Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Свойства рядов экспонент с последовательностью показателей, подчиненной условию типа Ле-винсона, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 6, 25–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:05:42

УДК 517.53

А. М. Гайсин

Свойства рядов экспонент с последовательностью показателей, подчиненной условию типа Левинсона

В работе показано, что если последовательность показателей ряда Дирихле удовлетворяет условию типа Левинсона, то для модуля суммы ряда существует неулучшаемая оценка роста снизу на кривых ограниченного наклона, зависящая только от коэффициентов и показателей ряда.

Библиография: 21 название.

В статье речь идет об оценке снизу роста на кривых целых функций, представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sup_{n \geq 1} |a_n| \neq 0. \quad (0.1)$$

Предполагается, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, показателей ряда (0.1) удовлетворяет условию

$$\int_0^b \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad (0.2)$$

где

$$h(\delta) = \int_0^{\infty} Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad (0.3)$$

а $b > 0$ такое, что $h(b) = e$. Отметим, что билогарифмическое условие (0.2) впервые появилось в исследованиях Н. Левинсона и Н. Сьоберга. При выполнении аналога условия (0.2) Левинсон в 1938 г. доказал теорему [1], которая “явилась далеко идущим обобщением принципа максимума модуля для аналитических функций . . . Независимо от Левинсона и, по-видимому, одновременно с ним эту теорему в несколько иной форме обнаружил Сьоберг [2]” (см. [3]). Условие (0.2) принято называть *условием Левинсона*.

Хорошо известно следующее утверждение [4] (для лакунарных степенных рядов соответствующее утверждение доказано в [5]): для того чтобы сумма всякого ряда Дирихле (0.1), абсолютно сходящегося во всей плоскости, не была ограничена на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность Λ удовлетворяла условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (0.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00417-а).

В [6] доказано, что при выполнении условия (0.2) (будет показано, что условие (0.2) сильнее условия (0.4)) сумма ряда (0.1) не может быть ограничена на любой кривой γ вида $\gamma(t) = t + ig(t)$, $0 \leq t < \infty$, имеющей ограниченный наклон, т.е.

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = M_\gamma < \infty.$$

Здесь решается следующая задача. Пусть выполняется условие (0.2), а кривая γ имеет ограниченный наклон. Что можно сказать о скорости роста суммы ряда (0.1) вдоль γ , если известны его показатели и коэффициенты? Отметим, что при выполнении единственного условия (0.4) об асимптотическом поведении ряда Дирихле (0.1) даже на луче $\mathbb{R}_+$ ничего не известно. Однако, если последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ удовлетворяет некоторому дополнительному требованию регулярности (т.е. последовательность Λ в некотором смысле правильно распределена), то логарифм модуля суммы ряда (0.1) на достаточно плотной последовательности точек кривой может быть точно оценен как сверху, так и снизу через логарифм функции $M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|$. Это утверждение восходит к известной задаче Пойа из [7] и доказано в статье [8]. Но в общей ситуации при выполнении одного лишь условия (0.4) (и даже более сильного условия (0.2)) имеются ряды Дирихле (0.1), для которых [8]

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln M(\sigma)} = 0.$$

В связи с этим естественно возникает вопрос: логарифм какой неограниченно возрастающей и достаточно правильной функции, желательной определяемой через коэффициенты и показатели ряда (0.1), является оптимальной минорантой для логарифма модуля суммы этого ряда на любой кривой ограниченного наклона?

Цель статьи – показать, что при выполнении условия типа Левинсона (0.2) такая миноранта существует и в качестве ее можно брать максимальный член некоторого ряда Дирихле вида $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}$.

§ 1. Предварительные сведения. Леммы

Через L обозначим класс всех непрерывных на $[0, \infty)$ функций $w = w(x)$ таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Пусть

$$W = \left\{ w : w \in L, \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \quad \Omega = \left\{ w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow 0, x \rightarrow \infty \right\}.$$

Возрастающая последовательность натуральных чисел $P = \{p_n\}$ называется *интерполяционной*, если найдется функция $w \in \Omega$, зависящая только от последовательности $\{p_n\}$ и такая, что для любой последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция экспоненциального типа $\varphi(z)$, обладающая следующими свойствами (см. [9]):

$$\text{а) } \varphi(p_n) = b_n, \quad n \geq 1, \quad \text{б) } \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = M(r; \varphi) \leq e^{w(r)}.$$

Интерполяционный метод был применен А. И. Павловым в [10], где было показано, что если

$$\text{с) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty, \quad \text{д) } \frac{n}{p_n} \downarrow, \quad (1.1)$$

то

$$d(f; \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|; f)} = 1, \quad (1.2)$$

где $f(z)$ – целая функция, заданная лакунарным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad (1.3)$$

а γ – любая кривая, уходящая в бесконечность. Ранее равенство (1.2) было доказано Т. Ковари для последовательностей $\{p_n\}$ таких, что $p_n > n(\ln n)^{1+\varepsilon}$, $n \geq n_0$, $\varepsilon > 0$ [11]. Оказывается, последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условиям (1.1), а также последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условию $p_n > cn \ln n (\ln \ln n)^{2+\eta}$, $n \geq n_1$, $c > 0$, $\eta > 0$, являются интерполяционными [9]. Последовательности $\{p_n\}$, $p_n > cn \ln n (\ln \ln n)^2$, вообще говоря, не интерполяционные [12].

В [12] доказано следующее утверждение: для того чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in \Omega$ такая, что

$$\begin{aligned} \text{е) } n(t) &\leq w(t), \quad n(t) = \sum_{p_n < t} 1, \\ \text{ф) } -\ln \prod_{p_n/2 < p_k < 2p_n} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| &\leq w(p_n), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

В статье [13] понятие интерполяционных последовательностей распространяется на произвольные вещественные последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, для которых $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и для таких последовательностей аналог равенства (1.2) доказывается для более общих рядов – рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1.4)$$

сходящихся во всей плоскости.

Для интерполяционных последовательностей Λ автоматически выполняется условие [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (1.5)$$

Однако для интерполяционности последовательности $\{\lambda_n\}$ только этого условия недостаточно [12]. При выполнении условия (1.5) будем говорить, что ряд (1.4) (сумма ряда) имеет лакуны Фейера.

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D и конечный индекс конденсации δ , где

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}, \quad \delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right|, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right). \quad (1.6)$$

Соответствующий класс всех целых функций F , представимых во всей плоскости рядами Дирихле (1.4), будем обозначать через $B(\Lambda)$.

В [8] доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – семейство всех кривых γ , уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \rightarrow \infty$, то $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$. Положим $d(F) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(F; \gamma)$, где $F \in B(\Lambda)$, а

$$d(F; \gamma) = \overline{\lim}_{\substack{s \in \gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)}, \quad M(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|. \quad (1.7)$$

Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ с лагунами Фейера было справедливо равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha^+(t)}{t^2} dt < \infty, \quad (1.8)$$

где $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$, $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} q(\lambda_n)$, $q(\lambda_n) = -\ln |Q'(\lambda_n)|$.

Отметим, что теорема А дает полное решение одной проблемы, возникшей в связи с исследованиями Пойа [7].

Условия (1.5), (1.8) означают следующее: если $n(t)$ – считающая функция последовательности Λ , то существует функция $w \in W$ такая, что

- 1) $n(t) \leq w(t)$;
- 2) $q(\lambda_n) \leq w(\lambda_n)$, $n \geq 1$.

