Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Захаров, Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 6, 47–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:59:13

УДК 517.95

С. В. Захаров

Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы

В работе доказано существование асимптотического решения квазилинейного параболического уравнения с малым параметром в окрестности точки перехода слабого разрыва решения предельного уравнения в сильный разрыв. Поведение первых двух коэффициентов полученного асимптотического решения исследовано во всей плоскости растянутых переменных.

Библиография: 4 названия.

§ 1. Введение

Настоящее исследование является развитием работы [1], в которой рассматривалась следующая задача Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

$$u(x, -1) = -(x + ax^2) \Theta(-x)(1 + q(x)). \quad (1.2)$$

Предполагается, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) > 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$, $q \in C^\infty(\mathbb{R})$, $q(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля. Через Θ обозначается функция Хевисайда.

В этой задаче асимптотическое поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ при малых ε имеет значительно более сложный характер, чем в задаче Коши с гладкой начальной функцией [2; гл. VI].

Приведем результаты, необходимые для дальнейшего.

Через $u_0(x, t)$ будем обозначать решение предельной задачи ($\varepsilon = 0$). Для рассматриваемой начальной функции решение $u_0(x, t)$ при $t < 0$ является гладкой функцией всюду за исключением линии $x = 0$, в точках которой само решение $u_0(x, t)$ непрерывно, а его производная по x имеет разрыв первого рода; кроме того, характеристики предельного уравнения не пересекаются при $t < 0$, а для сколь угодно малого $t > 0$ существуют характеристики, пересекающиеся в момент времени t .

Таким образом, на линии $x = 0$ решение $u_0(x, t)$ имеет *слабый разрыв*, за которым при $t = 0$ следует *градиентная катастрофа*:

$$\lim_{t \rightarrow -0} \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \infty.$$

При $t > 0$ решение $u_0(x, t)$ разрывно на гладкой кривой $x = s(t)$, определяемой из условия Гюгонио.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01008) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1446.2003.1).

В области $\Omega^- = \{(x, t) : -1 < t < 0, x < -\varepsilon^{(1-\beta)/2}\}$, $0 < \beta < 1/2$, асимптотика решения $u(x, t, \varepsilon)$ имеет вид ряда по целым степеням ε с гладкими коэффициентами, зависящими от x и t :

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (1.3)$$

Главный член этого разложения – рассмотренное выше решение $u_0(x, t)$, коэффициенты при ε^n , $n \geq 1$, определены в [1; (3.2), (3.3)].

В области $\Omega^+ = \{(x, t) : -1 < t < 0, x > \varepsilon^{(1-\beta)/2}\}$ решение экспоненциально мало:

$$u(x, t, \varepsilon) = O\left(\exp\left\{-\frac{1}{4\varepsilon^\beta(1+t)}\right\}\right), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

В области $\Omega^0 = \{(x, t) : -1 < t < -\varepsilon^{(1+\beta)/3}, x^2 < \varepsilon^{1-2\beta}\}$ асимптотика решения $u(x, t, \varepsilon)$ имеет вид ряда по полужелым степеням ε с гладкими коэффициентами, зависящими от внутренней переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и переменной t (см. [3]):

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, t), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (1.4)$$

В работе [1] было детально исследовано поведение коэффициентов $v_k(\zeta, t)$ при $t \rightarrow -0$. Асимптотические ряды, описывающие это поведение, имеют существенно различный вид в следующих трех областях:

$$\begin{aligned} D_\rho^- &= \{(\zeta, t) : \zeta < -|t|^\rho, -1 < t < 0\}, & 0 < \rho < \frac{1}{2}, \\ D_\delta^0 &= \{(\zeta, t) : |\zeta| < |t|^\delta, -1 < t < 0\}, & 0 < \delta < \rho, \\ D_\rho^+ &= \{(\zeta, t) : \zeta > |t|^\rho, -1 < t < 0\}. \end{aligned}$$

Для любого $k \geq 1$ при $t \rightarrow -0$ справедливы следующие разложения:

$$v_k(\zeta, t) = V_k^-(\zeta, t) + O(\exp\{-h|t|^{2\rho-1}\}), \quad (\zeta, t) \in D_\rho^-, \quad h > 0,$$

$$v_k(\zeta, t) = \sum_{s=0}^{[k/2]} \ln^s |t| \sum_{m=0}^{\infty} |t|^{-3k/2+s+1+m/2} R_{k,s,m}(\theta), \quad (\zeta, t) \in D_\delta^0, \quad (1.5)$$

$$v_k(\zeta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m S_{k,m}(\zeta), \quad (\zeta, t) \in D_\rho^+; \quad (1.6)$$

здесь V_k^- – функции из класса $C^\infty(\mathbb{R} \times (-1, 0))$, имеющие особенности при $t \rightarrow -0$, порядок которых растет при $k \rightarrow \infty$, $R_{k,s,m}$ – C^∞ -гладкие функции на оси автомодельной переменной $\theta = \zeta/(2\sqrt{-t})$, а $S_{k,m}$ – функции из класса $C^\infty(0, +\infty)$, имеющие особенности при $\zeta \rightarrow +0$, порядок которых растет при $k + m \rightarrow \infty$.

В настоящей работе на основе результатов, полученных в [1], построено и обосновано асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности точки перехода линии слабого разрыва (решения предельного уравнения) в сильный разрыв с точностью до любой степени ε .

