Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Бак, Ю. В. Муранов, Нормальные инварианты пар многообразий и сигнатурные отображения, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 6, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:07:02

УДК 513.83+515.1

А. Бак, Ю. В. Муранов

Нормальные инварианты пар многообразий и сигнатурные отображения

В статье строится структурное множество пары многообразий, описываются его нормальные инварианты и строятся диаграммы и косы точных последовательностей, связывающие введенное структурное множество и его нормальные инварианты со структурными множествами и нормальными инвариантами многообразия и подмногообразия.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Пусть X^n – связное замкнутое n -мерное топологическое многообразие с фундаментальной группой $\pi_1 = \pi_1(X)$ и характером ориентации $w: \pi_1 \rightarrow \{\pm 1\}$. Фундаментальная проблема геометрической топологии состоит в описании всех возможных замкнутых n -мерных топологических многообразий, которые гомотопически (просто гомотопически) эквивалентны X .

Пусть $f: M \rightarrow X$ – сохраняющая ориентацию простая гомотопическая эквивалентность, где M – связное замкнутое n -многообразие в категории TOP, топологических многообразий. Два таких отображения $f_i: M_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, называются *эквивалентными*, если существует s -кобордизм W между ними вместе с отображением W в X , продолжающим отображения f_i , $i = 1, 2$ [1; с. 542]. Множество классов эквивалентности образует структурное множество $\mathcal{S}_n^s(X)$ и входит в точную последовательность теории перестроек (см., например, [2; с. 278] и [1; с. 559])

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\sigma_{n+1}} L_{n+1}(\pi_1) \longrightarrow \mathcal{S}_n^s(X) \longrightarrow [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\sigma_n} L_n(\pi_1).$$

Элементы множества $[X, G/\text{TOP}]$ называются *нормальными инвариантами*. Для описания $\mathcal{S}_n^s(X)$ мы должны знать множество нормальных инвариантов, группы препятствий к перестройкам $L_n(\pi_1) = L_n^s(\pi_1)$ и сигнатурное отображение σ . Имеется значительный прогресс в вычислении L -групп (см. [3]–[6]), и получено много результатов о нормальных инвариантах и сигнатурных отображениях (см., например, [7]–[9]), но пока полученное описание $\mathcal{S}_n^s(X)$ остается в общем неудовлетворительным. Одной из значительных причин этого является трудность анализа сигнатурных отображений. Цель настоящей работы –

Работа первого автора поддержана фондом INTAS (грант № 00-566). Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-00993) и ДААД-программой для визита в Университет г. Биелефельда, Германия.

получить информацию о сигнатурных отображениях, исследуя их отношение к подмногообразиям X .

Пусть $Y \subset X$ – подмногообразие коразмерности q в X . Простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow X$ расщепляется вдоль подмногообразия Y , если по определению она гомотопически эквивалентна трансверсальному к Y отображению g такому, что для $N = g^{-1}(Y)$ ограничения

$$g|_N: N \rightarrow Y, \quad g|_{(M \setminus N)}: M \setminus N \rightarrow X \setminus Y$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями. По определению $M \setminus N$ (аналогично $X \setminus Y$) является замыканием дополнения трубчатой окрестности N (см. [9; с. 118]). Согласно [1; § 7.2] существует группа $LS_{n-q}(F)$ препятствий к расщеплению, которая зависит только от $n - q \pmod{4}$ и универсально-отталкивающего квадрата

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix} \quad (1)$$

фундаментальных групп с ориентацией, где ∂U – граница трубчатой окрестности U для Y в X . Если $f: M \rightarrow X$ является нормальным отображением, то согласно [1; § 7.2] существует группа $LP_{n-q}(F)$ препятствий к перестройкам для пар многообразий (X, Y) , которая также зависит от $n - q \pmod{4}$ и квадрата F . Группы $LS_*(F)$ и $LP_*(F)$ тесно связаны с группами препятствий к перестройкам $L_*(\pi_1(X))$ и $L_*(\pi_1(Y))$ и с классической точной последовательностью теории перестроек посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{S}_n^s(X) & \longrightarrow & [X, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\sigma} & L_n(\pi_1(X)) \\ & & \downarrow & & \downarrow v_\xi & & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \xrightarrow{p_0} & L_n(\pi_1(X)) \longrightarrow \\ & & \parallel & & \downarrow p_1 & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \longrightarrow, \end{array} \quad (2)$$

в которой все строки точны (см. [1; § 7.2]) и [9; с. 136]).

В диаграмме отображения p_i являются забывающими отображениями, а отображение v_ξ определено естественным образом так, что композиция $p_0 v_\xi$ является отображением σ в классической точной последовательности теории перестроек. Необходимо отметить, что отображение $p_1 v_\xi$ в диаграмме (2) имеет естественное геометрическое описание. Любое нормальное отображение $h \in [X, G/\text{TOP}]$ дает посредством ограничения на подмногообразие Y нормальное отображение из $[Y, G/\text{TOP}]$. Препятствие к перестройке этого ограниченного отображения есть в точности $p_1 v_\xi(h) \in L_{n-q}(\pi_1(Y))$.

В [1; с. 571] А. А. Раницкий ввел множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ s -триангуляций пары многообразий (X, Y) , где ξ обозначает нормальное расслоение Y в X . Это

множество состоит из классов конкордантности Y -расщепленных отображений $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$, где $N = f^{-1}(Y)$, и входит в точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{S}_n(X, Y, \xi) \longrightarrow [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{v_\xi} LP_{n-q}(F) \longrightarrow \cdots \quad (3)$$

Эта последовательность продолжается вправо и влево, и множество $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$ имеет групповую структуру. В [1; предложение 7.2.6] имеется описание свойств групп $\mathcal{S}_n(X, Y, \xi)$, включая диаграммы точных последовательностей, которые связывают между собой точные последовательности теории перестроек для многообразий X и Y .

В настоящей работе мы вводим структурное множество $\mathcal{NS}_*(X, Y)$ и показываем, что оно входит в точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \mathcal{NS}_n(X, Y) \longrightarrow [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{p_1 v_\xi} L_{n-q}(\pi_1(Y)), \quad (4)$$

где, как обычно, точность в $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ и в $\mathcal{NS}_n(X, Y)$ определяется в терминах действия группы $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ на $\mathcal{NS}_n(X, Y)$ (теорема 1). Определение $\mathcal{NS}_*(X, Y)$ является естественным прямым обобщением (в котором Y соответствует ∂X) смешанного типа структур на многообразии с границей [9; с. 116].

