Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О многообразиях Фано–Энриквеса, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 4, 117–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:36:06

УДК 512.77

Ю. Г. Прохоров

О многообразиях Фано–Энриквеса

Пусть $U \subset \mathbb{P}^N$ – проективное многообразие, не являющееся конусом, гиперплоские сечения которого – гладкие поверхности Энриквеса. В работе доказывается, что степень U не превосходит 32 и эта оценка является строгой.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются трехмерные многообразия, гиперплоские сечения которых – гладкие поверхности Энриквеса. Такие многообразия изучались в множестве работ, начиная с работ Дж. Фано [1] (см. также [2]).

Пусть U – нормальное проективное трехмерное многообразие, и пусть A – простой дивизор Картье на U такой, что пучок $\mathcal{O}_U(A)$ обилен. Будем говорить, что (U, A) – *многообразие Фано–Энриквеса*, если A – гладкая поверхность Энриквеса, а U не является обобщенным конусом над A (т.е. U не получается стягиванием отрицательного сечения на $\mathbb{P}^1$ -расслоении над A). Определим *род* многообразия Фано–Энриквеса как $g := A^3/2 + 1$.

Основной результат настоящей работы составляет следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Род g многообразия Фано–Энриквеса (U, A) не превосходит 17, и эта оценка является строгой. Более того, с точностью до изоморфизма существует единственное многообразие Фано–Энриквеса (U_{32}, A_{32}) рода 17.*

Фано утверждал, что многообразия Фано–Энриквеса существуют только для $g = 4, 6, 7, 9, 13$. Однако его аргументы с современной точки зрения являются неудовлетворительными и, на самом деле, содержат ошибки. В частности, позднее было показано, что многообразия Фано–Энриквеса рода $g = 10$ существуют. Конструкции Фано были восстановлены Конте и Муром [3], [4], но эти авторы предполагали, что особенности U – достаточно общие, и, на самом деле, не закончили классификацию. Новый подход к проблеме классификации возник благодаря теории минимальных моделей. При дополнительном предположении, что U имеет лишь циклические факторособенности, многообразия Фано–Энриквеса (U, A) были классифицированы Бейле [5] и Сано [6]. Согласно [7] каждое многообразие Фано–Энриквеса, имеющее только терминальные особенности, допускает $\mathbb{Q}$ -сглаживание. Это означает, что такое многообразие является деформацией многообразия, содержащегося в списке Бейле–Сано. В частности, род терминальных многообразий Фано–Энриквеса принимает следующие значения: $2 \leq g \leq 10$ и $g = 13$. Важный результат

Работа выполнена при поддержке CRDF-RUM (грант № 1-2692-МО-05) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00353-а).

был получен И. А. Чельцовым [8]. Он доказал, что любое многообразие Фано–Энриквеса (U, A) имеет лишь канонические ($\mathbb{Q}$ -горенштейновы) особенности. Таким образом, для завершения классификации необходимо рассмотреть случай канонических нетерминальных особенностей.

Заметим, что наши результаты сильнее, чем утверждение теоремы 1.1. На самом деле, мы докажем много фактов о многообразиях Фано–Энриквеса, особенно для случая достаточно большого рода. Отметим, что оценка $g \leq 17$ следует также из недавнего результата И. Каржеманова (готовится к печати).

Настоящая работа выполнена во время пребывания автора в Математическом институте Макса Планка в Бонне. Автор выражает благодарность институту за оказанную поддержку и гостеприимство.

§ 2. Предварительные сведения

Всюду на протяжении статьи основное поле считается полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Настоящая статья является продолжением предыдущей работы автора [9]. Мы сохраним все обозначения этой работы. Применяя технику работы [9], мы будем пользоваться леммой Шокурова о связности и обращением присоединения (см. [10; гл. 17]). Эти два основных результата будут использоваться постоянно без дополнительных ссылок.

Следующие факты могут быть найдены в [4]. Отметим только, что в работе [4] авторы предполагали, что дивизор A является очень обильным и определяет вложение U как проективно нормального многообразия. Однако эти предположения необязательны для доказательства следующих свойств (i)–(iii).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть (U, A) – многообразие Фано–Энриквеса рода g . Тогда

- (i) U имеет лишь изолированные особенности,
- (ii) дивизор Вейля K_U не является дивизором Картье,
- (iii) $\dim |A| = g$ и $\dim |-K_U| = g - 1$.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [8]). Пусть (U, A) – многообразие Фано–Энриквеса. Тогда U имеет лишь ($\mathbb{Q}$ -горенштейновы) канонические особенности и $K_X + A$ – элемент 2-кручения в группе классов дивизоров Вейля.

Пусть (U, A) – многообразие Фано–Энриквеса рода g , $\pi: V \rightarrow U$ – глобальное логканоническое накрытие. Тогда π является конечным этальным в коразмерности два морфизмом таким, что $\pi^*(K_U + A) \sim 0$. В частности, $\pi^*K_U = K_V$ – дивизор Картье. Следовательно, V – многообразие Фано степени $4g - 4$ с каноническими горенштейновыми особенностями. Пусть τ – инволюция Галуа на V . Тогда τ действует свободно вне конечного множества точек и $U = V/\tau$.

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [11], [12]). Если род $g = g(U) \geq 12$, то линейная система $|-K_V|$ очень обильна и определяет вложение $V \subset \mathbb{P}^{2g}$.

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что $-K_V$ очень обилен. (Однако мы не предполагаем, что $g \geq 12$.)

Если особенности многообразия V терминальны, то они являются изолированными особенностями типа cDV. Тогда мы можем применить [7; теорема 4.2].

Согласно этому результату существует одномерная деформация $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{T} \ni 0$ с центральным слоем $\mathfrak{U}_0 = U$ и соседними слоями, имеющими лишь циклические факторособенности. Тогда тотальное пространство $\mathfrak{U}$ является $\mathbb{Q}$ -горнштейновым и $-K_{\mathfrak{U}_t}^3$, $t \in \mathfrak{T}$, – константа. По классификации Бейле–Сано [5], [6] имеем $-K_{\mathfrak{U}_t}^3 \leq 24$. Следовательно, $g(U) \leq 13$ (и, более того, $g \neq 11, 12$).

Таким образом, предположим, что V имеет по крайней мере одну нетерминальную точку P . Будем рассматривать два основных случая:

- (I) $\tau P \neq P$;
- (II) точка P является τ -инвариантной.

Заметим, что (I) эквивалентно следующему условию:

- (I') U имеет нетерминальную горнштейнову точку.

Пусть $\mathcal{L} := |-K_V|$. Эта линейная система имеет две τ -инвариантные подсистемы:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+ &:= \pi^*|A|, & \dim \mathcal{L}^+ &= g, \\ \mathcal{L}^- &:= \pi^*|-K_U|, & \dim \mathcal{L}^- &= g-1.\end{aligned}$$

Следующая лемма является немедленным следствием конструкции.

ЛЕММА 2.4. *Общий элемент $L^+ \in \mathcal{L}^+$ является гладкой τ -инвариантной поверхностью типа КЗ. Более того, пара $(V, \mathcal{L}^+)$ канонична.*

Мы будем применять различные виды логпрограммы минимальных моделей (ЛПММ) в категории G -многообразий (с $G = \mu_2 = \langle \tau \rangle$). Очень краткое введение читатель может найти в [13; §2.2]. На самом деле, нет большой разницы между G -ЛПММ и стандартной ЛПММ. Подчеркнем только следующее.

- G -ЛПММ имеет дело с $G\mathbb{Q}$ -факториальными многообразиями. Последнее означает, что каждый τ -инвариантный дивизор является $\mathbb{Q}$ -картье дивизором.
- При работе с логдивизором $K + D$, где D – граница (соответственно линейная система), D должна быть G -инвариантной.
- Вместо группы Пикара $\text{Pic } X$, конуса Мори $\overline{\text{NE}}(X)$ и т.д. мы должны рассматривать их G -инвариантные аналоги $\text{Pic}^G X$, $\overline{\text{NE}}^G(X)$ и т.д.
- Каждое дивизориальное стягивание уменьшает инвариантное число Пикара $\rho^G(X)$ на 1 и стягивает G -инвариантный дивизор.

