Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Ермолаева, А. К. Цих, Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 45–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:12:05

УДК 517.55+515.171.334

Т. О. Ермолаева, А. К. Цих

Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов

В работе излагаются два метода вычисления интегралов рациональных функций (дифференциалов) по $\mathbb{R}^n$. Первый метод применяется к дифференциалам с рациональными первообразными, и он основан на интерпретации пространства $\mathbb{R}^n$ в виде цепи интегрирования в некоторой торической компактификации. Второй метод базируется на теории многомерных вычетов и многомерном варианте формулы Сохоцкого о скачке интеграла.

Библиография: 20 названий.

Рассматриваются интегралы

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \cdots dx_n, \quad (1)$$

где P и Q — полиномы. Предполагается, что Q не обращается в нуль на $\mathbb{R}^n$ и интеграл (1) абсолютно сходится. Такие интегралы встречаются во многих разделах математики и теоретической физики. В частности, к ним приводятся фейнмановские интегралы в квантовой теории поля [1], [2]; некоторые интегралы такого типа выражают топологические заряды инстантонных полей [3]. Что касается точного вычисления интегралов (1), то для случая $n > 1$ эта задача является достаточно сложной и до сих пор не решена полностью. До недавнего времени были вычислены только некоторые интегралы такого вида [4], [5]. В работах [6]–[8] рассматривались случаи, когда знаменатель Q раскладывается в произведение линейных множителей. Новый подход к исследованию интегралов (1) был предложен в статье [9], где обнаружился следующий многомерный эффект: при $n > 1$ интеграл (1) может быть ненулевым даже в случае, когда подынтегральное выражение $\omega = P dx/Q$ есть дифференциал $d\varphi$ рациональной же формы φ степени $n - 1$ (форму φ со свойством $d\varphi = \omega$ мы назовем *первообразной* для ω). В соответствии с леммой Пуанкаре для ω всегда существует первообразная на (звездном) множестве $\mathbb{R}^n$, которая, как и в случае $n = 1$, есть сумма рациональной формы φ_1 и “обобщенного арктангенса-логарифма” φ_2 . Таким образом, всякую рациональную n -форму ω можно представить суммой $\omega_1 + \omega_2$ алгебраически точной формы $\omega_1 = d\varphi_1$ и формы $\omega_2 = d\varphi_2$, не являющейся алгебраически точной. При этом интегралы форм ω_1 и

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда Гос. Ком. Вуза РФ (С.-Петербург) (грант № 94-1.2-132).

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00258).

ω_2 имеют разную природу и их исследование осуществляется по следующей программе:

- 1) понижение порядка интегрирования для ω_1 производится в классе рациональных форм и это достигается несколькими заменами переменных; каждая такая замена переменных есть не что иное как переход к другим координатам некоторой торической компактификации M пространства $\mathbb{R}^n$;
- 2) понижение порядка интегрирования для ω_2 можно произвести только в классе алгебраических форм, и для его реализации используются многомерные вычеты.

В настоящей работе реализуется указанная программа, каждый пункт которой излагается в §§ 1, 2, соответственно. При описании конструкции торических многообразий мы следуем работам А. Г. Хованского [10], [11] и монографии У. Фултона [12]. В целом, в настоящей статье обобщаются результаты работы [9], где в основном рассматривался случай эллиптических знаменателей Q (напомним, что полином $Q(x)$ называется *эллиптическим*, если однородный полином старшей степени в разложении Q по степеням $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ принимает в $\mathbb{R}^n$ нулевое значение лишь в точке $x = 0$). В случае двух переменных ($n = 2$) некоторые результаты были получены в [13].

§ 1. Интегралы алгебраически точных форм с квазиэллиптическими знаменателями

1.1. Определения и формулировка результатов. Всюду в этом параграфе полиномы P и Q подынтегрального выражения (1) рассматриваются с комплексными коэффициентами. На это подынтегральное выражение будем смотреть как на дифференциальную форму и записывать ее в виде

$$\omega = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (2)$$

Мы будем говорить, что дифференциальная форма ω *алгебраически точна*, если существует рациональная $(n-1)$ -форма φ , дифференциал $d\varphi$ которой равен ω . Такую форму φ мы будем называть *рациональной первообразной* для ω . Нас будут интересовать не все первообразные, а лишь те, которые не растут на бесконечности. Термин “не растет на бесконечности” будет уточнен несколько позднее и будет применяться для квазиэллиптических знаменателей Q . Дадим понятие квазиэллиптичности. Пусть полином $Q(x)$ представляется в виде

$$Q(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

и множество $\text{supp } Q = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0\}$ – носитель Q . Напомним, что *многогранником Ньютона* $\Delta = \Delta(Q)$, соответствующим полиному Q , называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ для $\text{supp } Q$, а *срезкой* полинома Q в направлении ковектора $a \in \mathbb{R}^{n*}$ (здесь $\mathbb{R}^{n*}$ – сопряженное пространство к $\mathbb{R}^n$) называется полином

$$Q_a = \sum_{\alpha \in \Delta^a} c_\alpha x^\alpha,$$

где

$$\Delta^a = \left\{ k \in \Delta : \langle a, k \rangle = \min_{l \in \Delta} \langle a, l \rangle \right\}$$

— грань Δ в направлении a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полином Q назовем *квазиэллиптическим*, если для любого ненулевого ковектора $a \in \mathbb{R}^{n*}$ срезка Q_a не обращается в нуль в торе $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.

Заметим, что поскольку многогранник Δ имеет лишь конечное число граней, то условие квазиэллиптичности достаточно проверять также лишь для конечного числа срезов Q_a .

В следующих двух замечаниях по существу указываются два класса квазиэллиптических полиномов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полином Q является квазиэллиптическим, если все входящие в него мономы $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ имеют положительные коэффициенты c_α и четные степени α_i по каждой переменной x_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Всякий эллиптический полином Q , не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, является квазиэллиптическим; при этом $\Delta(Q)$ есть n -мерный симплекс Δ , натянутый на вершины $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^i = (0, \dots, \underbrace{q, \dots, 0}_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $q = \deg Q$.

