Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Левчук, О. А. Старикова, Квадратичные формы проективных пространств над кольцами, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 6, 97–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:18:24

УДК 512.7

В. М. Левчук, О. А. Старикова

Квадратичные формы проективных пространств над кольцами

При переходе от полей к кольцам коэффициентов определяющая роль квадратичных форм с обратимой матрицей утрачивается. Выявляется, что кольцо, над которым диагонализуются все квадратичные формы, в сущности всегда есть локальное кольцо R главных идеалов с $2 \in R^*$. Задача построения единственного “нормального” диагонального вида квадратичной формы над R встречает трудности для индексов $|R^* : R^{*2}| > 1$. Для индекса 2 она получает решение в теореме 2.1 при $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ (распространение закона инерции вещественных квадратичных форм) и в теореме 2.2, когда в $1 + R^2$ существует обратимый неквадрат. При тех же ограничениях на кольцо R с нильпотентным максимальным идеалом явно указано (предложение 3.2) число классов проективно конгруэнтных квадратичных форм проективного пространства, ассоциированного со свободным R -модулем ранга n . С точностью до проективностей перечисление дано для проективной плоскости над R , а также (теорема 3.3) над локальным кольцом $F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ с не главным максимальным идеалом, где $F = 2F$ – поле с обратимым неквадратом в $1 + F^2$ и $|F^* : F^{*2}| = 2$. В последнем случае число классов недиагонализующихся квадратичных форм ранга 0 зависит от выбора поля F и даже не всегда конечно; остальные формы образуют 21 класс.

Библиография: 28 названий.

Теории рефлексивных форм и геометрических образов второго порядка в проективных пространствах достаточно хорошо разработаны в случае поля коэффициентов [1]–[5]. Наиболее богатую историю имеют вопросы представления рациональными и целочисленными квадратичными формами [6]–[9]. С 70-х годов возрастает интерес к переходу от полей к алгебрам и кольцам коэффициентов. В книге [10] В. Бенц рассматривает классические геометрии Мёбиуса, Лагерра и Минковского как проективные прямые над алгебрами (см. также [11], [12]). В более общей ситуации изучаются линейные группы, обобщается основная теорема проективной геометрии [13]–[15]. Наряду с группами Гротендика и Витта полулокальных колец исследуются инварианты квадратичных пространств [16]–[19] и нормальный вид квадратичных форм над декиндовыми областями и областями Безу характеристики не равной двум [3; гл. 6], [9; гл. 7 и 8], [20].

При переходе к кольцам коэффициентов существенно возрастает роль вырожденных форм. Так для модуля над любым локальным кольцом с обратимым элементом 2 “сильно невырожденные” симметричные формы допускают

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00905, 06-01-00824а).

© В. М. Левчук, О. А. Старикова, 2006

ортогональный базис [21; следствие 3.4]. Однако недиагонализируемые вырожденные формы существуют (см. пример 1.1 в §1). Выявляется, что кольцо, над которым диагонализируемы все квадратичные формы, в сущности всегда есть локальное кольцо R главных идеалов с $2 \in R^*$. Как следствие теоремы 1.3 при $R^* = R^{*2}$ получаем нормальный диагональный вид.

В §2 нормальный вид изучается при ограничении $|R^* : R^{*2}| = 2$. При наличии обратимого неквадрата в $1 + R^{*2}$ его дает теорема 2.2. Ключевая в ее доказательстве лемма 2.6 выявляет также строение ортогональных групп. Теорема 2.1 распространяет закон инерции вещественных квадратичных форм на случай кольца коэффициентов R с замкнутыми по сложению обратимыми квадратами.

Симметричные матрицы A и B и соответствующие им формы над R называем *проективно конгруэнтными* (или *конгруэнтными*), если $B = kQAQ^T$ (соответственно $B = QAQ^T$) для обратимой матрицы Q над R и $k \in R^*$. Теоремы 2.1 и 2.2 при указанных в них ограничениях на R дают классификацию классов проективно конгруэнтных квадратичных форм проективного пространства; число классов вычислено явно, когда максимальный идеал $\langle \varepsilon \rangle$ в R нильпотентен (предложение 3.2). Квадратичные формы проективных плоскостей при тех же ограничениях на R в §3 классифицированы и с точностью до проективности, как обычно в проективной геометрии (см. также [22; теорема 5]). Обе классификации совпадают при $(\text{Aut } R)_\varepsilon \subseteq \varepsilon R^{*2}$ (предложение 3.1).

Теорема 3.3 иллюстрирует методы для проективной плоскости над локальным кольцом $F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ с не главным максимальным идеалом, $|F^* : F^{*2}| = 2$, F – поле. В ней квадратичные формы перечислены с точностью до проективности, исключая недиагонализируемые формы ранга 0 (см. также замечание 3.5).

Результаты статьи анонсировались [22], [23] (подробно см. [24]).

§1. Кольца с диагонализируемыми формами

Всюду далее R – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и мультипликативной группой R^* обратимых элементов.

В [21; гл. 1] устанавливается существование ортогонального базиса “сильно невырожденной” симметричной формы на модуле над локальным кольцом с обратимым элементом 2. Сильная невырожденность формы на свободном модуле конечного ранга равносильна обратимости ее матрицы; существенность условия показывает

ПРИМЕР 1.1. Пусть R есть кольцо формальных степенных рядов от переменных x, y над полем или его факторкольцо по степени больше или равной 2 максимального идеала; оно локально с максимальным идеалом $J = \langle x, y \rangle$. Покажем, что $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$ не конгруэнтна диагональной матрице. Допустим, что

для обратимой матрицы $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ матрица $Q^{-1}A(Q^{-1})^T$, лежащая вместе

с A над J , является диагональной; можно считать $J^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle = 0$. Тогда существуют элементы $f, g \in J$, для которых $Q \operatorname{diag}(f, g) Q^T = A$ и поэтому

$$fa^2 + gb^2 = x, \quad fc^2 + gd^2 = 0, \quad fac + gbd = y.$$

Отсюда в силу унимодулярности строк матрицы Q идеалы $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ инцидентны и, кроме того, один из них совпадает как с идеалом $\langle x \rangle$, так и с идеалом $\langle y \rangle$. Следовательно, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Противоречие. Поэтому матрица A не конгруэнтна диагональной матрице.