В частности, для каждого трехмерного многообразия V с каноническими особенностями можно построить $G\mathbb{Q}$ -факториальную терминальную модификацию $\phi: W \rightarrow V$. По определению это бирациональное G -эквивариантное стягивание такое, что W имеет лишь терминальные $G\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $K_W = \phi^*K_V$. Такая модификация не единственна, но любые две из них получаются друг из друга последовательностью G -эквивариантных флопов.

Если $\mathcal{L}$ – линейная система на V без неподвижных компонент и X – бирациональная модель V , то обозначим через $\mathcal{L}_X$ бирациональный образ $\mathcal{L}$ на X . Если это не приводит к путанице, будем писать просто $\mathcal{L}$ вместо $\mathcal{L}_X$.

§ 3. Пример

Пусть x и $y_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 2$, – однородные координаты в $\mathbb{P}^9$. Рассмотрим антиканоническое вложение $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^8 = \{x = 0\} \subset \mathbb{P}^9$:

$$(u_0 : u_1) \times (v_0 : v_1) \mapsto (y_{0,0} : \dots : y_{2,2}), \quad y_{i,j} = u_0^i u_1^{2-i} v_0^j v_1^{2-j}.$$

Пусть $V \subset \mathbb{P}^9$ – проективный конус над S , и пусть $P = (0 : \dots : 0 : 1)$ – его вершина.

ЛЕММА 3.1. *Многообразие V является трехмерным горнштейновым многообразием Фано с каноническими особенностями. Более того, $-K_V = 2M$, где M – класс гиперплоских сечений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как поверхность $S \subset \mathbb{P}^8$ проективно нормальна, то конус V является нормальным многообразием. Пусть $\sigma: W \rightarrow V$ – раздутие вершины P . Тогда W – $\mathbb{P}^1$ -расслоение над S и морфизм σ стягивает отрицательное сечение E в P . Более точно, $W \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-K_S))$ и отображение $\sigma: W \rightarrow V \subset \mathbb{P}^9$ задается тавтологической линейной системой $|\mathcal{O}(1)|$. Поэтому $\mathcal{O}(1) \sim \sigma^*M$. Так как $K_W \sim \mathcal{O}(-2)$ и этот дивизор тривиален на E , то K_V – дивизор Картье, $K_W = \sigma^*K_V$ и $K_V = -2M$.

Определим действие циклической группы $\mu_2 = \{1, \tau\}$ на $\mathbb{P}^8$ и $\mathbb{P}^9$ следующим образом:

$$\tau: x \mapsto -x, \quad y_{i,j} \mapsto (-1)^{i+j} y_{i,j}.$$

Тогда S и V являются τ -инвариантными и индуцированное действие на S будет

$$(u_0 : u_1) \times (v_0 : v_1) \mapsto (-u_0 : u_1) \times (-v_0 : v_1).$$

Множество τ -неподвижных точек в $\mathbb{P}^9$ состоит из двух проективных подпространств

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_+^4 &:= \{y_{0,0} = y_{0,2} = y_{2,0} = y_{2,2} = y_{1,1} = 0\}, \\ \mathbb{P}_-^4 &:= \{y_{0,1} = y_{2,1} = y_{1,0} = y_{1,2} = x = 0\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\mathbb{P}_+^4 \cap V = \{P\}, \quad \mathbb{P}_-^4 \cap V = \{P_{0,0}, P_{0,2}, P_{2,0}, P_{2,2}\},$$

где $P_{i,j} := \{x = 0, y_{k,l} = 0 \mid (k,l) \neq (i,j)\}$. В частности, действие τ на V свободно в коразмерности два.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Фактормногообразие V по $\mu_2 = \{1, \tau\}$ является многообразием Фано–Энриквеса U_{32} рода 17.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}^+$ – линейная система, высекаемая на V квадриками следующего вида:

$$q_1(y_{0,0}, y_{0,2}, y_{2,0}, y_{2,2}, y_{1,1}) + q_2(y_{0,1}, y_{2,1}, y_{1,0}, y_{1,2}, x) = 0,$$

где q_1 и q_2 – квадратичные однородные формы. Легко видеть, что $\mathcal{L}^+$ свободна от базисных точек и каждый элемент линейной системы $\mathcal{L}^+$ является τ -инвариантным. В частности, общий элемент $L \in \mathcal{L}^+$ неособ и не содержит точек $P, P_{0,0}, P_{0,2}, P_{2,0}, P_{2,2}$. Следовательно, действие τ на L свободно. Так как $\mathcal{L}^+ \subset |-K_V|$, то L является поверхностью типа КЗ. Пусть $\pi: V \rightarrow U = V/\tau$ – факторморфизм, и пусть $A := \pi(L) = L\tau$. Тогда A – неособая поверхность Энриквеса. Наконец, имеем $L = \pi^*A$ и $2g - 2 = A^3 = \frac{1}{2}L^3 = \frac{1}{2}(2M)^3 = 32$. Поэтому $g = 17$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Аналогичная конструкция может быть применена к антиканонически вложенной поверхности дель Пеццо $S = S_6 \subset \mathbb{P}^6$ степени 6. Мы получим новое многообразие Фано–Энриквеса рода $g = 13$ с каноническими особенностями.

§ 4. Случай (I)

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда U имеет нетерминальную горенштейнову точку. Напомним, что дивизор $-K_V$ очень обилен по нашему предположению (см. § 2). Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *При сделанных выше предположениях имеем $g \leq 5$.*

ЛЕММА 4.2. *Пусть (U, A) – многообразие Фано–Энриквеса. Предположим, что U имеет нетерминальную горенштейнову точку O (в этой лемме мы не предполагаем, что $-K_V$ очень обилен). Тогда для общего элемента $A^0 \in |A|$, проходящего через O , пара (U, A^0) логканонична. Более того, O – единственный центр логканонических особенностей в коразмерности > 1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}^O \subset |A|$ – линейная подсистема, состоящая из дивизоров, проходящих через O , и пусть $\mathcal{L}^O := \pi^*\mathcal{A}^O$. Общий элемент C обильной линейной системы $|\mathcal{O}_A(A)|$ является гладкой неприводимой кривой (см., например, [14; теорема 4.10.2]). Так как $H^1(\mathcal{O}_U(A)) = 0$, то отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U(A)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_A(A))$ сюръективно. Следовательно, существует элемент $A^0 \in \mathcal{A}^O$ такой, что $A^0|_A = C$. Поверхность A^0 приведена и имеет лишь изолированные особенности. Так как дивизор A^0 обилен, то он связан.

Пусть $\pi^{-1}(O) = \{P, P'\}$. Тогда точки $P, P' \in V$ нетерминальны. Положим $L^0 := \pi^*A^0 \in \mathcal{L}^O$. Эта поверхность также приведена, неприводима и имеет лишь изолированные особенности. Так как L^0 – дивизор Картье, он является нормальной поверхностью. Ясно, что поверхность L^0 горенштейнова и $K_{L^0} \sim 0$. Далее точки $P, P' \in L^0$ не являются дювалевскими. Действительно, в противном случае точки $P, P' \in V$ – изолированные типа cDV. Поэтому они терминальны. По результату Шокурова о связности (см. [10; 12.3.1]) особенности L^0 логканоничны и L^0 не имеет других недювалевских особенностей. По теореме об обращении присоединения и лемме о связности пара (V, L^0) логканонична. Более того, логканонические центры в коразмерности > 1 – в точности точки P и P' . Теперь утверждение леммы 4.2 следует по формуле ветвления (см., например, [10; доказательство 20.3] или [13; доказательство 5.20]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Мы сохраняем обозначения из доказательства леммы 4.2. Пусть $\Delta := \frac{1}{2}L^0 + \frac{1}{2}L^1$, где $L^0, L^1 \in \mathcal{L}^O$ – общие элементы. Тогда пара (V, Δ) логканонична (см. [10; 2.17]) и ее множество логканонических особенностей совпадает с $\{P, P'\}$. Так как L^0 и L^1 – дивизоры Картье, то каждый крепантный исключительный дивизор над P или P' имеет дискрепантность -1 относительно $K_V + \Delta$.

