1} e^{i\tau_{n-1}}$ пробегают сегмент $[\min \tau_j, \max \tau_j]$, когда $r \in \mathbb{R}_+^{n-1}$. Этот сегмент является выпуклой оболочкой набора чисел $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, поэтому его можно трактовать как совокупность значений линейной формы $\langle \tau, t \rangle := \tau_1 t_1 + \dots + \tau_{n-1} t_{n-1}$, где t пробегает стандартный симплекс

$$\sigma = \{t \in \mathbb{R}_+^{n-1} : t_1 + \dots + t_{n-1} = 1\}.$$

Таким образом, согласно (34) при каждом фиксированном $\tau \in \mathcal{T}$ множество предельных (при $r \rightarrow \infty$) значений аргумента $\theta = \theta(\tau)$ вектора $x(\xi)$ запишется в виде

$$\theta = \tau - \frac{\langle t, \tau \rangle}{n} \beta, \quad t \in \sigma. \quad (35)$$

Искомое множество Θ асимптотических аргументов есть пересечение образов $\mathcal{T}$ семейства отображений (35) по $t \in \sigma$. Это пересечение можно рассматривать лишь по $n-1$ вершине $t = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \sigma$, т.е. достаточно рассмотреть $n-1$ линейное отображение

$$\theta = \tau - \frac{\tau_\nu}{n} \beta, \quad \nu = 1, \dots, n-1,$$

и обратить их:

$$\tau^{(\nu)} = \theta + \frac{\theta_\nu}{\nu} \beta, \quad \nu = 1, \dots, n-1.$$

В результате Θ определится пересечением по $\nu = 1, \dots, n-1$ условий принадлежности $\tau = \tau^{(\nu)}(\theta) \in \mathcal{T}$, и по определению $\mathcal{T}$ получаем

$$\Theta = \bigcap_{\nu=1}^{n-1} \{ |\tau_l^{(\nu)}(\theta)| < \pi, \ 1 \leq l \leq n-1, \ |\tau_j^{(\nu)}(\theta) - \tau_k^{(\nu)}(\theta)| < \pi, \ 1 \leq j < k \leq n-1 \}.$$

Неравенства $|\tau_l^{(\nu)}(\theta)| < \pi$ являются следствиями “диагональных” условий $|\tau_\nu^{(\nu)}(\theta)| < \pi$. Последние задаются в виде $|\theta_\nu| < \pi\nu/n$. Аналогично, среди условий $|\tau_j^{(\nu)}(\theta) - \tau_k^{(\nu)}(\theta)| < \pi$ независимыми будут лишь те, которые отвечают упорядоченным парам $j < \nu$, а они задаются неравенствами $|j\theta_\nu - \nu\theta_j| < \pi j$. Наконец, нетрудно убедиться, что при $j \neq \nu, k \neq \nu$ все неравенства $|\tau_j^{(\nu)}(\theta) - \tau_k^{(\nu)}(\theta)| < \pi$ являются следствиями только что рассмотренных. Тем самым, область Θ задается системой неравенств (32).

5.3. Доказательство теоремы 3.

ЛЕММА 3. *Главное решение $y(x)$ голоморфно в секториальной области S_Θ над выпуклым многогранником Θ , определенным неравенствами (32).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что функция $(1 + \sum \xi_j)^{-1/q}$ допускает выделение ветви (нас интересует ветвь со значением 1 при $\xi = 0$) в секториальной области $S_{\mathcal{T}}$. Следовательно, таким свойством обладают отображение $x(\xi)$ и функция $y(x(\xi))$. Покажем, что главное решение $y(x)$ голоморфно продолжается в область $S_\Theta = x(S_{\mathcal{T}})$ – образ секториальной области $S_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{C}_\xi^{n-1}$ при отображении $x(\xi)$. В самом деле, поскольку якобиан $\partial x / \partial \xi$ не обращается в нуль в $S_{\mathcal{T}}$, отображение $x(\xi)$ переводит $S_{\mathcal{T}}$ на S_Θ локально биголоморфно. Тем самым, для $x = x(\xi) \in S_\Theta$ функция $y(x)$, представленная как