Эти же оценки следуют и из условий е), f) критерия интерполяционности, но с функцией $w \in \Omega$. Так что условия теоремы А менее ограничительны, чем условия интерполяционности. Действительно, пусть $\Delta_j = [2^{j^2} - [2^{j^2}/j^2], 2^{j^2}]$ ($[a]$ – целая часть a), а $\{\lambda_n\}$ – возрастающая последовательность всех натуральных чисел из $\bigcup_j \Delta_j$. В [14] показано, что для этой последовательности условия (1.5) и (1.8) выполнены, хотя она не интерполяционная.

Выполнение условия (1.5) для справедливости теоремы А также существенно [4], [5]: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

существует целая функция вида (1.4), ограниченная на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Как было сказано выше, при выполнении условия (1.5) любая целая функция вида (1.4) не может быть ограничена на луче $\mathbb{R}_+$. Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию (1.5), имеет конечный индекс конденсации, но

интеграл (1.8) расходится. Для любой такой последовательности Λ существует функция $F \in B(\Lambda)$, для которой $d(F; \mathbb{R}_+) = 0$ [8]. Поэтому в этом случае изучение скорости роста функции $\ln |F(s)|$ хотя бы на луче $\mathbb{R}_+$ является актуальной задачей. Смысл основного результата статьи заключается в том, что при выполнении условия (0.2) функция $\ln |F(s)|$ допускает точную оценку на $\mathbb{R}_+$ снизу через некоторую выпуклую функцию, зависящую только от коэффициентов и показателей ряда (1.4). В этой ситуации имеются последовательности Λ , для которых выполняется условие (0.2), но интеграл (1.8) расходится [12]. Так что рассматриваемая задача содержательна и дополняет результаты статьи [8].

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, имеет конечную верхнюю плотность. Тогда функция Q из (1.6) является целой функцией экспоненциального типа. Если же выполняется условие (1.5), то функции $N(t)$, $n(t)$ и $\ln M(t; Q)$ принадлежат W [15], где

$$n(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} 1, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx, \quad M(t; Q) = \max_{|z|=t} |Q(z)|.$$

Эти обозначения мы сохраним и в дальнейшем. Будем считать, что все исключительные множества, вне которых будут получены асимптотические оценки, представляют собой объединение конечного или бесконечного числа отрезков вида $[a_n, a'_n]$, где $0 < a_1 < a'_1 < a_2 < a'_2 < \dots < a_n < a'_n < \dots$. При этом исключительное множество имеет конечную меру, если $\sum_n (a'_n - a_n) < \infty$, и конечную логарифмическую меру, если $\sum_n \ln(a'_n/a_n) < \infty$.

Приведем перечень лемм, которые будут использованы в дальнейшем.

ЛЕММА 1.1 [16]. Пусть $u \in L$, $w \in W$, а $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)}.$$

Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры имеет место асимптотическое равенство

$$u(\sigma + dh(\sigma)) = u(\sigma) + o(1),$$

где $h = h(\sigma) = w(v(\sigma))/v(\sigma)$, а d , $0 < d < \infty$, – фиксированная постоянная.

ЛЕММА 1.2 [17]. Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty, \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Тогда существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_{n-1}$, $n \geq 2$, такая, что

$$\ln |f(z)| > -20 \ln M(r_n; f), \quad |z| = r_n.$$

ЛЕММА 1.3 (Carleman–Milloux [9]). Пусть $g(z)$ – функция, аналитическая в круге $\overline{D}(z_0, R) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$,

$$m = \max_{\gamma} |g(z)|, \quad M = \max_{\overline{D}(z_0, R)} |g(z)|,$$

γ – любая кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\partial\overline{D}(z_0, R)$. Тогда для всех $z \in \overline{D}(z_0, R/6)$

$$|g(z)| \leq m^{1/4} M^{3/4}.$$

ЛЕММА 1.4 [18]. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок такой, что $\rho(r) \rightarrow 1$, $r^{1-\rho(r)} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если a_n , $n \geq 1$, – положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{n}{a_n^{\rho(a_n)}} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty,$$

то целая функция

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{a_n^2}\right)$$

обладает следующими свойствами:

1) при $\varphi \neq \pm\pi/2$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi) = \pi\Delta |\cos \varphi|;$$

2) вне кружков $\{z : |z \pm a_n i| < 1\}$, $n \geq 1$, для любого $\varepsilon > 0$ при $r > r_0(\varepsilon)$ верна оценка

$$\ln |g(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^{\rho(r)}.$$

Лемма 1.4 есть частный случай теоремы [18; гл. I, § 2, теорема 1.2.7] (см. замечание к теореме 1.2.5).

ЛЕММА 1.5 [19]. Пусть $\alpha(r)$ – положительная не убывающая и непрерывная на $[0, \infty)$ функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, принадлежащая классу сходимости, т.е.

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho+1}} dr < \infty.$$

Тогда существует уточненный порядок $\rho(r)$ функции $\alpha(r)$ такой, что

$$\int_1^{\infty} r^{\rho(r)-\rho-1} dr < \infty. \quad (1.9)$$

ЛЕММА 1.6 [6]. Пусть функция $u(r)$ непрерывна при $r \geq r_0$, не убывает, $u(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если $K(u)$ – непрерывная и положительная при $u \geq u_0 = u(r_0)$ функция такая, что $K(u) \downarrow$ при $u \rightarrow \infty$ и

$$\int_{u_0}^{\infty} K(u) du < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$, для всех $r \geq r_0$ вне некоторого множества $E \subset [r_0, \infty)$ конечной меры mE ,

$$mE \leq \varepsilon^{-1} \int_{u_0}^{\infty} K(u) du + K(u_0),$$

выполняется оценка

$$u(r + K(u(r))) < u(r) + \varepsilon.$$

§ 2. Условие типа Левинсона и асимптотика ряда Дирихле на кривых

Пусть $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ – кривая вида $\gamma(t) = t + ig(t)$, $\gamma(0) = 0$, имеющая ограниченный наклон, т.е.

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = M_\gamma < \infty.$$

Множество всех таких кривых обозначим через G .

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, – последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность. Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех целых функций F , представимых во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it. \quad (2.1)$$

Речь пойдет о поведении логарифма модуля суммы ряда (2.1) на кривых $\gamma \in G$.