В самом деле, поскольку $Q(x) \neq 0$, носитель $\text{supp } Q$ содержит α^0 . Далее, ввиду эллиптичности Q каждый моном x_i^q входит в Q с ненулевым коэффициентом (в противном случае, однородный полином старшей степени обращался бы в нуль на всей координатной прямой вида $x_1 = \dots [i] \cdots = x_n = 0$). Это означает, что $\text{supp } Q$ содержит все α^i , и ясно, что $\Delta(Q)$ как наименьшее выпуклое множество, содержащее $\text{supp } Q \supset \{\alpha^i\}_{i=0}^n$, совпадает с симплексом Δ . Теперь объясним, что Q квазиэллиптивен. Каждая грань Δ^a есть симплекс, натянутый на вершины $\alpha^{j_0}, \dots, \alpha^{j_k}$ ($0 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n$). Поэтому, если $j_0 = 0$, то Q_a зависит лишь от переменных x_j , $j \in J = \{j_1, \dots, j_k\}$, и совпадает с сужением Q на координатную плоскость $\{x_i = 0, i \notin J\}$. Так как $Q \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$, отсюда следует, что Q_a не обращается в нуль на торе $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$. Если же $j_0 \neq 0$, то Q_a есть сужение старшей однородной составляющей Q на координатную плоскость $\{x_i = 0, i \notin \{j_0\} \cup J\}$ и ввиду эллиптичности Q не обращается в нуль на торе. Таким образом, Q квазиэллиптивен.

Аналогично доказывается, что если многогранник $\Delta(Q)$ есть симплекс Δ , то квазиэллиптичность Q влечет его эллиптичность.

Сформулируем условие сходимости интеграла (1) с квазиэллиптическим знаменателем.

ТЕОРЕМА 1. Если Q — квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, то интеграл (1) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда

$$I + \Delta(P) \subset \Delta^0(Q), \quad (3)$$

т.е. когда сдвиг многогранника $\Delta(P)$ вдоль вектора $I = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ лежит во внутренней $\Delta^0(Q)$ многогранника $\Delta(Q)$.

Например, интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{P(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{1 + x_1^4 + x_1^8 x_2^2}$$

Забегаая вперед, заметим (см. п. 1.2 и п. 1.3), что с многогранником Ньютона $\Delta(Q)$ связана определенная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$, а именно, так называемое торическое многообразие M_Δ . Это многообразие получается добавлением к $\mathbb{R}^n$ конечного числа подмногообразий O_j размерности $n-1$. Каждое такое многообразие соответствует грани $\Delta_j^{(n-1)}$, причем координаты y , действующие вблизи O_j , связаны с аффинными координатами $x \in \mathbb{R}^n$ по формуле $x = y^{C_j}$, т.е. по формуле (6), а само O_j характеризуется условием $y_n = 0$. Поскольку совокупность всех подмногообразий O_j можно трактовать как бесконечно удаленную (относительно $\mathbb{R}^n$) часть в M , оправданным является следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть φ – рациональная дифференциальная форма степени p , т.е.

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

где коэффициенты $\varphi_{i_1 \dots i_p}(x)$ – рациональные функции переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Если знаменатели всех функций $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ являются степенями квазиэллиптического полинома Q , то мы говорим, что форма φ не растет на бесконечности, когда для каждого j , т.е. для каждой грани $\Delta_j^{(n-1)}$ многогранника $\Delta(Q)$, форма

$$\varphi(y^{C_j}) \text{ не имеет полюса на гиперплоскости } y_n = 0 \quad (7)$$

(иными словами, бесконечно удаленные орбиты O_j не полярны для φ).

Введем обозначения:

$$|a^j| = a_1^j + \dots + a_n^j, \quad (y')^{|a^j|-I} = y_1^{|a^{j1}|-1} \dots y_{n-1}^{|a^{jn-1}|-1}.$$

В указанных обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, и интеграл (1) абсолютно сходится (выполняется условие (3)). Если дифференциальная форма (2) имеет не растущую на бесконечности рациональную первообразную φ , то для интеграла (1) справедлива формула

$$\mathcal{I} = (-1)^n \sum_j s_j \left(\int_{(y')^{|a^j|-I} > 0} - \int_{(y')^{|a^j|-I} < 0} \right) [\varphi(y^{C_j})]_{y_n=0}, \quad (8)$$

где суммирование ведется по всем $(n-1)$ -мерным граням $\Delta_j^{(n-1)}$ многогранника Ньютона $\Delta(Q)$, а коэффициенты s_j принимают значения 0 и ± 2 по формуле $s_j = (1 + (-1)^{|a^j|}) \cdot \det C_j$. В частности, если среди a^j нет векторов с четной суммой компонент, то $\mathcal{I} = 0$.

В формуле (8) интегралы берутся по подмножествам пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ переменных $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, которые представляют собой декартовы произведения нескольких экземпляров числовых прямых $\mathbb{R}$ и полупрямых $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ из положительных или отрицательных чисел. Авторам неизвестно, можно ли в каждой грани $\Delta_j^{(n-1)}$ с четным $|a^j|$ найти вершину α такую, чтобы в соответствующей

матрице (5) все первые $n - 1$ столбцов имели нечетную сумму координат. В случае положительного ответа формулу (8) всегда можно было бы записать в виде

$$\mathcal{J} = (-1)^n \cdot 2 \sum_{j: |a^j| \text{ чётно}} \det C_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\varphi(y^{C_j})] \Big|_{y_n=0}, \quad (8')$$

поскольку в этом случае в (8) интегралы со знаком “−” исчезают, а интегралы со знаком “+” берутся по $\mathbb{R}^{n-1}$.

В случае двух переменных ($n = 2$) положительный ответ очевиден: если в унимодулярной 2×2 -матрице сумма элементов одного из столбцов четная, то для другого столбца эта сумма нечетная.

Приведем еще один класс полиномов Q , для которых $\mathcal{J}$ записывается в форме (8'). Этот класс составляют эллиптические полиномы. Согласно замечанию 2 многогранник $\Delta(Q)$ эллиптического полинома есть симплекс, первые n граней которого лежат в координатных плоскостях и имеют в качестве внутренних нормалей векторы

$$a^i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

а $(n + 1)$ -я грань имеет внутренней нормалью вектор $a^{n+1} = (-1, \dots, -1)$. Так как $|a^j| = 1$, $1 \leq i \leq n$, а $|a^{n+1}| = -n$, то при нечетном n нет векторов a^j с четной нормой $|a^j|$. Поэтому, если n нечетно, то по теореме 2 интеграл $\mathcal{J}$ нулевой. В случае четного n имеется один вектор с четной нормой — это вектор a^{n+1} . С этим вектором ассоциируется матрица

$$C_{n+1} = (a^1, \dots, a^{n-1}, a^{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

соответствующая вершине $\alpha = (0, \dots, 0, q)$. Простое вычисление показывает, что для дифференциальной $(n - 1)$ -формы

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge [i] \wedge \dots \wedge dx_n$$

имеет место равенство

$$\varphi(y^{C_{n+1}}) \Big|_{y_n=0} = \left[y_n^{1-n} \varphi_n \left(\frac{y'}{y_n}, \frac{1}{y_n} \right) \right] \Big|_{y_n=0} dy',$$

где $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, $dy' = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$. Поэтому формула (8') приводит к следующему утверждению, анонсированному в [9].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в условиях теоремы 2 полином Q является эллиптическим, то интеграл (1) выражается формулой

$$\mathcal{I} = \begin{cases} -2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[y_n^{1-n} \varphi_n \left(\frac{y'}{y_n}, \frac{1}{y_n} \right) \right] \Big|_{y_n=0} dy', & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где φ_n – коэффициент при $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ первообразной φ формы (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если знаменатель подынтегрального выражения в (1) имеет вид Q^k , $k \in \mathbb{N}$, то соответствующий ему многогранник Ньютона $\Delta(Q^k)$ получается из $\Delta(Q)$ гомотетией с коэффициентом k . Поэтому наборы внутренних нормалей для $\Delta(Q)$ и $\Delta(Q^k)$ совпадают, следовательно, для построения векторов a^j достаточно рассматривать многогранник Ньютона $\Delta(Q)$.