Обозначим через $\mathbf{L}_\bullet$ 1-связное накрытие спектра точки в алгебраической L -теории и через $\mathbf{L}(\pi_1(Y))$ спектр многообразия Y в алгебраической L -теории (см. [1; с. 544], [2] и [7; с. 28]). Мы строим отображение спектров

$$\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y)),$$

отождествляем гомотопическую группу $\pi_{n-q}(\mathbf{F})$ слоя $\mathbf{F}$ этого отображения со структурным множеством $\mathcal{NS}_n(X, Y)$ и показываем, что имеет место изоморфизм

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow \pi_{n-q+1}(\mathbf{L}(\pi_1(Y))) & \longrightarrow & \pi_{n-q}(\mathbf{F}) & \longrightarrow & \pi_{n-q}(\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet)) & \longrightarrow & \pi_{n-q}(\mathbf{L}(\pi_1(Y))) \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \longrightarrow L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathcal{NS}_n(X, Y) & \longrightarrow & [X, G/\text{TOP}] & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) \end{array}$$

длинной точной последовательности гомотопических групп отображения

$$\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y)),$$

начинающегося с уровня $n - q$, с рассмотренной выше точной последовательностью (4) (теорема 2). Как тривиальное следствие теоремы получается, что $\mathcal{NS}_n(X, Y)$ имеет групповую структуру, делающую (4) точной последовательностью групп. Доказаны пять других теорем, которые дают прямоугольные диаграммы и косы точных последовательностей гомотопических групп спектров, связывающие различными путями все группы, введенные выше.

Оставшаяся часть работы организована следующим образом. В §2 мы напомним общие конструкции и свойства спектров алгебраической L -теории, относящиеся к многообразию с подмногообразием. В §3 доказаны теоремы 1 и 2, и в §4 получены диаграммы точных последовательностей, связывающие введенные выше группы.

§ 2. Спектры и L -группы

Пусть R – кольцо с инволюцией. В работе [1] (см. также [10] и [2]), используя квадратичные n -ады Пуанкаре над кольцом R , построен симплициальный Ω -спектр $\mathbf{L}(R) = \{\mathbf{L}_{-k}(R) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, для которого

$$\mathbf{L}_{m+1}(R) \simeq \Omega \mathbf{L}_m(R), \quad \mathbf{L}_m(R) \simeq \mathbf{L}_{m+4}(R), \quad L_n(R) = \pi_n(\mathbf{L}(R)) = \pi_n(\mathbf{L}_0(R)).$$

Если π обозначает группу, снабженную гомоморфизмом $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$, обычно называемым *гомоморфизмом ориентации*, и если $\mathbb{Z}\pi$ обозначает целочисленное групповое кольцо, снабженное инволюцией, определяемой по правилу

$$\sum a_g g \mapsto \sum a_g w(g) g^{-1}, \quad a_g \in \mathbb{Z}, \quad g \in \pi,$$

то спектр $\mathbf{L}(\mathbb{Z}\pi)$ обозначается $\mathbf{L}(\pi)$. Если необходимо точно указать гомоморфизм ориентации w , мы будем писать $\mathbf{L}(\pi, w)$ вместо $\mathbf{L}(\pi)$.

В [9; § 17A] приведена геометрическая конструкция спектра $\mathbf{L}(K) \simeq \mathbf{L}(\mathbb{Z}\pi)$ для топологического пространства K с $\pi = \pi_1(K)$ и заданным гомоморфизмом $\pi_1(K) \rightarrow \{\pm 1\}$. Нульмерными симплексами пространства $\mathbf{L}_m(K)$ являются объекты над K размерности m в смысле [9]. Напомним определение объекта размерности m над пространством K [9; § 9]. Пусть (X, Y) – некоторая простая пара Пуанкаре с заданным расслоением ν над X и $(M, \partial M)$ – компактное многообразие размерности m с границей ∂M . Нормальное отображение степени 1

$$f: (M, \partial M) \rightarrow (X, Y),$$

для которого ограничение $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow Y$ является простой гомотопической эквивалентностью, задает объект над K размерности m , если задано стабильное оснащение расслоения $\tau_M \oplus f^* \nu$ (здесь τ_M – касательное расслоение к многообразию M) и такое отображение $\omega: X \rightarrow K$, что гомоморфизм ориентации пространства X разлагается в композицию

$$\pi_1(X) \xrightarrow{\omega_*} \pi_1(K) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Аналогично (см. [9; § 9]), k -симплексами комплекса $\mathbf{L}_m(K)$ являются объекты типа $k+1$ и размерности $m+k$ над $(k+1)$ -адой $(K; K, \dots, K)$, для которой тотальное пространство и все подпространства совпадают с K (см. [9; § 0]. В высоких размерностях ($m \geq 6$) гомотопический тип $\mathbf{L}_m(K)$ зависит только от $\pi_1(K)$.

Для любого морфизма $i: R \rightarrow T$ колец с инволюцией существует корасслоение спектров

$$\dots \longrightarrow \mathbf{L}(R) \longrightarrow \mathbf{L}(T) \longrightarrow \mathbf{L}(R \rightarrow T) \longrightarrow \dots, \quad (5)$$

гомотопическая длинная точная последовательность которого является относительной точной последовательностью L -групп отображения i [10; § 7]:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & L_n(R) & \longrightarrow & L_n(T) & \longrightarrow & L_n(R \rightarrow T) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{L}(R)) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{L}(T)) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbf{L}(R \rightarrow T)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Пусть

$$(D^q, S^{q-1}) \longrightarrow (U, \partial U) \xrightarrow{p} Y$$

обозначает дисковое расслоение над замкнутым многообразием Y . Поскольку отображение трансфера L -групп определено на уровне спектров (см. [10; § 7] и [9; с. 253]), имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p^\#} & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)) \\ & \searrow & \downarrow \delta \\ & & \Omega^{q-1} \mathbf{L}(\pi_1(\partial U)), \end{array} \quad (6)$$

где δ – связывающее отображение в корасслоенной последовательности (5) спектров для естественного отображения фундаментальных групп $\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)$.

Теперь пусть $Y \subset X$ является подмногообразием коразмерности q связного замкнутого многообразия X . Трубочатая окрестность U подмногообразия Y в X с границей ∂U является дисковым расслоением над Y , и определен квадрат фундаментальных групп F в (1). Имеется гомотопически коммутативная диаграмма спектров

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p^\#} & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)) & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \\ & \searrow & \downarrow \delta & & \downarrow \delta_1 \\ & & \Omega^{q-1} \mathbf{L}(\pi_1(\partial U)) & \xrightarrow{\beta} & \Omega^{q-1} \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)), \end{array} \quad (7)$$

где левый треугольник тот же, что и в (6), а горизонтальные отображения правого квадрата индуцированы горизонтальными отображениями квадрата F .

Мы определяем спектр

$$\mathbf{LS}(F) = \text{homotopy cofiber}[\Omega(\alpha p^\#): \Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))],$$

где α и $p^\#$ такие же, как в (7). Мы определяем спектр

$$\mathbf{LP}(F) = \text{homotopy cofiber}[\Omega(\beta \delta p^\#): \Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y))],$$

где β , δ и $p^\#$ такие же, как в (7) (см. [11]–[13] для специального случая подмногообразий).