§ 2. Постановка задачи

В окрестности начала координат ($x = 0, t = 0$) введем растянутые переменные

$$\xi = \varepsilon^{-2/3}x, \quad \tau = \varepsilon^{-1/3}t. \quad (2.1)$$

Сделаем такую замену в разложении (1.5), учитывая соотношение

$$\theta = \frac{\zeta}{2\sqrt{-t}} \equiv \frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}.$$

Подставляя результат в ряд (1.4) и группируя выражения при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$, получаем следующий формальный ряд:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon W_{p,s}^0(\xi, \tau),$$

где

$$W_{p,s}^0(\xi, \tau) = \sum_{l=s}^{[p/2]-1} \frac{l!}{s!(l-s)!3^s} \ln^{l-s} |\tau| \sum_{k=\max\{1, 2l\}}^{\infty} |\tau|^{(p-3k)/2} R_{k,l,p-2l-2}(\theta). \quad (2.2)$$

Очевидно, что асимптотику решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности начала координат следует искать в виде такого же ряда:

$$W = \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon w_{p,s}(\xi, \tau). \quad (2.3)$$

Переписывая уравнение (1.1) в переменных (2.1) и подставляя в него ряд (2.3), получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \tau} + w_{2,0} \frac{\partial w_{2,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w_{3,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial(w_{2,0}w_{3,0})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial w_{p,s}}{\partial \tau} + \frac{\partial(w_{2,0}w_{p,s})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi}, \quad (2.6)$$

где

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{p-1} \sum_{l=0}^s w_{m,l} w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{\substack{p_1+\dots+p_q=p+2 \\ s_1+\dots+s_q=s}} \prod_{j=1}^q w_{p_j,s_j} \quad (2.7)$$

(считается, что при $s = [p/2] - 1$ сумма по q равна нулю).

Переходя во внешнем разложении (1.3) к переменным ξ и τ , получаем формальный ряд

$$\sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon W_{p,s}^-(\xi, \tau), \quad (2.8)$$

в котором, в частности, $W_{p,s}^-(\xi, \tau) \equiv 0$ для нечетных p ,

$$W_{2,0}^-(\xi, \tau) = 2R(\xi, \tau) + \sum_{p=0}^{\infty} c_p (Q(\xi, \tau))^{-3p-2}, \quad c_0 = -2b, \quad b = a - \frac{\varphi'''(0)}{2}, \quad (2.9)$$

где

$$Q(\xi, \tau) = \sqrt{\tau^2 - 4b\xi}, \quad R(\xi, \tau) = \frac{\tau + Q(\xi, \tau)}{4b}. \quad (2.10)$$

Делая замену (2.1) в разложении (1.6), подставляя результат в ряд (1.4) и группируя выражения при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$, получаем следующий формальный ряд:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon W_{p,s}^+(\xi, \tau), \quad (2.11)$$

где, в частности, $W_{p,s}^+(\xi, \tau) \equiv 0$ при $s > 0$,

$$W_{p,0}^+(\xi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_{[m/2]}(\tau)}{\xi^{m-p+3}}. \quad (2.12)$$

Здесь и далее через $P_n(z)$ обозначаются (всякий раз различные) полиномы степени n относительно z .

Основная цель настоящей работы – доказать, что уравнения (2.4)–(2.6) обладают решениями, которые при $\tau \rightarrow -\infty$ разлагаются в асимптотические ряды $W_{p,s}^0(\xi, \tau)$ и $W_{p,s}^{\pm}(\xi, \tau)$ в областях, определяемых ниже. Для таких решений $w_{p,s}(\xi, \tau)$ ряд (2.3) является асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2) в окрестности точки градиентной катастрофы.

§ 3. Исследование решений первых двух уравнений

В этом параграфе доказываются существование решений уравнений (2.4) и (2.5), обладающих требуемыми асимптотиками при $\tau \rightarrow -\infty$, и исследуется поведение этих решений на бесконечности во всей плоскости растянутых переменных.

Начнем с описания свойств коэффициентов рядов (2.2), приводя, где это необходимо, результаты работы [1].

Функции $R_{k,s,m}$ удовлетворяют рекуррентной системе уравнений

$$T_n R_{k,s,m} = \mathcal{Q}[R_{\kappa,\sigma,\mu}], \quad n = -3k + 2s + m + 2, \quad (3.1)$$

где правые части представляют собой комбинации функций $R_{\kappa,\sigma,\mu}$ с индексами $\kappa \leq k$, $\sigma \leq s$, $\mu \leq m$, а оператор T_n определен следующим образом:

$$T_n R = R'' - 2(\theta + Z_0(\theta))R' - 2(Z_0'(\theta) - n)R, \\ Z_0(\theta) = -2\theta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta), \quad \Lambda(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-\theta^2) \left(\int_0^\infty \exp(-y^2) dy \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Кроме того, функции $R_{k,s,m}$ удовлетворяют условиям

$$R_{k,s,m}(\theta) = O(\theta^n), \quad \theta \rightarrow +\infty, \quad (3.3)$$

где n выражается через нижние индексы так же, как в (3.1);

$$R_{k,s,2j}(\theta) = \begin{cases} P_{k-2s}(\theta) + \rho(\theta), & 0 \leq j \leq k-1 - \min\{1, s\}; \\ P_{3k-2j-4-2s}(\theta) + \rho(\theta), & k - \min\{1, s\} \leq j \leq k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 2 - s; \\ \rho(\theta), & k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1 - s \leq j < \infty, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R_{k,s,2j+1}(\theta) = \rho(\theta), \quad j \geq 0, \quad (3.5)$$

где $\rho(\theta) = O(\theta^q e^{-\theta^2})$ при $\theta \rightarrow -\infty$; в частности,

$$R_{k,0,0}(\theta) = -\mu_k 2^k b^{k-1} \theta^k (1 + o(1)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad (3.6)$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_k = \sum_{k_1+k_2=k} \mu_{k_1} \mu_{k_2}.$$

Приведем также некоторые явные выражения (см. [1; теорема 1 и (3.24)]), существенные для дальнейших доказательств:

$$R_{1,0,0}(\theta) = Z_0(\theta) = (\ln \Lambda(\theta))', \quad (3.7)$$

$$R_{1,0,1}(\theta) = -\Lambda'(\theta), \quad (3.8)$$

$$R_{2,0,0}(\theta) = -b \left(4\theta^2 + 2 + \frac{8\theta^3}{3\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta) - \frac{8(\theta^2 + 1)}{3\pi} \Lambda^2(\theta) \right). \quad (3.9)$$

ЛЕММА 1. При $n \leq -2$ уравнение $T_n R = F$ может иметь только одно ненулевое решение R такое, что

$$|R(\theta)| \leq c_1 \theta^n, \quad \theta \geq 1, \quad (3.10)$$

$$|R(\theta)| \leq c_2 |\theta|^{-n-3}, \quad \theta \leq -1, \quad (3.11)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что есть два таких решения. Обозначим через Q их разность. Таким образом, $T_n Q = 0$. Путем замены $Q = (H\Lambda)'$ приходим к уравнению Эрмита

$$H'' - 2\theta H' + 2nH = 0.$$

Хорошо известно (см., например, [4; гл. X]), что при $n < 0$ решения этого уравнения выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию. Однако здесь более удобно выбрать решения как в [1]:

$$H_n^-(\theta) = \tilde{H}_{-n-1}(\theta) \exp(\theta^2) \int_{-\infty}^{\theta} \exp(-z^2) dz + \tilde{S}_{-n-2}(\theta), \quad (3.12)$$

$$H_n^+(\theta) = \sqrt{\pi} \tilde{H}_{-n-1}(\theta) \exp(\theta^2), \quad (3.13)$$

где $\tilde{H}_n(\theta)$ – полиномы Эрмита мнимого аргумента, а полиномы $\tilde{S}_n(\theta)$ определены в [1].