1.2. Торическая компактификация пространства $\mathbb{R}^n$ и доказательство теоремы 1. Обычно торическое многообразие строят над полем комплексных чисел (см., например, [10]–[12]). Однако конструкция гладких комплексных торических многообразий может быть без изменений перенесена на вещественный случай. По существу, вещественное торическое многообразие M , которое мы сейчас опишем, является подмногообразием соответствующего комплексного торического многообразия M^c . При этом в M^c существует покрытие $\{U_\alpha^c\}$ координатными окрестностями с биголоморфными отображениями $\varphi_\alpha^c: U_\alpha^c \rightarrow \mathbb{C}^n$ такими, что $\varphi_\alpha^c(U_\alpha^c \cap M) = \mathbb{R}^n$ – вещественное подпространство в $\mathbb{C}^n$.

Торическое многообразие связывается с коническим полиэдром (веером) $K = \{\sigma_\alpha^{(j)}\}$. Здесь каждый элемент $\sigma_\alpha^{(j)}$ – это j -мерный конус в пространстве $\mathbb{R}^{n*}$, натянутый на конечную совокупность целочисленных векторов. Иными словами, $\sigma_\alpha^{(j)}$ имеет вид

$$\sigma(a^1, \dots, a^k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n*} : x = \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu a^\nu, \lambda_\nu \geq 0 \right\}, \quad (9)$$

где $a^1, \dots, a^k$ – векторы решетки $\mathbb{Z}^{n*} \subset \mathbb{R}^{n*}$, порождающие конус. При этом

- (i) для любых двух конусов $\sigma_\alpha^{(i)}, \sigma_\beta^{(j)} \in K$ их пересечение есть конус размерности, меньшей $\min\{i, j\}$;
- (ii) если в K входит конус $\sigma_\alpha^{(j)}$, то в K входят все его грани (характеризуемые тем, что в (9) $\lambda_{\nu_1} = \dots = \lambda_{\nu_l} = 0$ для поднаборов $(\nu_1, \dots, \nu_l) \subset \{1, \dots, k\}$).

Мы будем рассматривать лишь полные полиэдры, для которых объединение входящих в него конусов есть все пространство $\mathbb{R}^{n*}$. (Условие полноты полиэдра K обеспечит компактность торического многообразия, которое будет построено по K .) Ввиду свойств (i), (ii) полные полиэдры однозначно определяются набором своих n -мерных конусов $\sigma_\alpha^{(n)}$. Относительно этих конусов сделаем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2'. Любой конус $\sigma_\alpha^{(n)} \in K$ является симплицальным и примитивным, т.е. порожден n векторами, которые образуют базис решетки $\mathbb{Z}^{n*}$.

Полиэдр K , удовлетворяющий условию предположения 2', называется *примитивным*. Пусть $\{a^j\}_{j=1}^N$ – совокупность всех векторов из $\mathbb{Z}^{n*}$, участвующих в

определении конусов из K . В силу предположения 2' каждый n -мерный конус из K имеет вид

$$\sigma_J = \sigma_{j_1 \dots j_n} = \sigma(a^{j_1}, \dots, a^{j_n}),$$

где $J = (j_1, \dots, j_n)$ – поднабор из $\{1, \dots, N\}$, причем матрица

$$C_J = (a^{j_1}, \dots, a^{j_n})$$

из вектор-столбцов $a^{j_1}, \dots, a^{j_n} \in \mathbb{Z}^{n*}$ унимодулярная (только в этом случае эти вектор-столбцы образуют базис в $\mathbb{Z}^{n*}$). Каждому симплицальному примитивно-му конусу σ_J ставится в соответствие гомеоморфизм

$$\varphi_J: T_J^n \rightarrow T^n \quad \text{по формуле} \quad x = \varphi_J(y) = y^{C_J}, \quad (10)$$

где T_J^n – тор (совокупность векторов длины n с ненулевыми вещественными координатами), вложенный в n -мерное евклидово пространство переменных $y^J = y = (y_1, \dots, y_n)$, а $T^n = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ – стандартный тор вещественных переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. В терминах координат векторов a^j гомеоморфизм (10) задается следующим мономиальным преобразованием

$$x_i = y_1^{a_i^{j_1}} \cdots y_n^{a_i^{j_n}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Торическое многообразие $M = M_K$ получается добавлением (приклеиванием) к тору T^n пространств $\mathbb{R}_J^n$ с помощью гомеоморфизмов φ_J . А именно, M – это факторпространство $\coprod_J \mathbb{R}_J^n / \sim$ дизъюнктного объединения экземпляров $\mathbb{R}_J^n$ евклидова пространства по отношению эквивалентности

$$y^J \sim y^I, \quad \text{если} \quad y^I = \varphi_I^{-1} \circ \varphi_J(y^J).$$

При этом предполагается, что $\varphi_I^{-1} \circ \varphi_J$ продолжено по непрерывности с T_J^n в некоторые точки пространства $\mathbb{R}_J^n$.

Основное утверждение о факторпространстве M состоит в том (см. [10] или [11]), что оно имеет структуру компактного аналитического многообразия. Переменные $y^J = y = (y_1, \dots, y_n)$ служат локальными координатами в координатной окрестности U_J , являющейся множеством классов эквивалентности точек из $\mathbb{R}_J^n$. Таким образом, функции перехода от координат y^J в U_J к координатам y^I в U_I имеют вид мономиального преобразования

$$y^I = (y^J)^{C_J \cdot C_I^{-1}}. \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если опустить предположение 2', т.е. рассмотреть произвольный конический полиэдр K , то этому полиэдру также можно сопоставить объект M_K , который будет уже многообразием с особенностями – аналитическим пространством (см. [12]). Однако особенности этого пространства можно разрешить с помощью многообразия $M_{\tilde{K}}$, построенного по примитивному подразбиению $\tilde{K}$ полиэдра K : оказывается, для любого конического полиэдра K существует конический полиэдр $\tilde{K}$, состоящий из примитивных конусов, причем каждый конус из $\tilde{K}$ лежит внутри некоторого конуса из K , и если конус K был примитивным, то он не измельчается (см. [11, с. 210]).