Следующая лемма приводит к выявлению колец, на которые распространяется стандартный алгоритм диагонализации квадратичных форм. Элемент матрицы, порождающий наибольший для нее главный идеал (если существует), назовем *ведущим*.

ЛЕММА 1.2. Пусть R – локальное кольцо и $2 \in R^*$. Если симметричная матрица A над R обладает ведущим элементом a , то она конгруэнтна клеточно-диагональной матрице $\operatorname{diag}(b, B)$ с ведущим элементом b , причем $\langle b \rangle = \langle a \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего выделим переходы от A к конгруэнтной матрице UAU^T с элементарной матрицей U – трансвекцией, элементарной мономимальной или диагональной матрицей. Каждый из этих переходов равносильен элементарному преобразованию A , по определению, типа I, II (перестановка i -й и j -й строк и одновременно i -го и j -го столбцов) или III (умножение i -й строки и i -го столбца на скаляр из R^*) соответственно.

Если в $A = \|a_{uv}\|$ ведущий элемент имеется только среди недиагональных элементов, скажем, a_{ij} , $i \neq j$, то, применяя к A преобразование типа I, получаем новую матрицу с i -м диагональным элементом $b = a_{ii} + 2a_{ij} + a_{jj}$. В силу ограничений на A в максимальном идеале кольца R найдутся элементы c, d такие, что $a_{ii} = ca_{ij}$, $a_{jj} = da_{ij}$, $b = (2 + c + d)a_{ij}$. Так как элементы 2 и $2 + c + d$ обратимы в R , то b – ведущий элемент новой матрицы, порождающий идеал $\langle a_{ij} \rangle$.

Итак, с точностью до конгруэнтности матрица A имеет ведущим диагональный элемент. Без потери общности считаем элемент $a_{11} = b$ ведущим. Идеал $\langle b \rangle$ есть инвариант матрицы A , поскольку преобразование каждого из типов I, II, III обратимо и не уменьшает идеал, порожденный ведущим элементом. Преобразования типа I позволяют обратить в 0 все элементы a_{1i} и одновременно элементы a_{i1} , $i = 2, 3, \dots, n$, в силу симметричности матрицы. Лемма доказана.

Пусть R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle \varepsilon \rangle$ и M_{R^*} – система представителей смежных классов группы R^* по подгруппе $R^{*2} = \{a^2 \mid a \in R^*\}$, содержащая единицу кольца R . Матрицу над R назовем *канонической*, если она имеет вид

$$\operatorname{diag}(k_1 \varepsilon^{t_1}, k_2 \varepsilon^{t_2}, \dots, k_r \varepsilon^{t_r}, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r, \quad (1)$$

где $\varepsilon^{\tau} \neq 0$, $k_i \in M_{R^*}$ и при $t_{i-1} = t_i$ в случае линейно упорядоченности M_{R^*} предполагаем также $k_{i-1} \leq k_i$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle \varepsilon \rangle$ и обратимым элементом 2. Тогда всякая симметричная матрица A над R конгруэнтна канонической матрице (1) с однозначно определенными показателями $t_1, t_2, \dots, t_r$.

Локальные кольца главных идеалов характеризует очевидная

ЛЕММА 1.4. Все нетривиальные идеалы кольца R тогда и только тогда являются степенями фиксированного идеала, когда R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Симметричная матрица A над R в силу лемм 1.2 и 1.4 конгруэнтна клеточно-диагональной матрице $\text{diag}(d_1, A_1)$ с ведущим элементом d_1 , причем идеал $\langle d_1 \rangle$ является инвариантом матрицы A . Аналогично симметричная $((n-1) \times (n-1))$ -клетка A_1 конгруэнтна клеточно-диагональной матрице $\text{diag}(d_2, A_2)$ с ведущим элементом d_2 . Продолжая, приходим к конгруэнтной A диагональной матрице $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, для которой выполняется условие $\langle d_1 \rangle \supseteq \langle d_2 \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle d_n \rangle$. Преобразования типов III и II позволяют умножать диагональные элементы на произвольные элементы из R^{*2} и привести матрицу A к каноническому виду (1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Если $R^{*2} = R^*$ и максимальный идеал нильпотентен степени s , то число классов конгруэнтных симметричных $(n \times n)$ -матриц равно $\binom{s+n}{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.3 требуемое число классов находим как число целочисленных наборов $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, удовлетворяющих условию $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq s$, вычисленное, например, в [25; 1.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть J есть собственный идеал кольца K с обратимым элементом 2. Если J – ниль-идеал или K – кольцо формальных степенных рядов над полем, то $1 + J \subset R^{*2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех $j \in J$ элемент $c_1 = 1 - j/2$ обратим и $1 - j = c_1^2 - (j/2)^2 = c_1^2[1 - j^2/(2c_1)^2]$. Рассматривая аналогично квадратную скобку и т.д., найдем элементы $c_m, d_m \in K^*$ такие, что

$$1 - j = c_m^2[1 - d_m^2 j^{2^m}], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad c_{m+1} = c_m \pmod{\langle j \rangle^{2^m}}.$$

Для нильпотентного элемента j и достаточно больших m получаем $1 - j = c_m^2 \in K^{*2}$. Когда K есть кольцо формальных степенных рядов, коэффициенты при мономах степеней меньше или равных m ряда f с условием $1 - j = f^2 \in K^{*2}$ корректно определены равенством $f = c_m \pmod{J^{2^m}}$.