Легко проверить, что функции $(H_n^+ \Lambda)'$ и $(H_n^- \Lambda)'$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $T_n Q = 0$.

Из (3.12) и (3.13) вытекает, что функция $H_n^* = H_n^+ - H_n^-$ является единственным (с точностью до множителя) решением уравнения Эрмита, для которого выполняется соотношение

$$H_n^*(\theta) = \alpha_n \theta^n + O(\theta^{n-2}), \quad \theta \rightarrow +\infty. \quad (3.14)$$

Поэтому из условия (3.10) следует, что

$$Q(\theta) = a_n (H_n^*(\theta) \Lambda(\theta))', \quad a_n \neq 0.$$

Пользуясь формулами (3.12) и (3.13), получаем

$$H_n^*(\theta) = \beta_n \theta^{-n-1} \exp(\theta^2) (1 + O(\theta^{-n-2})), \quad \theta \rightarrow -\infty. \quad (3.15)$$

Из последних двух соотношений и (3.2) вытекает, что

$$Q(\theta) = b_n \theta^{-n-2} (1 + o(1)), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad b_n \neq 0.$$

А это противоречит условию (3.11). Лемма доказана.

Из (2.2) при $p = 2$ и $s = 0$ получаем ряд, в который должно разлагаться решение уравнения (2.4):

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\tau|^{(2-3k)/2} R_{k,0,0}(\theta), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (3.16)$$

Положим

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi, \tau)} \frac{\partial \Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad (3.17)$$

$$\Phi(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right\} ds. \quad (3.18)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функция $w_{2,0}$, определенная выражениями (3.17) и (3.18), является решением уравнения (2.4), для которого в области*

$$X^0 = \{(\xi, \tau) : |\xi| < |\tau|^{1-\gamma}, \tau < 0\}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2},$$

справедлива асимптотическая формула (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формуле (3.18) сделаем замену $s = \omega/\sqrt{-\tau}$. Тогда

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{\exp(\theta^2)}{\sqrt{-\tau}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{4b}{3} \frac{\omega^3}{\sqrt{-\tau^3}} - (\omega + \theta)^2\right\} d\omega.$$

Если разбить область интегрирования на два промежутка: от 0 до $|\tau|^{1/2-\gamma}$ и от $|\tau|^{1/2-\gamma}$ до ∞ , и разложить на первом промежутке $\exp\{-4b\omega^3|\tau|^{-3/2}/3\}$ по формуле Тейлора, то после элементарной оценки остатка в области X^0 получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \tau) = & \frac{\exp(\theta^2)}{\sqrt{-\tau}} \left\{ \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} \left(-\frac{4b}{3\sqrt{-\tau^3}} \right)^p \right. \\ & \times \int_0^{|\tau|^{1/2-\gamma}} \omega^{3p} \exp\{-(\omega + \theta)^2\} d\omega + O(|\tau|^{-3(N+1)\gamma}) \Big\}. \end{aligned}$$

Распространим интегрирование до бесконечности, тогда, как нетрудно проверить, остаточный член изменится на величину $O(|\tau|^{-2(N+1)\gamma} \exp\{-|\tau|^{1-2\gamma}/8\})$. После замены переменной интегрирования $\omega + \theta = y$ получившиеся интегралы можно вычислить по частям. Сравнивая результат с (3.12) и (3.13), получаем

$$\Phi(\xi, \tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p}{p! 6^p} |\tau|^{-(3p+1)/2} (H_{3p+1}^+(\theta) - H_{3p+1}^-(\theta)). \quad (3.19)$$

Подставляя ряд (3.19) в (3.17), приходим к разложению

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\tau|^{(2-3k)/2} \tilde{R}_{k,0,0}(\theta), \quad (3.20)$$

где первые два коэффициента $\tilde{R}_{1,0,0}(\theta)$ и $\tilde{R}_{2,0,0}(\theta)$ совпадают с $R_{1,0,0}(\theta)$ и $R_{2,0,0}(\theta)$ соответственно, как нетрудно убедиться с помощью явных выражений (3.7) и (3.9). Поэтому осталось доказать, что $\tilde{R}_{k,0,0}(\theta) \equiv R_{k,0,0}(\theta)$ при $k \geq 3$.

Из (3.12) и (3.13) заключаем, что при $\theta \rightarrow -\infty$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{k,0,0}(\theta) = & -\left(\frac{b}{6}\right)^{k-1} \left\{ \frac{\tilde{H}_{3k-2}(\theta)}{(k-1)!} \right. \\ & + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\tilde{H}_{3(k-m)-2}(\theta)}{(k-m-1)!} \sum_{n=1}^m (-1)^n \sum_{\substack{i_1+\dots+i_n=m \\ i_\nu \in \mathbb{N}}} \frac{\tilde{H}_{3i_1}(\theta) \dots \tilde{H}_{3i_n}(\theta)}{i_1! \dots i_n!} \\ & \left. + O(\theta^{\mu_k} \exp(-\theta^2)) \right\}. \end{aligned}$$

С помощью соотношения

$$\tilde{H}_n(\theta) = (2\theta)^n + n(n-1)(2\theta)^{n-2} + O(\theta^{n-4}), \quad \theta \rightarrow \infty, \quad \forall n \geq 1,$$