По каждому n -мерному многограннику Ньютона $\Delta = \Delta(Q)$ строится двойственный конический полиэдр $K = K_\Delta$, следовательно, торическое многообразие. Это многообразие компактно и содержит пространство $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, относительно которых рассматривается полином $Q(x)$. Поэтому мы его будем называть торической компактификацией $\mathbb{R}^n$. Чтобы дать определение двойственного конического полиэдра K_Δ (см. [11, с. 210]), напомним, что с каждым ковектором $a \in \mathbb{R}^{n*}$ связана грань Δ^a многогранника Δ , на которой скалярное произведение $\langle a, l \rangle$ минимально на Δ . Два ковектора $a, b \in \mathbb{R}^{n*}$ называются *эквивалентными*, если связанные с ними грани совпадают, т.е. $\Delta^a = \Delta^b$. Замыкание класса эквивалентности ковекторов, связанных с гранью Δ_i , образует конус в $\mathbb{R}^{n*}$, порожденный элементами решетки $\mathbb{Z}^{n*}$. Этот конус называется *двойственным к грани Δ_i* . Совокупность конусов, двойственных всем граням многогранника Δ , образует конический полиэдр K_Δ , называемый *двойственным к многограннику Δ* . Легко видеть, что образующие (ребра) K_Δ составляют внутренние нормали a^j $(n-1)$ -мерных граней $\Delta_j^{(n-1)} \in \Delta$, а набор $a^{j_1}, \dots, a^{j_k}$ таких нормалей порождает конус σ в K_Δ тогда и только тогда, когда соответствующие грани $\Delta_{j_1}^{(n-1)}, \dots, \Delta_{j_k}^{(n-1)}$ имеют непустое пересечение $\Delta_J = \Delta_{j_1 \dots j_k}$. При этом размерность конуса σ дополнительная к размерности грани Δ_J , т.е. $\dim \sigma = n - \dim \Delta_J$.

В нашем предположении о том, что Q не обращается в нуль на $\mathbb{R}^n$, многогранник $\Delta = \Delta(Q)$ содержит начало координат. Поэтому, поскольку Δ расположен в положительном октанте $\mathbb{R}_+^n$, ни один из конусов двойственного конического полиэдра K_Δ не лежит целиком во внутренности $\mathbb{R}_+^{n*}$. Иными словами, весь октант $\mathbb{R}_+^{n*}$ лежит в некотором n -мерном конусе из K_Δ . В предположениях 1 и 2 относительно Δ (см. п. 1.1) октант $\mathbb{R}_+^{n*}$ является одним из конусов K_Δ , и, кроме того, для K_Δ выполняется предположение 2'. По замечанию 4, для K_Δ существует примитивное подразбиение $\tilde{K}$, в которое октант $\mathbb{R}_+^{n*}$ входит в качестве одного из n -мерных конусов. Торическое многообразие, соответствующее полиэдру $\tilde{K}$, мы и сопоставим многограннику Δ . Обозначим его M_Δ .

Пространство $\mathbb{R}^n$ переменных x вложено в M_Δ следующим образом. Будем считать, что $\mathbb{R}^n$ соответствует конусу

$$\mathbb{R}_+^{n*} = \sigma(a^1, \dots, a^n),$$

где $a^j = e^j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$, т.е. отождествим $\mathbb{R}^n$ с координатной окрестностью

$U_I = U_{1 \dots n}$. Таким образом, в (11) $y^I = x$, а матрица C_I единичная. Следовательно, локальные координаты $y = y^J$, добавляемые к $\mathbb{R}^n = U_I$, окрестностей U_J

связаны с x по формуле

$$x = y^{C_J} \quad (12)$$

с унимодулярной матрицей C_J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть M_Δ – торическая компактификация пространства $\mathbb{R}^n$, сопоставленная многограннику Ньютона $\Delta = \Delta(Q)$ полинома Q .

Покажем, что для квазиэллиптического знаменателя Q интеграл (1) является собственным в компактификации M_Δ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3). Под собственностью интеграла понимается следующее: подынтегральная форма (2), первоначально заданная и регулярная на $\mathbb{R}^n$, регулярно продолжается на все M_Δ (в соответствии с определением 2 это означает, что форма (2) не растет на бесконечности). Итак, представим форму (2) в виде

$$\omega = \frac{x_1 \cdots x_n \cdot P}{Q} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}.$$

Ее задание в любой из координатных окрестностей $U_J \subset M_\Delta$ осуществляется заменой переменных (12):

$$\omega = \left[\frac{x_1 \cdots x_n \cdot P}{Q} \Big|_{x=y^{C_J}} \right] \cdot \det(C_J) \cdot \frac{dy_1}{y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dy_n}{y_n}. \quad (13)$$

Поскольку $\det C_J = \pm 1$, достаточно показать, что выражение в квадратных скобках делится на $y_1 \cdots y_n$ лишь при условии (3).

Если матрица C_J состоит из столбцов $c^1, \dots, c^n$, то для монома $x^l = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ имеем

$$x^l|_{x=y^{C_J}} = y_1^{\langle c^1, l \rangle} \cdots y_n^{\langle c^n, l \rangle}. \quad (14)$$

Напомним, что конус σ_J , порожденный вектор-столбцами матрицы C_J , вписан в один из n -мерных конусов двойственного полиэдра K_Δ . Поэтому опорные грани Δ^{c^j} вдоль векторов c^j пересекаются по вершине $\alpha \in \Delta(Q)$; иными словами, на Δ точкой одновременного минимума для линейных функционалов $\langle c^1, l \rangle, \dots, \langle c^n, l \rangle$ является лишь значение $l = \alpha$. С учетом (14) это означает, что полином Лорана $Q(y^{C_J})$ делится на $y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$, где $m_k = \min_{l \in \Delta} \langle c^k, l \rangle = \langle c^k, \alpha \rangle$. Более точно, указанный полином Лорана можно представить в виде

$$Q(y^{C_J}) = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} \cdot \tilde{Q}(y),$$

где $\tilde{Q}(y)$ – полином с ненулевым значением в нуле: $\tilde{Q}(0) = c_\alpha$ – коэффициент Q при x^α . Условие (3) равносильно тому, что для каждого ковектора $a^j \in \mathbb{Z}^{n*}$, определяющего ребро конического полиэдра $\tilde{K}_\Delta$, выполняется неравенство

$$\min_{l \in I + \Delta(P)} \langle a^j, l \rangle \geq \min_{l \in \Delta(P)} \langle a^j, l \rangle + 1.$$

Иначе говоря, условие (3) равносильно тому, что для каждой матрицы C_J и любого монома x^l из $x_1 \cdots x_n \cdot P$ имеют место неравенства

$$\langle c^k, l \rangle \geq m_k + 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

