Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Л. А. Шеметков,
О частично насыщенных формациях конечных групп,
Матем. сб., 2007, том 198, номер 6, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:47:40

УДК 512.542.6+512.553.8

А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Л. А. Шеметков

О частично насыщенных формациях конечных групп

Рассматриваются различные виды частично насыщенных формаций и связи между ними. Установлено, что частично насыщенные формации могут быть охарактеризованы как классы конечных групп с обобщенными центральными рядами. Доказана теорема о разложении FG -модуля в сумму двух подмодулей с определенными свойствами.

Библиография: 26 названий.

§ 1. Введение. Предварительные сведения

В настоящей работе рассматриваются только конечные группы (т.е. под группой всегда подразумевается конечная группа).

В сороковых годах прошлого века С. А. Чунихин предложил называть Π -свойствами такие свойства группы, которые связаны с фиксированным множеством Π простых чисел. С. А. Чунихин обозначил через $\Pi(G)$ множество всех различных простых делителей порядка группы G ; если $\mathfrak{H}$ – множество групп, то $\Pi(\mathfrak{H}) = \bigcup \Pi(G)$, где G пробегает все группы из $\mathfrak{H}$. С помощью концепции Π -свойств им были введены такие важные свойства, как Π -разрешимость, Π -отделимость и др. (см. [1], [2]). Концепция Π -свойств сыграла значительную роль в теории формаций. Согласно В. Гашюцу [3], формация – это класс групп, замкнутый относительно образования гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Главный принцип В. Гашюца – изучать группы по модулю p -групп – был реализован им через следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (В. Гашюц). Пусть функция f сопоставляет каждому простому числу p некоторую формацию $f(p)$ (возможно, пустую). Главный фактор H/K группы G называется f -центральным, если $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(p)$ для любого $p \in \Pi(H/K)$ (здесь, как обычно, $C_G(H/K)$ обозначает нормальную подгруппу из G , составленную из всех таких $x \in G$, что $xhK = hxK$ для любого $h \in H$). Очевидно, класс $LF(f)$ всех групп, у которых все главные факторы f -центральны, является формацией; функция f называется *локальным спутником* этой формации.

Заметим, что класс $LF(f)$ не пуст, так как всегда содержит единичную группу (даже в том экстремальном случае, когда $f(p) = \emptyset$ для любого простого p).

Работа первых двух авторов выполнена при поддержке фонда MEC (Испания) и FEDER (Европейский Союз), грант № МТМ 2004-08219-C02-02. Работа третьего автора выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Программы фундаментальных исследований “Математические модели” (Беларусь).

Идея В. Гашюца была развита в работе [4]. В ней, в рамках общего подхода, рассматривалась функция

$$f: \{\text{группы}\} \longrightarrow \{\text{формации групп}\}$$

и класс $\hat{f}$, состоящий из всех групп с f -центральными главными факторами. В данном случае f -центральность главного фактора H/K группы G означает, что $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(H/K)$. Как показало время, два типа функций имеют первостепенное значение – это локальные и композиционные спутники. Вообще, мы можем считать, что значение локального спутника f на произвольной группе $G \neq 1$ равно $\bigcap f(p)$, где p пробегает множество $\Pi(G)$. Образно говоря, локальный спутник, “рассматривая” группы с определенной высоты, не различает те из них, которые обладают одинаковым набором простых делителей порядка. Но можно представить, что мы поднялись еще выше так, что функция-спутник уже не различает группы с одинаковым набором композиционных факторов. Это – попытка объяснить происхождение термина “композиционный спутник” и одновременно указание на общий принцип: изучать группы по модулю p -групп и простых групп. Дадим определение композиционного спутника, следуя [4]–[6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 (Л. А. Шеметков). Пусть функция f сопоставляет каждой простой группе S формацию $f(S)$ таким образом, что из $S \simeq T$ всегда следует $f(S) = f(T)$. Для любой группы $M \neq 1$ положим $f(M) = \bigcap f(S)$, где S пробегает все композиционные факторы группы M . Главный фактор H/K группы G называется f -центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Класс $CF(f)$, состоящий из всех тех групп, у которых все главные факторы f -центральны, является формацией, а f называется композиционным спутником этой формации. Через $f(p)$ обозначают значение f на неединичных p -группах.

Удобное обозначение $LF(f)$ для формации с локальным спутником было впервые введено К. Дёрком и Т. Хоуксом [7]. Л. А. Шеметков предложил обозначение $CF(f)$ для формации с композиционным спутником. В книге [7] отмечается, что в неопубликованных рукописях Р. Бэра также рассматривались формации с композиционным спутником (в другой терминологии). К. Дёрк и Т. Хоукс называют формации вида $CF(f)$ локальными по Бэру (Baer-local).

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется насыщенным, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$ (определение предложено Гашюцом [3]). Еще в 1926 году О. Ю. Шмидт заметил [8], что класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп насыщен. Б. Хупперт доказал [9], [10], что формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп насыщена и имеет локальный спутник. Общая закономерность была установлена следующей замечательной теоремой Гашюца–Любезедер–Шмида.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [7; теорема IV.4.6]). *Непустая формация имеет локальный спутник тогда и только тогда, когда она насыщена.*

Ввиду этой теоремы отпадает необходимость в употреблении термина “локальная формация”.

Существует сколь угодно много ненасыщенных формаций с композиционным спутником (простейший пример – формация $\mathfrak{M}^*$ всех квазинильпотентных групп, см. [11; определение X.13.2]). Но было замечено, что многие из них частично насыщены. Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной*, если из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$, где N – разрешимая нормальная подгруппа из G , всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Вопрос о совпадении семейства непустых разрешимо насыщенных формаций и семейства формаций с композиционным спутником решила следующая знаменитая теорема Р. Бэра.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [7; теорема IV.4.17]). *Непустая формация имеет композиционный спутник тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщена.*