эта формула приводится к виду

$$\tilde{R}_{k,0,0}(\theta) = -2 \left(\frac{4b}{3} \right)^{k-1} (\alpha_k \theta^{3k-2} + \beta_k \theta^{3k-4}) + O(\theta^{3k-6}), \quad \theta \rightarrow -\infty,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k = & \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(k-m-1)!} \sum_{n=1}^m (-1)^n \sum_{i_1+\dots+i_n=m} \frac{1}{i_1! \dots i_n!}, \\ \beta_k = & \frac{3(3k-2)}{(k-2)!} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(k-m-1)!} \\ & \times \sum_{n=1}^m (-1)^n \sum_{i_1+\dots+i_n=m} \frac{9 \sum_{\nu=1}^n i_\nu^2 + 3(3(k-m)^2 - 5k + 4m + 2)}{i_1! \dots i_n!}. \end{aligned}$$

Используя известную комбинаторную формулу¹

$$\sum_{i_1+\dots+i_n=m} \frac{1}{i_1! \dots i_n!} = \frac{n!}{m!} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (n-l)^m}{l! (n-l)!}, \quad i_\nu \geq 1,$$

¹Эту формулу можно получить, например, разлагая произведение $\prod_{\nu=1}^n (\exp(x_\nu) - 1)$ в ряд Тейлора при $x_\nu \rightarrow 0$ и сравнивая коэффициенты при $\prod_{\nu=1}^n x_\nu^{i_\nu}$ для $\sum_{\nu=1}^n i_\nu = m$ с аналогичными коэффициентами в разложении $\exp(\sum_{\nu=1}^n x_{i_\nu}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\sum_{\nu=1}^n x_{i_\nu})^j$.

и ее простое следствие

$$\sum_{i_1+\dots+i_n=m} \frac{i_1^2+\dots+i_n^2}{i_1!\dots i_n!} = n! \sum_{j=1}^{m-n+1} \frac{j}{(j-1)!(m-j)!} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l (n-l-1)^{m-j}}{l!(n-l-1)!},$$

$$i_\nu \geq 1,$$

заключаем, что $\alpha_k = 0$ и $\beta_k = 0$ при $k \geq 3$. Следовательно, для функций $\tilde{R}_{k,0,0}$ справедлива оценка

$$\tilde{R}_{k,0,0}(\theta) = O(\theta^{3k-6}), \quad \theta \rightarrow -\infty, \quad k \geq 3. \quad (3.21)$$

Ряды в правых частях (3.16) и (3.20) имеют одинаковый вид и являются асимптотическими решениями уравнения (2.4). Следовательно, функции $R_{k,0,0}$ и $\tilde{R}_{k,0,0}$ удовлетворяют одной и той же рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T_{-3k+2}R_{k,0,0} = 2 \sum_{m=1}^{k-2} R_{k-m,0,0} R'_{m+1,0,0}, \quad k \geq 3. \quad (3.22)$$

Воспользуемся леммой 1 при $n = -3k + 2$. Согласно (3.3) и (3.6) условия этой леммы выполняются для функций $R_{k,0,0}$. Из оценки (3.21) вытекает выполнение условия (3.11) для функций $\tilde{R}_{k,0,0}$, а из (3.14), (3.19) и (3.17) – выполнение условия (3.10). Применяя индукцию по индексу k , заключаем, что $\tilde{R}_{k,0,0}(\theta) = R_{k,0,0}(\theta)$ при $k \geq 3$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Теперь перейдем к уравнению (2.5). Положим

$$w_{3,0}(\xi, \tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\Phi(\xi, \tau))^2} \frac{\partial \Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \quad (3.23)$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция $w_{3,0}$, определенная выражениями (3.18) и (3.23), является решением уравнения (2.5), для которого в области X^0 справедлива асимптотическая формула $w_{3,0}(\xi, \tau) = W_{3,0}^0(\xi, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 3$ и $s = 0$ из (2.2) находим

$$W_{3,0}^0(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\tau|^{(3-3k)/2} R_{k,0,1}(\theta). \quad (3.24)$$

Подставляя ряд (3.19) в формулу (3.23), получаем разложение такого же вида, имеющее асимптотический характер в области X^0 :

$$w_{3,0}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\tau|^{(3-3k)/2} \tilde{R}_{k,0,1}(\theta), \quad (3.25)$$

где, в частности, $\tilde{R}_{1,0,1}(\theta) = -\Lambda'(\theta)$. Согласно (3.8) коэффициент $\tilde{R}_{1,0,1}(\theta)$ совпадает с $R_{1,0,1}(\theta)$. Кроме того, из соотношений (3.14) и (3.15) вытекает, что

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{k,0,1}(\theta) &= O(\theta^{-3k+3}), & \theta \rightarrow +\infty, \\ \tilde{R}_{k,0,1}(\theta) &= O(\theta^{3k-2} \exp(-\theta^2)), & \theta \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Ряды (3.24) и (3.25) имеют одинаковый вид и являются асимптотическими решениями уравнения (2.5). Следовательно, функции $R_{k,0,1}$ и $\tilde{R}_{k,0,1}$ удовлетворяют одной и той же рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T_{-3k+3}R_{k,0,1} = 2 \sum_{m=1}^{k-1} R_{k-m,0,1} R'_{m+1,0,0}, \quad k \geq 2. \quad (3.26)$$

Согласно условиям (3.3) и (3.5) для функций $R_{k,0,1}$ справедливы те же оценки, что и для $\tilde{R}_{k,0,1}$. Применяя индукцию по k и пользуясь леммой 1 при $n = -3k + 3$, получаем $\tilde{R}_{k,0,1}(\theta) = R_{k,0,1}(\theta)$ при $k \geq 2$.

Теорема доказана.