Напомним, что в гомотопической категории спектров понятия универсально-притягивающего и универсально-отталкивающего квадрата эквивалентны. Гомотопически коммутативный квадрат спектров является универсально-притягивающим тогда и только тогда, когда слои (а следовательно, и кослои) любых двух параллельных отображений естественно гомотопически эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Гомотопическая коммутативность (7) индуцирует с точностью до гомотопии такое отображение спектров $\mathbf{LS}(F) \rightarrow \mathbf{LP}(F)$, что диаграмма спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \mathbf{LS}(F) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & \mathbf{LP}(F) \end{array}$$

гомотопически коммутативна, горизонтальные строки являются корасслоениями и правый квадрат является универсально-притягивающим. Более того, если $LS_n(F)$ и $LP_n(F)$ обозначают соответственно группы препятствий к расщеплению и к перестройкам на (X, Y) , определенным в [1; § 7.2], то имеют место изоморфизмы

$$\pi_n(\mathbf{LS}(F)) \cong LS_n(F), \quad \pi_n(\mathbf{LP}(F)) \cong LP_n(F),$$

которые функториальны по F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения о диаграмме очевидны (см. [14]). Изоморфизмы для групп препятствий следуют из леммы о пяти гомоморфизмах и определения групп LS_* и LP_* .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $C = \pi_1(X \setminus Y)$ и $D = \pi_1(X)$. Тогда гомотопические длинные точные последовательности отображений в универсально-притягивающем квадрате предложения 1 составляют вместе, образуя косу точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} & L_{n+q}(C) & \longrightarrow & L_{n+q}(D) & \xrightarrow{\Theta} & LS_{n-1}(F) & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ L_{n+q+1}(C \rightarrow D) & & & LP_n(F) & & L_{n+q}(C \rightarrow D) & (8) \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & LS_n(F) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & L_{n+q-1}(C), & \end{array}$$

восходящую к Уоллу [9; с. 264].

§ 3. Точная последовательность теории перестроек пары многообразий

Для любого топологического пространства X такого, что $\pi_1(X) = \pi$, существует алгебраическая точная последовательность теории перестроек (см. [1; с. 559], [2; с. 278] и [9; с. 116])

$$\cdots \longrightarrow L_{m+1}(\pi) \longrightarrow \mathbb{S}_{m+1}(X) \longrightarrow H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow L_m(\pi) \longrightarrow \cdots \quad (9)$$

Спектр $\mathbf{L}_\bullet$ является 1-связным накрытием Ω -спектра кольца $\mathbf{L}(\mathbb{Z})$ и согласно [2; с. 291] (см. также [1; с. 545], [8; предложение 16.1] и [9; § 17A]) $\mathbf{L}_{\bullet 0} \simeq G/\text{TOP}$. Отображение

$$\sigma_*: G/\text{TOP} \rightarrow \mathbf{L}_{\bullet 0},$$

задающее эту гомотопическую эквивалентность на симплициальном уровне, описано в [2; с. 291]. Это отображение сопоставляет сингулярному симплексу $s: \Delta \rightarrow G/\text{TOP}$ квадратичную n -аду Пуанкаре над кольцом $\mathbb{Z}$ нормального отображения n -ад $(f, b): M \rightarrow \Delta$, которая классифицируется отображением s . По определению (9) является гомотопической длинной точной последовательностью корасслоения

$$X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow \mathbf{L}(\pi)$$

спектров с гомотопическим слоем $\mathbf{S}(X)$, где

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{m+1}(X) &= \pi_m(\mathbf{S}(X)), \\ H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) &= \pi_m(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet), \\ L_m(\pi) &= \pi_m(\mathbf{L}(\pi)). \end{aligned}$$

Если X – замкнутое n -мерное топологическое многообразие, то точная последовательность (9) соответствует для $m \geq n$ точной последовательности теории перестроек, так как $H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) = [X, G/\text{TOP}]$ и $\mathbb{S}_{n+1}(X) = \mathcal{S}_n^s(X)$. Точная последовательность теории перестроек продолжается влево (см. [2], [8; § 18] и [9; § 10]) следующим образом ($i \geq 1$):

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow L_{n+i+1}(\pi_1) &\longrightarrow \mathcal{S}_\partial^s(X \times D^i) \\ &\longrightarrow [X \times D^i, \partial(X \times D^i); G/\text{TOP}, *] \longrightarrow L_{n+i}(\pi_1) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

где D^i – i -мерный диск. Структурные множества $\mathcal{S}_\partial^s(X \times D^i)$ состоят из классов конкордантных относительно границы (см. [2; с. 559]) простых гомотопических эквивалентностей

$$f: (M, \partial M) \rightarrow (X \times D^i, \partial(X \times D^i)),$$

где M – компактное многообразие и ограничение отображения f на границу

$$f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial(X \times D^i)$$

является гомеоморфизмом. Напомним, что конкордантность двух таких отображений

$$f_j: (M_j, \partial M_j) \rightarrow (X \times D^i, \partial(X \times D^i)), \quad j = 0, 1,$$

задается простой гомотопической эквивалентностью 4-ад

$$\begin{aligned} (h; g, f_0, f_1): (W; V, M_0, M_1) &\rightarrow ((X \times D^i) \times I; \partial(X \times D^i) \times I, \\ &\quad (X \times D^i) \times \{0\}, (X \times D^i) \times \{1\}), \end{aligned}$$

где

$$I = [0, 1], \quad V = \partial M_0 \times I, \quad \partial V = \partial M_0 \cup \partial M_1$$

и

$$g = \partial f_0 \times \text{Id}: V \rightarrow \partial(X \times D^i) \times I.$$

Пусть $Y^{n-q} \subset X^n$ – подмногообразие коразмерности q в n -мерном топологическом многообразии X . Тогда квадрат F (1) фундаментальных групп определен. Из диаграммы (2) и алгебраической точной последовательности теории перестроек (9) (см. [9; с. 136]) мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \mathbb{S}_{m+1}(X) & \longrightarrow & H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(X)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & LS_{m-q}(F) & \longrightarrow & L_{m-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array} \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует гомотопически коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))
 \end{array} \quad (11)$$

спектров такой, что коммутативная диаграмма (10) получается каноническим отображением гомотопической длинной точной последовательности верхнего отображения в (11) в такую же последовательность нижнего отображения в (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – трубчатая окрестность с границей ∂U подмногообразия Y , и пусть $Z = X \setminus Y$. Определим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H_{m-q}(Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{m-q}(\pi_1(Y)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_m(U, \partial U; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_m(X, Z; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))
 \end{array} \quad (12)$$

так, что горизонтальные отображения соответствуют сигнатурным отображениям, верхние вертикальные отображения являются отображениями трансфера (см. [1; с. 579]), а нижние вертикальные отображения являются каноническими. Квадрат F индуцирует гомотопически коммутативную диаграмму спектров [14]

$$\begin{array}{ccc}
 \partial U_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & Z_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \\
 \downarrow \mathbf{i} & & \downarrow \mathbf{j} \\
 U_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}of \mathbf{i} & \xrightarrow{\mathbf{r}} & \mathcal{C}of \mathbf{j},
 \end{array} \quad (13)$$