Можно ли объединить теоремы 1.1 и 1.2 в рамках одной общей конструкции? Этот вопрос был впервые исследован П. Фёрстером [12]. Чтобы сформулировать его решение, нам потребуются некоторые понятия. Характеристика $\text{Char}(\mathfrak{H})$ класса $\mathfrak{H}$ – это множество всех простых p с тем свойством, что в $\mathfrak{H}$ имеется группа порядка p . Главный фактор H/K называют главным $\mathfrak{H}$ -фактором, если $H/K \in \mathfrak{H}$. Через $E\mathfrak{H}$ обозначают класс всех групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $\mathfrak{H}$. Через $\mathfrak{J}$ обозначается класс всех простых (абелевых и неабелевых) групп. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{J}$, то $\mathfrak{X}' = \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{X}$. Через $\mathcal{K}(G)$ обозначается класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (П. Фёрстер). Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Зафиксируем функцию

$$f: \Pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}' \longrightarrow \{\text{формации}\},$$

которую мы будем называть *$\mathfrak{X}$ -формационной функцией*; предполагается, что f принимает одинаковые значения на изоморфных группах. Обозначим через $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ класс всех групп G , обладающих следующими свойствами:

- 1) если H/K – главный $E\mathfrak{X}$ -фактор группы G , то $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(p)$ для любого $p \in \Pi(H/K)$;
- 2) если G/L – монолитическая группа и $\text{Soc}(G/L) \in E\mathfrak{X}'$, то $G/L \in f(E)$, где $E \in \mathcal{K}(\text{Soc}(G/L))$.

Класс $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ является формацией, а функция f называется ее *$\mathfrak{X}$ -локальным заданием*.

Очевидно, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{J}$, то $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ – это формация с локальным спутником. В другом крайнем случае, когда $\mathfrak{X}$ – класс всех абелевых простых групп, получается, что $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ – формация с композиционным спутником. П. Фёрстер вводит также понятие обобщенной насыщенности и доказывает в [12] теорему, объединяющую теоремы 1.1 и 1.2 в один общий результат (формулировка этой теоремы приведена в [7], а ее усиление получено в [13]).

На первый взгляд, в конструкции П. Фёрстера усматривается отход от программы В. Гашуца – изучать классы групп с обобщенными центральными рядами. Тем не менее мы покажем (и это одна из целей настоящей статьи), что

конструкция П. Фёрстера допускает простое и ясное объяснение именно в рамках программы В. Гашпоца.

Частично насыщенные формации различных видов встречаются часто, особенно при изучении произведений формаций. Дадим общее определение, охватывающее разные ранее рассматривавшиеся частные случаи. Напомним прежде всего, что классом Фиттинга (или радикальным классом) называют класс $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий двум условиям:

- 1) нормальные подгруппы групп из $\mathfrak{H}$ также принадлежат $\mathfrak{H}$;
- 2) из $A_i \in \mathfrak{H}$, $A_i \trianglelefteq \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, всегда следует $A_1 A_2 \in \mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}$ – непустой класс Фиттинга, то в каждой группе G имеется $\mathfrak{H}$ -радикал $G_{\mathfrak{H}}$ – наибольшая нормальная $\mathfrak{H}$ -подгруппа из G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный непустой класс Фиттинга, Π – фиксированное непустое множество простых чисел. Скажем, что формация $\mathfrak{F}$ является $(\Pi, \mathfrak{H})$ -насыщенной, если из $G/O_{\Pi}(\Phi(G_{\mathfrak{H}})) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Здесь $O_{\Pi}(\Phi(G_{\mathfrak{H}}))$ – наибольшая нормальная Π -подгруппа подгруппы Фраттини $\mathfrak{H}$ -радикала $G_{\mathfrak{H}}$.

Понятие насыщенной формации получается отсюда в случае, когда $\mathfrak{H}$ совпадает с классом $\mathfrak{E}$ всех групп, а Π – с множеством $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Отметим другие важные частные случаи. А именно, $(\Pi, \mathfrak{H})$ -насыщенная формация называется:

- 1) p -разрешимо насыщенной, если $\Pi = \mathbb{P}$, а $\mathfrak{H}$ совпадает с классом всех p -разрешимых групп;
- 2) $\mathfrak{N}_p$ -насыщенной, если $\Pi = \mathbb{P}$, а $\mathfrak{H}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}_p$ всех p -групп;
- 3) Π -насыщенной (p -насыщенной при $\Pi = \{p\}$), если $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$.

В [14] было замечено, что если произведение формаций $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ насыщено, то формация $\mathfrak{H}$ является $(\mathbb{P} \setminus \Pi(\mathfrak{M}))$ -насыщенной. Возникает вопрос: с помощью какой функции можно “локально” задать Π -насыщенную формацию? Первоначальная идея состояла в том, чтобы использовать для этой цели обычный локальный спутник (в работе [14] формация $\mathfrak{H}$ названа p -локальной, если насыщенная формация, ею порожденная, содержится в $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{H})$). В развитие этой идеи в работе [15] было доказано, что условие Π -насыщенности непустой формации $\mathfrak{F}$ эквивалентно каждому из следующих двух условий:

- 1) $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}(O_{p',p})) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \Pi$;
- 2) насыщенная формация, порожденная $\mathfrak{F}$, содержится в $\mathfrak{N}_{\Pi}(\mathfrak{F})$.

И все же неудовлетворенность оставалась: хотелось найти явную функцию, описывающую Π -насыщенную формацию без привлечения конструкции порождения. Эта задача была решена в работе [16], и мы сейчас вкратце опишем ее решение. Основная идея состояла в использовании нового понятия “малого централизатора”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть H/K – нормальная секция группы G . *Малый централизатор* $c_G(H/K)$ секции H/K – это подгруппа, порожденная всеми теми нормальными подгруппами N группы G , для которых

$$\mathcal{K}(NK/K) \cap \mathcal{K}(H/K) = \emptyset.$$

Функция $f: \{\text{группы}\} \longrightarrow \{\text{формации}\}$ названа в работе [16] p -локальным спутником при выполнении следующих требований:

- 1) $f(S_1) = f(S_2)$ для любых двух характеристически простых групп S_1 и S_2 с условием $\mathcal{K}(S_1) = \mathcal{K}(S_2)$;
- 2) каждой простой pd -группе функция f сопоставляет одну и ту же формуляцию $f(p)$.

Главный фактор H/K группы G называется f -центральным, если выполнены условия:

- 1) если H/K – pd -группа, то $G/C_G(H/K) \in f(p)$;
- 2) если H/K – p' -группа, то $G/c_G(H/K) \in f(H/K)$.