Теперь воспользуемся нашим предположением о том, что дивизор $-K_V$ очень обилен. Пусть $\mathcal{H} \subset |-K_V|$ – линейная система гиперплоских сечений, проходящих через P . Так как $\mathcal{L}^O \subset \mathcal{H}$, то пара $(V, \mathcal{H})$ логканонична. С этого момента мы будем игнорировать действие τ и, таким образом, наши конструкции перестанут быть τ -эквивариантными. Пусть $\phi: W \rightarrow V$ – терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация, такая, как в [9; лемма 6.6]. Мы можем записать

$$\phi^*(K_V + \Delta) = K_W + \Delta_W + E + E',$$

где E и E' – (приведенные) исключительные дивизоры над P и P' соответственно. В обозначениях [9; § 6] имеем также

$$K_W + \mathcal{H}_W + B \sim \phi^*(K_V + \mathcal{H}),$$

где $\text{Supp}(B) = \text{Supp}(E)$. Так как пара $(V, \mathcal{H})$ логканонична, то дивизор B приведен. Более того, так как $L^0, L^1 \in \mathcal{H}$, то $B = E$. Теперь, как и в [9; § 6], применим $(K_W + \mathcal{H}_W)$ -ПММ. На каждом шаге любой слой пересекает E . Поэтому по лемме о связности он не пересекает E' . В конце мы получим экстремальное стягивание $f: X \rightarrow Z$ на многообразии меньшей размерности. Логдивизор $K_X + \Delta_X + E_X + E'_X$ логканоничен и численно тривиален. Так как E_X и E'_X не пересекаются, то равенство $\rho(X/Z) = 1$ возможно только, когда f имеет одномерные слои. Тогда согласно [9; лемма 10.1] Z – неособая рациональная поверхность и f – $\mathbb{P}^1$ -расслоение. В этом случае дивизоры E_X и E'_X должны быть непересекающимися сечениями f . Следовательно, компоненты Δ_X являются f -вертикальными. Пусть $\mathcal{L}^{P, P'}$ – линейная система гиперплоских сечений V , проходящих через P и P' , $\mathcal{L}_W^{P, P'}$ и $\mathcal{L}_X^{P, P'}$ – бирациональные прообразы на W и X соответственно. Тогда $\dim \mathcal{L}_X^{P, P'} = \dim \mathcal{L} - 2 = 2g - 2$. Так как $\mathcal{L}^O \subset \mathcal{L}_X^{P, P'}$, то можно записать $\phi^*(K_V + \mathcal{L}_W^{P, P'}) = K_W + \mathcal{L}_W^{P, P'} + E + E'$. Согласно сказанному выше все элементы линейной системы $\mathcal{L}_X^{P, P'}$ являются f -вертикальными. Таким образом, $\mathcal{L}_X^{P, P'} = f^*\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – линейная система на Z , чей общий элемент приведен и неприводим. По формуле присоединения имеем $K_{E_X} = (K_X + E_X)|_{E_X} \sim -L_X^0|_{E_X}$. Следовательно, $\mathcal{L}_X^{P, P'}|_{E_X} \subset |-K_{E_X}|$. Так как $f|_{E_X}: E_X \rightarrow Z$ – изоморфизм, то $\mathcal{F} \subset |-K_Z|$. В частности, дивизор $-K_Z$ численно эффективен.

Если дивизор $-K_Z$ объемен, то по теореме Римана–Роха и по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль

$$2g - 2 = \dim \mathcal{L}^{P, P'} = \dim \mathcal{F} \leq \dim |-K_Z| = K_Z^2 \leq 9.$$

В этом случае $g \leq 5$. В противном случае $\dim |-K_Z| \leq 1$ и, как и выше, имеем $2g - 2 = \dim \mathcal{F} \leq 1$. Получаем противоречие.

§ 5. Случай (II)

Конструкция. Всюду на протяжении этого параграфа будем предполагать, что существует τ -инвариантная нетерминальная точка $P \in V$. Напомним, что $-K_V$ очень обилен (см. § 2). Пусть $\phi: W \rightarrow V$ – терминальная $\mu_2\mathbb{Q}$ -факториальная модификация. По определению морфизм ϕ является τ -эквивариантным, $K_W = \phi^*K_V$ и W имеет лишь терминальные (горенштейновы) $\mu_2\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. Пусть $\mathcal{H}$ – линейная система гиперплоских сечений многообразия $V \subset \mathbb{P}^{2g}$, проходящих через P . Ясно, что $\dim \mathcal{H} = 2g - 1$. Обозначим через $\mathcal{H}_W$, $\mathcal{L}_W$ и $\mathcal{L}_W^+$ бирациональные прообразы на W линейных систем $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+$ соответственно (см. конец § 2).

ЛЕММА 5.1 (ср. [9; лемма 6.6]). *Линейная система $\mathcal{H}_W$ состоит из дивизоров Картье, и пара $(W, \mathcal{H}_W)$ канонична. Более того, можно выбрать ϕ так, что линейная система $\mathcal{H}_W$ будет численно эффективной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как класс $\mathcal{H}_W$ является τ -инвариантным, то $\mathcal{H}_W$ – $\mathbb{Q}$ -картье дивизор. Поэтому $\mathcal{H}_W$ состоит из дивизоров Картье (напомним, что W имеет лишь терминальные горенштейновы особенности). Согласно [9; лемма 6.6] существует (не τ -эквивариантная) терминальная модификация $\phi': W' \rightarrow V$ такая, что пара $(W', \mathcal{H}_{W'})$ канонична. Многообразия W и W' изоморфны в ко-размерности один над V . Поэтому соответствующее отображение $(W, \mathcal{H}_W) \dashrightarrow (W', \mathcal{H}_{W'})$ крепантно и пара $(W, \mathcal{H}_W)$ также канонична. Последнее утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению в [9; лемма 6.6].

Теперь мы применим μ_2 -ЛПММ относительно логдивизора $K + \mathcal{H}$ к паре $(W, \mathcal{H}_W)$. Аналогично [9; лемма 3.4] можно показать, что все условия леммы 5.1 сохраняются. В конце мы получим μ_2 -экстремальное $K + \mathcal{H}$ -отрицательное стягивание $f: X \rightarrow Z$ на многообразие меньшей размерности. Согласно сказанному выше и обращению присоединения имеем

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Пара $(X, \mathcal{H})$ канонична. Следовательно, общий элемент $H \in \mathcal{H}$ является нормальной поверхностью с не более чем дювалевскими особенностями. Более того, поверхность H не проходит через негоренштейновы точки многообразия X .*

ЛЕММА 5.3. *Для общего элемента $L \in \mathcal{L}_X^+$ фактор L/τ является поверхностью Энриквеса с не более чем дювалевскими особенностями. В частности, действие инволюции τ на L свободно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все бирациональные преобразования $V \dashrightarrow X$ являются $K + \mathcal{L}^+$ -крепантными, то пара (X, L) канонична и $K_X + L \sim 0$. Поэтому L является КЗ поверхностью с не более чем дювалевскими особенностями. Поверхность L/τ имеет лишь факторособенности и бирационально эквивалентна поверхности Энриквеса. Действие инволюции τ продолжается на минимальное разрешение $\tilde{L}$ поверхности L . Мы имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L} & \xrightarrow{\tilde{\varsigma}} & \tilde{L}/\tau \\ \downarrow & & \downarrow v \\ L & \xrightarrow{\varsigma} & L/\tau. \end{array}$$

По формуле ветвления $K_{\tilde{L}} = \tilde{\zeta}^* K_{\tilde{L}/\tau} + \tilde{\Xi}$, где $\tilde{\Xi}$ – дивизор ветвления. Так как $K_{\tilde{L}} = 0$ и $\tilde{L}/\tau$ бирационально эквивалентна поверхности Энриквеса, то имеем $\tilde{\Xi} = 0$ и $K_{\tilde{L}/\tau} \equiv 0$. Это дает нам, что действие τ на $\tilde{L}$ и L свободно в коразмерности один и морфизм v крепантен: $K_{\tilde{L}/\tau} = v^* K_{L/\tau}$. Поэтому особенности L/τ дювалевские и $K_{L/\tau} \equiv 0$. Это доказывает первое утверждение. Далее, для топологической эйлеровой характеристики имеем $24 = \chi_{\text{top}}(\tilde{L}) = 2\chi_{\text{top}}(\tilde{L}/\tau) - s$, где s – число τ -неподвижных точек. Это дает нам $\chi_{\text{top}}(\tilde{L}/\tau) = 12 + s/2$. Так как $\tilde{L}/\tau$ является поверхностью Энриквеса с особенностями типа A_1 , то $s = 0$.