ПРИМЕР 1.7. Пусть R есть поле F , или кольцо $F[[x]]$ формальных степенных рядов над F , или его факторкольцо по какой-либо степени больше или

равной 2 идеала $\langle x \rangle$. (См. также алгебру плюралльных чисел [11], [12].) Тогда R есть локальная алгебра над F с главным максимальным идеалом J и в силу предложения 1.6

$$R = F + J, \quad R^* = F^* + J = F^* \times (1 + J), \quad R^{*2} = F^{*2} \times (1 + J).$$

Кроме того, $|R^* : R^{*2}| = |F^* : F^{*2}|$ и можно полагать $M_{R^*} = M_{F^*}$. Индекс $|F^* : F^{*2}|$ равен 1, если F – алгебраически (или даже квадратично) замкнутое поле, и равен 4 для поля p -адических чисел $F = Q_{p^\infty}$, $p > 2$ [9; лемма 1.6]. Если $R = F$ – конечное поле характеристики $p > 2$ или $R = Z_{p^\infty}$ есть кольцо целых p -адических чисел, или $R = Z_{p^m}$, то $|R^* : R^{*2}| = 2$. Для вещественно замкнутого поля F [26; § 81] имеем $1 + F^{*2} \subset F^{*2} + F^{*2} \subset F^{*2}$ и $M_{F^*} = \{-1, 1\}$.

§ 2. Нормальный вид

Отметим, что в [27; гл. 15] эквивалентными произвольной матрице A над кольцом главных идеалов считаются матрицы QAS с обратимыми матрицами Q и S ; установленный в [27] нормальный вид A совпадает с (1) в условиях теоремы 1.3 на R и $R^* = R^{*2}$. Вопрос построения (единственного) нормального вида по конгруэнтности при $|R^* : R^{*2}| > 1$ оказывается более сложным.

Следующая теорема распространяет закон инерции вещественных квадратичных форм, выявляя “нормальный” вид

$$f_{s_1, r_1}^{(0)} \varepsilon^{i_1} + f_{s_2, r_2}^{(r_1)} \varepsilon^{i_2} + \dots + f_{s_q, r_q}^{(r_1 + \dots + r_{q-1})} \varepsilon^{i_q}, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_q, \quad \varepsilon^{i_q} \neq 0, \quad (2)$$

где для целых чисел $0 \leq s \leq r$, $0 \leq k < k + r \leq n$ полагаем

$$f_{s, r}^{(k)} = -(x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \dots + x_{k+s}^2) + (x_{k+s+1}^2 + \dots + x_{k+r}^2).$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, причем $|R^* : R^{*2}| = 2$, $1 + J \subset R^{*2}$ и $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$. Тогда всякая ненулевая квадратичная форма над R приводится обратимым R -линейным преобразованием неизвестных к диагональному виду (2), причем показатели $i_1, \dots, i_q$ и целые числа $r_1, \dots, r_q$, $s_1, \dots, s_q$ не зависят от способа приведения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия на основное кольцо позволяют считать, что $2 \in R^{*2}$ и $M_{R^*} = \{-1, 1\}$. По теореме 1.3 квадратичная форма над R приводится обратимым R -линейным преобразованием неизвестных к диагональному виду (2), причем показатели $i_1, \dots, i_q$ и целые числа $r_1, \dots, r_q$ не зависят от способа приведения. Нам требуется доказать инвариантность чисел $s_1, \dots, s_q$.

Для всякой квадратичной формы $f_{s, r}^{(0)}$ над R и аналогично для $f_{s, r}^{(0)} \varepsilon^{i_1}$ инвариантность числа s получаем почти дословным перенесением закона инерции вещественных квадратичных форм вместе с доказательством (см., например, [2; 22.3], [28]), используя условие $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$. Так как кольцевой гомоморфизм $R \mapsto R/J^{i_1+1}$ сохраняет конгруэнтность, то число s_1 в (2) является инвариантом.

Пусть $q > 1$ и допустим, что для некоторого j , $1 < j \leq q$, инвариантность всех чисел $s_1, s_2, \dots, s_{j-1}$ уже доказана. Докажем инвариантность s_j . Достаточно рассмотреть случай $j = q$, т.е. доказать равенство чисел s и t для конгруэнтных квадратичных форм

$$\begin{aligned} c_1 x_1^2 + \dots + c_m x_m^2 + [-(x_{m+1}^2 + \dots + x_{m+s}^2) + (x_{m+s+1}^2 + \dots + x_r^2)] \varepsilon^i, \\ c_1 y_1^2 + \dots + c_m y_m^2 + [-(y_{m+1}^2 + \dots + y_{m+t}^2) + (y_{m+t+1}^2 + \dots + y_r^2)] \varepsilon^i, \\ \langle c_1 \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle c_m \rangle \supset \langle \varepsilon^i \rangle \supset 0, \quad 0 < m < r \leq n, \quad 0 \leq s \leq t < m+t \leq r. \end{aligned}$$

Предположим, что $s < t$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)U$ для обратимой матрицы $U = \|u_{jk}\|$. Тогда имеем тождество

$$\begin{aligned} [c_1(x_1^2 - y_1^2) + \dots + c_m(x_m^2 - y_m^2)] + [(x_{m+s+1}^2 + \dots + x_r^2) + (y_{m+1}^2 + \dots + y_{m+t}^2)] \varepsilon^i \\ = [(x_{m+1}^2 + \dots + x_{m+s}^2) + (y_{m+t+1}^2 + \dots + y_r^2)] \varepsilon^i \end{aligned} \quad (3)$$

от переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Составим систему уравнений

$$x_1 - a_1 y_1 = 0, \quad \dots, \quad x_m - a_m y_m = 0, \quad y_{m+t+1} = 0, \quad \dots, \quad y_n = 0, \quad (4)$$