вертикальные столбцы которой являются корасслоениями. Для всех m мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(\mathcal{C}of \mathbf{i}) & \xrightarrow[\cong]{\pi_m(r)} & \pi_m(\mathcal{C}of \mathbf{j}) \\ \parallel & & \parallel \\ H_m(U, \partial U; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & H_m(X, Z; \mathbf{L}_\bullet), \end{array} \quad (14)$$

где равенства следуют по определению $H_m(\ ; \)$, а нижнее горизонтальное отображение является изоморфизмом вырезания. Следовательно, отображение $\pi_m(r)$ является изоморфизмом и отображение $\mathbf{r}$ – слабая гомотопическая эквивалентность. Теперь из [1] следует, что $\mathbf{r}$ – гомотопическая эквивалентность. Согласно [1; с. 579] верхний квадрат диаграммы (12) реализуется на уровне спектров гомотопически коммутативной диаграммой спектров

$$\begin{array}{ccc} Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \\ \sim \downarrow s & & \downarrow \\ \Omega^q \mathcal{C}of \mathbf{i} & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)), \end{array} \quad (15)$$

в которой левое вертикальное отображение является слабой гомотопической эквивалентностью [1; с. 579] и, следовательно, согласно [14] гомотопической эквивалентностью. В силу естественности сигнатурного отображения нижний квадрат диаграммы (12) реализуется на уровне спектров гомотопически коммутативной диаграммой спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}of \mathbf{i} & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(\partial U) \rightarrow \pi_1(U)) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}of \mathbf{j} & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)), \end{array} \quad (16)$$

и согласно (14) левое вертикальное отображение является гомотопической эквивалентностью. Из диаграмм (15) и (16) мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^q \mathcal{C}of \mathbf{j} & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)), \end{array} \quad (17)$$

в которой левое вертикальное отображение является гомотопической эквивалентностью. В силу естественности сигнатурного отображения имеет место гомотопическая диаграмма спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^q \mathcal{C}of \mathbf{j} & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)). \end{array} \quad (18)$$

Согласно (17) нижнее горизонтальное отображение с точностью до гомотопии пропускается через $\mathbf{L}(\pi_1(Y))$. Это доказывает предложение.

Напомним определение нормального отображения в замкнутое топологическое многообразие X [1; с. 604]. Предположим, X имеет размерность n . Тогда топологическое нормальное отображение $(f, b): M \rightarrow X$ состоит из следующего:

- i) n -мерного многообразия M с нормальным топологическим блочным расслоением

$$\begin{aligned}\nu_M &= \nu_{M \subset S^{n+k}}: M \rightarrow \text{ВТОР}(k), \\ \rho_M: S^{n+k} &\rightarrow S^{n+k} / \overline{S^{n+k} - E(\nu_M)} = T(\nu_M);\end{aligned}$$

- ii) n -мерного многообразия X с топологическим блочным расслоением

$$\begin{aligned}\nu_X: X &\rightarrow \text{ВТОР}(k), \\ \rho_X: S^{n+k} &\rightarrow T(\nu_X);\end{aligned}$$

- iii) отображения степени один $f: M \rightarrow X$;
iv) отображения топологических блочных расслоений $b: \nu_M \rightarrow \nu_X$, накрывающего f , такого, что

$$T(b)_*(\rho_M) = \rho_X \in \pi_{n+k}(T(\nu_X)).$$

Топологическое нормальное структурное множество многообразия X является множеством классов конкордантности нормальных отображений $(f, b): M \rightarrow X$. Для $n \geq 5$ это множество совпадает с $[X, G/\text{ТОР}]$ (см. [1; с. 553–559]).

Пусть $f: M \rightarrow X$ – нормальное отображение, которое трансверсально подмногообразию Y . Пусть $N = f^{-1}(Y)$. Предположим, что ограничение $f|_N: N \rightarrow Y$ является простой гомотопической эквивалентностью. Два таких нормальных отображения $f_i: M_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, с $N_i = f_i^{-1}(Y)$ будут считаться *эквивалентными*, если существует нормальный кобордизм $F: W \rightarrow X$ со следующими свойствами:

- i) $\partial W = M_1 \cup M_2$ и $F|_{M_i} = f_i$, $i = 1, 2$;
ii) F трансверсально Y с $F^{-1}(Y) = V$ и $\partial V = N_1 \cup N_2$;
iii) ограничение $F|_V$ является s -кобордизмом между $F|_{N_i} = f_i$, $i = 1, 2$.

Обозначим классы эквивалентности таких отображений через $\mathcal{NS}_n(X, Y)$, где $n = \dim X$.

Множество $\mathcal{NS}_n(X, Y)$ имеет отмеченную точку, которая задается представителем $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$, где $f|_M: M \rightarrow X$ – гомеоморфизм.

Существует естественное отображение

$$\varphi: \mathcal{NS}_n(X, Y) \rightarrow [X, G/\text{ТОР}],$$

определяемое композицией забывающего отображения

$$\mathcal{NS}_n(X, Y) \rightarrow \mathcal{T}^{\text{ТОР}}(X)$$

с отображением $\mathcal{T}^{\text{ТОР}} \rightarrow [X, G/\text{ТОР}]$, где $\mathcal{T}^{\text{ТОР}}(X)$ – множество классов конкордантности t -триангуляций $(f, b): M \rightarrow X$ (см. [1; с. 553–555]).

Мы определим отображение (действие)

$$\lambda: L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \rightarrow \mathcal{NS}_n(X, Y)$$

следующим образом. Пусть $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$ представляет некоторый класс $a \in \mathcal{NS}_n(X, Y)$. Для любого элемента $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ существует такое действие x на ограничение $f|_N: N \rightarrow Y$, что если $f_1 = x(f|_N): N_1 \rightarrow Y$ является результатом этого действия, то f_1 – простая гомотопическая эквивалентность (см. [8; с. 196], [9; теоремы 5.6, 6.5 и § 10]).

Построение этого действия в [9] задает нормальное отображение многообразия с границей $G: V \rightarrow Y \times I$ с $\partial V = N \cup N_1$, $G|_N = f|_N: N \rightarrow Y \times \{0\}$ и $G|_{N_1} = f_1: N_1 \rightarrow Y \times \{1\}$. Препятствие к перестройке отображения G относительно границы ∂V равно $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$.

Пусть E_ξ – трубчатая окрестность подмногообразия Y в X и ∂E_ξ – граница этой окрестности. Отображение f трансверсально подмногообразию Y и $f|_N: N \rightarrow Y$ – простая гомотопическая эквивалентность. Следовательно, $f|_N$ индуцирует простую гомотопическую эквивалентность трубчатых окрестностей и их границ. Обозначим эту эквивалентность через

$$g_0 = f|_{(E_\nu, \partial E_\nu)}: (E_\nu, \partial E_\nu) \rightarrow (E_\xi, \partial E_\xi)$$

(см., например, [1; с. 579] и [9; с. 33]), где E_ν – трубчатая окрестность подмногообразия N в M и ∂E_ν – граница этой окрестности.