а ввиду (14) последнее эквивалентно тому, что в (13) ни одна из гиперплоскостей $y_j = 0$ не является полярной для ω . Осталось показать, что $\tilde{Q} \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Во-первых, $\tilde{Q} \neq 0$ в торе T^n , поскольку уравнения $Q(y^{C_J}) = 0$ и $\tilde{Q} = 0$ равносильны в T^n (напомним, что $Q \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$). Объясним, что $\tilde{Q}$ не может иметь нулей и в координатных гиперплоскостях. По симметричным соображениям относительно переменных $y_1, \dots, y_n$ достаточно установить, что $\tilde{Q}$ не имеет нулей в торе

$$T^{n-s} = \{y_1 = \dots = y_s = 0, y_{s+1} \neq 0, \dots, y_n \neq 0\}, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Обозначим через τ грань $\Delta(Q)$, на которой одновременно достигают своего минимального значения функционалы $\langle c^1, l \rangle, \dots, \langle c^s, l \rangle$, и рассмотрим срезку

$$Q_\tau(x) = \sum_{l \in \tau} c_l x^l$$

полинома Q на грань τ . Нетрудно убедиться в равенстве

$$Q_\tau(y^{C_J}) = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n} \cdot \tilde{Q}(0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n).$$

Ввиду квазиэллиптичности срезка Q_τ не имеет нулей в торе T^n , поэтому из последнего равенства вытекает, что $\tilde{Q}$ не имеет нулей в T^{n-s} .

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что если в (1) знаменатель Q квазиэллиптический, то:

- (i) при наличии условия (3) интеграл (1) собственный на компакте M_Δ и потому абсолютно сходится;
- (ii) при нарушении условия (3) существует координатная окрестность $U_J \subset M_\Delta$, в локальных координатах которой подынтегральная форма ω имеет полюс на некоторых координатных гиперплоскостях, и поэтому ω неинтегрируема.

Теорема 1 доказана.

1.3. Доказательство теоремы 2 и примеры. Как и в доказательстве теоремы 1, рассмотрим торическую компактификацию M_Δ пространства $\mathbb{R}^n$, связанную с многогранником Ньютона $\Delta = \Delta(Q)$ знаменателя Q в интеграле (1). Сразу же заметим, что в предположениях 1 и 2 (см. п. 1.1) M_Δ строится по коническому полиэдру, двойственному Δ . Опишем топологическую границу (бесконечно удаленную часть) пространства $\mathbb{R}^n = U_I$ в M_Δ . В соответствии с функциями перехода (12) в каждой координатной окрестности U_J (сопоставленной n -мерному конусу $\sigma_J = \sigma(a^{j_1}, \dots, a^{j_n})$) такая граница состоит из всех тех гиперплоскостей $y_k = 0$, для которых вектор a^{j_k} содержит хотя бы одну отрицательную компоненту. Если зафиксировать вектор a^j конического полиэдра $\tilde{K}_\Delta$, то подмножество в M_Δ , задаваемое в каждой окрестности U_J вида $U_{j_1, \dots, j_{n-1}, j}$ уравнением $y_n = y_n^J = 0$, является торическим подмногообразием в M_Δ размерности $n - 1$, которое обозначим O_j . Объединение всех таких подмногообразий O_j , соответствующих всем векторам a^j , не лежащим в координатных плоскостях (т.е. $a^j \notin \{e^1, \dots, e^n\}$), и составляет топологическую границу $\mathbb{R}^n$. При этом, для фиксированного набора $j_1, \dots, j_{n-1}$ гиперплоскость $\{y_n = 0\}$ всюду плотна в O_j .

Теперь проинтерпретируем $\mathbb{R}^n$ как цепь $[\mathbb{R}^n]$ в M_Δ и найдем ее гомологическую границу $\partial[\mathbb{R}^n]$. Для этого заметим, что тор $T^n = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ разбивается на 2^n связных компонент (октантов)

$$\mathbb{R}_K^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0, k \in K; x_s < 0, s \notin K\},$$

каждый из которых определяется подмножеством $K \subset \{1, \dots, n\}$. Каждый такой октант характеризуется тем, что в нем любая из координат x_j не меняет знака. Ввиду (12) эти свойства сохранения знаков выполняются и для любых других локальных координат $y = y^J$, действующих в $\mathbb{R}_K^n$. Более того, поскольку якобианы перехода $\partial(x)/\partial(y)$ мономиальных замен (12) также не меняют знаки в $\mathbb{R}_K^n$, то получаем, что замыкание $\mathbb{R}_K^n$ в M_Δ является многообразием с краем, лежащим в ориентируемой части M_Δ . Таким образом, замыкание каждого октанта $\mathbb{R}_K^n$ определяет цепь интегрирования $[\mathbb{R}_K^n]$, и мы определим цепь

$$[\mathbb{R}^n] := \sum_K [\mathbb{R}_K^n],$$

где сумма берется по всем подмножествам из набора $\{1, \dots, n\}$, включая пустое множество и весь этот набор, причем ориентация каждой цепи $[\mathbb{R}_K^n]$ определяется порядком координат $x_1, \dots, x_n$. Якобиан функций перехода (6) равен

$$\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = \det C_j \cdot y_1^{|a^{j1}|-1} \dots y_{n-1}^{|a^{jn-1}|-1} y_n^{|a^j|-1}.$$

При переходе через гиперплоскость $\{y_n = 0\}$ он меняет знак, если $|a^j|$ четно. В этом случае часть гиперплоскости $\{y_n = 0\}$, в которой $y_1^{|a^{j1}|-1} \dots y_{n-1}^{|a^{jn-1}|-1} > 0$, входит в границу $\partial[\mathbb{R}^n]$ с коэффициентом $(-1)^n \cdot 2 \cdot \det C_j$, а часть этой гиперплоскости, в которой $y_1^{|a^{j1}|-1} \dots y_{n-1}^{|a^{jn-1}|-1} < 0$, с противоположным коэффициентом. Если же число $|a^j|$ нечетно, то якобиан сохраняет знак, и гиперплоскость $\{y_n = 0\}$ входит в границу цепи с нулевым коэффициентом. Таким образом,

$$\partial[\mathbb{R}^n] = (-1)^n \cdot 2 \sum_{j: |a^j| \text{ четно}} \det C_j \{ [O_j \cap \{(y')^{|a^j}|-I > 0\}] - [O_j \cap \{(y')^{|a^j}|-I < 0\}] \}.$$