Пусть $F \in D(\Lambda)$, $\gamma \in G$,

$$\Phi_\gamma(\sigma) = \max_{s \in \Delta(\alpha, \psi_0)} |F(s)|,$$

$$\Delta(\alpha, \psi_0) = \left\{ z : |\arg(-(z - \alpha))| \leq \psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_0 \right\},$$

$0 < \varphi_0 < \pi/4$, $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$, где $\sigma = \operatorname{Re} \alpha$, $\alpha \in \gamma$. Так как кривая γ имеет ограниченный наклон, то при некоторых φ_0 , ε_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/4$, $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$, для любых $\beta_1 \in \gamma$, $\beta_2 \in \gamma$ при $\operatorname{Re} \beta_1 \leq \operatorname{Re} \beta_2$ имеет место включение

$$\Delta(\beta_1, \psi_0) \subset \Delta(\beta_2, \psi_0), \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_0. \quad (2.2)$$

Действительно, введем в рассмотрение угол

$$\Delta(\xi, \varphi'_0) = \left\{ z : |\arg(-(z - \xi))| \leq \psi'_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2\varepsilon_0 \right\},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$. Пусть β_1 и β_2 – произвольные точки на γ , $\operatorname{Re} \beta_1 < \operatorname{Re} \beta_2$. Соединим их хордой. Так как $\gamma \in G$, то

$$\left| \frac{\operatorname{Im}(\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{Re}(\beta_2 - \beta_1)} \right| \leq q < \infty$$

равномерно для всех $\beta_1 \in \gamma$, $\beta_2 \in \gamma$. Тогда существуют φ_0 , ε_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/4$, $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$, такие, что для всех $\beta_1 \in \gamma$, $\beta_2 \in \gamma$, $\operatorname{Re} \beta_1 < \operatorname{Re} \beta_2$, угол $\Delta(\beta_1, \psi'_0)$ будет содержаться в угле $\Delta(\beta_2, \psi'_0)$. Тогда тем более $\Delta(\beta_1, \psi_0) \subset \Delta(\beta_2, \psi_0)$, где $\psi_0 = \pi/2 - \varphi_0 - \varepsilon_0$.

Из (2.2) следует, что функция $\Phi_\gamma(\sigma)$ на луче $[0, \infty)$ является непрерывной и неубывающей, причем $\Phi_\gamma(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$ (так как в противном случае $F(s) \equiv 0$). Если кривая $\gamma \in G$ фиксирована, вместо $\Phi_\gamma(\sigma)$ в дальнейшем будем писать просто $\Phi(\sigma)$.

Отметим еще один геометрический факт.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\gamma \in G$, а φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/4$, ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$, таковы, что имеет место (2.2). Если $\xi \in \gamma$, $\xi' \in \gamma$, причем $\operatorname{Re} \xi' = \operatorname{Re} \xi + d\delta$, $d = \pi\varepsilon_0^{-1}$, $0 < \delta < \infty$, то

$$\overline{D}(\xi, \delta) \subset \Delta(\xi', \psi_0), \quad (2.3)$$

где $\overline{D}(\xi, \delta) = \{z : |z - \xi| \leq \delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \gamma$, $\xi' \in \gamma$, причем $\operatorname{Re} \xi' = \operatorname{Re} \xi + d\delta$, $d = \pi\varepsilon_0^{-1}$. Через 2φ обозначим угол, под которым виден круг $\overline{D}(\xi, \delta)$ из точки ξ' . Ясно, что $|\varphi| \leq \pi/4$. Поскольку

$$\frac{2}{\pi}\varphi \leq \sin \varphi \leq \frac{1}{d} = \frac{\varepsilon_0}{\pi},$$

то видим, что $2\varphi \leq \varepsilon_0$. Следовательно, круг $\overline{D}(\xi, \delta)$ целиком содержится в угле

$$\Delta(\xi', \psi_0) = \left\{ z : |\arg(-(z - \xi'))| \leq \psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_0 \right\}.$$

Действительно, $\Delta(\xi, \psi'_0) \subset \Delta(\xi', \psi'_0)$, в частности, $\xi \in \Delta(\xi', \psi'_0)$. Поскольку $2\varphi \leq \varepsilon_0$, $\xi \in \Delta(\xi', \psi'_0)$, $\psi'_0 = \pi/2 - \varphi_0 - 2\varepsilon_0$, $\operatorname{Re} \xi' = \operatorname{Re} \xi + d\delta$, $1 < d = \pi/\varepsilon_0$, то круг $\overline{D}(\xi, \delta)$ целиком содержится в угле $\Delta(\xi', \psi_0)$, $\psi_0 = \pi/2 - \varphi_0 - \varepsilon_0$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, имеющая нулевую плотность, $\gamma \in G$, $h(\delta)$, $Q(z)$ — функции, определенные формулами (0.3), $H(\delta) = h(\delta)h_0(\delta)$, где

$$h_0(\delta) = \int_0^\infty |Q(re^{i\varphi_0})|^{-1} e^{-\delta r} dr, \quad 0 < \delta < \infty, \quad (2.4)$$

а φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/4$, — фиксированный параметр, выбранный так же, как в формуле (2.2). Положим $V(\sigma) = V_\gamma(\sigma)$, где

$$V_\gamma(\sigma) = \inf_{0 < \delta \leq 1} (H(\delta) \max_{|\xi - s| \leq \delta} |F(s)|), \quad \xi \in \gamma, \quad \operatorname{Re} \xi = \sigma.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполняется условие (0.2). Тогда для любой кривой $\gamma \in G$, для любой функции $F \in D(\Lambda)$ найдется последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma$, $z_n \rightarrow \infty$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n \rightarrow 0$, $\sigma_n = \operatorname{Re} z_n$, такая, что

$$\ln \Phi(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(z_n)|, \quad (2.5)$$

$$\ln V(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(z_n)| \quad (2.6)$$

при $z_n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение интерполирующую функцию А. Ф. Леонтьева [15]

$$\omega(\mu, \xi, F) = e^{-\xi\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(t) \left(\int_0^t F(t + \xi - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму функции $Q(\lambda)$ ($Q(\lambda)$ — функция, определенная формулой (0.3)), а $\varphi(t)$ — функция,

ассоциированная по Борелю с $Q(\lambda)$. Пусть D' – область, ограниченная контуром C . Когда η пробегает отрезок от 0 до t , точка $t - \eta$ также пробегает этот отрезок. Поскольку $0 \in \overline{D}$, то $t + \xi - \eta \in D'_\xi$, где D'_ξ – смещение D' на вектор ξ . Так как F – целая функция, то параметр ξ – любое комплексное число. Далее, $\gamma \in G$. Имея это в виду, положим $\psi_0 = \pi/2 - \varphi_0 - \varepsilon_0$, где параметры φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/4$, ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$, выбраны так, чтобы имело место соотношение (2.2). Зафиксируем φ_0 и ε_0 .

Пусть $\sigma > 0$, а $\omega(\mu, \xi, F)$ – интерполирующая функция А. Ф. Леонтьева. В данном случае $\overline{D} = \{0\}$, поэтому в качестве контура C возьмем окружность $C = \{t : |t| = \delta/6, 0 < \delta < \pi/4\}$, $\xi \in \gamma$, $\operatorname{Re} \xi = \sigma + d\delta$, $d = \pi\varepsilon_0^{-1}$, $0 < \varepsilon_0 < \pi/8$.

Рассмотрим множество

$$E(\sigma) = \{z : |\arg(-(z - \xi))| \leq \psi_0, |z - \xi| \geq d\delta\}.$$

Тогда для всех $s \in E(\sigma)$ имеет место представление [6]

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\omega(\mu, \xi, F)}{Q(\mu)} e^{\mu s} d\mu, \quad (2.7)$$

где Q – функция, определенная в (0.3), K – граница угла $\{\mu : |\arg \mu| \leq \varphi_0\}$.

Пусть $\xi' \in \gamma$, $\operatorname{Re} \xi' = \sigma$. Поскольку $\xi \in \gamma$, $\operatorname{Re} \xi = \sigma + d\delta$, $d = \pi\varepsilon_0^{-1}$, то согласно (2.2) имеем включение $\Delta(\xi', \psi_0) \subset \Delta(\xi, \psi_0)$, причем $\Delta(\xi', \psi_0) \subset E(\sigma)$. Следовательно, из (2.7) получаем оценку [6]

$$\Phi(\sigma) \leq h^*(\sigma) \max_{|z - \xi| \leq \delta/6} |F(z)|, \quad (2.8)$$

где $\xi \in \gamma$, $\operatorname{Re} \xi = \sigma + d\delta$, $h^*(\delta) = h(\delta/6)h_0(\delta)$, $0 < \delta < \pi/4$. Здесь h , h_0 – функции, заданные формулами (0.3) и (2.4).