Далее мы рассмотрим случаи согласно размерности Z . Основная теорема будет следствием предложений 5.4, 5.5 и 5.11 ниже.

Случай $\dim Z = 0$. Тогда $\rho^{(\tau)}(X) = 1$. Таким образом, $-K_X \equiv rH$, где $H \in \mathcal{H}_X$ и $r \in \mathbb{Q}$. Так как дивизор $-(K_X + H)$ обилен, то $r > 1$. В силу [9; § 7] имеем $\dim |-K_X| \leq 33$. Следовательно, $g \leq 16$ в этом случае. Анализируя действие τ , мы можем получить следующий более точный результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Если Z является точкой, то $g \leq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле присоединения дивизор $-K_H \equiv (r-1)H|_H$ обилен. Поэтому H – поверхность дель Пеццо с не более чем дювалевскими особенностями. Таким образом, $K_H^2 \leq 9$. По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Следовательно, по теореме Римана–Роха на H имеем

$$2g \leq h^0(\mathcal{O}_X(H)) = h^0(\mathcal{O}_H(H)) + h^0(\mathcal{O}_X) = \frac{r}{2(r-1)^2} K_H^2 + 2.$$

Если многообразие X является горенштейновым, то $r \geq 2$ и $g \leq 5$.

Предположим, что X негоренштейново. Тогда согласно [15] многообразие X или является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, или изоморфно одной из следующих взвешенных гиперповерхностей:

- (i) $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, I)$, $I = 2, 3, 4, 5, 6$;
- (ii) $X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, I)$, $I = 2, 3$;
- (iii) $X_3 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$.

Если $X \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, то X имеет единственную точку $P := (0 : 0 : 0 : 1)$ индекса 2. Эта точка должна содержаться в базисном множестве линейной системы $\mathcal{L}^+ \subset |-K_X|$. С другой стороны, точка P должна быть τ -инвариантной. Это противоречит лемме 5.3. Аналогичные соображения показывают, что случаи $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 4)$, $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 5)$, $X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ и $X_3 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ также невозможны. В случае $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 2)$ кривая Υ , заданная уравнениями $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, является τ -инвариантной. Пересечение $X_6 \cap \Upsilon$ задается в $\Upsilon = \mathbb{P}(2, 2) \simeq \mathbb{P}^1$ кубическим многочленом. Поэтому существует τ -инвариантная точка $P \in X_6 \cap \Upsilon$. Эта точка имеет индекс 2. Таким образом, $P \in \text{Bs } |-K_X|$. Как и выше, мы получаем противоречие. Аналогичные аргументы работают в случае $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 6)$. Остается рассмотреть два случая:

- (i) $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 3)$;
- (ii) $X \simeq X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$.

В первом случае $\mathcal{O}_X(H) \simeq \mathcal{O}_X(3)$. Поэтому $2g \leq h^0(\mathcal{O}_X(H)) = 4 + 4 + 2 = 10$. Второй случай рассматривается аналогично.

Случай $\dim Z = 1$. Тогда Z является неособой рациональной кривой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Если Z – кривая, то $g \leq 16$.*

Так как $\rho^{(\tau)}(X/Z) = 1$, то $-K_X \equiv rH + f^*\Xi$, где $r \in \mathbb{Q}$, $r > 1$ и Ξ является $\mathbb{Q}$ -дивизором на Z . По формуле присоединения общий слой X_η изоморфен или $\mathbb{P}^2$, или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Нам необходима некоторая информация о структуре особых слоев.

ЛЕММА 5.6. *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – стягивание с терминального трехмерного многообразия на кривую. Предположим, что существует f -обильный дивизор Картье H такой, что $-(K_X + H)$ является f -обильным и пара (X, H) канонична. Тогда каждый слой f^*o , $o \in Z$, приведен. Более того, f^*o имеет не более двух компонент и пара (X, f^*o) имеет лишь дивизориально логтерминальные особенности. Если f^*o неприводим, то он изоморфен одной из следующих поверхностей:*

$$\mathbb{P}^2, \quad \mathbb{P}(1, 1, 4), \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \quad \mathbb{P}(1, 1, 2). \quad (1)$$

Заметим, что доказательства соответствующих утверждений в [9; следствие 8.6 и лемма 9.2] содержат некоторые незначительные погрешности. Вышеприведенная лемма является обобщением этих утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, общий слой X_η изоморфен или $\mathbb{P}^2$, или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Зафиксируем точку $o \in Z$ и рассмотрим Z и X как малые окрестности o и слоя $f^{-1}(o)$ соответственно. По обращению присоединения поверхность H имеет лишь дювалевские особенности и не содержит негорнштейновых точек многообразия X . Ограничение $\varphi: H \rightarrow Z$ является расслоением на рациональные кривые таким, что дивизор $-K_H$ уже φ -обилён. Так как K_H – дивизор Картье, то каждый слой морфизма φ изоморфен плоской конике. В частности, таковым является и $\varphi^*o = f^*o \cap H$. Это немедленно влечет, что каждый обильный дивизор на H является очень обильным (над Z). Далее, по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Поэтому отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_X(H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_H(H))$ сюръективно и линейная система $|H|$ f -свободна от базисных точек.

Если слой f^*o не является приведенным, то φ^*o – двойная прямая. Таким образом, $f^*o = 2S$, где S – простой дивизор Вейля и $\mathbb{Q}$ -картье и $S \cap H$ – приведенная неприводимая рациональная кривая. Так как X является горнштейновым (и терминальным) вблизи H , то $S \cap H$ – дивизор Картье на H . Таким образом, H неособый вблизи $S \cap H \simeq \mathbb{P}^1$. Но тогда расслоение на рациональные кривые $\varphi: H \rightarrow Z$ не может иметь кратных слоев. Получаем противоречие. Следовательно, слой f^*o приведен.

Если слой $S := f^*o$ неприводим, то все аргументы [9; леммы 8.1, 8.5] остаются в силе. Действительно, $\chi(\mathcal{O}_S(H)) = \chi(\mathcal{O}_{X_\eta}(H))$ и $h^2(\mathcal{O}_S(H)) = 0$. Поэтому $h^0(\mathcal{O}_S(H)) \geq h^0(\mathcal{O}_{X_\eta}(H))$. Для Δ -рода имеем

$$\Delta(S, \mathcal{O}_S(H)) := \dim S + \deg \mathcal{O}_S(H) - h^0(\mathcal{O}_S(H)) \leq \Delta(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}(H)) = 0.$$

По классификации Фуджиты поляризованных многообразий Δ -рода нуль мы получим случаи из (1). Согласно обращению присоединения пара (X, S) чисто логтерминальна в этих случаях.