где каждое a_j выбираем равным $+1$ или -1 , обеспечивая выполнение равенства $c_j(x_j^2 - y_j^2) = 0$. Определим точное значение a_j . Угловые (лежащие в левом верхнем углу) миноры V_{jj} порядков $j = 1, 2, \dots, m$ основной матрицы системы (4) получаются из соответствующих миноров матрицы U^T вычитанием элементов $a_1, \dots, a_j$ по главной диагонали. Разность элементов $u_{11} + 1$ и $u_{11} - 1$ равна 2, так что один из них не лежит в J . Элемент a_1 выбираем так, чтобы $V_{11} = u_{11} - a_1 \in R^*$. Допустим, что $a_1, \dots, a_{j-1}$, $1 < j \leq m$, уже выбраны так, что миноры $V_{11}, \dots, V_{j-1, j-1}$ обратимы в R . Разложение минора V_{jj} по j -й строке дает равенство $V_{jj} = b - a_j V_{j-1, j-1} = V_{jj}(a_j)$ для некоторого элемента $b \in R$, не зависящего от выбора a_j . Пользуясь обратимостью разности $V_{jj}(-1) - V_{jj}(1) = 2V_{j-1, j-1}$, выбираем a_j так, чтобы $V_{jj} \in R^*$. Индукция по j показывает, что $a_1, \dots, a_m$ можно выбрать так, чтобы все миноры $V_{11}, \dots, V_{mm}$ были обратимы. Обратимость V_{mm} позволяет записать решение системы (4) в виде

$$y_j = \alpha_{j1} y_{m+1} + \dots + \alpha_{jt} y_{m+t}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad y_{m+t+1} = \dots = y_n = 0.$$

Система s однородных уравнений $x_{m+1} = 0, \dots, x_{m+s} = 0$ от t неизвестных $y_{m+1}, \dots, y_{m+t}$ обладает унимодулярным решением $y_{m+1} = \gamma_{m+1}, \dots, y_{m+t} = \gamma_{m+t}$, так как $s < t$. С его помощью находим значения $y_1, \dots, y_m$ и значения $x_{m+s+1} = \beta_{m+s+1}, \dots, x_r = \beta_r$. Подставляя найденные значения в (3), получаем $d\varepsilon^i = 0$, где $d = \beta_{m+s+1}^2 + \dots + \beta_r^2 + \gamma_{m+1}^2 + \dots + \gamma_{m+t}^2$. Так как аннулятор ненулевого элемента ε^i является неединичным идеалом кольца R , то элемент d должен лежать в J . С другой стороны, в разложении элемента d каждое слагаемое лежит в $J \cup R^{*2}$ и хотя бы одно из слагаемых γ_j^2 является обратимым. Поэтому $d \in R^{*2}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть R есть локальное кольцо с обратимым элементом 2 и главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, причем $|R^* : R^{*2}| = 2$, $1 + J \subset R^{*2}$ и $1 + R^{*2}$ содержит обратимый неквадрат k . Тогда всякая симметричная матрица над R конгруэнтна единственной диагональной матрице вида

$$\begin{aligned} \text{diag}(\delta_i \varepsilon^i, \varepsilon^i, \dots, \varepsilon^i, \dots, \delta_m \varepsilon^m, \varepsilon^m, \dots, \varepsilon^m, 0, \dots, 0), \\ \delta_i, \dots, \delta_m \in \{1, k\}, \quad 0 \leq i < \dots < m, \quad \varepsilon^m \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Матрицы A и B называем диагонально (мономиально) конгруэнтными, если $SAS^T = B$ для обратимой диагональной (соответственно мономиальной) матрицы S . Мономиальная конгруэнтность сохраняет диагональность. Поэтому индукцией легко доказывается

ЛЕММА 2.3. Если матрица A над локальным кольцом R конгруэнтна диагональной матрице D , то D мономиально конгруэнтна диагональной матрице UAU^T с матрицей U над R такой, что ее главная диагональ единична, а все угловые миноры обратимы.

ЛЕММА 2.4. Диагональная матрица конгруэнтна ненулевой матрице $\text{diag}(a, ab) = D$ тогда и только тогда, когда она мономиально конгруэнтна kD с обратимым элементом k из $1 + bR^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть UDU^T – диагональная матрица для некоторой обратимой матрицы U . Учитывая лемму 2.3, получаем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & y \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad UDU^T = a \begin{pmatrix} 1 + by^2 & z + by \\ z + by & z^2 + b \end{pmatrix}.$$

Отсюда $az = -aby$ и поэтому $a(z^2 + b) = a(b^2y^2 + b) = abk$ для $k = 1 + by^2$. Поскольку $UDU^T = kD$ и $a \neq 0$, то $\langle ak \rangle = \langle a \rangle$ и $k \in R^*$. С другой стороны, если k – обратимый элемент в R и $k - 1 = by^2$ для какого-либо элемента y из R , то $UDU^T = kD$ для матрицы $U = \begin{pmatrix} 1 & y \\ -yb & 1 \end{pmatrix}$ с определителем $1 + by^2 = k$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Диагональная матрица переходит в конгруэнтную матрицу, если какие-либо два ее диагональных элемента вида a и ab умножить на обратимый элемент из $1 + bR^2$. При $|R^* : R^{*2}| = 2$ и $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ матрица (1) конгруэнтна матрице вида (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из леммы 2.4. При условии $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ в кольце R существует обратимый неквадрат $f \in 1 + R^2$. Если также $|R^* : R^{*2}| = 2$, то $fk \in R^{*2}$ для любого обратимого неквадрата k . Заменяя в (1) пары $(k\varepsilon^j, k\varepsilon^j)$ на $(\varepsilon^j, \varepsilon^j)$, приводим ее к виду (5). Лемма доказана.