Пусть $0 < \varepsilon \leq 1/10$. Если $\sigma \geq \sigma_0$, то $\Phi^\varepsilon(\sigma) \geq e$ и уравнение

$$h^*(\delta) = \Phi^\varepsilon(\sigma) \quad (2.9)$$

имеет единственное решение $\delta = \delta(\sigma)$, $0 < \delta < \pi/4$. Выбирая δ как решение уравнения (2.9) и применяя лемму 1.3, а также учитывая (2.3), из (2.8) получаем, что

$$\Phi^{1-\varepsilon}(\sigma) \leq \Phi^{3/4}(\sigma + L\delta) \left(\max_{\eta \in \gamma \cap \overline{D}(\xi, \delta)} |F(\eta)| \right)^{1/4}, \quad L = 2d + 1, \quad (2.10)$$

где $\overline{D}(\xi, \delta) = \{z : |z - \xi| \leq \delta\}$.

Оценим функцию $\Phi(\sigma + L\delta)$ сверху. Для этого уравнение (2.9) перепишем в виде

$$\ln \ln h^*(\delta) = u(\sigma), \quad u(\sigma) = -\ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \ln \Phi(\sigma).$$

Заметим, что функция $u(\sigma)$ не убывает, непрерывна, неотрицательна при $\sigma \geq \sigma_0$ и $u(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Пусть $K = K(t)$ – функция, обратная к функции $t = \ln \ln h^*(\delta)$. Тогда $K(u(\sigma)) = \delta$. Ясно, что функция $K(t)$ непрерывна, не убывает при $t \geq u(\sigma_0) \geq 0$.

Далее, из (2.4) видно, что $h_0(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$ и $h_0(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Убедимся, что при выполнении условия (0.2)

$$\int_0^{b_1} \ln \ln h_0(\delta) d\delta < \infty, \quad h_0(b_1) = e. \quad (2.11)$$

Действительно, имеем

$$h_0(\delta) = \int_0^\infty |Q(re^{i\varphi_0})|^{-1} e^{-\delta r} dr, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Но [15; гл. I, § 3, п. 5]

$$-\ln |Q(re^{i\varphi_0})| \leq n(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + 2r^2 \int_{pr}^\infty \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)} dt,$$

где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, $p > 1$, $r > 0$. Отсюда получаем, что

$$-\ln |Q(re^{i\varphi_0})| \leq n(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + 2r^2 \frac{p}{p-1} \int_{pr}^\infty \frac{n(t)}{t^3} dt.$$

Далее, из условия (0.2) следует, что $\ln M(r; Q) \leq w_1(r)$ для некоторой функции $w_1 \in \Omega$ [20]. Поскольку $n(r) \leq \ln M(er; Q)$, то $n(r) \leq w_2(r)$, $w_2 \in \Omega$, где $w_2(r) = w_1(er)$. Следовательно,

$$-\ln |Q(re^{i\varphi_0})| \leq w_2(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + \frac{2}{p(p-1)} w_2(pr) = w_3(r).$$

Поскольку $w_3 \in \Omega$, то условие (2.11) имеет место [9]. Но тогда с учетом (0.2) заключаем, что

$$\int_0^c \ln \ln h^*(\delta) d\delta < \infty,$$

где $h^*(\delta) = h_0(\delta)h(\delta/6)$, $c = \min\{b_1, b\}$, $h^*(c) \geq e$. Следовательно [6],

$$\int_{u(\sigma_0)}^\infty K(u) du < \infty.$$

Применим теперь лемму 1.6. Тогда для любого $\tau > 0$, для всех $\sigma \geq \sigma_0$, но вне некоторого множества $F_\tau \subset [\sigma_0, \infty)$,

$$mF_\tau \leq 2L\tau^{-1} \int_{u(\sigma_0)}^\infty K(u) du + 2LK(u(\sigma_0)), \quad K(u(\sigma_0)) = \delta(\sigma_0),$$

выполняется оценка

$$u(\sigma + 2LK(u(\sigma))) < u(\sigma) + \tau,$$

т.е.

$$\ln \ln \Phi(\sigma + 2L\delta) < \ln \ln \Phi(\sigma) + \tau.$$

Таким образом, для любого $\tau > 0$ при $\sigma \geq \sigma_0$, но вне некоторого множества $F_\tau \subset [\sigma_0, \infty)$ конечной меры

$$\ln \Phi(\sigma + 2L\delta) < e^\tau \ln \Phi(\sigma). \quad (2.12)$$

Следовательно, из (2.10), (2.12) получаем, что

$$(1 - \varepsilon) \ln \Phi(\sigma) \leq \frac{3}{4} e^\tau \ln \Phi(\sigma) + \frac{1}{4} \ln |F(\xi^*)|,$$

где ξ^* – некоторая точка из $\gamma \cap \overline{D}(\xi, \delta)$. Отсюда при $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin F_\tau$, имеем

$$\left(1 - \varepsilon - \frac{3}{4} e^\tau\right) \ln \Phi(\sigma) \leq \frac{1}{4} \ln |F(\xi^*)|. \quad (2.13)$$

Поскольку $\sigma < \operatorname{Re} \xi^* \leq \sigma + L\delta$, а функция $\Phi(\sigma)$ неубывающая, то, еще раз пользуясь оценкой (2.12), из (2.13) получаем, что

$$\left(1 - \varepsilon - \frac{3}{4} e^\tau\right) e^{-\tau} \ln \Phi(\operatorname{Re} \xi^*) \leq \frac{1}{4} \ln |F(\xi^*)|, \quad \xi^* \in \gamma.$$

Выберем $\tau > 0$ так, чтобы выполнялась оценка

$$e^\tau < \frac{1 - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{10}.$$

Тогда $4(1 - \varepsilon - 3e^\tau/4)e^{-\tau} > 1 - 8\varepsilon > 0$. Следовательно, для всех σ из $[\sigma_0, \infty)$, но вне некоторого множества $F'_\varepsilon \subset [\sigma_0, \infty)$ конечной меры найдется точка $\xi^* \in \gamma$, $\sigma < \operatorname{Re} \xi^* \leq \sigma + L\delta$, $\delta = \delta(\sigma)$, такая, что

$$(1 - 8\varepsilon) \ln \Phi(\operatorname{Re} \xi^*) \leq \ln |F(\xi^*)| \leq \ln \Phi(\operatorname{Re} \xi^*). \quad (2.14)$$

Так как $\delta(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, ε , $0 < \varepsilon \leq 1/10$, – произвольное число, а мера множества F'_ε конечна, то асимптотическое равенство (2.5) есть следствие оценок (2.14).