Для описания поведения построенных коэффициентов $w_{2,0}(\xi, \tau)$ и $w_{3,0}(\xi, \tau)$ при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ на плоскости независимых переменных выделим следующие области:

$$\begin{aligned} X^+ &= \{(\xi, \tau) : \xi > 0, -\xi^{2-\alpha} < \tau \leq 0\} \cup \{(\xi, \tau) : \tau > 0, 16b\xi > 3\tau^2 + \tau^{\alpha-1}\}, \\ X^- &= \{(\xi, \tau) : \xi < 0, -|\xi|^{2-\alpha} < \tau\} \cup \{(\xi, \tau) : \tau > 0, 16b\xi < 3\tau^2 - \tau^{\alpha-1}\}, \\ X^s &= \left\{(\xi, \tau) : \left| \xi - \frac{3\tau^2}{16b} \right| < \tau^{2-\nu}, \tau > 0\right\}. \end{aligned}$$

Область X^s содержит параболу $16b\xi - 3\tau^2 = 0$, на которой внутренний локальный максимум подынтегральной функции в (3.18) равен значению краевого максимума на нижнем пределе интегрирования. Параметры α и ν выберем так, чтобы

$$0 < \nu < \alpha < \frac{1-2\gamma}{1-\gamma} < 1.$$

При таком соотношении α , ν и γ объединение $X^+ \cup X^0 \cup X^- \cup X^s$ является окрестностью бесконечности в $\mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 3. В области X^- справедлива асимптотическая формула

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = W_{2,0}^-(\xi, \tau), \quad \xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формуле (3.18) сделаем замену переменной интегрирования:

$$s = R(\xi, \tau) + Q(\xi, \tau)z,$$

где R и Q определены в (2.10). Тогда

$$\Phi(\xi, \tau) = \exp\left(\frac{1}{3}\tau R^2 - \frac{2}{3}\xi R\right) \int_{-R/Q}^{\infty} \exp\left\{-Q^3\left(\frac{4b}{3}z^3 + z^2\right)\right\} dz.$$

После подстановки в (3.17) получаем

$$\begin{aligned} w_{2,0}(\xi, \tau) &= 2R(\xi, \tau) + 2Q(\xi, \tau) \int_{-R/Q}^{\infty} z \exp\left\{-Q^3\left(\frac{4b}{3}z^3 + z^2\right)\right\} dz \\ &\quad \times \left(\int_{-R/Q}^{\infty} \exp\left\{-Q^3\left(\frac{4b}{3}z^3 + z^2\right)\right\} dz\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Асимптотика интегралов в этой формуле определяется критической точкой подэкспоненциального выражения $z = 0$. Тот факт, что нижний предел интегрирования может стремиться к нулю в области X^- при $\xi \rightarrow -\infty$, не мешает воспользоваться методом Лапласа, так как в этом случае, добавляя интеграл от некоторого фиксированного отрицательного числа до $-R/Q$, мы изменим весь интеграл на величину порядка $O(|\xi|^\lambda e^{-h|\xi|})$. Таким образом, в области X^- справедливо асимптотическое разложение

$$\Phi(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{Q}} \exp\left\{\frac{\tau^3 - 6b\xi\tau + Q^3}{24b^2}\right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j Q^{-3j}\right), \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Из последней формулы для $w_{2,0}(\xi, \tau)$ вытекает разложение вида (2.9) с некоторыми коэффициентами c'_p , причем $c'_0 = -2b = c_0$. Подстановка ряда (2.9) в уравнение приводит к рекуррентной формуле для коэффициентов c_p :

$$c_{p+1} = 4(3p+2)b^2c_p - \frac{2b}{3p+4} \sum_{j=0}^p (3j+2)c_jc_{p-j}.$$

Поэтому из равенства $c_0 = c'_0$ следует равенство $c_p = c'_p$ при любом $p \geq 0$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В области X^- справедлива оценка

$$w_{3,0}(\xi, \tau) = O(\exp\{-h(Q(\xi, \tau))^3\}), \quad h > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из формул (3.17), (3.23), (3.28) и теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. При $\tau \rightarrow +\infty$ в области X^s справедливы асимптотические разложения

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-3k} \sum_{m=0}^k \ln^m \tau Y_{2,0,k,m}(\Xi), \quad (3.29)$$

$$w_{3,0}(\xi, \tau) = \tau^3 \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-3k} \sum_{m=0}^k \ln^m \tau Y_{3,0,k,m}(\Xi), \quad (3.30)$$

где $Y_{p,0,k,m}$ — гладкие функции переменной

$$\Xi = \frac{16b}{3\sqrt{2\pi}} \tau^{-3/2} \exp\left\{\frac{3\tau}{8b} \left(\xi - \frac{3\tau^2}{16b}\right)\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В интеграле (3.18) сделаем замену $s = \tau\omega$. Тогда

$$\Phi(\xi, \tau) = \tau \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{8b}{3} z\omega + \tau^3 B(\omega)\right\} d\omega,$$

$$B(\omega) = -\frac{4b}{3} \omega^3 + \omega^2 - \frac{3}{16b} \omega, \quad z = \frac{3\tau}{8b} \left(\xi - \frac{3\tau^2}{16b}\right).$$

Асимптотика этого интеграла при $\tau \rightarrow +\infty$ в области X^s представляет собой сумму вклада граничной точки ($\omega = 0$), который находится интегрированием по частям, и вклада внутреннего локального максимума функции B при $\omega = 3/(8b)$, который находится с помощью метода Лапласа:

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{16b}{3\tau^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-3k} P_{1,k}(z)\right) + \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-3k} P_{2,k}(z)\right).$$

Подставляя это разложение в выражения (3.17) и (3.23), получаем (3.29) и (3.30) соответственно. Отметим явные выражения для главных членов:

$$Y_{2,0,0,0}(\Xi) = \frac{3}{4b(1+\Xi)}, \quad Y_{3,0,0,0}(\Xi) = -\frac{9\sqrt{\pi}\Xi}{128b^2(1+\Xi)^2}.$$

Точный смысл формул (3.29) и (3.30) состоит в том, что частичные суммы рядов в правых частях, содержащие степени τ вплоть до τ^{-3N} , приближают $w_{2,0}(\xi, \tau)$ и $w_{3,0}(\xi, \tau)$ в области X^s с точностью $O(\tau^{-3\nu N})$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. При $\xi \rightarrow +\infty$ в области X^+ справедливы асимптотические разложения

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = W_{2,0}^+(\xi, \tau), \quad w_{3,0}(\xi, \tau) = W_{3,0}^+(\xi, \tau), \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области X^+ максимум фазовой функции в формуле для $\Phi(\xi, \tau)$ достигается на краю промежутка интегрирования (в нуле). Если в формуле (3.18) провести интегрирование по частям, то получится выражение

$$\Phi(\xi, \tau) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{P_{[m/2]}(\tau)}{\xi^{m+1}} + \frac{1}{\xi^N} \int_0^\infty F_N(s, \tau) \exp\left\{-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right\} ds, \quad (3.32)$$

где

$$F_N(s, \tau) = \sum_{q=0}^{N-1} s^q P_{\sigma(N,q)}(\tau) + \sum_{q=N}^{2N} s^q P_{2N-q}(\tau),$$

$$\sigma(N, q) = 2N - q - 3 \left\lfloor \frac{N - q + 1}{2} \right\rfloor.$$

Если $\tau^2 \leq 4b\xi$, то при $s > 0$ у фазовой функции нет локальных максимумов и, как нетрудно видеть, справедливо неравенство

$$\left| \int_0^\infty s^q \exp\left\{-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right\} ds \right| \leq M\xi^{-q-1},$$

из которого вытекает оценка $O(\xi^{-\alpha N/2})$ для остаточного члена в формуле (3.32).