Исследуем конгруэнтные матрицы A и $D = UAU^T$ вида (1). Полагая $f_i = \varepsilon^{t_i - t_{i-1}} \in J$, $1 < i \leq q$, $f_1 = \varepsilon^{t_1}$, находим

$$A = \text{diag}(f_1 A_1, f_1 f_2 A_2, \dots, f_1 f_2 \cdots f_q A_q, O), \quad f_1 f_2 \cdots f_q \neq 0, \quad (6)$$

где A_j – обратимые диагональные клетки и O – нулевая клетка. Представляя аналогично D , найдем клетки D_j ; подобны разбиению A клеточные разбиения $U = \|U_{ij}\|$ и $UAU^T = \|W_{ij}\|$.

ЛЕММА 2.6. Пусть A_j, D_j и U_{ij} – выбранные выше клетки над произвольным локальным кольцом R с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$ и $1 \leq t \leq q$. Тогда $U_{tt}A_tU_{tt}^T = D_t \pmod{J}$, клетка U_{tt} обратима и

$$U_{tj} = O \pmod{f_{j+1} \cdots f_t R}, \quad 1 \leq j < t \leq q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аннулятор элемента $f_1 f_2 \cdots f_i$, $1 \leq i \leq q$, очевидно, лежит в J , а при $i < q$ – даже в $f_{i+1} f_{i+2} \cdots f_q J$. Кроме того,

$$W_{tj} = \sum_{i=1}^q f_1 f_2 \cdots f_i U_{ti} A_i U_{ji}^T, \quad 1 \leq j \leq q, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (7)$$

и $W_{tj} = O$ при $j > q$. Так как $W_{t1} = f_1 U_{t1} A_1 U_{11}^T \pmod{f_1 J}$ и $W_{11} = f_1 D_1$, то $|A_1| |U_{11}|^2 = |U_{11} A_1 U_{11}^T| \in |D_1| + J$; это дает обратимость $|U_{11}|$. По индукции при $1 < t \leq q$ считаем клетки U_{jj} , $j < t$, обратимыми и $U_{ji} = (f_{i+1} f_{i+2} \cdots f_j) \tilde{U}_{ji}$ для некоторых матриц $\tilde{U}_{ji}$, $1 \leq i < j$. Тогда в (7) слагаемое с номером $i < j$ преобразуется к матрице $(f_1 f_2 \cdots f_j) U_{ti} A_i \tilde{U}_{ji}^T$, откуда

$$W_{tj} = f_1 f_2 \cdots f_j \left[\sum_{i=1}^{j-1} U_{ti} A_i \tilde{U}_{ji}^T + U_{tj} A_j U_{jj}^T + f_{j+1}(\cdots) \right].$$

Для $j < t$ матрица $A_j U_{jj}^T$ обратима, и в силу соотношения $W_{tj} = O$ квадратная скобка лежит в $f_{j+1} f_{j+2} \cdots f_q J$. В частности, отсюда находим $U_{t1} = f_2 U_{t2} C \pmod{f_2 J}$ для некоторой матрицы C . Если равенства

$$U_{ti} = f_{i+1} \cdots f_j U_{tj} C_i^{(j)}$$

по модулю $f_{i+1} f_{i+2} \cdots f_j J$ доказаны для подходящих матриц $C_i^{(j)}$, $1 \leq i < j < t$, то с учетом включения $|A_j U_{jj}^T| + J \subseteq R^*$ соотношение $W_{tj} = O$ дает $U_{tj} = f_{j+1} U_{tj+1} C_j^{(j+1)} \pmod{f_{j+1} J}$ и U_{ti} выражаем также через U_{tj+1} . Отсюда $U_{tj} = (f_{j+1} \cdots f_t) U_{tt} C_j^{(t)} \pmod{f_{j+1} \cdots f_t J}$ для подходящих матриц $C_j^{(t)}$ и $1 \leq j < t$. Это приводит к равенству $W_{tt} = (f_1 \cdots f_t) U_{tt} A_t U_{tt}^T$ по модулю $f_1 f_2 \cdots f_t J$. Поэтому соотношение $W_{tt} = f_1 f_2 \cdots f_t D_t$ дает $U_{tt} A_t U_{tt}^T = D_t \pmod{J}$. Отсюда вытекает обратимость U_{tt} и требуемое представление матриц U_{tj} . Индукция завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. В условиях теоремы обратимые неквадраты из $1 + R^2$, очевидно, лежат в $1 + R^{*2}$. Учитывая лемму 2.5, нам остается доказать совпадение конгруэнтных матриц A и $D = UAU^T$ вида (5), где k – фиксированный неквадрат из R^* . Представим их в клеточно-диагональном виде (6). Тогда при $1 \leq t \leq q$ клетки A_t и D_t имеют вид $\text{diag}(\delta, 1, \dots, 1)$ с $\delta \in \{1, k\}$ и могут различаться лишь значениями δ . Ясно, что для клетки A_t значение $\delta = \delta(A_t)$ совпадает с $|A_t|$; аналогично $\delta(D_t) = |D_t|$. По лемме 2.6

$$U_{tt} A_t U_{tt}^T = D_t \pmod{J}, \quad |A_t| |U_{tt}|^2 = |U_{tt} A_t U_{tt}^T| \in |D_t| (1 + J).$$

При условии $1 + J \subset R^{*2}$ это дает включение $|A_t| |D_t| \in R^{*2}$. Поскольку $|A_t|, |D_t| \in \{1, k\}$, то отсюда вытекают равенства $\delta(A_t) = \delta(D_t)$ и $A_t = D_t$ для всех t и поэтому $A = D$. Теорема доказана.

Утверждение единственности в теореме 1.3 обобщает

ЛЕММА 2.7. *Если матрица над локальным кольцом конгруэнтна диагональной матрице $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, то набор идеалов $\langle d_i \rangle$ не зависит от выбора конгруэнтного преобразования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для мономимально конгруэнтных диагональных матриц. Поэтому по лемме 2.3 можем считать, что конгруэнтная D матрица $\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n) = H$ равна UDU^T для обратимой матрицы $U = \|u_{ij}\|$ с единичной главной диагональю. Сравнение главных диагоналей матриц UD и $H(U^T)^{-1}$ дает включения $\langle d_i \rangle \subseteq \langle h_{i'} \rangle$, где $i \mapsto i'$ – подстановка степени n . Так как H также конгруэнтно приводится к D , то наборы идеалов $\{\langle d_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ и $\{\langle h_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ могут различаться лишь перестановкой. Лемма доказана.