Докажем (2.6). Для любого δ , $0 < \delta \leq 1$, имеем

$$|F(\xi^*)| \leq \frac{H(\delta)}{H(1)} \max_{|z - \xi^*| \leq \delta} |F(z)|, \quad H(\delta) = h(\delta)h_0(\delta),$$

где ξ^* – точка кривой γ , для которой справедливо (2.14). Отсюда получаем, что

$$|F(\xi^*)| \leq \frac{1}{H(1)} \inf_{0 < \delta \leq 1} \left(H(\delta) \max_{|z - \xi^*| \leq \delta} |F(z)| \right) = \frac{V_\gamma(\operatorname{Re} \xi^*)}{H(1)}. \quad (2.15)$$

Пусть $\delta = k(\sigma)$ – решение уравнения

$$\Phi^\varepsilon(\sigma) = H(\delta), \quad (2.16)$$

а $\delta = \delta(\sigma)$ – решение уравнения (2.9). Поскольку $H(\delta) < h^*(\delta)$, то из (2.9), (2.16) следует, что $k(\sigma) < \delta(\sigma) < \pi/4$, $\sigma \geq \sigma_0$. Из (2.15), в частности, имеем

$$\begin{aligned} |F(\xi^*)| &\leq \frac{V_\gamma(\sigma^*)}{H(1)} \leq \frac{1}{H(1)} H(k(\sigma^*)) \max_{|z - \xi^*| \leq k(\sigma^*)} |F(z)| \\ &\leq \frac{1}{H(1)} \Phi^\varepsilon(\sigma^*) \max_{|z - \xi^*| \leq \delta(\sigma^*)} |F(z)|, \quad \sigma^* = \operatorname{Re} \xi^*. \end{aligned}$$

Учитывая (2.3), (2.14), отсюда получаем, что

$$\Phi^{1-8\varepsilon}(\sigma^*) \leq \frac{V_\gamma(\sigma^*)}{H(1)} \leq \frac{\Phi^\varepsilon(\sigma^*)}{H(1)} \Phi(\sigma^* + L\delta(\sigma^*)). \quad (2.17)$$

Но $\sigma < \sigma^* \leq \sigma + L\delta(\sigma)$. Следовательно,

$$\delta(\sigma^*) \leq \delta(\sigma), \quad \Phi(\sigma^* + L\delta(\sigma^*)) \leq \Phi(\sigma + 2L\delta(\sigma)),$$

где $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin F'_\varepsilon$. Но для $\sigma \in ([\sigma_0, \infty) \setminus F'_\varepsilon)$ справедлива оценка (2.12), причем

$$e^\tau < \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} < 1+2\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{10}.$$

Следовательно, из (2.12), (2.17) окончательно получаем, что

$$\Phi^{1-8\varepsilon}(\text{Re } \xi^*) \leq \frac{V_\gamma(\text{Re } \xi^*)}{H(1)} \leq \frac{\Phi^{1+3\varepsilon}(\text{Re } \xi^*)}{H(1)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{10}. \quad (2.18)$$

Осталось заметить, что (2.6) есть следствие оценок (2.18). Отметим, что в равенствах (2.5), (2.6) последовательность $\{z_n\}$ одна и та же.

§ 3. Связь роста ряда Дирихле на кривой с поведением своих коэффициентов

Пусть $B(\Lambda)$ – множество всех целых функций F , заданных во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad (3.1)$$

последовательность Λ показателей которых имеет конечную верхнюю плотность и конечный индекс конденсации.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\gamma \in G$. Если выполняется условие (0.2), то для любой функции $F \in B(\Lambda)$, имеющий вид (3.1), справедлива оценка

$$d^*(F; \gamma) \geq 1, \quad (3.2)$$

где

$$d^*(F; \gamma) = \overline{\lim}_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(z)|}{\ln \mu^*(\text{Re } z)}, \quad (3.3)$$

$$\mu^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулами А. Ф. Леонтьева для коэффициентов ряда [15]

$$a_n = \frac{e^{-\alpha \lambda_n}}{Q'(\lambda_n)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_n(t) F(t + \alpha) dt, \quad n \geq 1, \quad (3.4)$$

где $\psi_n(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией экспоненциального типа

$$Q_n(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}, \quad n \geq 1,$$

α – произвольный комплексный параметр, C – контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\overline{D_n}$ функции $Q_n(\lambda)$. В данном случае $\overline{D_n} = \{0\}$, поэтому в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = \delta, 0 < \delta \leq 1\}$.

Пусть $\alpha \in \gamma$, $\operatorname{Re} \alpha = \sigma$. Тогда из (3.4) имеем

$$|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq \max_{|t|=\delta} |\psi_n(t)| \max_{|\xi-\alpha| \leq \delta} |F(\xi)|, \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (3.5)$$

Далее,

$$\max_{|t|=\delta} |\psi_n(t)| \leq \int_0^\infty \max_{|\lambda|=\delta} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| e^{-\delta r} dr.$$

Но для любого $n \geq 1$

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n} \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_n} \right| \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right|. \quad (3.6)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} M(1; Q), \quad (3.7)$$

$$1 + \frac{r}{\lambda_n} \leq 2 \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2} \right), \quad r = |\lambda|, \quad (3.8)$$

то из (3.6)–(3.8) получаем, что

$$\max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| \leq M(1; Q) M(r; Q), \quad r \geq 0.$$

Следовательно,

$$\max_{|t|=\delta} |\psi_n(t)| \leq M(1; Q) \int_0^\infty M(r; Q) e^{-\delta r} dr, \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

С учетом оценки (3.9) из (3.5) окончательно получаем, что

$$\mu^*(\sigma) \leq M(1; Q) \int_0^\infty Q(ir) e^{-\delta r} dr \max_{|\xi-\alpha| \leq \delta} |F(\xi)|,$$

где $\alpha \in \gamma$, $\delta, 0 < \delta \leq 1$, – любое число. Поскольку $h_0(1) \leq h_0(\delta)$, $0 < \delta \leq 1$, то

$$\mu^*(\sigma) \leq \frac{M(1; Q)}{h_0(1)} H(\delta) \max_{|\xi-\alpha| \leq \delta} |F(\xi)|, \quad H(\delta) = h(\delta) h_0(\delta), \quad (3.10)$$

где

$$h(\delta) = \int_0^\infty Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad h_0(\delta) = \int_0^\infty |Q(re^{i\varphi_0})|^{-1} e^{-\delta r} dr,$$

$\varphi_0, 0 < \varphi_0 < \pi/4$, – параметр, зависящий только от величины M_γ и имеющий тот же смысл, что и в § 2.

Таким образом, из (3.10) имеем оценку

$$\mu^*(\sigma) \leq \frac{M(1; Q)}{h_0(1)} V_\gamma(\sigma). \quad (3.11)$$

Но из условия (0.2) следует (теорема 2.1), что для некоторой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma$, $z_n \rightarrow \infty$,

$$\ln V_\gamma(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(z_n)|, \quad (3.12)$$

когда $\sigma_n = \operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty$. Следовательно, оценка (3.2) есть следствие оценок (3.11), (3.12).

Теорема 3.1 доказана.

§ 4. О скорости роста ряда Дирихле на кривой ограниченного наклона

При выполнении условия (0.2) сумма ряда Дирихле (0.1) не может быть ограничена на любой кривой γ ограниченного наклона [6]. Более того, для некоторой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma$, $z_n \rightarrow \infty$ (теорема 3.1),

$$\ln \mu^*(\sigma_n) \leq (1 + o(1)) \ln |F(z_n)| \quad (4.1)$$

при $\sigma_n = \operatorname{Re} z_n \rightarrow \infty$. Здесь $\mu^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}\}$. Хорошо известно, что $\ln \mu^*(\sigma)$ – выпуклая функция, $\ln \mu^*(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ [18]. Смысл оценки (4.1) в том, что ее левая часть – выпуклая функция, которая зависит только от коэффициентов и последовательности Λ показателей ряда (0.1) и явно может быть вычислена.