Оказалось [16], что непустая формация $\mathfrak{F}$ является p -насыщенной тогда и только тогда, когда она совпадает с классом всех групп с f -центральными главными факторами для некоторого p -локального спутника f . Выяснилось также следующее интересное обстоятельство: всякая непустая p -насыщенная формация определяется таким p -локальным спутником, значения которого на неединичных p' -группах совпадают. Это наблюдение легло в основу следующего определения, которое в последнее время используется в работах разных авторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 (см. [17]). Рассмотрим функцию

$$f: \Pi \cup \{\Pi'\} \longrightarrow \{\text{формации}\},$$

которую будем называть Π -локальным спутником. Обозначим через $LF_{\Pi}(f)$ класс всех тех групп G , которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $G/G_{\Pi d} \in f(\Pi')$;
- 2) $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$ для любого $p \in \Pi \cap \Pi(G)$.

Здесь $G_{\Pi d}$ – наибольшая нормальная подгруппа N из G такая, что все композиционные факторы подгруппы N являются Πd -группами (если $G = 1$ или $\text{Soc}(G)$ – Π' -группа, то $G_{\Pi d} = 1$). Класс $LF_{\Pi}(f)$, как легко заметить, является формацией; функция f называется Π -локальным спутником этой формации.

В настоящей статье решаются три задачи. Во-первых, мы дадим интерпретацию формаций с $\mathfrak{K}$ -локальным заданием и формаций вида $LF_{\Pi}(f)$ как классов групп с обобщенными центральными рядами. Во-вторых, мы установим связь между формациями с $\mathfrak{K}$ -локальным заданием и Π -насыщенными формациями. В третьих, мы дадим другое, более простое доказательство теоремы Л. А. Шеметкова [18] о FG -модулях, где G – группа из некоторой p -насыщенной формации.

Завершая вводную часть статьи, отметим, что функциональные методы, разработанные в теории конечных групп, находят применение при изучении других алгебраических систем с условиями конечности (см. [19]). Многие классы систем с условиями конечности являются формациями (т.е. замкнуты относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений), но не являются многообразиями. К примеру, класс алгебр Ли конечной длины над ассоциативно-коммутативным кольцом Λ – формация; более того, этот класс является насыщенной формацией (см. [20; теорема 1.7.6]).

Мы используем стандартные обозначения и определения (см. [7]). Большинство из них уже объяснено выше. Напомним, что Π всегда обозначает у нас некоторое непустое множество простых чисел; $\Pi' = \mathbb{P} \setminus \Pi$, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$; Z_p – группа простого порядка p . Согласно С. А. Чунихину группа G называется pd -группой, если ее порядок делится на простое число p ; Pd -группа – это группа, являющаяся pd -группой для некоторого $p \in \Pi$. Под классом всегда понимается абстрактный класс, т.е. класс групп вместе с каждой группой содержит и все с ней изоморфные. Через $(\mathfrak{M})$ обозначается класс групп, порожденный некоторой совокупностью групп $\mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{X}_{pd}$ обозначается класс всех pd -групп из $\mathfrak{X}$. Согласно В. Гашпоцу $\mathfrak{F}$ -корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G – это наименьшая нормальная подгруппа, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Гашпоцево произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется как класс всех групп G таких, что $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Через $\text{form}(\mathfrak{M})$ обозначается наименьшая формация, содержащая $\mathfrak{M}$. Цоколь $\text{Soc}(G)$ группы G – это произведение всех ее минимальных нормальных подгрупп (в единичной группе нет цоколя и нет главных факторов). Если $\mathfrak{F}$ – произвольный класс групп и p – фиксированное простое число, то $\mathfrak{F}(O_{p',p}) = \text{form}(G/O_{p',p}(G) : G \in \mathfrak{F})$, если $p \in \Pi(\mathfrak{F})$, и $\mathfrak{F}(O_{p',p}) = \emptyset$, если $p \notin \Pi(\mathfrak{F})$. $O_{p',p}(G)$ – наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G , $O_{\Pi}(G)$ – наибольшая нормальная Π -подгруппа группы G . $\mathfrak{S}_{\Pi}$ – класс всех разрешимых Π -групп.

Настоящая работа посвящается 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина.

§ 2. $\mathfrak{X}$ -локальные спутники

Прежде всего обратим внимание на то, что в определении 1.3 можно без потери общности ограничиться случаем, когда $\mathfrak{X}$ -формационная функция принимает одно и то же значение на $\mathfrak{X}'$ -группах. Об этом свидетельствует следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с $\mathfrak{X}$ -локальным заданием f . Тогда $\mathfrak{F}$ обладает $\mathfrak{X}$ -локальными заданиями h и g со следующими свойствами:

- 1) $h(x) = f(x) \cap \mathfrak{F}$ для любого $x \in \Pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$;
- 2) $g(p) = h(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$; если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$, то для любой группы $X \in \mathfrak{X}'$ имеет место равенство

$$g(X) = \text{form}\left(\bigcup_{Y \in \mathfrak{X}'} h(Y)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{H}$ – формация с $\mathfrak{X}$ -локальным заданием h , а $\mathfrak{G}$ – формация с $\mathfrak{X}$ -локальным заданием g . Докажем, что все три формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ совпадают.

Включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, и пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – группа с единственной минимальной нормальной подгруппой $N = G^{\mathfrak{H}}$. Если N – $E\mathfrak{X}$ -группа, то из $G \in \mathfrak{F}$ следует $G/C_G(N) \in f(p) \cap \mathfrak{F} = h(p)$ для любого $p \in \Pi(N)$. Если же N –

Е $\mathfrak{X}'$ -группа, то $G \in \mathfrak{F} \cap f(X) = h(X)$, где $X \in \mathcal{K}(N)$. Для других главных факторов и монолитических факторгрупп условие также легко проверяется, а потому $G \in \mathfrak{H}$, что противоречит выбору G . Итак, равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ верно.