Отметим, что лемма 2.6 позволяет выявить также строение ортогональной группы квадратичной формы с матрицей (6).

§ 3. Перечисление классов квадратичных форм

*Проективным пространством, ассоциированным со свободным R -модулем, называют множество всех его R -свободных прямых слагаемых ранга 1. Пусть V – свободный R -модуль конечного ранга $n > 1$. Вектор $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ называют *унимодулярным*, если его координаты порождают единичный идеал кольца R . Точки ассоциированного с V проективного пространства $P(V) = \mathbb{RP}_{n-1}$ представляются в виде Rv для всевозможных унимодулярных векторов $v \in V$. Проективные линейные преобразования проективного пространства $\mathbb{RP}_{n-1}$ соответствуют элементам $U \in \text{PGL}_n(K)$ по правилу: $v \mapsto vU$, $v \in \mathbb{RP}_{n-1}$.*

В проективной геометрии целесообразно перечислять геометрические образы с точностью до проективностей. Напомним, что для свободных модулей M и N отображение $\alpha: P(M) \rightarrow P(N)$ называют *проективностью*, если оно биективно и $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ тогда и только тогда, когда $p_1 \subset p_2 + p_3$ для всех $p_1, p_2, p_3 \in P(M)$. Классическая основная теорема проективной геометрии распространена в [15] на свободные модули M и N конечного ранга больше или равного 3 над коммутативными кольцами. Она показывает, что всякая проективность проективного пространства $P(M)$ на $P(N)$ совпадает с однозначно определенным полулинейным изоморфизмом между ними.

Как следствие, получаем, что *всякая проективность проективного пространства $\mathbb{RP}_{n-1}$, $n > 2$, на себя есть произведение его однозначно определенных проективного линейного преобразования и автоморфизма, индуцированного автоморфизмом основного кольца R .*

Таким образом, при проективном преобразовании матрица A квадратичной формы переходит в $kUA^\sigma U^T$ для подходящих $U \in \text{PGL}_n(K)$, $k \in R^*$ и автоморфизма $\sigma \in \text{Aut } R$. Отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $R = 2R$ есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle \varepsilon \rangle$, причем $(\text{Aut } R) \varepsilon \subseteq \varepsilon R^{*2}$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Тогда проективно эквивалентные квадратичные формы в RP_{n-1} , $n > 2$, являются и проективно конгруэнтными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.3 произвольная квадратичная форма с точностью до проективной конгруэнтности определяется диагональной матрицей (1), где коэффициент k_i всякого элемента $k_i \varepsilon^{t_i}$ равен 1 или фиксированному обратимому неквадрату k в R . Произвольный автоморфизм кольца R в силу выбора R и характеристичности R^{*2} переводит элемент $k_i \varepsilon^{t_i}$ в $k_i \varepsilon^{t_i} R^{*2}$. Поэтому индуцированный автоморфизм преобразует матрицу (1) в конгруэнтную матрицу. Это завершает доказательство.

Выберем сейчас кольцо R , как в теореме 1.3. Если максимальный идеал кольца R нильпотентен степени s , то число $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадратичных форм в RP_{n-1} при $|R^* : R^{*2}| = m$ не превосходит $\binom{n+ms}{n}$.

Число $N(n, s)$ несложно найти явно в ограничениях теорем 2.1 и 2.2 на R , используя следующие обозначения: $[\dots]$ – целая часть числа, $\Omega_q(m)$ – совокупность упорядоченных наборов $(n_1, \dots, n_q)$ целых чисел $n_j > 0$ с суммой m , наконец, число $\binom{p}{q}'$ равно $\binom{p}{q}$ для целых чисел $p \geq q \geq 0$ и равно 0 в других случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если $R = 2R$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$, то соответственно случаям $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ число $N(n, s)$ равно

$$\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} 2^{q-1} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \binom{m-1}{q-1} \right\},$$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \sum_{(n_1, \dots, n_q) \in \Omega_q(m)} \left[\frac{1}{2} \prod_{j=1}^q (n_j + 1) \right] \right\}.$$

Отметим, что с точностью до проективностей классификация квадратичных форм проективной плоскости RP_2 в ограничениях теорем 2.1 и 2.2 на R завершена в силу предложения 3.1; при выполнении условия $(\text{Aut } R) \varepsilon R^{*2} \neq \varepsilon R^{*2}$ классификация была указана в [22; теорема 5].

Следующая теорема иллюстрирует применимость использованных методов к квадратичным формам над локальным кольцом R с не главным максимальным идеалом J . Рангом формы считаем ранг образа ее матрицы при кольцевом гомоморфизме $R \rightarrow R/J$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $F = 2F$ – поле с обратимым неквадратом в $1 + F^{*2}$ и индексом $|F^* : F^{*2}| = 2$, $R = F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$. Тогда число классов проективно эквивалентных диагонализуемых квадратичных форм ранга 0, 1, 2