Вполне уместен вопрос: нельзя ли улучшить оценку (4.1), заменив $\ln \mu^*(\sigma)$ на ее какую-нибудь выпуклую мажоранту? Данный параграф посвящен обсуждению этой задачи.

Пусть $b = \{b_n\}$, $|b_n| \geq 1$, – последовательность комплексных чисел, $\mu^*(\sigma; b) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| |b_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}\}$. Ясно, что $\mu^*(\sigma) \leq \mu^*(\sigma; b)$. Положим

$$d_b^*(F; \gamma) = \overline{\lim_{\substack{z \in \gamma \\ z \rightarrow \infty}}} \frac{\ln |F(z)|}{\ln \mu^*(\operatorname{Re} z; b)}. \quad (4.2)$$

Очевидно, $d_b^*(F; \gamma) \leq d^*(F; \gamma)$, где $d^*(F; \gamma)$ – величина, определенная формулой (3.3). Наша цель – описать класс последовательностей $b = \{b_n\}$, для которых оценка

$$d_b^*(F; \gamma) \geq 1 \quad (4.3)$$

была бы справедлива для любой функции $F \in B(\Lambda)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняется условие (0.2), $\gamma \in G$.

Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ была справедлива оценка (4.3), необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (4.4)$$

Здесь $b(t) = \max_{\lambda_n \leq t} \{\ln^+ |b_n|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Из (4.4) следует, что для некоторой функции $w_1 \in W$

$$\ln |b_n| \leq w_1(\lambda_n), \quad n \geq 1. \quad (4.5)$$

Найдется функция $w \in W$ такая, что $w_1(x) = o(w(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$w(v) = 2 \ln \mu^*(\sigma; b). \quad (4.6)$$

Положим

$$R_v = \sum_{\lambda > v(\sigma)} |a_n| |b_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}, \quad h = \frac{w(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Из условия (0.2) следует, что для некоторой функции $w_2 \in \Omega$ [20]

$$\ln M(r; Q) \leq w_2(r).$$

Поскольку $n(r) \leq \ln M(er; Q) \leq w_2(er) = w_3(r)$, $w_3 \in \Omega$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt = C < \infty.$$

Но

$$R_v \leq \mu^*(\sigma + h; b) \sum_{\lambda_n > v} e^{-h\lambda_n} \leq \mu^*(\sigma + h; b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \exp\left(\max_{t \geq v} \varphi(t)\right),$$

где $\varphi(t) = \ln t - ht$. Поскольку $\varphi'(t) = 0$ в точке

$$t_0 = h^{-1} = \frac{v(\sigma)}{w(v(\sigma))} < v(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_0,$$

то при $\sigma \rightarrow \infty$

$$R_v \leq C \mu^*(\sigma + h; b) e^{-w(v(\sigma))(1+o(1))}. \quad (4.7)$$

Применяя лемму 1.1 к функции $u(\sigma) = \ln 2 + \ln \ln \mu^*(\sigma; b)$, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры получаем оценку

$$\mu^*(\sigma + h; b) < \mu^*(\sigma; b)^{1+o(1)}. \quad (4.8)$$

Следовательно, с учетом (4.6), (4.8) из (4.7) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E

$$R_v < C \mu^*(\sigma; b)^{1+o(1)} \mu^*(\sigma; b)^{-2(1+o(1))} < 1.$$

Значит, при $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E$, имеет место оценка $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$, где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс измененного ряда Дирихле

$$F_b^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it,$$

т.е. $\nu(\sigma) = \max\{n : \mu^*(\sigma; b) = |a_n| |b_n| |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}\}$. Учитывая (4.5), (4.6) и то, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq \nu(\sigma)$, имеем

$$\begin{aligned} \mu^*(\sigma) &\leq \mu^*(\sigma; b) = |a_{\nu} Q'(\lambda_{\nu})| |b_{\nu}| e^{\lambda_{\nu} \sigma} \\ &\leq \mu^*(\sigma) e^{w_1(v(\sigma))} = \mu^*(\sigma) \mu^*(\sigma; b)^{o(1)}, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \sigma \notin E. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E

$$\ln \mu^*(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma; b). \quad (4.9)$$

Пусть ε , $0 < \varepsilon \leq 1/10$, любое, $E_{\varepsilon} = F'_{\varepsilon} \cup E$, где F'_{ε} – исключительное множество, связанное с оценками (2.14) и (2.18). Тогда из (2.14) и (2.18) получаем, что для всех $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E_{\varepsilon}$, найдется точка $\xi^* \in \gamma$, $\sigma < \operatorname{Re} \xi^* \leq \sigma + L\delta$, $0 < \delta < \pi/4$, $\delta = \delta(\sigma)$ – решение уравнения (2.9), такая, что

$$1 < V_{\gamma}(\operatorname{Re} \xi^*) \leq |F(\xi^*)|^{(1+3\varepsilon)/(1-8\varepsilon)}. \quad (4.10)$$

Пользуясь оценкой (3.11), имеем

$$\mu^*(\operatorname{Re} \xi^*) \leq \frac{M(1; Q)}{h_0(1)} V_{\gamma}(\operatorname{Re} \xi^*). \quad (4.11)$$

Учитывая то, что $(1+3\varepsilon)/(1-8\varepsilon) < 1+12\varepsilon$, при $0 < \varepsilon \leq 1/100$ из (4.10), (4.11) получаем, что для всех $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \notin E_{\varepsilon}$, найдется точка $\xi^* \in \gamma$, $\sigma < \operatorname{Re} \xi^* \leq \sigma + L\delta$, $0 < \delta < \pi/4$, такая, что

$$\mu^*(\operatorname{Re} \xi^*) < \frac{M(1; Q)}{h_0(1)} |F(\xi^*)|^{1+12\varepsilon}. \quad (4.12)$$

Множество E_{ε} имеет конечную меру и, более того,

$$E_{\varepsilon} \subset \bigcup_n [\beta_n, \beta'_n], \quad \sum_n (\beta'_n - \beta_n) = C_{\varepsilon} < \infty.$$

Следовательно, имеется последовательность отрезков Δ_n , $n \geq 1$, такая, что $\Delta_n = [\sigma_n, \sigma_n + L]$, $\sigma_n \rightarrow \infty$, причем $\bigcup_n \Delta_n \subset E_{\varepsilon}^0$, $E_{\varepsilon}^0 = [\sigma_0, \infty) \setminus E_{\varepsilon}$. Это означает, что для некоторой последовательности $\{\xi_n^*\}$, $\xi_n^* \in E_{\varepsilon}^0$, $\xi_n^* \rightarrow \infty$, одновременно выполняются оценки (4.9) и (4.12). Значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$\ln \mu^*(\operatorname{Re} \xi_n^*; b) < (1 + 12\varepsilon + o(1)) \ln |F(\xi_n^*)|, \quad \xi_n^* \rightarrow \infty.$$

Видим, что $d_b^*(F, \gamma) \geq 1$, где $d_b^*(F, \gamma)$ – величина, определенная формулой (4.2). Таким образом, оценка (4.3) имеет место, и тем самым достаточность доказана.