Отображение трансфера $p^\sharp$ спектров в диаграмме (6) индуцирует отображение трансфера L -групп

$$p^!: L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \rightarrow L_{n+1}(\pi_1(\partial E_\xi) \rightarrow \pi_1(E_\xi))$$

и отображение трансфера

$$p^b: \mathcal{S}_{n-q}(Y) \rightarrow \mathcal{S}_n(E_\xi, \partial E_\xi)$$

структурных множеств.

Геометрическое определение отображения $p^!(x)$ (см. [1; с. 562–565] и [9; с. 133]) дает такое нормальное отображение многообразий с границами

$$H: \Omega \rightarrow (E_\xi, \partial E_\xi) \times I,$$

что H трансверсально $Y \times I$, $H^{-1}(Y \times I) = V$ и $H|_V = G$. Ограничение отображения H на нижнюю границу есть $g_0 = f|_{(E_\nu, \partial E_\nu)}$. Ограничение H на верхнюю границу дает простую гомотопическую эквивалентность пар

$$g_1: (E_\eta, \partial E_\eta) \rightarrow (E_\xi, \partial E_\xi),$$

которая по определению является результатом действия $p^!(x)$ на простую гомотопическую эквивалентность $(f|_{(E_\nu, \partial E_\nu)})$. Ограничение $g_1|_{N_1}$ есть f_1 . В частности, элемент

$$p^b(f_1: N_1 \rightarrow Y) \in \mathcal{S}_n(E_\xi, \partial E_\xi)$$

представляется простой гомотопической эквивалентностью пар

$$g_1: (E_\eta, \partial E_\eta) \rightarrow (E_\xi, \partial E_\xi),$$

которая трансверсальна подмногообразию Y с $g_1^{-1}(Y) = N_1$. Кобордизм Ω и отображение $f: M \rightarrow X$ продолжаются до нормального кобордизма $F: W \rightarrow X$ с $\partial W = M \cup M_1$ [15; с. 45]. Ограничение $F|_{M_1}$ определяет элемент $x(a) \in \mathcal{NS}_n(X, Y)$. Отметим, что для $x \neq 1$ отображение F не определяет эквивалентности между $f = F|_M$ и $F|_{M_1}$ в вышеуказанном смысле, поскольку V не является s -кобордизмом.

ЛЕММА 1. *Определение отображения λ корректно и является действием группы $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ на множестве $\mathcal{NS}_n(X, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G': V' \rightarrow Y$ обозначает такой другой нормальный кобордизм, построенный как и выше, что $\partial V' = N \cup N'_1$, $G'|_N = f|_N$ и $G'|_{N'_1} = f'_1$. Пусть $F': W' \rightarrow X$ обозначает такой нормальный кобордизм, продолжающий G' и $f: M \rightarrow X$, что $\partial W = M \cup M'_1$ [15; с. 45]. Ограничение $F|_{M'_1}$ является другим представителем элемента $x(a) \in \mathcal{NS}_n(X, Y)$. Мы докажем, что представители $F|_{M_1}$ и $F'|_{M'_1}$ эквивалентны в $\mathcal{NS}_n(X, Y)$. Из [9; § 10.4] следует, что существует отображение нормального кобордизма $\Psi: \Lambda \rightarrow Y$ с нижним краем $f|_N \times I: N \times I \rightarrow Y$, с левой стороной $G: V \rightarrow Y$, с правой стороной $G': V' \rightarrow Y$ и с верхним краем, являющимся нормальным s -кобордизмом между $G|_{N_1}: N_1 \rightarrow Y$ и $G'|_{N'_1}: N'_1 \rightarrow Y$. Пусть $W \cup_\tau M \times I \cup_{\tau'} W'$ обозначает пространство, полученное посредством очевидных приклеивающих отображений $\tau: M \times \{0\} \rightarrow W$ и $\tau': M \times \{1\} \rightarrow W'$. Пусть

$$H = F \cup (f \times I) \cup F': W \cup_\tau M \times I \cup_{\tau'} W' \rightarrow X.$$

Пусть

$$\rho: V \cup_{\tau|_{N \times \{0\}}} N \times I \cup_{\tau'|_{N \times \{1\}}} W' \rightarrow W \cup_\tau M \times I \cup_{\tau'} W'$$

обозначает каноническое вложение, и используем ρ для приклеивания Λ к $W \cup_\tau M \times I \cup_{\tau'} W'$ для получения пространства

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda \cup_\rho (W \cup_\tau M \times I \cup_{\tau'} W')$$

и отображения

$$\Psi \cup_\rho (H): \tilde{\Lambda} \rightarrow X.$$

Согласно [15; с. 45] мы можем продолжить $\Psi \cup_\rho (H)$ до нормального кобордизма $\Theta: \Omega \rightarrow X$, чье основание есть $f \times I: M \times I \rightarrow X$ и чей верх есть эквивалентность в определенном выше смысле между $f_1: M_1 \rightarrow X$ и $f'_1: M'_1 \rightarrow X$. Используя те же аргументы, как и в определении отображения λ , мы можем добиться, чтобы ограничение отображения Θ на верхнюю границу было трансверсально подмногообразию Y . Доказательство того, что мы имеем действие группы, вытекает стандартно из того факта, что действие $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ на $\mathcal{S}_{n-q}(Y)$ является действием группы [9; § 10].

Существует естественное геометрическое отображение

$$\alpha_1: [X \times D^1, X \times S^0; G/\text{TOP}, *] \rightarrow L_{n-q+1}(\pi_1(Y)),$$

получаемое композицией отображения ограничения

$$[X \times D^1, X \times S^0; G/\text{TOP}, *] \rightarrow [Y \times D^1, Y \times S^0; G/\text{TOP}, *]$$

с отображением

$$[Y \times D^1, Y \times S^0; G/\text{TOP}, *] \rightarrow L_{n-q+1}(\pi_1(Y)).$$

Аналогично, имеет место естественное геометрическое отображение

$$\alpha: [X; G/\text{TOP}] \rightarrow L_{n-q+1}(\pi_1(Y)).$$

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow [X \times D^1, X \times S^0; G/\text{TOP}, *] &\xrightarrow{\alpha_1} L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \\ &\xrightarrow{\lambda} \mathcal{NS}_n(X, Y) \xrightarrow{\varphi} [X, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\alpha} L_{n-q}(\pi_1(Y)) \end{aligned} \quad (19)$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Точность в $[X, G/\text{TOP}]$.* Существует естественное отображение $\mathcal{NS}_n(X, Y) \rightarrow \mathcal{S}_{n-q}(Y)$, получаемое ограничением на Y . Диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{NS}_n(X, Y) & \xrightarrow{\varphi} & [X, G/\text{TOP}] & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \alpha & \\ \mathcal{S}_{n-q}(Y) & \longrightarrow & [Y, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\sigma} & L_{n-q}(\pi_1(Y)) \end{array}$$

коммутативна, и нижняя строка точна согласно [1; предложение 7.1.4]. Таким образом, $\alpha\varphi = 0$. Пусть $f: M \rightarrow X$ обозначает нормальное отображение, определяющее такой класс в $[X, G/\text{TOP}]$, что $\alpha(f) = 0$. Тогда $\sigma(f|_N) = 0$ и $f|_N$ нормально кобордантно, скажем посредством $G: V \rightarrow Y$, нормальному отображению $g: N_1 \rightarrow Y$, которое является простой гомотопической эквивалентностью. Согласно [15; с. 45] мы можем продолжить $f \cup G: M \cup V \rightarrow X$ таким нормальным кобордизмом $F: W \rightarrow X$, что $F|_{N_1} = g$ является простой гомотопической эквивалентностью. Используя ту же последовательность рассуждений, как и в определении отображения λ , мы можем добиться, чтобы ограничение отображения $F|_{M_1}$ на верхнюю границу стало трансверсально к подмногообразию Y . По определению класс $F|_{M_1}$ лежит в образе φ .