или 3 проективной плоскости $\mathbb{RP}_2$ равно 9, 5, 4, 1 соответственно. Недиагонализируемые квадратичные формы ранга больше 0 образуют в точности 2 класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В группе $\text{Aut}(R)$ автоморфизмы R как F -алгебры с единицей образуют подгруппу $\mathcal{A}(R)$. Изоморфизм $\alpha: \text{GL}_2(F) \rightarrow \mathcal{A}(R)$ получаем, полагая $\tilde{\alpha}: x \mapsto a_{11}x + a_{12}y, y \mapsto a_{21}x + a_{22}y$ при $\alpha = \|a_{ij}\| \in \text{GL}_2(F)$. Пусть $J = \langle x, y \rangle$ (радикал Джекобсона). Всякий автоморфизм σ поля F и гомоморфизм λ аддитивной группы F^+ в J^+ , для которых $a \mapsto 1 + (a^\sigma)^{-1}a^\lambda, a \in F^*,$ есть гомоморфизм группы F^* в $1 + J$, определяют автоморфизм $a \mapsto a^\sigma + a^\lambda, a \in F$, кольца R ; такие автоморфизмы в группе $\text{Aut}(R)$ образуют подгруппу, обозначаемую далее через $\mathcal{A}_F(R)$. Очевидна

ЛЕММА 3.4. *Группа автоморфизмов кольца R допускает факторизацию*

$$\text{Aut}(R) = \mathcal{A}_F(R)\mathcal{A}(R).$$

Когда идеал J нильпотентен степени 2, подгруппа $\mathcal{A}(R)$ совпадает с $\widetilde{\text{GL}}_2(F)$ и действует транзитивно на F -линейно независимых парах элементов из J .

Рассмотрим квадратичную форму с матрицей $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$ проективной плоскости $\mathbb{RP}_2$. Для класса проективно эквивалентных с нею форм набор идеалов $\langle d_i \rangle$ определен с точностью до автоморфизмов кольца R в силу обобщенной основной теоремы проективной геометрии и леммы 2.7. Автоморфизмы сохраняют отношение инцидентности идеалов. Если идеалы $\langle d_i \rangle$ попарно инцидентны, то по лемме 3.4 с точностью до индуцированного автоморфизма проективной плоскости матрица D лежит над локальным подкольцом $R_x = F + Fx$ главных идеалов. Теорема 2.2 и [22; теорема 5] показывают, что здесь матрица D проективно эквивалентна либо единичной матрице E , либо в точности одной из 4-х явных матриц ранга r (при гомоморфизме $R \rightarrow R/J$) для каждого $r = 0, 1$ и 2.

Пусть среди пар идеалов $\langle d_i \rangle$ есть неинцидентные. К условию $d_1 = x, d_2 \in F^*y$ приводит индуцированный автоморфизм. Лемма 3.4 и теорема 2.2 показывают проективную эквивалентность D либо в точности одной из матриц $\text{diag}(1, x, y), \text{diag}(x, y, 0), \text{diag}(x, y, x)$ и $\text{diag}(x, y, kx)$, либо (когда $d_3 \in F^*x + F^*y$) одной из 4-х матриц

$$D_{a,b} = \text{diag}(x, ay, b(x+y)), \quad a, b \in \{1, k\}.$$

Применяя к матрице $kD_{k,k}$ автоморфизм из $\mathcal{A}(R)$, переставляющий x и y , получаем проективную эквивалентность $D_{k,k}$ и $D_{1,k}$. При $-1 \in F^{*2}$ аналогично приводим $D_{k,1}$ вначале автоморфизмом $x \mapsto -x, y \mapsto x + y$ из $\mathcal{A}(R)$ к матрице $\text{diag}(-x, k(x+y), y)$, а затем к $D_{1,k}$. Когда $k = -1$, используем кольцевой автоморфизм $x \mapsto x + y, y \mapsto -y$ из $\mathcal{A}(R)$ и получаем проективную эквивалентность $D_{k,1}$ матрице $\text{diag}(x + y, y, x)$, а затем и $D_{1,1}$. С другой стороны, учитывая инвариантность (лемма 2.7) относительно проективных конгруэнтностей набора идеалов, порожденных элементами матрицы $D_{1,1}$, несложно убедиться, что квадратичные формы с матрицами $D_{1,k}$ и $D_{1,1}$ не являются проективно

эквивалентными. Итак: *существует точно 19 классов диагонализированных квадратичных форм в $\mathbb{RP}_2$.*

Произвольная симметричная матрица ранга больше 0 над R имеет обратимый, а потому и ведущий элемент. По лемме 1.2 она проективно конгруэнтна матрице $\text{diag}(1, A)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Недиагонализированность A дает $a, b, c \in J$, причем b не лежит ни в одном из идеалов $\langle a \rangle$ и $\langle c \rangle$; по лемме 3.4 можем считать $a = x$, $b = y$. Преобразованием типа I из леммы 1.2 получаем конгруэнтную A матрицу $\begin{pmatrix} x & y + \beta x \\ y + \beta x & \alpha x \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in F$. Умножив на t ее 2-й столбец и 2-ю строку, получим конгруэнтную матрицу, причем уравнение $\alpha x t^2 = \delta x$ разрешимо относительно $t \in F^*$ лишь при единственном δ из $\{0, 1, k\}$. Замена $t(y + \beta x)$ на y дает проективно эквивалентную матрицу $C_\delta = \begin{pmatrix} x & y \\ y & \delta x \end{pmatrix}$. Положим $D_\delta = \text{diag}(1, C_\delta)$.