Если $\tau^2 > 4b\xi$, то в точке $r = (\tau - Q)/(4b)$ у фазовой функции имеется локальный минимум, а в точке $R = (\tau + Q)/(4b)$ – локальный максимум. В этом случае необходимая оценка получается, если разбить область интегрирования на три промежутка: от 0 до r , от r до $R + r$ и от $R + r$ до ∞ . Интегралы по этим промежуткам равны $O(\xi^{-q-1})$, $O(e^{-h_1\tau^\alpha})$ и $O(e^{-h_2\tau^3})$ соответственно. Тогда остаток имеет порядок $O(\xi^{-3N/4})$.

Совершенно аналогично получается разложение для $\partial\Phi(\xi, \tau)/\partial\xi$. Подставляя его вместе с разложением для $\Phi(\xi, \tau)$ в (3.17), мы получаем для функции $w_{2,0}(\xi, \tau)$ ряд такого же вида, что и ряд в правой части соотношения (2.12) при $p = 2$.

Осталось доказать, что полученный ряд в точности совпадает с $W_{2,0}^+(\xi, \tau)$. В самом деле, согласно теореме 1 в области $X^0 \cap X^+$ имеет место асимптотическое равенство $w_{2,0}(\xi, \tau) = W_{2,0}^0(\xi, \tau)$. Но по построению в этой же области $W_{2,0}^0(\xi, \tau) = W_{2,0}^+(\xi, \tau)$. Отсюда $w_{2,0}(\xi, \tau) = W_{2,0}^+(\xi, \tau)$ в $X^0 \cap X^+$, а значит, и во всей области X^+ .

Доказательство для функции $w_{3,0}$ повторяется почти дословно.

Теорема доказана.

§ 4. Доказательство существования решений $w_{p,s}(\xi, \tau)$

Для исследования уравнений (2.6) нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Существуют константы $C_{\pm} > 0$, $C_{p,q}^{\pm} > 0$ такие, что при $\tau \leq -1$ интеграл $\Phi(\xi, \tau)$ удовлетворяет оценкам*

$$C_{+}^{-1} < \Phi(\xi, \tau) \sqrt{-\tau} \Lambda\left(\frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}\right) < C_{+}, \quad \xi \geq 0, \quad (4.1)$$

$$C_{-}^{-1} Q^{-1/2} < \Phi(\xi, \tau) \exp\left\{-\frac{1}{3}\tau R^2 + \frac{2}{3}\xi R\right\} < C_{-} Q^{3/2}, \quad \xi < 0, \quad (4.2)$$

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi^p \partial \tau^q}\right| < \frac{C_{p,q}^{+}}{\xi + \sqrt{-\tau}}, \quad \xi \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi^p \partial \tau^q}\right| < C_{p,q}^{-} Q^{3/2} (1 + R^{p+2q}) \exp\left\{\frac{1}{3}\tau R^2 - \frac{2}{3}\xi R\right\}, \quad \xi < 0, \quad (4.4)$$

где $Q = Q(\xi, \tau)$ и $R = R(\xi, \tau)$ определены в (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из (3.18) следует неравенство

$$\Phi(\xi, \tau) \leq \int_0^{\infty} \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds.$$

После замены $s = y/\sqrt{-\tau} + \xi/(2\tau)$ в интеграле приходим (см. (3.2)) ко второму неравенству в (4.1).

Теперь докажем первое неравенство в (4.1). Ограничивая промежуток интегрирования отрезком $[0, 1]$ и заменяя s^3 минимальным значением, имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \tau) &\geq \exp\left\{-\frac{4b}{3}\right\} \int_0^1 \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{4b}{3}\right\} \int_0^1 \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds + \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{4b}{3} - \xi\right\} \int_0^1 \exp\{\tau s^2\} ds \\ &\geq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{4b}{3}\right\} \int_0^1 \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds + \frac{1}{2K} \exp\left\{-\frac{4b}{3}\right\} \int_1^{\infty} \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds \\ &\geq \frac{1}{2K} \exp\left\{-\frac{4b}{3}\right\} \int_0^{\infty} \exp\{\tau s^2 - \xi s\} ds, \end{aligned}$$

где $K > 0$ достаточно велико. После замены $s = y/\sqrt{-\tau} + \xi/(2\tau)$ приходим к нужному неравенству.

Для того чтобы доказать оценки (4.2), в выражении (3.18) сделаем замену переменной интегрирования

$$s = R(\xi, \tau) + \frac{\omega}{\sqrt{Q(\xi, \tau)}}, \quad (4.5)$$

в результате которой получим

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Q(\xi, \tau)}} \exp\left\{\frac{1}{3}\tau R^2 - \frac{2}{3}\xi R\right\} \int_{-R\sqrt{Q}}^{\infty} \exp\left\{-\omega^2 - \frac{4b}{3} \frac{\omega^3}{Q^{3/2}}\right\} d\omega.$$

Оценка интеграла снизу тривиальна, если сузить область интегрирования до промежутка $(0, \infty)$, заменяя при этом Q в подынтегральной экспоненте минимальным возможным значением (которое равно 1).

Для оценки сверху область интегрирования разобьем на две части: от $-R\sqrt{Q}$ до 0 и от 0 до ∞ и воспользуемся неравенством $4bR < Q$, которое справедливо при $\tau < 0$.