Начиная с этого места мы предположим, что слой f^*o имеет по крайней мере две компоненты. Так как линейная система $|H|$ свободна от базисных точек, то, заменяя H на общий элемент из $|H|$, мы также можем предположить, что слой φ^*o приведен (и приводим). Таким образом, φ^*o – пара прямых, пересекающихся в одной точке P : $\varphi^*o = l + l'$, $l_i \simeq \mathbb{P}^1$, $l \cap l' = \{P\}$. В частности, это дает нам, что f^*o имеет в точности две компоненты: $f^*o = S + S'$. Заметим, что $S \cap S'$ имеет чистую размерность один (см., например, [9; лемма 8.7]). Мы утверждаем, что пара (H, φ^*o) логканонична. Действительно, по формуле присоединения

$$(K_H + l + l')|_l = K_l + \text{Diff}_l(l').$$

Поэтому $\deg \text{Diff}_l(l') = 2 + K_H \cdot l < 2$. Ясно, что $\text{Supp } \text{Diff}_l(l') = P$. Так как $K_H + l + l'$ – дивизор Картье, то $\text{Diff}_l(l')$ – целый дивизор. Таким образом, $\text{Diff}_l(l') = P$ и пара $(l, \text{Diff}_l(l'))$ логканонична. По обращению присоединения такой же является и пара (H, φ^*o) .

Снова по обращению присоединения пара $(X, H + f^*o)$ логканонична вблизи H . По лемме Шокурова о связности пара $(X, H + f^*o)$ логканонична всюду. Пусть Γ – множество логканонических особенностей пары (X, f^*o) . Тогда $\Gamma \cap H = \{P\}$. Так как линейная система $|H|$ свободна от базисных точек, то одномерная компонента $\Gamma_0 \subset \Gamma$ является неприводимой кривой. Предположим, что (X, f^*o) имеет нульмерный центр P логканонических особенностей. Согласно сказанному выше $P \notin H$. Возьмем общее гиперплоское сечение M , проходящее через P . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ пара $(X, f^*o + H + \varepsilon M)$ не является логканонической в P и логканонична вблизи H . Снова применяя лемму о связности к $(X, (1 - \delta)f^*o + H + \varepsilon M)$ для $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$, получим противоречие. Таким образом, пара (X, f^*o) не имеет нульмерных центров логканонических особенностей и ее множество логканонических особенностей является неприводимой кривой $\Gamma = S \cap S'$. Следовательно, пара (X, f^*o) дивизориально логтерминальна (см. [13; предложение 2.40]).

Теперь из [10; 16.15] получаем два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. В обозначениях леммы 5.6 каждая компонента слоя f^*o нормальна.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. В обозначениях леммы 5.6 предположим, что слой f^*o приводим, пусть S, S' – его неприводимые компоненты. Пусть $P \in S \cap S' \subset X$ – точка индекса $m > 1$. Тогда вблизи P каждая компонента $S, S' \subset f^*o$ аналитически изоморфна $\mathbb{C}^2/\mu_m(1, q_i)$, $\text{НОД}(q_i, m) = 1$, и кривая пересечения $S \cap S'$ неособа.

ЛЕММА 5.9. Пусть S – нормальная поверхность. Предположим, что $-K_S \equiv \alpha h + C$, где $\alpha > 1$, h – обильный дивизор Картье и C – эффективный дивизор Вейля. Тогда S имеет не более одной особой точки. Если $\alpha \geq 2$, то $S \simeq \mathbb{P}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение, $\tilde{C}$ – собственный прообраз C и $h^* = \mu^*h$. Тогда можно записать

$$K_{\tilde{S}} \equiv \mu^*K_S + \Delta, \quad \mu^*C = \tilde{C} + \Theta,$$

где Δ и Θ – μ -исключительные эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры. Следовательно,

$$K_{\tilde{S}} + \alpha h^* \equiv -(\tilde{C} + \Delta + \Theta).$$

Пусть R – экстремальный луч на $\tilde{S}$, отрицательный относительно $K_{\tilde{S}} + \alpha h^*$. Пусть $\varphi: \tilde{S} \rightarrow Q$ – соответствующее стягивание и ℓ – кривая, стягиваемая φ . Тогда $h^* \cdot \ell \geq 1$, $\Delta \cdot \ell \geq 0$ и $\Theta \cdot \ell \geq 0$. Поэтому $K_{\tilde{S}} \cdot \ell \leq -\alpha < -1$. Имеются две возможности:

- (i) Q – точка; тогда $S = \tilde{S} \simeq \mathbb{P}^2$;
- (ii) Q – кривая и φ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением; тогда $\rho(\tilde{S}) = 2$.

В первом случае все доказано. Рассмотрим второй случай. Так как $\rho(\tilde{S}) = 2$, то μ или является тождественным отображением, или стягивает неприводимую кривую. Поэтому S имеет не более одной особой точки. Предположим, что $\alpha \geq 2$. Так как $K_{\tilde{S}} \cdot \ell = -2$, то $h^* \cdot \ell = 1$. Тогда $\alpha = 2$ и $(\tilde{C} + \Delta + \Theta) \cdot \ell = 0$. Это возможно, только если $\Delta = \Theta = 0$ и $\tilde{C}$ содержится в слое φ . Если μ не является тождественным отображением, то $\tilde{C}$ пересекает μ -исключительную кривую. Тогда $\Theta \neq 0$. Получаем противоречие. Поэтому поверхность S неособа и дивизор $-K_S \equiv 2h + C$ обилен. Таким образом, существует K -отрицательный экстремальный луч $R' \neq R$. Для соответствующей экстремальной кривой ℓ' имеем $C \cdot \ell' > 0$. Поэтому $-K_S \cdot \ell' \geq 3$. Получаем противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 5.10. *Предположим, что слой f^*o приводим.*

- (i) *Если $X_\eta \simeq \mathbb{P}^2$, то X имеет единственную негорнштейнову точку на f^*o .*
- (ii) *Если $X_\eta \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то X является горнштейновым вблизи f^*o .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f^*o = S + S'$. Вблизи f^*o имеем $-K_X \equiv \alpha H$, где $\alpha = \frac{3}{2}$ (соответственно $\alpha = 2$) в случае $X_\eta \simeq \mathbb{P}^2$ (соответственно в случае $X_\eta \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). По формуле присоединения имеем

$$-K_S \equiv -(K_X + S)|_S \equiv (\alpha H + S')|_S \equiv \alpha h + C,$$

где $h := H|_S$. Если $X_\eta \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то по лемме 5.9 имеем $S \simeq \mathbb{P}^2$ и по аналогии $S' \simeq \mathbb{P}^2$. Согласно следствию 5.8 в этом случае многообразие X горнштейново вблизи f^*o . Рассмотрим случай $X_\eta \simeq \mathbb{P}^2$. Если X является горнштейновым вблизи f^*o , то индекс пересечения $K_X^2 \cdot S = \frac{1}{2} K_X^2 \cdot f^*o = \frac{9}{2}$ должен быть целым. Получаем противоречие. Далее утверждение вытекает из леммы 5.9 и следствия 5.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.5. Предположим, что $g \geq 17$. Рассмотрим случай, когда общий слой X_η изоморфен $\mathbb{P}^2$. Пусть $o \in Z$ – τ -неподвижная точка, и пусть $S := f^*o$ – слой. Если $S \simeq \mathbb{P}^2$, то множество τ -неподвижных точек на S состоит из прямой Γ и изолированной точки. Но тогда каждый элемент из $\mathcal{L}^+$ должен пересекать Γ . Это противоречит лемме 5.3. Если $S \not\simeq \mathbb{P}^2$,

то согласно лемме 5.6 и следствию 5.10 X имеет лишь одну негорнштейнову точку $P \in f^*o$. Эта точка должна быть τ -инвариантной. С другой стороны, $P \in \text{Bs } |-K_X| \subset \text{Bs } \mathcal{L}^+$. Снова имеем противоречие с леммой 5.3.