Точность в $\mathcal{NS}_n(X, Y)$. Если $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ и $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$ представляет элемент из $\mathcal{NS}_n(X, Y)$, то нормальное отображение $x(f)$ является по определению нормально кобордантным f и тогда f и $x(f)$ имеют один и тот же образ в $[X, G/\text{TOP}]$. Это показывает по определению, что $\varphi\lambda = 0$. Пусть

$$f_i: (M_i, N_i) \rightarrow (X, Y), \quad i = 1, 2,$$

– нормальные отображения, представляющие элементы из $\mathcal{NS}_n(X, Y)$. Если f_i представляют один и тот же элемент из $[X, G/\text{TOP}]$, то существует по определению нормальный кобордизм $F': W' \rightarrow X$ от f_1 к f_2 . Поскольку $f_1|_{N_1}$ и $f_2|_{N_2}$ очевидно совпадают в $[Y, G/\text{TOP}]$, то согласно [9; § 10] имеется такой элемент $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$, что $x(f_1|_{N_1})$ является нормально s -кобордантным $f_2|_{N_2}$. Пусть $F: W \rightarrow X$ – нормальный кобордизм, построенный в определении $x(f_1)$. Мы хотим показать, что $x(f_1)$ эквивалентен f_2 в смысле, определенном

перед леммой 1. Пусть $\Psi: \Lambda \rightarrow Y$ – нормальный кобордизм, соответствующий рисунку, данному в [9; § 10]. Это соответствует нормальному кобордизму $\Psi: \Lambda \rightarrow Y$ в доказательстве леммы 1. Теперь, как и в доказательстве этой леммы, существует нормальный кобордизм $\Theta: \Omega \rightarrow X$, продолжающий Ψ . Верх этого кобордизма является таким нормальным кобордизмом $\mathcal{J}$ от $x(f_1)$ к f_2 , что $\mathcal{J}|_{\mathcal{J}^{-1}(Y)}$ является нормальным s -кобордизмом от $x(f_1|_{N_1})$ к $f_2|_{N_2}$. Как и в определении отображения λ , мы можем добиться того, чтобы отображение $\mathcal{J}$ стало трансверсально к подмногообразию Y .

Точность в $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$. Пусть $x \in \text{image}(\alpha_1)$, и пусть $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$ представляет элемент из $\mathcal{NS}_n(X, Y)$. Пусть G обозначает нормальный кобордизм в определении $x(f)$. По определению нижним отображением в G является $f|_N$, а верхним – $x(f)|_{N_1}$. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X \times D^1, X \times S^0; G/\text{TOP}] & & \\ \downarrow & \searrow \alpha_1 & \\ [Y \times D^1, Y \times S^0; G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\sigma} & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \mathcal{S}_{n-q}(Y) \end{array}$$

коммутативна и нижняя строка точна согласно [1; предложение 7.1.4] и [9; предложение 10.8], получаем, что G является s -кобордизмом согласно [9; предложение 10.4]. Таким образом, кобордизм F в определении $x(f)$ является эквивалентностью между f и $x(f)$ в смысле, определенном перед леммой 1. Пусть $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ и $f \in \mathcal{NS}_n(X, Y)$ таковы, что f эквивалентно $x(f)$. Пусть $F: (W, V) \rightarrow (X, Y) \times I$ обозначает нормальное отображение, построенное в определении действия x на $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$, и пусть $f_1: (M_1, N_1) \rightarrow (X, Y)$ обозначает верхнее отображение в F . Пусть $G: V \rightarrow Y \times I$ обозначает ограничение F на $F^{-1}(Y)$. Пусть $F': (W', V') \rightarrow (X, Y) \times I$ обозначает нормальное отображение, определяющее эквивалентность от $x(f)$ к f . Здесь нижним отображением будет $f_1: (M_1, N_1) \rightarrow (X, Y)$, а верхним отображением – $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$. Пусть $G': V' \rightarrow Y \times I$ обозначает ограничение F' на $(F')^{-1}(Y)$. По определению $(F')^{-1}(Y) = V'$ является s -кобордизмом. Мы отождествим верхнюю границу W с нижней границей W' и получим новое нормальное отображение $H: (\Omega, \Lambda) \rightarrow (X, Y) \times I$, чьи нижнее и верхнее отображения совпадают с $f: (M, N) \rightarrow (X, Y)$. Следовательно, нормальное отображение H лежит в $[X \times D^1, Y \times S^0; G/\text{TOP}, *]$. Нормальное отображение $H|_\Lambda: \Lambda \rightarrow Y \times I$ очевидно является объединением нормальных отображений, заданных G и G' , и имеет элемент $x \in L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ в качестве препятствия к перестройке относительно границы в силу аддитивности препятствий к перестройкам. Таким образом, $\alpha_1(H) = x$.

Пусть $\mathbf{F}$ обозначает гомотопический слой отображения

$$\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y))$$

в квадрате (11). Пусть $\mathbf{NS}(X, Y)$ обозначает q -е распетливание $\mathbf{F}$. Отождествим $\mathbf{F} = \Omega^q \mathbf{NS}(X, Y)$. Пусть

$$\mathbf{NS}_m(X, Y) = \pi_m(\mathbf{NS}(X, Y)),$$

и пусть

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{NS}_m(X, Y) \longrightarrow H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow L_{m-q}(\pi_1(Y)) \longrightarrow \cdots \quad (20)$$

обозначает гомотопическую длинную точную последовательность отображения

$$\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y)).$$

ТЕОРЕМА 2. *Используем гомоморфизм групп*

$$L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \rightarrow \mathrm{NS}_n(X, Y)$$

в (20), чтобы снабдить $\mathrm{NS}_n(X, Y)$ левым действием посредством умножения в группе $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$. Тогда имеет место изоморфизм

$$\mathrm{NS}_n(X, Y) \rightarrow \mathcal{NS}_n(X, Y)$$

$L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ -действий, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathrm{NS}_n(X, Y) & \longrightarrow & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow L_{n-q}(\pi_1(Y)) \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathcal{NS}_n(X, Y) & \longrightarrow & [X, G/\mathrm{TOP}] & \longrightarrow L_{n-q}(\pi_1(Y)) \end{array}$$

коммутативной. В частности, имеется групповая структура на $\mathcal{NS}_n(X, Y)$, делающая (19) точной последовательностью групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [9; с. 116, 117 и 136] и [1; § 7.2] имеют место коммутативные квадраты

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ [X \times D^1, X \times S^0; G/\mathrm{TOP}] & \longrightarrow & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ [X; G/\mathrm{TOP}] & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)). \end{array}$$

Элементарные выкладки, использующие эти квадраты и точные последовательности в (20) и (19), дают требуемый изоморфизм $L_{n-q+1}(\pi_1(Y))$ -действий. Заключительное утверждение теоремы тривиально.