Из условия леммы сразу следует, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Предположим, что $\mathfrak{G}$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть теперь G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоклем $N = G^{\mathfrak{F}}$. Воспользуемся тем, что h – $\mathfrak{X}$ -локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Если N – Е $\mathfrak{X}$ -группа, то мы имеем $G/C_G(N) \in h(p) = g(p)$ для любого $p \in \Pi(N)$. Если же N – Е $\mathfrak{X}'$ -группа, то $G \in g(X) \subseteq \mathfrak{F}$, где $X \in \mathcal{K}(N)$. В обоих случаях мы получаем $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Рассмотрим функцию

$$f: \Pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}' \longrightarrow \{\text{формации}\},$$

значения которой на $\mathfrak{X}'$ -группах совпадают. Обозначим через $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ класс всех групп G , удовлетворяющих следующим требованиям:

- 1) если H/K – главный Е $\mathfrak{X}$ -фактор группы G , то $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(p)$ для любого $p \in \Pi(H/K)$;
- 2) если G/L – монолитическая группа и $\text{Soc}(G/L) \in \mathfrak{X}'$, то $G/L \in f(\mathfrak{X}')$.
Класс $LF_{\mathfrak{X}}(f)$ является формацией, а функция f называется ее $\mathfrak{X}$ -*локальным спутником*.

Здесь через $f(\mathfrak{X}')$ обозначено общее значение функции f на $\mathfrak{X}'$ -группах (значение $f(\mathfrak{X}')$ используется только при $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$).

Начиная с данного момента, запись $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(f)$ всегда будет означать, что f – $\mathfrak{X}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

По определению $1 \in LF_{\mathfrak{X}}(f)$. Любое множество $\mathfrak{X}$ -локальных спутников мы считаем частично упорядоченным, полагая $f_1 \leq f_2$, если $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ для любого $x \in \Pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. $\mathfrak{X}$ -локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ назовем *интегрированным*, если каждое его значение является подформацией в $\mathfrak{F}$.

Непосредственно из леммы 2.1 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Если формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{X}$ -локальный спутник, то она имеет и интегрированный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник.

§ 3. Главная идея

Слово “спутник”, которое постоянно используется в настоящей статье, вошло в употребление не сразу. В статье В. Гапюца [3] было использовано выражение “eine local durch $f(p)$ erklärte Formation”, затем во многих работах стали

использоваться термины “локальный экран” (local screen) и “локальное задание” (local definition). Термин “спутник” впервые был введен в работе [16], и его появление было вызвано потребностью изучения произвольных формаций функциональными методами. Сформулируем, следуя [16], [21], главную идею, которой мы будем далее руководствоваться.

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый подкласс из $\mathfrak{E}$. Рассмотрим функцию

$$f: \mathfrak{M} \longrightarrow \{\text{формации}\}.$$

Предположим, что существует правило (f -правило), которое решает, является ли данный главный фактор группы G f -центральным или f -эксцентральным. Мы назовем главный ряд f -центральным, если все его факторы f -центральны. Нормальную подгруппу H группы G назовем f -гиперцентральной, если все G -главные факторы подгруппы H f -центральны в G . Мы можем рассмотреть класс $F(f)$ всех групп, все главные ряды которых являются f -центральными. Если $\mathfrak{F} = F(f)$, то функция f , рассматриваемая вместе с отмеченным выше правилом, называется спутником класса $\mathfrak{F}$. Нетрудно установить (см. [16], [21; пример 1]), что каждая непустая формация имеет по крайней мере один спутник. Таким образом, открывается перспектива изучения произвольных формаций с помощью спутников.

Следующие два замечания конкретизируют главную идею для рассматривающихся в статье случаев.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Расширим область определения f следующим образом. Если $X \in \mathfrak{X}$ и $1 \neq T \in E(X)$, то положим

$$f(T) = f(X) = \bigcap_{p \in \Pi(X)} f(p).$$

Если $1 \neq T \in E\mathfrak{X}'$, то положим $f(T) = f(\mathfrak{X}')$. Теперь определим f -правило. Будем говорить, что главный фактор H/K группы G является f -центральным, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $H/K \in E\mathfrak{X}$ и $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$;
- 2) $H/K \in E\mathfrak{X}'$ и $G/c_G(H/K) \in f(\mathfrak{X}')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\Pi}(f)$. Расширим область определения Π -локального спутника f следующим образом. Если T – Πd -группа, то положим

$$f(T) = \bigcap_{p \in \Pi \cap \Pi(T)} f(p).$$

Если же T – неединичная Π' -группа, то положим $f(T) = f(\Pi')$. Теперь определим f -правило. Скажем, что главный фактор H/K группы G является f -центральным, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) H/K – Πd -группа и $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$;
- 2) H/K – Π' -группа и $G/c_G(H/K) \in f(\Pi')$.

Рассматривая формации со спутниками, мы всегда будем иметь в виду, что одновременно задано и соответствующее правило распознавания обобщенно центральных главных факторов.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Пусть M – такая нормальная подгруппа группы G , что $G/M \in \mathfrak{F}$ и M f -гиперцентральна в G . Если $M \in \text{E}\mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая по индукции, мы можем считать, что M – минимальная нормальная подгруппа. Из условия леммы непосредственно следует, что все $\text{E}\mathfrak{X}$ -главные факторы группы G f -центральны. Пусть G/L – монолитическая группа с цоклем $T/L \in \text{E}\mathfrak{X}'$. Если $M \cap L = 1$, то ML/L совпадает с T/L , и поэтому M является $\text{E}\mathfrak{X}'$ -группой, что противоречит условию. Значит, $L \supseteq M$. Тогда $G/M/L/M$ – монолитическая группа с цоклем $T/M/L/M \in \text{E}\mathfrak{X}'$. Так как $G/M \in \mathfrak{F}$, то согласно определению 2.1 $G/M/L/M \simeq G/L \in f(\mathfrak{X}')$. Снова применяя определение 2.1 теперь уже к G , получаем $G \in \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3.2 (см. [21; лемма 4]). *Пусть $\mathfrak{B}$ – формация, $\mathfrak{X}$ – некоторый подкласс из $\mathfrak{J}$, и пусть M_1 и M_2 являются нормальными подгруппами группы G такими, что $M_1 \cap M_2 = 1$. Если $G^{\mathfrak{B}} M_i / M_i$ содержится в малом централизаторе любого главного $\text{E}\mathfrak{X}'$ -фактора группы G/M_i , $i = 1, 2$, то $G^{\mathfrak{B}}$ содержится в малом централизаторе любого главного $\text{E}\mathfrak{X}'$ -фактора группы G .*