Из формулы (3.18) получаем соотношение

$$\left| \frac{\partial^{p+q} \Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi^p \partial \tau^q} \right| = \int_0^\infty s^{p+2q} \exp \left\{ -\frac{4b}{3} s^3 + \tau s^2 - \xi s \right\} ds. \quad (4.6)$$

Рассматривая отдельно интегралы от 0 до 1 и от 1 до ∞ , получаем оценку (4.3).

Для доказательства оценки (4.4) разобьем промежуток интегрирования в (4.6) на две части: от 0 до $2R$ и от $2R$ до ∞ . В первом случае множитель s^{p+2q} оценим через $(2R)^{p+2q}$, после чего продолжим интегрирование до ∞ ; во втором случае сделаем замену (4.5) и оценим $\exp\{-4b\omega^3/(3Q^{3/2})\}$ единицей.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $F \in C^N(\mathbb{R}^2)$ для достаточно большого N и при $\tau \leq -1$ справедливы оценки

$$|D^k F(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-N}, \quad k \leq N, \quad (4.7)$$

где D^k означает производную порядка k . Тогда уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial(w_{2,0}w)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = F(\xi, \tau) \quad (4.8)$$

имеет решение $w(\xi, \tau)$, удовлетворяющее оценкам

$$|D^k w(\xi, \tau)| \leq M_1(\xi^2 + \tau^2)^{-m}, \quad k \leq m, \quad (4.9)$$

где $m \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена

$$w(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \{v(\xi, \tau)(\Phi(\xi, \tau))^{-1}\} \quad (4.10)$$

приводит (4.8) к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\Phi(\xi, \tau))^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \right\} = F(\xi, \tau).$$

Очевидно, что функция

$$v(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - \eta, \tau - s) \Phi(\eta, s) F_1(\eta, s) d\eta ds, \quad (4.11)$$

где

$$G(\eta, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{4s} \right\}, \quad F_1(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\eta} F(y, s) dy,$$

является решением этого уравнения. Представим $v(\xi, \tau)$ в виде суммы двух интегралов:

$$v(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \int_0^{\infty} \dots d\eta ds + \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^0 \dots d\eta ds \equiv I^+(\xi, \tau) + I^-(\xi, \tau).$$

Оценим $I^+(\xi, \tau)$ при $\xi \leq 0$, пользуясь неравенством (4.1) и тем, что (при $\xi \leq 0$) из оценки (4.7) вытекает аналогичная оценка для $F_1(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned}
 I^+(\xi, \tau) &\leq K_1 \int_{-\infty}^{\tau} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \exp\left\{-\frac{(\eta-\xi)^2}{4(\tau-s)}\right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{-s}} \left(\Lambda\left(\frac{\eta}{2\sqrt{-s}}\right)\right)^{-1} |s|^{-2N-2} d\eta ds \\
 &\leq \frac{K_1}{\Lambda(0)} \int_{-\infty}^{\tau} \int_0^{\infty} \frac{|s|^{-2N-2}}{\sqrt{\tau-s}} \exp\left\{-\frac{(\eta-\xi)^2}{4(\tau-s)}\right\} d\eta ds \\
 &= K_2 \int_{-\infty}^{\tau} |s|^{-2N-2} \int_{-\xi/(2\sqrt{\tau-s})}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega ds \\
 &\leq K_3 \int_{-\infty}^{\tau} |s|^{-2N-2} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4(\tau-s)}\right\} ds \\
 &\leq K_3 \int_{-\infty}^{\tau} |s|^{-2N-2} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4|s|}\right\} ds.
 \end{aligned}$$

При $|\xi| \leq |\tau|$ получаем

$$I^+(\xi, \tau) \leq \int_{-\infty}^{\tau} |s|^{-2N-2} ds \leq |\tau|^{-2N-1} \leq (\xi^2 + \tau^2)^{-N}.$$

Если же $|\xi| \geq |\tau|$, то

$$I^+(\xi, \tau) \leq |\xi|^{-4N-2} \int_{|\tau|\xi^{-2}}^{\infty} y^{-2N-2} \exp\left\{-\frac{1}{4y}\right\} dy \leq (\xi^2 + \tau^2)^{-2N}.$$

Теперь оценим $I^-(\xi, \tau)$ (при $\xi \leq 0$), пользуясь неравенством (4.2):

$$I^-(\xi, \tau) \leq K \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^0 \exp\{J(\xi, \eta, \tau, s)\} \frac{(Q(\eta, s))^{3/2}}{\sqrt{\tau-s}(\eta^2 + s^2)^{N-1}} d\eta ds, \quad (4.12)$$

где

$$J(\xi, \eta, \tau, s) = -\frac{(\eta-\xi)^2}{4(\tau-s)} + \frac{s^3 - 6b\eta s + (s^2 - 4b\eta)^{3/2}}{24b^2}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2\sqrt{s^2 - 4b\eta}} \leq -\left|\frac{\tau}{2s}\right| \frac{1}{\tau-s} < 0,$$

функция $J(\xi, \eta, \tau, s)$ имеет единственную точку максимума по переменной η ; обозначим эту точку через $H(\xi, \tau, s)$. Таким образом,

$$J(\xi, \eta, \tau, s) \leq J(\xi, H(\xi, \tau, s), \tau, s) - \frac{1}{4(\tau-s)} \left|\frac{\tau}{s}\right| (\eta - H(\xi, \tau, s))^2. \quad (4.13)$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned}
 H(\xi, \tau, s) &= \xi - 2R(\xi, \tau)(\tau-s), \\
 J(\xi, H(\xi, \tau, s), \tau, s) &= \frac{1}{3} \tau R^2(\xi, \tau) - \frac{2}{3} \xi R(\xi, \tau).
 \end{aligned}$$

Тогда из (4.12) и (4.13) вытекает оценка

$$I^-(\xi, \tau) \leq K E(\xi, \tau) \times \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ - \left| \frac{\tau}{s} \right| \frac{(\eta - H(\xi, \tau, s))^2}{4(\tau-s)} \right\} \frac{(Q(\eta, s))^{3/2}}{(\eta^2 + s^2)^{N-1}} d\eta ds,$$

где

$$E(\xi, \tau) = \exp \left\{ \frac{1}{3} \tau R^2 - \frac{2}{3} \xi R \right\}.$$