§ 4. Алгебраические свойства групп $\mathcal{NS}_n(X, Y)$

Определим спектр $\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi)$ как гомотопический слой естественного отображения

$$\Omega^q \mathbf{S}(X) \rightarrow \mathbf{LS}(F).$$

Поскольку $\mathbf{S}(X)$ определяется как гомотопический слой $X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(X))$, получаем, что $\Omega^q \mathbf{S}(X)$ является слоем верхнего отображения в (11). Спектр $\mathbf{LS}(F)$ является гомотопическим слоем нижнего отображения в квадрате (11) согласно [14; § 8.32]. Мы получаем корасслоенную последовательность

$$\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi) \longrightarrow \Omega^q \mathbf{S}(X) \longrightarrow \mathbf{LS}(F).$$

Согласно [1; § 7] имеет место изоморфизм

$$\pi_m(\mathbf{S}(X, Y, \xi)) = \mathbb{S}_{m+1}(X, Y, \xi)$$

и группы $\mathbb{S}_m(X, Y, \xi)$ входят в точную последовательность [1; предложение 7.2.6]

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{S}_{m+q+1}(X, Y, \xi) \longrightarrow \mathbb{S}_{m+q+1}(X) \longrightarrow L\mathbb{S}_m(F) \longrightarrow \cdots. \quad (21)$$

Согласно [14; § 8.31] и [12; лемма 1] гомотопически коммутативный квадрат в (11) можно продолжить до бесконечной гомотопически коммутативной диаграммы спектров

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{NS}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{S}(X) & \longrightarrow & \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \quad (22) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots \longrightarrow & \mathbf{LS}(F) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

в которой каждые строка и столбец являются корасслоенными последовательностями.

ТЕОРЕМА 3. Применяя π_0 к (22), мы получаем бесконечный коммутативный комплекс групп

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow \mathbb{S}_{m+1}(X, Y, \xi) & \rightarrow & \mathbb{N}\mathbb{S}_m(X, Y) & \rightarrow & L_m(\pi_1(X \setminus Y)) & \rightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow \mathbb{S}_{m+1}(X) & \rightarrow & H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) & \rightarrow & L_m(\pi_1(X)) & \rightarrow & \cdots \quad (23) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow LS_{m-q}(F) & \rightarrow & L_{m-q}(\pi_1(Y)) & \rightarrow & L_m(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \rightarrow & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

в котором все строки и столбцы точны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку комплекс в (22) является гомотопически коммутативным, получаем, что комплекс в теореме является коммутативным. Поскольку столбцы и строки в (22) являются корасслоенными последовательностями, получаем, что все строки и столбцы в (23) точны.

ЛЕММА 2. Пусть

обозначает гомотопически коммутативную диаграмму, в которой строка и столбец являются корасслоениями. Тогда кослои наклонных отображений естественно гомотопически эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [12].

Бесконечная гомотопически коммутативная диаграмма (22) содержит гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega \mathbf{L}\mathbf{S}(F) & \longrightarrow & \Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{N}\mathbf{S}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^q \mathbf{S}(X) & \longrightarrow & \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X)), \quad (24)
 \end{array}$$

в которой все строки и столбцы являются корасслоениями. По лемме 2 кослой отображения

$$\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi) \rightarrow \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet),$$

полученный из диаграммы (24), естественно гомотопически эквивалентен кослою отображения

$$\Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)),$$

полученного из диаграммы (24). Но последний кослой является спектром $\mathbf{LP}(F)$ по определению. Таким образом, мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q \mathbf{NS}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{LP}(F). \end{array} \quad (25)$$

Поскольку гомотопические слои верхнего и нижнего отображений в (25) одинаковы, а именно равны $\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi)$, получаем, что (25) является универсально-притягивающим и, следовательно, универсально-отталкивающим гомотопически коммутативным квадратом спектров.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\mathbf{NS}_{m+q} = \mathbf{NS}_{m+q}(X, Y), \quad \mathbb{S}_{m+q}(\xi) = \mathbb{S}_{m+q}(X, Y, \xi).$$

Тогда коса точных последовательностей, задаваемая (25), есть

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{m+1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_{m+q}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & \mathbb{S}_{m+q}(\xi) & \longrightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{NS}_{m+q} & & & \mathbf{LP}_m(F) & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & \mathbb{S}_{m+q+1}(\xi) & \longrightarrow & H_{m+q}(X; \mathbf{L}) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(Y)) & \longrightarrow \end{array} \quad (26)$$

Бесконечная в двух направлениях диаграмма (22) содержит гомотопически коммутативную поддиаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X)) & \longrightarrow & \Omega^q \mathbf{S}(X) & \longrightarrow & \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \mathbf{LS}(F) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)). \end{array}$$

Поскольку каждая строка в этой диаграмме является корасслоенной последовательностью, получаем, что правое вертикальное отображение $\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y))$ в этой диаграмме пропускается с точностью до гомотопии через гомотопический кослой отображения $\Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathbf{LS}(F)$. Но по лемме 2 и из бесконечной в двух направлениях диаграммы (22) имеем

$$\begin{aligned} & \text{homotopy cofiber}[\Omega^{q+1} \mathbf{L}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathbf{LS}(F)] \\ & \sim \text{homotopy cofiber}[\Omega^q \mathbf{S}(X, Y, \xi) \rightarrow \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet)] \\ & \sim \text{homotopy cofiber}[\Omega \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \rightarrow \Omega^q \mathbf{L}(\pi_1(X \setminus Y))] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{LP}(F). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbf{LP}(F) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)). \end{array}$$

Определение отображения $\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y))$ дано после (18) в доказательстве предложения 2. Оно является композицией четырех отображений

$$\Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow \Omega^q \mathcal{C}of \mathbf{j} \xrightarrow{\sim} Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \longrightarrow \mathbf{L}(\pi_1(Y)).$$

Так мы можем продолжить диаграмму, полученную выше, до гомотопически коммутативной диаграммы спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{LP}(F) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)). \end{array} \quad (27)$$

Как и в доказательстве теоремы 3, мы можем сопоставить (27) бесконечную в двух направлениях гомотопически коммутативную диаграмму и применить π_0 к этой диаграмме, чтобы получить бесконечную в двух направлениях коммутативную диаграмму групп

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & H_m(X \setminus Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & H_{m-q}(Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & L_{m-q+1}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & LP_{m-q}(F) & \longrightarrow & L_{m-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow \cdots \quad (28) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \mathbb{S}_m(X \setminus Y) & \longrightarrow & \mathbb{S}_m(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \mathbb{S}_{m-q}(Y) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

строки и столбцы которой точны. Это диаграмма из [1; предложение 7.2.6], и гомотопически коммутативный квадрат (27) служит для реализации бесконечной в двух направлениях коммутативной диаграммы (28) на уровне спектров.