Отсюда по формуле Стокса получаем (8). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По существу, теорему 2 мы доказали в общем случае, т.е. без предположений 1 и 2. Однако в ее формулировке надо считать, что первообразная φ не имеет полюсов на бесконечности в многообразии M_Δ , построенном по примитивному подразбиению $\tilde{K}_\Delta$ двойственного конического полиэдра K_Δ , а в формуле (8) суммирование вести по всем ребрам полиэдра $\tilde{K}_\Delta$.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x)$ – однородный полином степени r , положительный на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_{\alpha, k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x^\alpha dx}{(f(x) + 1)^k} \quad (x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}), \quad (15)$$

сходящийся ввиду эллиптичности знаменателя тогда и только тогда, когда $|\alpha| + n < kr$ (см. замечания к теореме 1). Необходимое и достаточное условие алгебраической точности формы $\omega_{\alpha, k} = x^\alpha dx / (f(x) + 1)^k$ состоит в том, что число

$$s := \frac{|\alpha| + n}{r} \quad (16)$$

является целым. Случай нецелого s будет рассмотрен в §2, а здесь предположим, что s целое. В этом случае рациональной первообразной для $\omega_{\alpha, k}$ является форма

$$\varphi = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{(-1)^{k-s-j}}{k-j-1} \binom{k-s-1}{j} \frac{x^\alpha f^{k-s-j-1}}{(f+1)^{k-j-1}} \Omega,$$

где

$$\Omega = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} x_\nu dx_1 \wedge \cdots [\nu] \cdots \wedge dx_n. \quad (17)$$

Для вычисления интеграла (15) воспользуемся следствием 1, в связи с чем заметим, что

$$y_n^{1-n} \varphi_n \left(\frac{y'}{y_n}, \frac{1}{y_n} \right) \Big|_{y_n=0} = -\frac{1}{r} \left[\sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{(-1)^{k-s-j-1}}{k-j-1} \binom{k-s-1}{j} \right] \frac{y_1^{\alpha_1} \cdots y_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}{f^s(y', 1)}.$$

Здесь сумма в квадратных скобках равна значению бетта-функции $B(s, k-s)$, в чем легко убедиться интегрированием по отрезку $[0, 1]$ равенства

$$t^{s-1} (1-t)^{k-s-1} = \sum_{j=0}^{k-s-1} (-1)^{k-s-j-1} \binom{k-s-1}{j} t^{k-j-2}.$$

Далее, будучи эллиптическим полиномом с вещественными коэффициентами, полином f имеет четную степень r , поэтому в рассматриваемом нами случае целого s , числа $|\alpha|$ и n одновременно четны. Таким образом, по следствию 1 получаем следующую формулу понижения кратности интегрирования для интеграла (15)

$$\mathcal{I}_{\alpha, k} = \begin{cases} \frac{2 \cdot B(s, k-s)}{r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{y_1^{\alpha_1} \cdots y_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}{f^s(y', 1)} dy', & \text{если } |\alpha| \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } |\alpha| \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Проиллюстрируем полученную формулу на следующем интеграле:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_2^2 dx_1 dx_2}{(1 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4)^2} = \frac{2 \cdot B(1, 1)}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy_1}{1 + y_1^2 + y_1^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислим следующий интеграл

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1^2 + 4x_1^2x_2^2 + 4x_1^4x_2^4 + x_1^4x_2^6 + x_1^6x_2^4 + x_2^2}{(1 + x_1^2 + x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^4 + x_1^4x_2^2 + x_2^2)^2} dx_1 dx_2.$$

Подынтегральная форма является алгебраически точной, и ее первообразная равна

$$\varphi = \frac{(x_1^2x_2 - x_2^3) dx_1 + (x_1^3 - x_1x_2^2) dx_2}{2(1 + x_1^2 + x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^4 + x_1^4x_2^2 + x_2^2)}.$$

Согласно замечанию 3, достаточно построить многогранник Ньютона для знаменателя формы φ (см. рис. 1). Изобразим в пространстве $\mathbb{R}^{2*}$ наименьшие целочисленные векторы, ортогональные ребрам Δ и направленные внутрь многоугольника Δ (рис. 2).

Рис. 1

Рис. 2

Четную сумму компонент имеют два вектора: $a^3 = (-1, 1)$ и $a^6 = (1, -1)$. По формуле (5) векторам a^3 и a^6 сопоставляются матрицы

$$C_3 = (a^2, a^3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C_6 = (a^5, a^6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi(y^{C_3}) = \varphi(1/y_2, y_1y_2), \quad \varphi(y^{C_6}) = \varphi(y_2, 1/(y_1y_2)).$$

Применяя формулу (8'), получаем

$$\mathcal{J}_2 = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dy_1}{1 + y_1^2} = 2\pi.$$

§ 2. Формула вычета для интеграла (1) и ее следствия

2.1. Формула вычета. Сформулируем многомерный аналог того факта, что абсолютно сходящийся интеграл по вещественной оси от рациональной функции выражается через вычеты этой функции в полюсах из верхней полуплоскости. Теперь откажемся от условия алгебраической точности и квазиэллиптичности знаменателя подынтегрального выражения (1). Рассмотрим вещественно $(n+1)$ -мерную полуплоскость

$$\Pi_+ = \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1 + iy_1, x') : y_1 > 0\} \quad (x' = (x_2, \dots, x_n))$$

в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$ переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$. Вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ вложим в $\mathbb{C}^n$, полагая $\operatorname{Re} z_j = x_j$, $j = 1, \dots, n$. В предположении, что $Q|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$, комплексная гиперповерхность $V = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(z) = 0\}$ пересекает полуплоскость Π_+ по $(n-1)$ -мерному вещественному алгебраическому множеству

$$\gamma = \{(z_1, x') \in \Pi_+ : Q(z_1, x') = 0\}.$$

Если $Q = Q_1^{k_1} \dots Q_m^{k_m}$ – разложение Q на неприводимые множители, то через Q_* обозначим произведение $Q_1 \dots Q_m$. Дискриминант $D(x')$ полинома $Q_*(z_1, x')$ не равен тождественно нулю на $\mathbb{R}^{n-1}$, а множество $\{z \in \gamma : D(x') \neq 0\}$ всюду плотно в γ (см. [14, с. 28]). В точках этого множества γ является многообразием с локальными координатами x' . Ориентацию γ определим порядком координат $x_2, \dots, x_n$.