ЛЕММА 3.3. *Пусть дан ряд нормальных подгрупп*

$$G \supseteq H \supset K \supseteq T \supseteq 1.$$

Тогда $c_G(H/K)/T = c_{G/T}(H/T/K/T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R = c_G(H/K)$, $L/T = c_{G/T}(H/T/K/T)$. По определению 1.5 $\mathcal{K}(R/K) \cap \mathcal{K}(H/K) = \emptyset$. Но тогда

$$\mathcal{K}(R/T/K/T) \cap \mathcal{K}(H/T/K/T) = \emptyset.$$

Отсюда следует, что $R/T \subseteq L/T$ и $R \subseteq L$. С другой стороны, $L/T \supseteq K/T$ и

$$\mathcal{K}(L/T/K/T) \cap \mathcal{K}(H/T/K/T) = \emptyset,$$

а значит, $\mathcal{K}(L/K) \cap \mathcal{K}(H/K) = \emptyset$ и $L \subseteq R$.

ЛЕММА 3.4 (см. [21; лемма 1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп, $\{S_i : i \in I\}$ – множество всех главных $\text{E}\mathfrak{X}'$ -факторов группы G . Тогда пересечение $\bigcap_{i \in I} c_G(S_i) = G_{\text{E}\mathfrak{X}}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Мы всегда следуем соглашению, что пересечение пустого множества подгрупп группы G совпадает с G . В частности, в лемме 3.4 множество I может быть пустым.

Нам понадобятся некоторые обозначения из [21]. Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторый непустой класс простых групп, $\mathfrak{E}_{\mathfrak{L}}$ – класс всех групп, у которых все главные

Е $\mathfrak{L}$ -факторы центральны. Очевидно, $\mathfrak{E}_{c\mathfrak{L}} = CF(f)$, где f – композиционный спутник такой, что $f(A) = (1)$, если $A \in \mathfrak{L}$, и $f(A) = \mathfrak{E}$, если $A \in \mathfrak{L}'$. Кроме того, $\mathfrak{E}_{c\mathfrak{L}}$ – формация Фиттинга. Через $G_{c\mathfrak{L}}$ будем обозначать $\mathfrak{E}_{c\mathfrak{L}}$ -радикал группы G . Если $\mathfrak{L} = (Z_p)$, то $\mathfrak{E}_{c\mathfrak{L}} = \mathfrak{E}_{cp}$, $G_{c\mathfrak{L}} = G_{cp}$. Заметим еще, что в [7; с. 371] подгруппа G_{cp} обозначена через $C^p(G)$.

ЛЕММА 3.5 (см. [21; лемма 2]). Пусть $\mathfrak{L}$ – непустой класс простых групп, $\{S_i : i \in I\}$ – множество всех главных Е $\mathfrak{L}$ -факторов группы G . Тогда пересечение $\bigcap_{i \in I} C_G(S_i) = G_{c\mathfrak{L}}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Тогда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех групп, у которых все главные ряды f -центральны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть класс $\mathfrak{H}$ составлен из всех таких групп, у которых все главные факторы f -центральны. Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq G$. Рассмотрим главный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_t = K \supset \dots \supset 1.$$

Если G_{i-1}/G_i – Е $\mathfrak{X}$ -группа, то ясно, что фактор $G_{i-1}/K/G_i/K$ f -централен в G/K . Пусть G_{i-1}/G_i – Е $\mathfrak{X}'$ -группа. Тогда $G/c_G(G_{i-1}/G_i)$ принадлежит $f(\mathfrak{X}')$, а значит, $L = c_G(G_{i-1}/G_i)$ содержит $f(\mathfrak{X}')$ -корадикал группы G . По лемме 3.3 $L/K = c_{G/K}(G_{i-1}/K/G_i/K)$. Мы видим теперь, что фактор $G_{i-1}/K/G_i/K$ f -централен в G/K . Тем самым установлено, что класс $\mathfrak{H}$ Q -замкнут.

Пусть $G/M_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, $M_1 \cap M_2 = 1$. Ясно, что каждый главный Е $\mathfrak{X}$ -фактор группы G f -централен. Пусть $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$ и $f(\mathfrak{X}') = \mathfrak{B}$. Применяя лемму 3.2, видим, что каждый главный Е $\mathfrak{X}'$ -фактор группы G f -централен. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{H}$ – формация.

Если $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathfrak{F}$, то пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^\mathfrak{F}$. Очевидно, $c_G(T) = 1$. Если T – Е $\mathfrak{X}$ -группа, то она f -центральна в G , и по лемме 3.1 имеем $G \in \mathfrak{F}$. Если же T – Е $\mathfrak{X}'$ -группа, то $G \in f(\mathfrak{X}')$. Теперь, применяя определение 2.1, получаем $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^\mathfrak{H}$. Пусть вначале $T \in \text{Е}\mathfrak{X}'$. Тогда по определению 2.1 имеем $G \in f(\mathfrak{X}')$, а отсюда следует, что все главные Е $\mathfrak{X}'$ -факторы группы G f -центральны. Пусть теперь $T \in \text{Е}\mathfrak{X}$. Тогда ввиду условия теоремы T и другие главные Е $\mathfrak{X}$ -факторы группы G f -центральны. Пусть H/K – главный Е $\mathfrak{X}'$ -фактор группы G . Тогда $K \supseteq T$ и ввиду $G/T \in \mathfrak{H}$ получаем, что $H/T/K/T$ – f -центральный главный фактор в G/T . Если $R/T = c_{G/T}(H/T/K/T)$, то по лемме 3.3 имеем $R = c_G(H/K)$. Поэтому из вхождения $G/T/R/T$ в $f(\mathfrak{X}')$ вытекает вхождение G/R в $f(\mathfrak{X}')$. Значит, H/K f -централен в G . Мы получаем $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$.