Теперь рассмотрим случай, когда общий слой X_η изоморфен $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. По лемме 5.6 и следствию 5.10 многообразие X является горнштейновым и каждый слой f – приведенная квадрика в $\mathbb{P}^3$. В этом случае линейная система $|H|$ задает τ -эквивариантное вложение в $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга 4 над $Z \simeq \mathbb{P}^1$. Мы можем предположить, что $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}(d_i)$, где $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 = 0$. Как в [9; § 9], введем следующие обозначения. Положим $d = \sum d_i$. Пусть M и F – классы тавтологического дивизора и слоя проекции $\mathbb{P} \rightarrow Z$. Тогда $X \sim 2M + rF$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$. Пусть G и Q – ограничения на X классов M и F соответственно. Ясно, что $\text{Pic}^{(\tau)} X = \mathbb{Z} \cdot G \oplus \mathbb{Z} \cdot Q \simeq \text{Pic } \mathbb{P}$. Поэтому

$$H \sim G + \alpha Q, \quad B \sim G - (d + r + \alpha - 2)Q, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Так как $R^i f_* \mathcal{O}_X(H) = R^i f_* \mathcal{O}_X(B) = 0$ для $i > 0$, то

$$H^0(\mathcal{O}_X(H)) \simeq H^0(\mathcal{E}(\alpha)), \quad H^0(\mathcal{O}_X(B)) \simeq H^0(\mathcal{E}(2 - d - r - \alpha)).$$

Так как дивизор B является эффективным, то $d + r + \alpha - 2 \leq d_1$. Далее,

$$L \cdot B \cdot H = (-K_X) \cdot B \cdot H = 2(6 - d - 2r) \geq 0$$

(поскольку H численно эффективен, см. [9; лемма 9.8]). Поэтому $d + 2r \leq 6$. Далее,

$$\begin{aligned} 2g - 1 &\leq h^0(\mathcal{O}_X(H)) = d + 4 + 4\alpha \leq d + 4 + 4(2 + d_1 - d - r) \\ &= 12 + 4d_1 - 3d - 4r \leq 12 + d_1 - 4r. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы утверждаем, что $r < 0$. Действительно, предположим что $r \geq 0$. Тогда $d_1 \leq d \leq 6$, $2g - 1 \leq 18$ и $g \leq 9$. Получаем противоречие.

Рассмотрим $C := \mathbb{P}(\bigoplus_{d_i=0} \mathcal{O}(d_i))$ как подрасслоение в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Линейная система $|M|$ является свободной от базисных точек и стягивает C . Так как $X \sim 2M + rF$, где $r < 0$, то C содержится в X . Ясно, что $\dim C = 1$. В частности, $d_2 \geq 1$ и $d_1 \leq d - 2$. Таким образом, формула (2) может быть переписана следующим образом:

$$2g - 1 \leq d + 4 + 4\alpha \leq 12 + 4d_1 - 3d - 4r \leq 4 + d - 4r. \quad (3)$$

Если $K_X \cdot C > 0$, то C содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{L}^+$. С другой стороны, τ имеет две неподвижные точки на $C \simeq \mathbb{P}^1$. Это противоречит лемме 5.3. Поэтому $K_X \cdot C < 0$ и дивизор $-K_X$ численно эффективен и объемен. Из основного результата работы [9] получим

$$\begin{aligned} 72 &\geq -K_X^3 = (2G + (2 - d - r)Q)^3 = (2M + rF) \cdot (2M + (2 - d - r)F)^3 \\ &= 16d + 24(2 - d - r) + 8r = 8(6 - d - 2r). \end{aligned}$$

Поэтому $-3 \leq d + 2r \leq 6$. Так как $G \cdot C = 0$, то $0 \leq -K_X \cdot C = 2 - d - r$. Это дает нам $d + r \leq 2$, $d \leq 7$ и $r \geq -5$. Из (3) получаем $g \leq 16$.

Случай $\dim Z = 2$. Тогда $\mathcal{H}_X$ – линейная система сечений f . Так как инвариантное число Пикара многообразия X над Z равно 1, то морфизм f равноразмерен. В этой ситуации доказательство леммы 10.1 из [9] применимо, и мы получим, что X и Z неособы и f является $\mathbb{P}^1$ -расслоением. Таким образом, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга 2 над Z . По построению пара $(X, \mathcal{L} \subset |-K_X|)$ канонична. Имеется разложение $-K_X \sim H + B$, где H и B – эффективные f -обильные дивизоры (сечения f), дивизор H численно эффективен и образ отображения $\Phi_{|H|}$, заданного линейной системой $|H|$, трехмерен. Имеем

$$2g - 1 = \dim \mathcal{H} \leq \dim |H|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. В обозначениях выше имеем $2g - 1 \leq \dim |H| \leq 33$. Более того, если $\dim |H| = 33$, то $g(U) = 17$ и $U \simeq U_{32}$ (см. §3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. Инволюция τ действует на Z эффективно. Пусть $L \in \mathcal{L}_X^+$ – общий элемент, и пусть $f_L: L \rightarrow \bar{L} \rightarrow Z$ – разложение Штейна. Здесь морфизм $\bar{L} \rightarrow L$ конечен степени два с дивизором ветвления $\Theta \in |-2K_Z|$. Инволюция τ естественно действует на L , $\bar{L}$ и Θ . Более того, по лемме 5.3 τ не имеет неподвижных точек на Θ .

Теперь мы применим μ_2 -ПММ к $Z: Z = Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Z_N = Z'$. Каждый шаг является стягиванием τ -инвариантного множества несвязных (-1) -кривых. В конце мы получим один из следующих случаев [16]:

- (i) $\text{Pic}^{(\tau)} Z' \simeq \mathbb{Z}$ и Z' является поверхностью дель Пеццо;
- (ii) $\text{Pic}^{(\tau)} Z' \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и существует стягивание $Z' \rightarrow \mathbb{P}^1$; каждый слой изоморфен приведенной плоской конике.

Согласно [9; леммы 5.4, 10.4] можно построить последовательность τ -эквивариантных бирациональных $K + \mathcal{L}$ -крепантных перестроек

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_1 & \dashrightarrow & X_2 & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & X_N \\ \downarrow f & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_N \\ Z = Z_1 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_N, \end{array}$$

где каждый квадрат является одним из преобразований (iii)–(v) из [9; лемма 5.4] над τ -инвариантной (-1) -кривой или τ -инвариантной парой несвязных (-1) -кривых. Эти преобразования сохраняют все свойства X , $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{H}$ (за исключением канонического свойства $(X, \mathcal{H})$). Более того, по построению все преобразования τ -эквивариантны и действие τ на общем элементе линейной системы $\mathcal{L}^+$ свободно (см. лемму 5.3). Заменяя X/Z на X_N/Z_N , мы можем предполагать, что Z удовлетворяет одному из условий (i) или (ii). Пусть $\Omega \subset Z$ – множество τ -неподвижных точек.

Рассмотрим случай $\text{Pic}^{(\tau)} Z \simeq \mathbb{Z}$. Тогда кривая Θ обильна. Так как $\Theta \cap \Omega = \emptyset$, то множество Ω конечно. Если Z не содержит (-1) -кривых, то $Z \simeq \mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Легко видеть, что в обоих случаях или множество τ -неподвижных точек содержит кривую, или $\text{Pic}^{(\tau)} Z \not\simeq \mathbb{Z}$. Следовательно, Z содержит (-1) -кривую E и K_Z не является делимым, т.е. K_Z порождает $\text{Pic}^{(\tau)} Z$. Так как $\text{Pic}^{(\tau)} Z \simeq \mathbb{Z}$, то $E' := \tau(E) \neq E$ и $E' \cap E \neq \emptyset$. Более того, $E + E' \sim -aK_Z$ для

некоторого положительного целого a . Тогда

$$aK_Z^2 = -K_Z \cdot (E + E') = 2.$$

Фактор $Y := Z/\tau$ является поверхностью дель Пеццо с дювалевскими особенностями типа A_1 . В частности, K_Y – дивизор Картье и K_Y^2 целое. Поэтому $K_Z^2 = 2K_Y^2$ чётно. Следовательно, имеется лишь одна возможность: $K_Z^2 = 2$, $a = 1$, $E + E' \sim -K_Z$ и $E \cdot E' = 2$. Таким образом, образ $\tau(E)$ каждой (-1) -кривой E однозначно определяется по $\tau(E) \sim -K_Z - E$. Напомним, что инволюция Гейзера τ_g на поверхности дель Пеццо Z степени 2 – это инволюция Галуа антиканонического двойного накрытия $Z \rightarrow \mathbb{P}^2$. Для этой инволюции мы также имеем $\tau_g(E) \sim -K_Z - E$. Поэтому действия инволюций τ и τ_g на $\text{Pic } Z$ совпадают. Это, очевидно, влечет, что $\tau = \tau_g$. С другой стороны, инволюция Гейзера имеет кривую, состоящую из неподвижных точек. Получаем противоречие.