ТЕОРЕМА 5. *Как и в доказательстве теоремы 4, мы можем сопоставить гомотопически коммутативному квадрату (27) бесконечную в двух направлениях гомотопически коммутативную диаграмму, строки и столбцы которой*

являются корасслоенными последовательностями, и получить из диаграммы гомотопический универсально-отталкивающий квадрат, который в данной ситуации есть

$$\begin{array}{ccc}
 Y_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \Omega^{q-1}((X \setminus Y)_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q-1} \mathbf{SN}(X, Y).
 \end{array} \quad (29)$$

Коса точных последовательностей, определяемая (29), есть

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & \mathbb{S}_{m-q+1}(Y) & \longrightarrow & H_{m-1}(X \setminus Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & H_{m-1}(X; \mathbf{L}) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & H_{m-q}(Y; \mathbf{L}_\bullet) & & \mathbf{NS}_{m-1}(X, Y) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \longrightarrow & H_m(X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{m-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathbb{S}_{m-q}(Y) & \longrightarrow
 \end{array}$$

ТЕОРЕМА 6. Как и в доказательстве теоремы 4, мы можем сопоставить гомотопически коммутативному квадрату (27) бесконечную в двух направлениях гомотопически коммутативную диаграмму, строки и столбцы которой являются корасслоенными последовательностями, и получить из диаграммы гомотопический универсально-отталкивающий квадрат, который в данной ситуации есть

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{S}(X \setminus Y) & \longrightarrow & \mathbf{S}(X, Y, \xi) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z \wedge \mathbf{L}_\bullet & \longrightarrow & \mathbf{NS}(X, Y).
 \end{array} \quad (30)$$

Коса точных последовательностей, определяемая (30), есть

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_m(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & \mathbb{S}_m(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \mathbb{S}_{m-q}(Y) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & \mathbb{S}_m(X \setminus Y) & & \mathbf{NS}_{m-1}(X, Y) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \longrightarrow & \mathbb{S}_{m-q-1}(Y) & \longrightarrow & H_{m-1}(X \setminus Y; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{m-1}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow
 \end{array}$$

Пусть $Y \subset X \subset W$ – тройка замкнутых топологических многообразий такая, что n – размерность X , q – коразмерность Y в X и q' – коразмерность X в W . Мы будем предполагать, что каждое подмногообразие является локально плоским в объемлющем многообразии и удовлетворяет условиям, сформулированным в [8; с. 570] для пары многообразий. В этом случае мы можем описать соотношения между группами $\mathbf{NS}_*(W, Y)$, $\mathbf{NS}_*(X, Y)$ и множествами нормальных инвариантов многообразий X , W и $W \setminus X$.

ТЕОРЕМА 7. *Существует коса точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n-q-1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \mathbf{NS}_n(X, Y) & \longrightarrow & H_{m-1}(W \setminus X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & \mathbf{NS}_m(W, Y) & & H_n(X; \mathbf{L}_\bullet) & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 \longrightarrow & H_m(W \setminus X; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & H_m(W; \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (31)$$

где $m = n + q'$ – размерность многообразия W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{q'+q}(W_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)) \\
 \downarrow & & \parallel \\
 \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{L}(\pi_1(Y)),
 \end{array} \quad (32)$$

где левое вертикальное отображение является реализацией на уровне спектров композиции отображения

$$H_m(W; \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow H_m(W, W \setminus X; \mathbf{L}_\bullet)$$

из гомологической длинной точной последовательности пары $(W, W \setminus X)$ и изоморфизма

$$H_m(W, W \setminus X; \mathbf{L}_\bullet) \longrightarrow H_{m-q'}(X; \mathbf{L}_\bullet).$$

Это аналогично ситуации в предложении 2. Вертикальные отображения в квадрате (32) индуцируют отображение между гомотопическими слоями горизонтальных отображений [14], и мы получаем гомотопически коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{q+q'} \mathbf{NS}(W, Y) & \longrightarrow & \Omega^{q+q'}(W_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^q \mathbf{NS}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^q(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet).
 \end{array} \quad (33)$$

Он будет универсально-отталкивающим, поскольку кослои горизонтальных отображений естественно гомотопически эквивалентны спектру $\mathbf{L}(\pi_1(Y))$. Коса точных последовательностей, определяемая (33), дана в диаграмме (31).

Список литературы

- [1] A. A. Ranicki, *Exact sequences in the algebraic theory of surgery*, Math. Notes, **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1981.
- [2] A. A. Ranicki, “The total surgery obstruction”, *Algebraic topology* (Proc. Sympos., Univ. Aarhus, Aarhus 1978), Lecture Notes in Math., **763**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 275–316.
- [3] A. Bak, “Odd dimension surgery groups of odd torsion groups vanish”, *Topology*, **14**:4 (1975), 367–374.

- [4] A. Bak, “The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyerelementary subgroups”, *Algebraic K-theory* (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, IL, 1976), *Lecture Notes in Math.*, **551**, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 384–409.
- [5] I. Hambleton, I. Madsen, “On the computation of the projective surgery obstruction groups”, *K-theory*, **7**:6 (1993), 537–574.
- [6] C. T. C. Wall, “Classification of Hermitian forms. VI: Group rings”, *Ann. of Math.* (2), **103**:1 (1976), 1–80.
- [7] S. C. Ferry, A. A. Ranicki, J. Rosenberg (eds.), *Novikov conjectures, index theorems and rigidity*, vol. 1 (Oberwolfach, 1993), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **226**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] A. A. Ranicki, *Algebraic L-theory and topological manifolds*, *Cambridge Tracts in Math.*, **102**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [9] C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Second Edition, *Math. Surveys Monogr.*, **69**, ed. A. A. Ranicki, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [10] I. Hambleton, A. Ranicki, L. Taylor, “Round L -theory”, *J. Pure Appl. Algebra*, **47**:2 (1987), 131–154.
- [11] Ю. В. Муранов, И. Хэмблтон, “Проективные группы препятствий к расщеплению вдоль односторонних подмногообразий”, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 65–86.
- [12] Ю. В. Муранов, “Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:6 (1995), 107–132.
- [13] Ю. В. Муранов, Д. Реповш, “Группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий”, *Матем. сб.*, **188**:3 (1997), 127–142.
- [14] R. Switzer, *Algebraic topology—homotopy and homology*, *Grund. Math. Wiss.*, **212**, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [15] S. López de Medrano, *Involutions on manifolds*, *Ergeb. Math. Grezgeb.*, **59**, Springer-Verlag, New York, 1971.

А. Бак (A. Bak)

University of Bielefeld, Germany

E-mail: bak@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступила в редакцию

23.05.2005

Ю. В. Муранов (Yu. V. Muranov)

Витебский государственный университет, Беларусь

E-mail: ymuranov@mail.ru