Из теоремы 3.1 с помощью лемм 3.4 и 3.5 мы сразу получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Тогда $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех групп G , удовлетворяющих следующим двум условиям:

- 1) $G/G_{E\mathfrak{X}} \in f(\mathfrak{X}')$, если $G \notin E\mathfrak{X}$;
- 2) $G/G_{c\mathfrak{X}_{pd}} \in f(p)$ для любого простого p с условием $\mathfrak{X}_{pd} \cap \mathcal{K}(G) \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. Пусть $\mathfrak{Y}$ – непустой класс абелевых простых групп, $\Pi = \Pi(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{Y}$ -локальным спутником f . Тогда $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех групп G , удовлетворяющих следующим двум условиям:

- 1) $G/G_{\mathfrak{S}_{\Pi}} \in f(\mathfrak{Y}')$, если $G \notin \mathfrak{S}_{\Pi}$;
- 2) $G/G_{c\mathfrak{p}} \in f(p)$ для любого p из Π с условием $Z_p \in \mathcal{K}(G)$.

Результат, аналогичный теореме 3.1, справедлив и для Π -насыщенных формаций.

ТЕОРЕМА 3.2. Непустая формация, имеющая Π -локальный спутник f , совпадает с классом всех групп, у которых все главные факторы f -центральны.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3.1, и поэтому мы его не приводим.

§ 4. Π -насыщенные подформации в $LF_{\mathfrak{X}}(f)$

Наша очередная цель – установление связи между Π -насыщенными формациями и формациями с $\mathfrak{X}$ -локальными спутниками.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Пусть G – монолитическая группа с цоколем $T \in E\mathfrak{X}'$. Если $G/T \in \mathfrak{F}$ и T f -центральна в G , то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что все главные $E\mathfrak{X}$ -факторы группы G f -центральны. Пусть H/K – главный $E\mathfrak{X}'$ -фактор группы G , и пусть $H \neq T$. Так как G – монолитическая группа, то $K \supseteq T$. Так как $G/T \in \mathfrak{F}$, то по теореме 3.1 фактор $H/T/K/T$ f -централен в G/T . По лемме 3.3 $c_G(H/K)/T = c_{G/T}(H/T/K/T)$. Поэтому из соотношения

$$(G/T)/c_{G/T}(H/T/K/T) \in f(\mathfrak{X}')$$

следует $G/c_G(H/K) \in f(\mathfrak{X}')$.

Итак, каждый главный фактор группы G является f -центральным. По теореме 3.1 группа $G \in \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{F}$ -формация с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Пусть $\mathfrak{Y}$ – класс всех абелевых простых групп из $\mathfrak{X}$ и h – такой $\mathfrak{Y}$ -локальный спутник, что $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$ и $h(\mathfrak{Y}') = \text{form}(\mathfrak{F} \cup f(\mathfrak{X}'))$ (если $\mathfrak{X}' = \emptyset$, то полагаем $h(\mathfrak{Y}') = \mathfrak{F}$). Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = LF_{\mathfrak{Y}}(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^\Phi$. Рассмотрим возможные случаи.

Пусть T – абелева $E\mathfrak{X}$ -группа. Тогда $f(T) = h(T)$ и T одновременно f -центральна и h -центральна. По лемме 3.1 группа $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть T – неабелева $E\mathfrak{X}$ -группа. Так как $G \in \mathfrak{F} \subseteq h(\mathfrak{Y}')$ и $c_G(T) = 1$, то T h -центральна в G . По лемме 4.1 группа $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть, наконец, T – $E\mathfrak{X}'$ -группа. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $c_G(T) = 1$, то $G \in f(\mathfrak{X}') \subseteq h(\mathfrak{Y}')$. Значит, T h -центральна в G . По лемме 4.1 группа $G \in \mathfrak{H}$. В любом случае мы приходим к противоречию. Поэтому $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с интегрированным $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Рассмотрим $\mathfrak{X}$ -локальный спутник h такой, что $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$ и $h(\mathfrak{X}') = \mathfrak{F}$, если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$. Тогда h – интегрированный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \leq h$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = LF_{\mathfrak{X}}(h)$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^\Phi$. Если $T \in E\mathfrak{X}$, то T f -центральна в G и $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 3.1. Пусть $T \in E\mathfrak{X}'$. Так как T h -центральна в G и $c_G(T) = 1$, то $G \in h(\mathfrak{X}') = \mathfrak{F}$. Это противоречие показывает, что $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{F}$. Ясно также, что h интегрирован.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{Y}$ – класс всех абелевых групп из $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{F}$ – формация с интегрированным $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Рассмотрим $\mathfrak{Y}$ -локальный спутник h такой, что $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$ и $h(\mathfrak{Y}') = \mathfrak{F}$. Тогда h – интегрированный $\mathfrak{Y}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 4.3 мы можем считать, что $f(\mathfrak{X}') = \mathfrak{F}$ при $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$. По лемме 4.2 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = LF_{\mathfrak{Y}}(h)$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^\Phi$. Если T – абелева $E\mathfrak{X}$ -группа, то T одновременно h -центральна и f -центральна, и мы получаем, что $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 3.1. Если T – $E\mathfrak{X}'$ -группа или неабелева $E\mathfrak{X}$ -группа, то $T \in E\mathfrak{Y}'$, а так как $c_G(T) = 1$ и T h -центральна в G , то $G \in h(\mathfrak{Y}') = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Ясно, что h интегрирован.

ЛЕММА 4.5 (см. [6; лемма 3.9]). Если H/K – главный фактор группы G и $p \in \Pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не имеет неединичных нормальных p -подгрупп.

ЛЕММА 4.6. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с интегрированным $\mathfrak{X}$ -локальным спутником f . Рассмотрим интегрированный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник h такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$ и $h(\mathfrak{X}') = f(\mathfrak{X}')$, если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$. Тогда h – интегрированный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \leq h$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = LF_{\mathfrak{X}}(h)$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа с цоколем $T = G^{\mathfrak{F}}$. Если T – ЕХ-группа, то, применяя лемму 4.5, видим, что T f -центральна, а значит, $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 3.1. Если $T \in \text{ЕХ}'$, то из $c_G(T) = 1$ и h -центральности T следует $G \in h(\mathfrak{X}') \subseteq \mathfrak{F}$. Это противоречие показывает, что $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{F}$. Итак, h – $\mathfrak{X}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что спутник h интегрирован. Ясно, что $h(\mathfrak{X}')$ содержится в $\mathfrak{F}$. Предположим, что существует такое простое число $p \in \Pi(\mathfrak{X})$, что $\mathfrak{N}_p f(p)$ не содержится в $\mathfrak{F}$, и пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}_p f(p) \setminus \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что G – монолитическая группа. Рассмотрим $T = \text{Soc}(G)$. Очевидно, T является p -группой. В частности, T – ЕХ-группа. Так как $G \in \mathfrak{N}_p f(p) = h(p)$, то получается, что T h -центральна. По лемме 3.1 группа $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Следующая лемма прямо вытекает из лемм 4.4 и 4.6.