Теперь мы рассмотрим случай $\text{Pic}^{(\tau)} Z \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Пусть $\psi: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ – τ -экви-вариантное расслоение на коники. Предположим, что морфизм ψ не является гладким. Пусть r – число вырожденных слоев. Согласно [16] имеем $K_Z^2 \leq 5$. Следовательно, $r = 8 - K_Z^2 \geq 3$. Инволюция τ переставляет компоненты вырожденных слоев. Поэтому каждый особый слой является τ -инвариантным и существует по крайней мере три τ -неподвижные точки на $\mathbb{P}^1$. Это возможно, только если действие τ на $\mathbb{P}^1$ тривиально. В этом случае множество Ω не содержит компонент слоев и пересекает каждый неособый слой в двух точках и каждый особый слой – в одной точке. Поэтому Ω является связной кривой такой, что ограничение $\psi|_{\Omega}$ имеет степень 2 и разветвлено в точности над пересечениями Ω с особыми слоями. Заметим также, что Ω является дивизором ветвления отображения факторизации $Z \rightarrow Z/\tau$. Поэтому кривая Ω неособа и неприводима. По формуле Гурвица $2p_a(\Omega) - 2 = r - 4$. Согласно [16] группа $\text{Pic}^{(\tau)} Z/\mathbb{P}^1 = 1$ порождается дивизором K_Z и классом слоя. Поэтому мы можем записать $\Omega \sim -K_Z + m\psi^*P$, где $P \in \mathbb{P}^1$ – точка, а $m \in \mathbb{Z}$. Так как $\Omega \cap \Theta = \emptyset$, то $K_Z \cdot \Omega = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= -K_Z \cdot \Omega = -K_Z \cdot (-K_Z + m\psi^*P) = K_Z^2 + 2m, \\ K_Z^2 + 4m &= (-K_Z + m\psi^*P)^2 = \Omega^2 = (K_Z + \Omega) \cdot \Omega = 2p_a(\Omega) - 2. \end{aligned}$$

Используя это, по формуле Нётера получим

$$8 - r = K_Z^2 = 2 - 2p_a(\Omega) = 4 - r.$$

Получаем противоречие.

Наконец, предположим, что морфизм $\psi: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ является гладким. Тогда $Z \simeq \mathbb{F}_e$, $e \geq 0$, $e \neq 1$. Если действие инволюции τ на $\mathbb{P}^1$ тривиально, то, как и выше, Ω является кривой, пересекающей каждый слой в двух точках. Следовательно, Ω является несвязным объединением двух сечений. Но в этом случае по крайней мере одно из этих сечений пересекает $\Theta \sim -2K_Z$. Таким образом, действие τ на $\mathbb{P}^1$ нетривиально. Так как $\Omega \cap \Theta = \emptyset$, то Ω не имеет ψ -вертикальных компонент. Следовательно, Ω – конечное множество. Мы утверждаем, что $e = 0$. Действительно, предположим что $e \geq 2$. Пусть Σ – отрицательное сечение линейчатой поверхности. Тогда $\Theta \cdot \Sigma = -2K_Z \cdot \Sigma = 2(2 - e)$.

Если $e > 2$, то Σ является компонентой Θ . С другой стороны, кривая Σ τ -инвариантна. Но тогда инволюция τ должна иметь неподвижные точки на $\Sigma \subset \Theta$ – противоречие. Следовательно, $e = 2$. Как и выше, Σ не является компонентой Θ . Поэтому $\Theta \cap \Sigma = \emptyset$. Пусть $F := f^{-1}(\Sigma)$. Ясно, что $F \simeq \mathbb{F}_m$ для некоторого $m \geq 0$. Пусть $\Sigma' \subset F$ – минимальное сечение линейчатой поверхности. Тогда

$$m - 2 = K_F \cdot \Sigma' = K_X \cdot \Sigma' + F \cdot \Sigma' = K_X \cdot \Sigma' - 2.$$

Таким образом, $K_X \cdot \Sigma' = m$. Если $m > 0$, то $K_X \cdot \Sigma' < 0$ и Σ' содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{L}_X \subset |-K_X|$. С другой стороны, кривая Σ' является τ -инвариантной и τ имеет две неподвижные точки на Σ' . Это противоречит лемме 5.3. Следовательно, $m = 0$, $F \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\Sigma' \cdot K_X = 0$. Это дает нам, что F не пересекает общего элемента линейной системы $\mathcal{L}_X$. В частности, $F \cap \text{Bs } \mathcal{L}_X = \emptyset$. Последнее означает, что отображение $\Psi: X \dashrightarrow V$, заданное линейной системой $\mathcal{L}_X$, является морфизмом вблизи F . Согласно сказанному выше Ψ стягивает F на кривую. Так как $F \cdot \Sigma' = \Sigma^2 = -2$, то многообразие V особо вдоль $\Psi(F)$. Это противоречит предложению 2.1, (i). Таким образом, $e = 0$ и $Z \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Для краткости мы положим $c_i := c_i(\mathcal{E})$, $i = 1, 2$. Тогда

$$-K_X = 2H + f^*(-K_Z - c_1), \quad H^2 = H \cdot f^*c_1 - f^*c_2, \quad H^3 = c_1^2 - c_2.$$

Пусть Σ и l – образующие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Мы можем предположить, что $c_1 = a\Sigma + bl$ и $c_2 = c$, где a, b, c – целые. По теореме Римана–Роха имеем

$$\chi(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2 - K_Z \cdot c_1) + 2 = (a+1)(b+1) - c + 1. \quad (*)$$

Так как расслоение $\mathcal{E}$ численно эффективно, то $c_1 = a\Sigma + bl$ является численно эффективным классом. Таким образом, $a, b \geq 0$. С точностью до перестановки мы можем предположить, что $a \leq b$.

ЛЕММА 5.13 (см. [9; лемма 10.6]). Пусть $\Gamma \subset Z$ – гладкая рациональная кривая такая, что $\dim |\Gamma| > 0$, и пусть $\mathcal{E}|_\Gamma \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2)$. Тогда $|d_1 - d_2| \leq 2 + \Gamma^2$.

ЛЕММА 5.14. Если расслоение $\mathcal{E}$ разложимо, то $g \leq 17$. Более того, равенство имеет место, только если $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(4, 2) \oplus \mathcal{O}(2, 4)$, и в этом случае многообразие U изоморфно многообразию U_{32} из § 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{O}(\gamma, \delta)$. По лемме 5.13 имеем

$$a = \alpha + \gamma \geq 0, \quad b = \beta + \delta \geq 0, \quad c_2 = \alpha\delta + \beta\gamma, \\ |\alpha - \gamma| \leq 2, \quad |\beta - \delta| \leq 2.$$

Положим $r := \alpha - \gamma$ и $s := \beta - \delta$. Тогда $c_2 = \frac{1}{2}(ab - rs)$ и

$$2g \leq \chi(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}ab + a + b + \frac{1}{2}rs + 2 = \frac{1}{2}(a+2)(b+2) + \frac{1}{2}rs.$$

Так как $-2 \leq r, s \leq 2$, то $g \leq 17$. Равенство имеет место только в том случае, если $a = b = 6$ и $r = s = \pm 2$. Таким образом, мы можем предположить, что $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(4, 2) \oplus \mathcal{O}(2, 4)$. Тогда $-K_X = 2(H - 2f^*(\Sigma + l))$, $\dim \mathcal{H} = 33$ и $\dim \mathcal{L} = 34 = \dim |-K_X|$. В этом случае V является антиканоническим образом $X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2, 2))$. Ясно, что этот образ совпадает с многообразием V из §3. Имеется лишь одна возможность для выбора действия τ . Поэтому мы получим многообразие Фано–Энрикеса U_{32} из предложения 3.2.