Матрица UC_1U^T при $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ диагональна, и поэтому матрица D_1 диагонализирована. Пусть $\delta \in \{0, k\}$. Если матрица $UD_\delta U^T$ диагональна, $U \in \text{GL}_3(R)$, то выберем $U = \|\alpha_{ij}\|$ с единичной главной диагональю по лемме 2.3. Тогда $\alpha_{21}, \alpha_{31} \in J$. Учитывая условие $J^2 = 0$ и F -линейную независимость x и y , получаем включения $\alpha_{32} + \delta\alpha_{23} \in J$, $\alpha_{23}\alpha_{32} + 1 \in J$. Отсюда $\delta\alpha_{23}^2 \in 1 + J$ и $\delta \in R^{*2}$, противоречие с выбором δ . Поэтому матрицы D_0 и D_k недиагонализированы. Допустим, наконец, $UD_0^\sigma U^T = D_k$ для кольцевого автоморфизма σ с условием $x \mapsto a$, $y \mapsto b$, и $U = \|u_{ij}\| \in \text{GL}_3(R)$. Как и в лемме 2.6, докажем обратимость u_{11} и $u_{21}, u_{31} \in J$. Сравнивая в матричном равенстве главные диагонали, получаем $x = u_{22}^2 a + 2u_{22}u_{23}b$, $kx = u_{32}^2 a + 2u_{32}u_{33}b$. Это дает обратимость элементов u_{22} и u_{32} , а также равенство $(ku_{22}^2 - u_{32}^2)a = 2(u_{32}u_{33} - ku_{22}u_{23})b$. В силу F -линейной независимости a и b отсюда следует включение $ku_{22}^2 - u_{32}^2 \in J$ и поэтому $k \in R^{*2}$, противоречие. Итак: *существует точно 2 класса проективно эквивалентных недиагонализированных квадратичных форм ранга больше 0 в $\mathbb{RP}_2$, их представляют формы с матрицами D_0 и D_k .* Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Недиагонализированная квадратичная форма ранга 0 в $\mathbb{RP}_2$, как и выше, проективно эквивалентна форме с матрицей

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & \delta x & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in R, \quad \delta \in \{0, 1, k\}. \quad (8)$$

Если $a = 0$, $b \in F^*x$, приходим к дополнительным ограничениям $b = x$ и $\delta = 0$; случай $a = 0$, $b \in Fx + F^*y$ сводится к случаю $b = 0$, $a \in Fx$. Когда $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$, получаем $b = 0$ и $\delta \in \{0, k\}$, причем либо $a = \delta_1 y$, $\delta_1 \in \{0, 1, k\}$, либо $a \in \delta_2(x + Fy)$, $\delta_2 \in \{1, k\}$. (Используем обобщенную основную теорему проективной геометрии [15] и лемму 3.4.) Однако последний случай и, аналогично, случай F -линейно независимых элементов a , b показывают зависимость

числа классов проективно эквивалентных квадратичных форм ранга 0 с матрицей (8) от выбора поля F в теореме 3.3; при имеющемся произволе мы не получаем даже, что это число конечно.

Список литературы

- [1] Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, Наука, Физматлит, М., 1969.
- [2] А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Наука, Физматлит, М., 1970.
- [3] W. Scharlau, “Quadratic and Hermitian forms”, *Grundlehren Math. Wiss.*, **270**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [4] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1980.
- [5] R. Baeza, “The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2”, *Comm. Algebra*, **18**:5 (1990), 1337–1348.
- [6] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, Физматлит, М., 1972.
- [7] Б. А. Венков, *Избранные труды. Исследования по теории чисел*, Наука, Л., 1981.
- [8] Э. Б. Винберг, “Об унимодулярных целочисленных квадратичных формах”, *Функц. анализ и его прилож.*, **6**:2 (1972), 24–31.
- [9] Д. Касселс, *Рациональные квадратичные формы*, Мир, М., 1982.
- [10] W. Benz, *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [11] В. В. Вишневский, Б. А. Розенфельд, А. П. Широков, “О развитии геометрии пространств над алгебрами”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1984, № 7, 38–44.
- [12] В. В. Вишневский, А. П. Широков, В. В. Шурыгин, *Пространства над алгебрами*, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1985.
- [13] M. A. Marshall, *Bilinear forms and orderings on commutative rings*, Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., **71**, Queen’s Univ., Kingston, ON, 1985.
- [14] Ю. И. Мерзляков (ред.), *Автоморфизмы классических групп*, Сб. пер., Мир, М., 1976.
- [15] M. Ojanguren, R. Sridharan, “A note on the fundamental theorem of projective geometry”, *Comment Math. Helv.*, **44** (1969), 310–315.
- [16] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings*, Lecture Notes in Math., **655**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [17] R. Baeza, “On the classification of quadratic forms over semilocal rings”, *Colloque sur les Formes Quadratiques*, 2 (Montpellier, 1977), Bull. Soc. Math. France Mém., **59**, 1979, 7–10.
- [18] J.-L. Colliot-Thélène, “Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers”, *Colloque sur les Formes Quadratiques*, 2 (Montpellier, 1977), Bull. Soc. Math. France Mém., **59**, 1979, 13–31.
- [19] J. L. Yucas, “A classification theorem for quadratic forms over semilocal rings”, *Ann. Math. Sil.*, **2**:14 (1986), 7–12.
- [20] D. R. Estes, R. M. Guralnick, “A stable range for quadratic forms over commutative rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **120**:3 (1997), 255–280.
- [21] Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер, *Симметрические билинейные формы*, Наука, Физматлит, М., 1986.
- [22] О. А. Старикова, “Перечисление квадрик проективных плоскостей и пространств над локальными кольцами главных идеалов”, *Алгебра и теория моделей*, № 4, НГТУ, Новосибирск, 2003, 110–115.
- [23] В. М. Левчук, О. А. Старикова, “Квадрики и симметричные формы модулей над локальным кольцом главных идеалов”, *Тезисы докладов “Международная алгебраическая конференция”*, МГУ, М., 2004, 86–88.

- [24] О. А. Старикова, *Перечисление квадратик и симметричных форм модулей над локальными кольцами*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, Северный международный университет, Магадан, 2004.
- [25] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [26] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, Физматлит, М., 1979.
- [27] W. Brown, *Matrices over commutative rings*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **169**, Marcel Dekker, New York, 1993.
- [28] E. A. Hornix, “Totally indefinite quadratic forms over formally real fields”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **47**:3 (1985), 305–312.

В. М. Левчук (V. M. Levchuk)

Красноярский государственный университет

E-mail: levchuk@lan.krasu.ru

Поступила в редакцию

04.10.2004 и 18.04.2005

О. А. Старикова (O. A. Starikova)

Северный международный университет, г. Магадан

E-mail: star-olga@yandex.ru