При $|\xi| \leq |\tau|$ эта оценка продолжается следующим образом:

$$I^-(\xi, \tau) \leq E(\xi, \tau) \int_{-\infty}^{\tau} \frac{|s|^{-2N_1}}{\sqrt{\tau-s}} ds \int_{-\infty}^0 \frac{d\eta}{(\eta^2 + 1)^{N_2}} \leq (\xi^2 + \tau^2)^{-m} E(\xi, \tau).$$

Пусть теперь $|\xi| \geq |\tau|$. Воспользуемся неравенством $H(\xi, \tau, s) \leq \xi$ и монотонностью (по переменной η при фиксированном s) функции $(\eta^2 + s^2)^{-N}$. После чего сделаем замену $s = \tau\omega$. Тогда

$$I^-(\xi, \tau) \leq |\tau| E(\xi, \tau) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega-1}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ - \frac{(\eta - \xi)^2}{4|\tau|\omega(\omega-1)} \right\} \frac{d\eta}{(\eta^2 + \tau^2\omega^2)^{N_1}} d\omega.$$

Область интегрирования по η разобьем на три промежутка:

$$\left(-\infty, \frac{3\xi}{2} \right), \quad \left(\frac{3\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \right), \quad \left(\frac{\xi}{2}, 0 \right).$$

Для первого и третьего промежутков имеет место неравенство

$$\exp \left\{ - \frac{(\eta - \xi)^2}{4|\tau|\omega(\omega-1)} \right\} \leq \exp \left\{ - \frac{\xi^2}{16|\tau|\omega^2} \right\}.$$

С учетом этого неравенства оценка соответствующих интегралов почти тривиальна. На промежутке $(3\xi/2, \xi/2)$ оценим экспоненту единицей и воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{(\eta^2 + s^2)^{N_1}} \leq \frac{1}{(\tau\omega)^2 \eta^{2(N_1-1)}}.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$|v(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-m} E(\xi, \tau).$$

Из формулы (4.10) и оценок леммы 2 вытекает (4.9) для $\xi \leq 0$.

Для доказательства оценок производных продифференцируем (4.11), “перенесем” производные с функции Грина G на ΦF_1 и воспользуемся неравенствами (4.3) и (4.4).

Для того чтобы проверить эти оценки при $\xi \geq 0$, представим $F_1(\xi, \tau)$ в виде $F_2(\xi, \tau) + \rho(\tau)$, где

$$F_2(\xi, \tau) = - \int_{\xi}^{\infty} F(y, \tau) dy, \quad \rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y, \tau) dy.$$

Интеграл (4.11) разбивается при этом на два интеграла. Первый из них удовлетворяет тем же оценкам, что и $v(\xi, \tau)$, но при $\xi \leq 0$. А второй интеграл равен $\Phi(\xi, \tau) \int_{-\infty}^{\tau} \rho(s) ds$. После подстановки в формулу (4.10) соответствующее слагаемое в $w(\xi, \tau)$ обращается в нуль и не оказывает влияния на оценку $w(\xi, \tau)$ и ее производных. Тем самым лемма 3 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 6. В классе $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ существуют решения $w_{p,s}$ уравнений (2.6) такие, что при $\tau \rightarrow -\infty$ эти решения разлагаются в асимптотические ряды из (2.8), (2.2) и (2.11) в областях X^- , X^0 и X^+ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть доказано существование $w_{q,l}(\xi, \tau)$ при всех $q < p$ и $l > s$. Тогда правая часть уравнения (2.6) находится по формуле (2.7).

Рассмотрим функцию

$$W_N = \chi^- \Pi_N W_{p,s}^- + \chi^0 \Pi_N W_{p,s}^0 + \chi^+ \Pi_N W_{p,s}^+,$$

где $\Pi_N W_{p,s}^{\pm(0)}$ — это частичные суммы рядов $W_{p,s}^{\pm(0)}$ из (2.8), (2.2) и (2.11), а функции $\chi^{\pm(0)}$ обладают следующими свойствами: $\chi^{\pm(0)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, каждая из этих функций тождественно равна единице в некоторых подобластях $X_1^\pm$ и X_1^0 областей $X^\pm$ и X^0 соответственно за исключением некоторой окрестности начала координат, где эти функции равны нулю; $\chi^-(\xi, \tau) + \chi^0(\xi, \tau) + \chi^+(\xi, \tau) = 1$ внутри $X^- \cup X^+ \cup X^0$. Функция W_N удовлетворяет уравнению

$$L_0 W_N \equiv \frac{\partial W_N}{\partial \tau} + \frac{\partial(w_{2,0} W_N)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 W_N}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi} + Z_N(\xi, \tau),$$

где $|Z_N(\xi, \tau)| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-N_1}$ при $\tau \leq -1$, $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, так как по построению ряды $W_{p,s}^{\pm(0)}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнения (2.6).

Согласно лемме 3 при $\tau \leq -1$ существует решение уравнения

$$L_0 Y_N = Z_N(\xi, \tau).$$

Продолжим это решение для всех τ по формулам (4.10) и (4.11). Тогда функция $w_N = W_N - Y_N$ всюду в плоскости переменных (ξ, τ) удовлетворяет уравнению (2.6) и (в силу леммы 3) оценке $|w_N - W_N| = |Y_N| \leq M(\xi^2 + \tau^2)^{-N_2}$ при $\tau \leq -1$, где $N_2 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Повторяя схему доказательства теоремы 4.2 из [2; гл. VI, § 4], приходим к выводу, что w_N не зависит от N для достаточно больших N .

Теорема доказана.

Тем самым построено асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности начала координат с точностью до любой степени ε . Из результатов [1] при $t < 0$ стандартным образом (см., например, [2; гл. VI, § 6]) вытекает справедливость построенного асимптотического разложения в рассмотренной области.

Список литературы

- [1] С. В. Захаров, А. М. Ильин, “От слабого разрыва к градиентной катастрофе”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 3–18.
- [2] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, Физматлит, М., 1989.
- [3] В. Г. Сушко, “Об асимптотических разложениях решений одного параболического уравнения с малым параметром”, *Дифференц. уравнения*, **21**:10 (1985), 1794–1798.
- [4] Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, Физматгиз, М., Л., 1963.

С. В. Захаров (S. V. Zakharov)
Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург
E-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
16.12.2004