Необходимость доказывается тем же способом, что и необходимая часть теоремы А из [8]. Но здесь ситуация несколько иная. Поэтому, опуская основные выкладки, приведем только схему построения специального ряда Дирихле.

Допустим, что

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2} dt = \infty, \quad (4.13)$$

где $b(t) = \max_{\lambda_n \leq t} \{\ln^+ |b_n|\}$. Пусть $t_0 = \lambda_1$, а $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех точек разрыва $b(t)$, $b(t) = \beta_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$, $n \geq 1$.

Из условия (0.2), в частности, следует, что [20]

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r; Q)}{r^2} dr < \infty.$$

Следовательно, согласно лемме 1.5 существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\begin{aligned} 2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) &\leq r^{\rho(r)}, \quad r \geq 1, \\ \int_1^\infty r^{\rho(r)-2} dr &< \infty. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Пусть $w = w(r)$ функция из W такая, что $r^{\rho(r)} = o(w(r))$ при $r \rightarrow \infty$. Из (4.13), (4.14) следует, что множество индексов

$$J = \{n : n \geq 1, b(t_n) > w(t_n)\}$$

не ограничено. Пусть $I_j = [\tau_j, \tau'_j)$, $\tau_j < \tau'_j$, $j \geq 1$, – максимальные интервалы, на которых $w(t) \geq b(t)$. Ясно, что $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$. Положим $I = \bigcup_j I_j$,

$$b^*(t) = \begin{cases} b(t), & \text{если } t \notin I; \\ \min_{x \in I_j} b(x), & \text{если } t \in I_j. \end{cases}$$

Функция $b^*(t)$ неубывающая, непрерывная справа, $0 \leq b^*(t) \leq b(t)$, причем [8]

$$\int_1^\infty \frac{b^*(t)}{t^2} dt = \infty. \quad (4.15)$$

Пусть $X = \{x_j\}$ – последовательность всех точек разрыва функции $b^*(t)$. Ясно, что $\{x_j\}$ есть подпоследовательность $\{t_n\}$, т.е. $x_j = \lambda_{n_j}$, $j \geq 1$. Пусть $b^*(t) = \beta_j^*$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$. Из условия (4.15) следует существование неубывающей функции $g(t) = b^*(t)\beta^{-1}(t)$ ($\beta(t)$ – неограниченная не убывающая на $[\lambda_1, \infty)$ функция, $\beta(t) > 0$, $\beta(t) \equiv \text{const} = \eta_j$ при $x_j \leq t < x_{j+1}$, $j \geq 1$) такой, что [8]

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^\infty \frac{g(t)}{t^2} dt &= \infty, \\ g(t) &= \begin{cases} g_j, & \text{если } x_j \leq t < x_{j+1}, \quad j \geq 1; \\ g_1, & \text{если } \lambda_1 \leq t < x_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $g_j = \beta_j^*/\eta_j$, $j \geq 1$, $0 < \eta_j \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$.

Пусть $K_n = \{z : |z| = r_n\}$, $\lambda_1 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n-1} < r_n \leq 4r_n$, – последовательность окружностей из леммы 1.2 таких, что

$$\frac{1}{|Q(z)|} \leq M^{20}(r; Q), \quad |z| = r = r_n, \quad n \geq 1. \quad (4.17)$$

Через $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$, $r'_j = r_{n_j}$, $r''_j = r_{n_{j+1}}$, обозначим все интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из X . Здесь r_{n_j} – подпоследовательность последовательности r_n из (4.17). Пусть $G_j = d_j h_j$, где

$$d_j = \min_k \{x_k : x_k \in \Delta_j \cap \Lambda\}, \quad h_j = \int_{\lambda_1}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2} dt. \quad (4.18)$$

Из (4.16), (4.18) следует, что $h_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Проверяется, что

$$R_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{d_{j+1} - d_j} \uparrow \infty. \quad (4.19)$$

Соединяя попарно все точки P_j и P_{j+1} , $j \geq 1$, отрезками прямых, получаем некоторый выпуклый полигон (ломаную) L . Если $y = \varphi(t)$ – уравнение L , то ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty. \quad (4.20)$$

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, введенный выше, $\{\nu_n\}$, $\nu_n > 0$, – последовательность такая, что $n = \nu_n^{\rho(\nu_n)}$, $n \geq 1$. Положим

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$

Если $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi/4$, то согласно лемме 1.4 существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |P(re^{i\varphi})|}{r\rho(r)} = \pi \cos \varphi. \quad (4.21)$$

Рассмотрим ряд Дирихле [8]

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \quad (4.22)$$

где

$$a_k = \begin{cases} \exp(-\lambda_k h_j) \frac{1}{Q'(\lambda_k) P(\lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k \in \Delta_j, j \geq 1; \\ \frac{1}{\lambda_k} \exp(-\varphi_j(\lambda_k) - 1), & \text{если } \lambda_k \in \Delta'_j, j \geq 1; \\ 1, & \text{если } \lambda_1 \leq \lambda_k < r'_1. \end{cases}$$

Последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации, а $P(\lambda_k) \geq 1$, $k \geq 1$. Поскольку $h_i \uparrow \infty$ и выполняется условие (4.20), то ряд Дирихле (4.22) абсолютно сходится во всей плоскости, т.е. $F \in B(\Lambda)$.

В [8] показано, что при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$

$$|F(\sigma)| \leq C e^{4m(\sigma)}, \quad (4.23)$$

где $0 < C < \infty$,

$$m(\sigma) = \max_{j \geq 1} (-d_j h_j + d_j \sigma) = -d_n h_n + d_n \sigma. \quad (4.24)$$

Пусть t'_n – наибольшая точка скачка функции $g(t)$ из интервала (r'_n, r''_n) . Тогда при $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ [8]

$$m(\sigma) \leq g(t'_n) = \frac{b^*(t'_n)}{\beta(t'_n)} \leq \frac{b(t'_n)}{\beta(t'_n)}. \quad (4.25)$$

Поскольку $r'_n < t'_n < r''_n$, то с учетом (4.24), (4.21) для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \mu^*(\sigma; b) &\geq -t'_n h_n + t'_n \sigma + \ln |b_n| + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} \\ &\geq \frac{r'_n}{r''_n} m(\sigma) + b(t'_n) + \ln \frac{1}{|P(t'_n)|} > b(t'_n) - 2\pi(t'_n)^{\rho(t'_n)} \\ &= b(t'_n) + o(1)w(t'_n) = (1 + o(1))b(t'_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь мы учли то, что $t'_n \in X$, т.е. $w(t'_n) \leq b(t'_n)$. Значит, для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ из (4.23), (4.25), (4.26) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\ln |F(\sigma)|}{\ln \mu^*(\sigma; b)} \leq \frac{\ln C}{\ln \mu^*(\sigma; b)} + 4 \frac{m(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma; b)} \leq o(1) + (1 + o(1)) \frac{1}{\beta(t'_n)}. \quad (4.27)$$

Поскольку при выполнении условия (0.2) выполняется (0.4), то из результатов работы [4] следует, что $\sup_{\sigma > 0} |F(\sigma)| = \infty$. Следовательно, из (4.27) окончательно получаем, что $d_b^*(F; \mathbb{R}_+) = 0$.

Необходимость доказана.