ЛЕММА 4.7. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Если формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{X}$ -локальный спутник, то она имеет и такой интегрированный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник F , что $F(\mathfrak{X}') = \mathfrak{F}$, если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$, и $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [18; лемма 2.6]).

ЛЕММА 4.8. Пусть T – некоторая группа автоморфизмов p -группы A , и пусть T действует тождественно на каждом факторе некоторого T -допустимого субнормального ряда группы A . Тогда T является p -группой.

ЛЕММА 4.9. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Пусть f_1 и f_2 – интегрированные $\mathfrak{X}$ -локальные спутники формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{N}_p f_1(p)$ не содержится в $\mathfrak{N}_p f_2(p)$. Пусть G – группа наименьшего порядка из

$$(\mathfrak{N}_p f_1(p)) \setminus (\mathfrak{N}_p f_2(p)).$$

Тогда G не принадлежит $f_2(p)$ и имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $T = G^{\mathfrak{N}_p f_2(p)}$. Рассмотрим сплетение $R = Z_p \wr G = A \rtimes G$, где A – база сплетения. По лемме 3.1 $R \in \mathfrak{F}$. Очевидно, T не является p -группой. Поэтому из леммы 4.8 вытекает, что T действует нетождественно на некотором G -главном факторе H/K группы A . Так как $C = C_R(H/K)$ содержит A , то $C = A(C \cap G)$. Так как G монолитична, то $C \cap G = 1$ и поэтому $C = A$. Вспоминая, что $R \in \mathfrak{F}$, получаем, что фактор H/K f_2 -централен в R . Поэтому $R/C = R/A \simeq G \in f_2(p)$. Получили противоречие. Аналогичное рассуждение доказывает обратное включение.

ЛЕММА 4.10. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(F)$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Тогда для любого интегрированного $\mathfrak{X}$ -локального спутника f формации $\mathfrak{F}$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $f \leq F$;
- 2) $\mathfrak{N}_p f(p) = F(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя леммы 4.3 и 4.6, приходим к существованию интегрированного $\mathfrak{X}$ -локального спутника h такого, что $f \leq h$, $h(\mathfrak{X}') = \mathfrak{F}$, если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$, и $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$. Теперь, применяя лемму 4.9, получаем $h = F$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Спутник F из леммы 4.7 назовем *каноническим $\mathfrak{X}$ -локальным спутником*. Такие спутники мы обозначаем большими буквами. Таким образом, лемма 4.7 – это лемма о существовании канонического $\mathfrak{X}$ -локального спутника у формации вида $LF_{\mathfrak{X}}(f)$. Заметим, что по лемме 4.10 этот спутник единствен.

Пусть $\{f_i : i \in I\}$ – произвольное непустое семейство $\mathfrak{X}$ -локальных спутников. Обозначим через $\bigcap_{i \in I} f_i$ такой $\mathfrak{X}$ -локальный спутник f , что $f(x) = \bigcap_{i \in I} f_i(x)$ для любого $x \in \Pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$.

Следующая лемма доказывается прямой проверкой.

ЛЕММА 4.11. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Пусть дано семейство формаций $\{LF_{\mathfrak{X}}(f_i) : i \in I\}$, где $I \neq \emptyset$. Тогда

$$\bigcap_{i \in I} LF_{\mathfrak{X}}(f_i) = LF_{\mathfrak{X}}\left(\bigcap_{i \in I} f_i\right).$$

Ввиду леммы 4.11 пересечение всех $\mathfrak{X}$ -локальных спутников формации $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(f)$ снова является ее $\mathfrak{X}$ -локальным спутником; мы называем его *минимальным $\mathfrak{X}$ -локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 4.12. Пусть $\mathfrak{Y}$ – непустой класс абелевых простых групп, $\Pi = \Pi(\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{F}$ – формация с $\mathfrak{Y}$ -локальным спутником f . Пусть t – $\mathfrak{Y}$ -локальный спутник, заданный следующим образом:

- 1) $t(\mathfrak{Y}') = \text{form}(G/G_{\mathfrak{S}_{\Pi}} : G \in \mathfrak{F}, G \notin \mathfrak{S}_{\Pi})$;
- 2) если $p \in \Pi$, то $t(p) = \text{form}(G/G_{cp} : G \in \mathfrak{F}, Z_p \in \mathcal{K}(G))$.

Тогда t – минимальный $\mathfrak{Y}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3.1.2 верно $t \leq f$. Поэтому $\mathfrak{M} = LF_{\mathfrak{Y}}(t) \subseteq \mathfrak{F}$. Обратное включение ввиду следствия 3.1.2 также очевидно. Остается заметить, что задание спутника t на самом деле не зависит от выбора спутника f .

Из лемм 4.4, 4.10 и 4.12 прямо вытекает следующий результат.

ЛЕММА 4.13. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с каноническим $\mathfrak{X}$ -локальным спутником F . Тогда для любого $p \in \Pi(\mathfrak{X})$ справедливо утверждение: $F(p) = \mathfrak{N}_p \text{form}(G/G_{cp} : G \in \mathfrak{F}, Z_p \in \mathcal{K}(G))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Минимальные $\mathfrak{X}$ -локальные задания формаций рассматривались в [22]. Лемма 4.13 получена в [13]. Для удобства читателя мы привели ее вывод, учитывая, что в настоящей статье мы пользуемся новой концепцией $\mathfrak{X}$ -локального спутника.

ЛЕММА 4.14. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(F)$ и m – $\mathfrak{X}$ -локальный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) если $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$, то $m(\mathfrak{X}') = \text{form}(G/G_{E\mathfrak{X}} : G \in \mathfrak{F}, G \neq G_{E\mathfrak{X}})$;
- 2) если $p \in \Pi(\mathfrak{X})$, то $m(p) = \text{form}(G/G_{cp} : G \in \mathfrak{F}, Z_p \in \mathcal{K}(G))$.