$$\left(1 + \sum \xi_j\right)^{-1/q} \Big|_{\xi=\xi(x)},$$

является локально голоморфной. В силу односвязности S_Θ она голоморфна, и лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Главное решение $y(x)$ удовлетворяет на множестве S_Θ условию*

$$|y(x)| = O(|x^{-a}|) \quad \text{для всех } a \in U_1,$$

где U_1 – симплекс (27) при $\mu = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится неравенство

$$|1 + \xi_1 + \dots + \xi_n| \geq C(\varepsilon)(|\xi_1| + \dots + |\xi_n|), \quad (36)$$

справедливое в секторе $S_{\mathcal{T}_\varepsilon} = \{\xi \in \mathbb{T}^{n-1} : \arg \xi \in \mathcal{T}_\varepsilon\}$, где

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \{\theta \in (-\pi, \pi)^{n-1} : |\theta_j - \theta_k| \leq \pi - \varepsilon, \ j < k\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Неравенство (36) вытекает из следующего неравенства:

$$|\xi_1 + \dots[q] \dots + \xi_n| \geq C(\varepsilon)(|\xi_1| + \dots[q] \dots + |\xi_n|).$$

Для доказательства последнего рассмотрим компакт K_ε , полученный пересечением множества $S_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ с единичной сферой $S^{2n-3} = \{\|\xi\| = 1\}$. Функции $f_1(\xi) = |\xi_1 + \dots[q] \dots + \xi_n|$, $f_2(\xi) = |\xi_1| + \dots[q] \dots + |\xi_n|$ на компакте K_ε положительны и достигают минимального и максимального значений. Подберем константу $C(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\min_{K_\varepsilon} f_1(\xi) \geq C(\varepsilon) \max_{K_\varepsilon} f_2(\xi).$$

Тем самым, константа $C(\varepsilon)$ обеспечивает доказываемое неравенство на K_ε , а в силу однородности по ξ – и на всем секторе $S_{\mathcal{T}_\varepsilon}$. Далее воспользуемся доказанным неравенством (36) и известным неравенством Иенсена

$$c_1^{p_1} \dots c_n^{p_n} \leq p_1 c_1 + \dots + p_n c_n, \quad \text{где } c_i, p_i > 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Получим следующую оценку (мы сохраняем обозначение $C(\varepsilon)$ для константы $[C(\varepsilon)]^{-1/q}$):

$$\begin{aligned} |y(x(\xi))| &\leq \frac{C(\varepsilon)}{(\sum_{j \neq q} |\xi_j|)^{1/q}} = \frac{C(\varepsilon)}{(\sum_{j \neq q} p_j |\xi_j|/p_j)^{1/q}} \leq \frac{C(\varepsilon)}{\prod_{j \neq q} (|\xi_j|/p_j)^{p_j/q}} \\ &\leq C(\varepsilon) \prod_{j \neq q} p_j^{p_j/q} |\xi_1^{-b_1}| \cdot \dots [q] \dots |\xi_n^{-b_n}|, \end{aligned}$$

здесь $b_j = p_j/q$, $\xi \in S_{\mathcal{T}_\varepsilon}$. Отсюда получаем оценку

$$|y(x(\xi))| \leq C(\varepsilon) |\xi_1^{-b_1}| \cdot \dots [q] \dots |\xi_n^{-b_n}| \quad (37)$$

для $\xi \in S_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ и для всех b из симплекса

$$\left\{ b \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \sum_{j \neq q} b_j = \frac{1}{q} \right\}.$$

Нетрудно показать, что оценка вида (37) сохраняется и для всех b из симплекса

$$\sigma_q = \left\{ b \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \sum_{j \neq q} b_j < \frac{1}{q} \right\}.$$