Начиная с этого момента предположим, что расслоение $\mathcal{E}$ неразложимо. Наши методы полностью аналогичны методам в [9; §10]. Пусть B_0 – f -горизонтальная компонента дивизора B . Так как $L \cap B$ – эффективный 1-цикл, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq -K_X \cdot B \cdot f^*\Sigma = (2H + f^*(-K_Z - c_1)) \cdot (H + f^*(-K_Z - c_1)) \cdot f^*\Sigma \\ &= 2H^2 \cdot f^*\Sigma + 3(-K_Z - c_1) \cdot \Sigma = 2c_1 \cdot \Sigma + 3(-K_Z - c_1) \cdot \Sigma \\ &= -3K_Z \cdot \Sigma - c_1 \cdot \Sigma. \end{aligned}$$

Это дает нам $0 \leq a \leq b \leq 6$.

Более того, если $a = b = 6$, то

$$\begin{aligned} -K_X \cdot B \cdot f^*(\Sigma + l) &= (2H + f^*(-K_Z - c_1)) \cdot (H + f^*(-K_Z - c_1)) \cdot f^*(\Sigma + l) \\ &= 2H^2 \cdot f^*\Sigma + 3(-K_Z - c_1) \cdot (\Sigma + l) = 2c_1 \cdot (\Sigma + l) - 24 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $L \cap B_0 = \emptyset$. Поэтому дивизор $-K_X$ численно эффективен. Действительно, иначе существует кривая R такая, что $K_X \cdot R > 0$. Тогда $L \cdot R < 0$ и $B \cdot R < 0$. Таким образом, $R \subset L \cap B$ и $R \cdot f^*(\Sigma + l) > 0$. Получаем противоречие. Так как $L \cap B_0 = \emptyset$, то отображение $\Psi: X \dashrightarrow V$, заданное линейной системой $\mathcal{L} \subset |-K_X|$, является морфизмом вблизи B_0 и стягивает B_0 . Более того, так как V имеет лишь изолированные особенности, то образ B_0 – точка. В этой ситуации векторное расслоение $\mathcal{E}$ должно быть разложимо. Это противоречит нашему предположению.

Таким образом, мы можем предполагать, что $0 \leq a \leq 5$. Положим

$$p := \lfloor a/2 \rfloor + 1, \quad q := \lfloor b/2 \rfloor + 1, \quad a' := a - 2p, \quad b' := b - 2q.$$

Тогда

$$-2 \leq a', b' \leq -1.$$

Рассмотрим подкрученное расслоение $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-p\Sigma - ql)$. Тогда

$$c_1(\mathcal{E}') = a'\Sigma + b'l, \quad c_2(\mathcal{E}') = c - aq - bp + 2pq. \quad (4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.15. *Справедливо следующее: $c_2(\mathcal{E}') < -3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $c_2(\mathcal{E}') \geq -3$. Тогда

$$c = c_2(\mathcal{E}') + aq + bp - 2pq \geq aq + bp - 2pq - 3.$$

По теореме Римана–Роха (см. (*))имеем

$$\begin{aligned} 34 &\leq 2g \leq \chi(\mathcal{E}) \leq (a+1)(b+1) - aq - bp + 2pq + 4 \\ &= \frac{1}{2}ab + a + b + 5 + \frac{1}{2}a'b' = \frac{1}{2}(a+2)(b+2) + 3 + \frac{1}{2}a'b' \leq 33. \end{aligned}$$

Получаем противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.16. *Справедливо следующее: $\chi(\mathcal{E}') > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c' := c(\mathcal{E}')$. По теореме Римана–Роха имеем

$$\chi(\mathcal{E}') = b'(a' + 1) + a' - c' + 2.$$

Предположим, что $\chi(\mathcal{E}') \leq 0$. Учитывая утверждение 5.15, получим

$$b'(a' + 1) + a' \leq c' - 2 < -5.$$

Поэтому $a' \neq -1$. Следовательно, $a' = -2$ и

$$\chi(\mathcal{E}') = -b' - c' > 3 - b' > 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.17. *Справедливо следующее: $H^0(\mathcal{E}') \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H^0(\mathcal{E}') = 0$. По утверждению 5.16 имеем $H^2(\mathcal{E}') \neq 0$. По двойственности Серра

$$H^2(\mathcal{E}')^* \simeq H^0(\mathcal{E}'^* \otimes \omega_Z) \simeq H^0(\mathcal{E}' \otimes \det \mathcal{E}'^* \otimes \omega_Z).$$

С другой стороны, $(\det \mathcal{E}'^* \otimes \omega_Z)^* = \mathcal{O}_Z((a' + 2)\Sigma + (b' + (e + 2))l)$ и $H^0((\det \mathcal{E}'^* \otimes \omega_Z)^*) \neq 0$. Получаем противоречие.

Закончим доказательство предложения 5.11. Рассмотрим ненулевое сечение $s \in H^0(\mathcal{E}')$. Если s нигде не обращается в нуль, то $\mathcal{E}'$ является расширением некоторого линейного расслоения $\mathcal{E}_1$ при помощи $\mathcal{O}$. Но тогда $c_2(\mathcal{E}') = c_2(\mathcal{E}_1) = 0$. Это противоречит утверждению 5.15. Следовательно, множество нулей сечения s содержит кривую Y . Пусть $Y \sim q_1\Sigma + q_2l$. Тогда ограничения $\mathcal{E}'$ на общие кривые $l \in |l|$ и $l' \in |\Sigma|$ суть $\mathcal{E}'|_l = \mathcal{O}(q_1) \oplus \mathcal{O}(a' - q_1)$ и $\mathcal{E}'|_{l'} = \mathcal{O}(q_2) \oplus \mathcal{O}(b' - q_2)$. Так как $-a', -b' \geq 1$, то имеет место по крайней мере одно из следующих неравенств: $2q_1 - b' \geq 3$ или $2q_2 - a' \geq 3$. Это противоречит лемме 5.13. Предложение 5.11 доказано.

Список литературы

- [1] G. Fano, “Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperplane sono superficie di genere zero e bigenere uno”, *Mem. Mat. Sci. Fis. Natur. Soc. Ital. Sci.* (3), **24** (1938), 41–66.
- [2] L. Godeaux, “Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un”, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5), **14** (1933), 134–140.
- [3] A. Conte, “Two examples of algebraic threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces”, *Algebraic geometry – open problems* (Ravello, 1982), Lecture Notes in Math., **997**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 124–130.
- [4] A. Conte, J. P. Murre, “Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **12**:1 (1985), 43–80.
- [5] L. Bayle, “Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d’Enriques”, *J. Reine Angew. Math.*, **449** (1994), 9–63.

- [6] T. Sano, “On classifications of non-Gorenstein $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1”, *J. Math. Soc. Japan*, **47**:2 (1995), 369–380.
- [7] T. Minagawa, “Deformations of $\mathbf{Q}$ -Calabi–Yau 3-folds and $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **6**:2 (1999), 397–414.
- [8] И. А. Чельцов, “Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 618–626; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Singularities of 3-dimensional varieties admitting an ample effective divisor of Kodaira dimension zero”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 445–450.
- [9] Ю. Г. Прохоров, “Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими гorenштейновыми особенностями”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 81–122; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 77–114.
- [10] J. Kollár (ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry (University of Utah, Salt Lake City, Utah, 1991), *Astérisque*, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992.
- [11] P. Jahnke, I. Radloff, “Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system”, *Compos. Math.*, **142**:2 (2006), 422–432.
- [12] В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204; англ. пер.: V. V. Przhyjalkowski, I. A. Cheltsov, K. A. Shramov, “Hyperelliptic and trigonal Fano threefolds”, *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 365–421.
- [13] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [14] F. R. Cossec, I. V. Dolgachev, *Enriques surfaces*. I, *Progr. Math.*, **76**, Birkhäuser, Boston, MA, 1989.
- [15] T. Sano, “Classification of non-Gorenstein $\mathbf{Q}$ -Fano d -folds of Fano index greater than $d - 2$ ”, *Nagoya Math. J.*, **142** (1996), 133–143.
- [16] В. А. Исковских, “Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 19–43; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 17–39.

Ю. Г. Прохоров (Yu. G. Prokhorov)

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: prokhoro@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

22.05.2006