ТЕОРЕМА 3. Если $Q|_{\mathbb{R}^n} \neq 0$, и интеграл (1) абсолютно сходится, то для него справедлива формула

$$\mathcal{J} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi i \int_{\gamma_\delta} \operatorname{Res} \omega, \quad (18)$$

где $\operatorname{Res} \omega$ – класс-вычет формы $\omega = P(z) dz / Q(z)$ (см. [15, п. 5]), а $\gamma_\delta = \{(z_1, x') \in \gamma : |D(x')| > \delta, |x'| < 1/\delta\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В доказательстве теоремы 3 будут использованы простые рассуждения с помощью повторного интегрирования. Однако можно показать, что в (1) множество интегрирования $\mathbb{R}^n$, будучи циклом с замкнутым носителем, гомологично в $\mathbb{C}^n \setminus V$ трубке

$$T^\varepsilon = \{(z_1, x') \in \Pi_+ : (|x'|^2 + 1)^{-q/2} |Q(z_1, x')| = \varepsilon\}, \quad q = \deg Q,$$

вокруг $\gamma \subset \Pi_+$. Поэтому формулу (18) можно рассматривать как один вариант формулы вычета Лере [15, п. 21], в которой интеграл по цепи γ , расположенной в полярном множестве V формы ω , заменен на главное значение.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если гиперповерхность V не имеет сингулярных точек на $\gamma \subset V$, то класс-вычет $\operatorname{Res} \omega$ имеет в качестве представителя гладкую форму на γ , поэтому в (18) знак предела можно опустить, а интегрирование вести по γ . В этом случае для интеграла (1) имеет место формула

$$\mathcal{J} = 2\pi i \int_{\gamma} \operatorname{Res} \omega. \quad (18')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Представим интеграл (1) в виде повторного

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{P(z_1, x')}{Q(z_1, x')} dz_1 \right) dx',$$

и внутренний интеграл обозначим $\mathcal{J}_1(x')$. Ввиду абсолютной сходимости исходного интеграла такое представление возможно, причем внутренний и внешний интегралы абсолютно сходятся. Поскольку дискриминантное множество $\sigma = \{x' : D(x') = 0\}$ аналитично, его $(n-1)$ -мерный объем равен нулю. Поэтому, аппроксимируя его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \sigma$ последовательностью открытых множеств $B^\delta = \{x' : |D(x')| > \delta, |x'| < 1/\delta\}$, $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{J}_1(x') dx' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B^\delta} \mathcal{J}_1(x') dx'. \quad (19)$$

Теперь осталось заметить, что часть множества γ , лежащая над B^δ (имеется в виду прообраз проекции $\pi: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$), есть не что иное, как γ^δ , а каждый интеграл $\mathcal{J}(x')$ равен сумме вычетов в точках $z_1 = \pi^{-1}(x')$ функции $P(z_1, x')/Q(z_1, x')$. Отсюда по формуле вычета Лере интеграл в правой части формулы (19) равен интегралу в (18), тем самым, теорема 3 доказана.

Следует заметить, что в многомерном случае ($n > 1$) непосредственное применение теоремы 3 к вычислению интегралов затруднительно. Однако из этой теоремы можно получить некоторые полезные следствия. Одним из таких следствий является многомерное обобщение формулы Сохоцкого [16, с. 34]).

2.2. Многомерный вариант формулы Сохоцкого. Пусть Q — квазиэллиптический полином с вещественными коэффициентами. В отличие от предыдущих рассмотрений предположим, что Q имеет нули в $\mathbb{R}^n$, причем $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 0\}$ есть гладкая поверхность: $\text{grad } Q|_C \neq 0$. Из квазиэллиптичности Q следует (см. доказательство теоремы 1), что замыкание $\overline{C}$ в торической компактификации $M_\Delta \supset \mathbb{R}^n$ не пересекает бесконечно удаленную часть, поэтому C — ограниченная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. По теореме Уитни [17] она ограничивает конечное число областей G_α . Заменяя при необходимости Q на $-Q$, можно считать, что $Q < 0$ в $G = \bigcup G_\alpha$. Ориентацию C определим как индуцированную ориентацию границы ∂G .

Пусть k — любое натуральное число. Для полинома P со свойством $I + \Delta(P) \subset k \cdot \Delta^0(Q \pm i\varepsilon)$, обеспечивающим согласно теореме 1 сходимость интегралов, определим пределы

$$\mathcal{J}^\mp = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x) dx}{(Q(x) \pm i\varepsilon)^k}. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 4. Если Q — квазиэллиптический полином с вещественными коэффициентами, причем $\text{grad } Q|_C \neq 0$, то

$$\mathcal{J}^+ - \mathcal{J}^- = 2\pi i \int_C \text{Res } \omega,$$

где $\omega = P(z) dz / Q(z)^k$.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим утверждением, которое можно рассматривать как аналитическую версию теоремы Пикара–Лефшеца [2; 18, §1]. Рассмотрим полуаналитические цепи

$$\gamma_{\pm}(\varepsilon) = \{(z_1, x') \in \Pi_+ : Q(z_1, x') = \pm i\varepsilon\}$$

с ориентациями, описанными в п. 2.1.

ЛЕММА 1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\gamma_+(\varepsilon) - \gamma_-(\varepsilon)) = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественную и мнимую части полинома $Q(z_1, x')$ обозначим через $R = R(x_1, y_1, x')$ и $I = I(x_1, y_1, x')$, соответственно. Так как полином Q имеет вещественные коэффициенты, то $I(x_1, 0, x') \equiv 0$ и, следовательно, I имеет вид $y_1^s \cdot I'$, где $s \geq 1$, а $I'(x_1, 0, x')$ не является тождественным нулем на $\mathbb{R}^n$. Согласно равенству Коши–Римана

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{\partial I}{\partial y_1} = y_1^{s-1} \left(s \cdot I' + y_1 \frac{\partial I'}{\partial y_1} \right).$$

Из ограниченности C и условия $\text{grad } Q|_C \neq 0$ следует, что $\partial Q / \partial x_1$ почти всюду на C не равняется нулю. Но поскольку $Q(x) = R(x_1, 0, x')$, получаем $s = 1$ и приходим к равенствам

$$I = y_1 I', \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = I'(x_1, 0, x'). \quad (21)$$

Рассмотрим следующие полуаналитические множества

$$C_+ = \{x \in C : I'(x_1, 0, x') \geq 0\} \quad \text{и} \quad C_- = \{x \in C : I'(x_1, 0, x') \leq 0\}.$$