Основываясь на замене переменной (28), эту оценку можно продолжить для $x \in S_\Theta$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq C(\varepsilon) |\xi_1^{-b_1}| \cdot \dots [q] \dots |\xi_n^{-b_n}| = |x_1^{-b_1}| \cdot \dots [q] \dots |x_n^{-b_n}| |W^{-\langle \beta, b \rangle / q}| \\ &\leq C(\varepsilon)^{1+\langle \beta, b \rangle} |x_1^{-b_1(1+\langle \beta, b \rangle)}| \cdot \dots [q] \dots |x_n^{-b_n(1+\langle \beta, b \rangle)}| |W^{-\langle \beta, b \rangle^2 / q}| \\ &\leq C(\varepsilon)^{1+\langle \beta, b \rangle + \dots + \langle \beta, b \rangle^k} |x_1^{-b_1(1+\langle \beta, b \rangle + \dots + \langle \beta, b \rangle^k)}| \\ &\quad \times \dots [q] \dots |x_n^{-b_n(1+\langle \beta, b \rangle + \dots + \langle \beta, b \rangle^k)}| |W^{-\langle \beta, b \rangle^{k+1} / q}| \\ &\leq \dots \leq \tilde{C}(\varepsilon) |x_1^{-b_1/(1-\langle \beta, b \rangle)}| \cdot \dots [q] \dots |x_n^{-b_n/(1-\langle \beta, b \rangle)}|. \end{aligned}$$

Справедливость последнего неравенства в этой цепочке следует из оценки

$$\max_{b \in \sigma_q} \langle \beta, b \rangle = \frac{q-1}{q} < 1$$

и формулы для геометрической прогрессии. Таким образом,

$$|y(x)| = O(|x^{-a}|), \quad a = \frac{b}{1 - \langle \beta, b \rangle}, \quad (38)$$

где b пробегает симплекс σ_q . Поскольку $\alpha + \beta = (q, \dots, q)$, имеем

$$\langle \alpha, a \rangle = \frac{\langle \alpha, b \rangle}{1 - \langle \beta, b \rangle} = \frac{q(b_1 + \dots + b_n) - \langle \beta, b \rangle}{1 - \langle \beta, b \rangle}.$$

Отсюда видно, что $\langle \alpha, a \rangle < 1$ тогда и только тогда, когда $b \in \sigma_q$. Поэтому равенство (38) справедливо для всех векторов из симплекса

$$U_1 = \{a \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \langle \alpha, a \rangle < 1\},$$

т.е. симплекса (27) при $\mu = 1$. Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку симплекс U в (27) есть гомотетия U_1 с коэффициентом μ , то по леммам 3 и 4 функция $y^\mu(x) \in M_\Theta^U$. Применим к ней формулу обращения (5), с учетом результата леммы 1 получим интегральную формулу (31).

Список литературы

- [1] Hj. Mellin, “Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen”, *Acta Soc. Sci. Fennicae*, **21**:1 (1896), 115.
- [2] Hj. Mellin, “Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzgleichungen”, *Acta Math.*, **25**:1 (1902), 139–164.
- [3] Hj. Mellin, “Résolution de l’équation algébrique générale à l’aide de la fonction gamma”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **172** (1921), 658–661.
- [4] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных*, Наука, М., 1985; англ. пер.: B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables*, Transl. Math. Monogr., **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [5] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, MIT Press, Cambridge, MA–London, 1966.
- [6] M. Passare, A. Tsikh, O. Zhdanov, “A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin–Barnes integrals”, *Contributions to complex analysis and analytic geometry* (Paris, France, 1992), Aspects Math., **E26**, Vieweg, Braunschweig, 1994, 233–241.
- [7] M. Passare, A. Tsikh, “Algebraic equations and hypergeometric series”, *The legacy of Niels Henrik Abel* (Papers from the Abel bicentennial conference, Univ. of Oslo, Oslo, Norway, 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 653–672.
- [8] R. Birkeland, “Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen”, *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 566–578.

- [9] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1963; англ. пер.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, Boston, MA, 1994.
- [10] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.

И. А. Антипова (I. A. Antipova)

Красноярский государственный
технический университет

E-mail: antipova@akadem.ru

Поступила в редакцию

05.05.2006 и 07.12.2006