§ 5. Сравнение условий (0.2) и (0.4)

Пусть $M(x)$ – любая непрерывная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $M(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x > 0} (M(x) - xy),$$

определенная при $y > 0$, называется *преобразованием Лежандра функции M* . Если $M(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то $m(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$. Функция $m(y)$ как верхняя огибающая убывающих по $y > 0$ функций также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y > 0} (m(y) + xy).$$

Ясно, что M^* – наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции M : $M(x) \leq M^*(x)$. Отметим, что если функция M вогнута, то $M(x)/x \downarrow$ при $x \geq a$. С другой стороны, если $0 < M(x) \uparrow$, $M(x)/x \downarrow$ при $x > 0$, то $M^*(x) < 2M(x)$, где M^* – наименьшая вогнутая мажоранта M [21; гл. VII, § D, п. 2, с. 326].

ТЕОРЕМА В [21; гл. VII, § D, п. 2, с. 333]. Пусть $M(x)$ – возрастающая вогнутая на $[0, \infty)$ функция, $m(y)$ – преобразование Лежандра функции $M(x)$, $a > 0$ такое, что $m(a) = 1$. Тогда интегралы

$$\int_0^a \ln m(y) dy, \quad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2} dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим теперь конкретный случай.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, – последовательность, имеющая нулевую плотность, h, Q – функции из (0.3). Если $M(r; Q) = \max_{|z|=r} |Q(z)|$, то, очевидно, $M(r; Q) = Q(ir)$.

Пусть $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $Q(z)$. Она аналитична вне начала координат, причем $|\gamma(t)| \leq h(\delta)$ для любого t , $|t| = \delta$. Но

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{tz} dt, \quad C = \{t : |t| = \delta\}.$$

Отсюда следует, что

$$|Q(z)| \leq \delta h(\delta) e^{\delta|z|} \leq \begin{cases} h(\delta) e^{\delta|z|}, & \text{если } 0 < \delta \leq 1; \\ h(\delta) e^{\delta(|z|+1)}, & \text{если } 1 \leq \delta < \infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(r; Q) \leq h(\delta) e^{\delta(r+1)}, \quad 0 < \delta < \infty. \quad (5.1)$$

Положим $H(\delta) = \ln h(\delta)$. Функция $H(\delta)$ непрерывна, $H(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $H(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Пусть

$$M(x) = \inf_{\delta > 0} (H(\delta) + \delta x), \quad x > 0.$$

Как нижняя огибающая линейных функций $M(x)$ вогнута, $M(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$. Пусть m – преобразование Лежандра функции M . Очевидно, функция m – наибольшая выпуклая миноранта H , т.е. $m(\delta) \leq H(\delta)$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\varphi(x)$ – наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln M(x; Q)$. Тогда условие (0.2) эквивалентно условию

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$h(\delta) = \int_0^\infty M(x; Q) e^{-\delta x} dx \leq \int_0^\infty e^{\varphi(x) - \delta x} dx, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Следовательно, из (5.2) вытекает (0.2) [9].

Пусть выполняется условие (0.2). Поскольку $m(\delta) \leq H(\delta)$, то

$$\int_0^a \ln m(\delta) d\delta < \infty, \quad m(a) = 1.$$

Следовательно, из теоремы В вытекает, что

$$\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (5.3)$$

Но из (5.1) имеем $\ln M(x; Q) \leq M(x+1)$. Поскольку $M(x+1)$ – вогнутая мажоранта для $\ln M(x; Q)$, то $\ln M(x; Q) \leq \varphi(x) \leq M(x+1)$. Таким образом, из (5.3) получаем условие (5.2).

СЛЕДСТВИЕ. Условие типа Левинсона (0.2) сильнее условия (0.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из неравенства Иенсена имеем

$$n(x) \leq \ln M(ex; Q) \leq \varphi(ex). \quad (5.4)$$

Так как

$$\sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^r \frac{dn(x)}{x} = \frac{n(r)}{r} + \int_{\lambda_1}^r \frac{n(x)}{x^2} dx,$$

то, применяя лемму 5.1, получаем условие (0.4).

С другой стороны, пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – возрастающая последовательность всех целых чисел из $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, где $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = a_n + 2^{n^2}/n^2$. Для этой последовательности условие (0.4) выполнено. Легко показать, что для любой функции φ из Ω

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x) \ln x}{x} = 0. \quad (5.5)$$

Если бы для последовательности Λ выполнялось условие типа Левинсона (0.2), то в силу леммы 5.1 и оценок (5.4) функция $n(x)$ также удовлетворяла бы условию (5.5). Но это не так. Действительно,

$$n(b_n) \geq \frac{2^{n^2}}{n^2} - 1 \geq \frac{1}{2} \frac{b_n}{\ln b_n}, \quad n \geq n_0.$$

Следовательно, условие (0.2) не выполняется.

Список литературы

- [1] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [2] N. Sjöberg, *Sur les minorantes sousharmoniques d'une fonction donnée*, IX Congr. des Math. Scand., 1939.
- [3] В. П. Гурарий, “К теореме Н. Левинсона о нормальных семействах аналитических функций”, *Записки научн. сем. ЛОМИ*, **19** (1970), 215–220.
- [4] М. А. Евграфов, “Об одной теореме единственности для рядов Дирихле”, *УМН*, **17:3** (1962), 169–175.
- [5] A. J. Macintyre, “Asymptotic paths of integral functions with gap power series”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), 286–296.
- [6] А. М. Гайсин, “Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра”, *Матем. сб.*, **182:7** (1991), 931–945.
- [7] G. Pólya, “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”, *Math. Z.*, **29** (1929), 549–640.
- [8] А. М. Гайсин, “Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых”, *Матем. сб.*, **194:8** (2003), 55–82.
- [9] J. Korevaar, M. Dixon, “Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **40:2** (1978), 243–258.
- [10] А. И. Павлов, “О росте по кривым целых функций. заданных лакунарными степенными рядами”, *Сиб. матем. журн.*, **13:5** (1972), 1169–1181.
- [11] T. Kövari, “On the asymptotic paths of entire functions with gap power series”, *J. Anal. Math.*, **15** (1965), 281–286.
- [12] B. Berndtsson, “A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **40:4** (1978), 409–414.

- [13] А. М. Гайсин, “Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых”, *Исследования по теории приближений*, БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1989, 3–15.
- [14] А. М. Гайсин, “Асимптотическая оценка суммы ряда Дирихле на кривых”, *Матем. заметки*, **61**:6 (1997), 810–816.
- [15] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, Физматлит, М., 1980.
- [16] А. М. Гайсин, “Оценка ряда Дирихле, показатели которого – нули целой функции с нерегулярным поведением”, *Матем. сб.*, **185**:2 (1994), 33–56.
- [17] А. М. Гайсин, “Решение проблемы Пойа”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 39–60.
- [18] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, Физматлит, М., 1976.
- [19] В. С. Бойчук, “О некоторых свойствах уточненного порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:2 (1979), 229–236.
- [20] В. Э. Кацнельсон, “Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением”, *Функц. анализ и его прилож.*, **10**:4 (1976), 35–44.
- [21] P. Koosis, *The logarithmic integral*, I, Corrected reprint of the 1988 original, Cambridge Stud. Adv. Math., **12**, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1998.

А. М. Гайсин (А. М. Gaĭsin)

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: gaisin@imat.rb.ru

Поступила в редакцию

10.07.2003 и 16.05.2005