Ввиду (9) на множествах внутренних точек $\text{int } C_{\pm} \subset C$ производная $\partial Q / \partial x_1$ отлична от нуля, поэтому x' выберем в качестве локальных координат на $C_{\pm}$ и ориентируем $C_{\pm}$ порядком $x_2, \dots, x_n$. Напомним, что ориентация C соответствует внешнему направлению (относительно $G = \{Q < 0\}$) нормалик C , поэтому ориентации у C_+ и C совпадают, а у C_- и C — противоположные, ибо, например, в тех точках C , где $\partial Q / \partial x_2 = \dots = \partial Q / \partial x_n = 0$, градиент Q имеет вид $(\partial Q / \partial x_1, 0, \dots, 0)$, и он внешне направлен, если $I' > 0$, и внутренне направлен, если $I' < 0$. Таким образом, имеет место равенство полуаналитических цепей

$$C_+ - C_- = C. \quad (22)$$

Обозначим нулевое множество функции $R(x_1, y_1, x')$ в Π_+ через M . Тогда по определению $\gamma_{\pm}(\varepsilon) = \{(x_1, y_1, x') \in M : y_1 \cdot I' = \pm \varepsilon\}$. Так как $M \cap \mathbb{R}^n = C$, то M не имеет особых точек вблизи $\mathbb{R}^n$, поэтому всюду в своем пересечении гиперповерхности $\{y_1 = 0\} \cap M$ и $\{I' = 0\} \cap M$ находятся в общем положении. Отсюда видно, что $\gamma_{\pm}(\varepsilon) \rightarrow \gamma_{\pm}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\gamma_+ = \{R = 0, y_1 = 0, I' \geq 0\} + \{R = 0, y_1 \geq 0, I' = 0\}$, а $\gamma_- = \{R = 0, y_1 = 0, I' \leq 0\} + \{R = 0, y_1 \geq 0, I' = 0\}$. При этом цепь $\{R = 0, y_1 \geq 0, I' = 0\}$ входит в γ_+ и γ_- с одинаковыми ориентациями, тем самым $\gamma_+ - \gamma_- = C_+ - C_-$, и с учетом (22) лемма доказана.

Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 3 и леммы 1.

Применим теорему 4 к вычислению интегралов (15) с нецелым числом $s = (|\alpha| + n)/r$, введенным формулой (16). Напомним, что в (15) $f(x)$ — однородный эллиптический полином степени r , положительный на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega_t(z) = \frac{z^\alpha dz}{(f(z) + t)^k}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

зависящую от параметра $t \in \mathbb{C}$. Ввиду однородности полинома f справедливо равенство $\omega_t(z) = t^{r-k} \omega(z/t^{1/s})$. Отсюда легко заключить, что аналитический элемент

$$\mathcal{I}_{\alpha,k}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_t(z),$$

заданный в окрестности точки $t = 1$ своим значением $\mathcal{I}_{\alpha,k}(1) = \mathcal{I}_{\alpha,k}$, определяет многозначную функцию, равную $\mathcal{I}_{\alpha,k} \cdot t^{s-k}$. Поэтому для интегралов $\mathcal{I}^\mp$, определенных формулой (20) для $Q = f - 1$, справедливо равенство

$$\mathcal{I}^+ - \mathcal{I}^- = \mathcal{I}_{\alpha,k} \cdot 2i \sin \pi(s - k).$$

Из теоремы 4 получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если число $s = (|\alpha| + n)/r$ не является целым, то для интеграла (15) справедливо равенство*

$$\mathcal{I}_{\alpha,k} = \frac{\pi}{\sin \pi(s - k)} \int_C \operatorname{Res} \omega_{-1},$$

где $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 1\}$, $\omega_{-1} = z^\alpha dz / (f(z) - 1)^k$.

По просьбе авторов настоящей статьи А. А. Алякринский вычислил вычет $\operatorname{Res} \omega_{-1}$ формы ω_{-1} путем когомологического понижения порядка полюса (о когомологическом приведении рациональных форм см. [19, §17]). Результат вычисления дает окончательную формулу понижения кратности интегрирования:

$$\mathcal{I}_{\alpha,k} = \frac{B(s, k - s)}{r} \int_C x^\alpha \Omega(x), \quad s \text{ нецелое}, \quad (23)$$

где $\Omega(x)$ — дифференциальная форма (17).

В качестве примера вычислим следующий интеграл

$$\mathcal{I}_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x^\alpha dx}{(x_1^r + \dots + x_n^r + 1)^k},$$

где r — четное натуральное число.

По формуле Стокса для области $G = \{f(x) < 1\}$ (здесь $f = x_1^r + \dots + x_n^r$) имеем

$$\int_C x^\alpha \Omega = \int_G d(x^\alpha \Omega) = (|\alpha| + n) \int_G x^\alpha dx.$$

Последний интеграл, как и исходный $\mathcal{J}_3$, равен нулю, если хотя бы одна из компонент α_j мультииндекса α нечетная. Поэтому предположим, что все компоненты этого мультииндекса четные. Тогда в силу симметричности имеем

$$\int_C x^\alpha \Omega = (|\alpha| + n) \cdot 2^n \int_{G_*} x^\alpha dx,$$

где G_* — часть области G , лежащая в октанте $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$. Последний интеграл вычисляется по формуле Дирихле [20, п. 676, пример 5], и мы для четных α_j получаем следующий ответ:

$$\mathcal{J}_3 = \left(\frac{2}{r}\right)^n \cdot B(s, k-s) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+1}{r}\right) \cdot \dots \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha_n+1}{r}\right)}{\Gamma(s)}. \quad (24)$$

Наконец, заметим, что теорема 2 и формула (24) позволяют вычислить интеграл (1) для любого алгебраически точного подынтегрального выражения, если полином Q имеет вид $(x_1^r + \dots + x_n^r)^k + \{\text{члены степени} < r \cdot k\}$. Это вытекает из того, что после понижения кратности интегрирования с помощью теоремы 2 получается интеграл по $\mathbb{R}^{n-1}$ вида $\mathcal{J}_3$.

Список литературы

1. Хуа Р., Теплиц В. Гомологии и фейнмановские интегралы. М.: Мир, 1969.
2. Фам Ф. Введение в топологические исследования особенностей Ландау. М.: Мир, 1967.
3. Сергеев А. Г. Теория твисторов и классические калибровочные поля // Монополи: Топологические и вариационные методы. Сб. статей 1983–1989 г.г. М.: Мир, 1989. С. 492–555.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.
6. Южаков А. П. Один класс двойных интегралов, вычисляемых с помощью кратных вычетов // Изв. вузов. Математика. 1987. №9. С. 78–81.
7. Жданов О. Н. О вычислении интегралов рациональных функций n переменных с помощью кратных вычетов // Изв. вузов. Математика. 1987. №8. С. 82–84.
8. Цик А. К. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.
9. Цик А. К. Интегралы рациональных функций по пространству $\mathbb{R}^n$ // ДАН СССР. 1989. Т. 307. №6. С. 1325–1329.
10. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функци. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. №4. С. 56–67.
11. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1983. С. 207–239.
12. Fulton W. Introduction to Toric Varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
13. Ермолаева Т. О. Вычисление интегралов рациональных функций по пространству $\mathbb{R}^2$ // Материалы XXXI Международной научной студенческой конференции: Математика. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1993. С. 37–39.
14. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
15. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии. М.: ИЛ, 1961.
16. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
17. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.

18. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов. М.: Наука, 1984.
19. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
20. *Фиттенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960.

Красноярский государственный университет
E-mail: tsikh@math.kgu.krasnoyarsk.su

Поступила в редакцию
15.01.1996