Тогда m – минимальный $\mathfrak{X}$ -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3.4, 3.5 и теоремы 3.1 сразу получаем $m \leq F$. Поэтому $\mathfrak{M} = LF_{\mathfrak{X}}(m)$ входит в $\mathfrak{F}$. С другой стороны, если группа $G \neq 1$ принадлежит $\mathfrak{F}$, то для любого ее главного фактора H/K выполняются условия:

- 1) если $H/K \in E\mathfrak{X}'$, то $G/C_G(H/K) \in m(H/K)$;
- 2) если $H/K \in E\mathfrak{X}$, то по лемме 4.13 имеем $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p m(p)$ для любого $p \in \Pi(H/K)$, а значит, ввиду леммы 4.5 $G/C_G(H/K)$ принадлежит $m(p)$.

Таким образом, все главные факторы группы G m -центральны, а потому $G \in \mathfrak{M}$ по теореме 3.1.

ЛЕММА 4.15 (см. [17; теорема 1]). Для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ следующие условия равносильны:

- 1) $\mathfrak{F}$ имеет Π -локальный спутник;
- 2) $\mathfrak{F}$ является Π -насыщенной формацией;
- 3) $\mathfrak{F} = LF_{\Pi}(F)$, где $F(\Pi') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(O_{p',p}) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \Pi$ (спутник F называется каноническим Π -локальным спутником).

ЛЕММА 4.16 (см. [17; теорема 1 и лемма 5]). Пусть F – канонический Π -локальный спутник формации $\mathfrak{F} = LF_{\Pi}(f)$. Тогда $F(p) = \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для любого $p \in \Pi$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая Π -насыщенная формация, то она обладает $\mathfrak{X}$ -локальным спутником, где $\mathfrak{X}$ – класс всех простых Π -групп (см. подробнее в [23]). Однако существуют формации с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником, которые не являются $\Pi(\mathfrak{X})$ -насыщенными. Более того, из результатов работы [23] следует, что в общем случае для данного множества простых чисел Π нельзя гарантировать существование класса $\mathfrak{X}$ простых групп с условием $\text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, для которого выполнялось бы следующее утверждение: формация Π -насыщена тогда и только тогда, когда она имеет $\mathfrak{X}$ -локальный спутник.

Следующая теорема показывает, что в частично упорядоченном по включению множестве всех $\Pi(\mathfrak{X})$ -насыщенных подформаций формации с $\mathfrak{X}$ -локальным спутником имеется наибольший элемент.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – такой непустой класс простых групп, что $\Pi = \text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(F)$ и h – такой Π -локальный спутник, что

$h(\Pi') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = F(p)$ для любого $p \in \Pi$. Тогда $LF_{\Pi}(h)$ есть наибольшая Π -насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.15 $\mathfrak{H} = LF_{\Pi}(h)$ является Π -насыщенной формацией. Допустим, что $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу T , совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. По определению 1.6 $G/G_{\Pi d} \in h(\Pi')$. Так как $h(\Pi') = \mathfrak{F}$, то получается, что $G_{\Pi d} \neq 1$. Значит, T содержится в $G_{\Pi d}$ и потому является Πd -группой. Таким образом,

$$G/C_G(T) \in h(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$$

для любого $p \in \Pi \cap \Pi(T)$. Если T неабелева, то из монолитичности группы G следует, что $C_G(T) = 1$, а потому $G \in \mathfrak{F}$. Итак, T – h -центральная абелева нормальная p -подгруппа, $p \in \Pi$. Из условия $h(p) = F(p)$ следует, что T F -центральна в G . Теперь из леммы 3.1 следует, что G принадлежит $\mathfrak{F}$, а это противоречит выбору G .

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ – произвольная Π -насыщенная формация, содержащаяся в $\mathfrak{F}$. По лемме 4.15 $\mathfrak{G} = LF_{\Pi}(g)$, где g – некоторый Π -локальный спутник. Предположим, что $\mathfrak{G}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. И пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу T , совпадающую с $G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/G_{\Pi d} \in \mathfrak{F} = h(\Pi')$. Отсюда и из леммы 3.4 следует, что в группе G все ее главные Π' -факторы h -центральны. Ввиду теоремы 3.2 нам осталось установить, что в G все ее главные Πd -факторы h -центральны. Для этого достаточно показать, что T h -центральна в G . Ясно, что T – Πd -группа. Зафиксируем простое число p из $\Pi \cap \Pi(T)$. Если $T \in \text{E}\mathfrak{X}$, то $G/C_G(T) \in F(p) = h(p)$, а это означает, что T h -центральна. Если же $T \in \text{E}\mathfrak{X}'$, то T неабелева, и из монолитичности группы G следует, что $C_G(T) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{G}$, то $G \simeq G/C_G(T) \in g(p)$. Так как $O_p(G) = 1$, то согласно [7; лемма B.10.9] G имеет точное неприводимое представление над $GF(p)$. Пусть M – соответствующий этому представлению модуль. Рассмотрим полупрямое произведение $A = M \rtimes G$. Так как $M \leq A_{\Pi d}$, то из $G/G_{\Pi d} \in g(\Pi')$ следует, что $A/A_{\Pi d} \in g(\Pi')$. Поэтому по лемме 3.4 все главные Π' -факторы в A g -центральны. Легко видеть, что и все главные Πd -факторы в A также g -центральны. Следовательно, по теореме 3.2 $A \in \mathfrak{G}$, а значит, A содержится в $\mathfrak{F}$. Но тогда $G \simeq A/C_A(M) \in F(p) = h(p)$. Теперь ясно, что $G \in \mathfrak{H}$, и мы приходим к противоречию.

Группа называется Π -разделимой (Π -separable), если каждый ее главный фактор является либо Π -группой, либо Π' -группой.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1 (см. [23]). Пусть $\mathfrak{X}$ – класс всех простых Π -групп, $\mathfrak{F}$ – формация, имеющая $\mathfrak{X}$ -локальный спутник. Если $\mathfrak{F}$ состоит из Π -разделимых групп, то $\mathfrak{F}$ Π -насыщена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(F)$, где F – канонический $\mathfrak{X}$ -локальный спутник, существование которого гарантирует лемма 4.7. По теореме 4.1 $\mathfrak{F}$ имеет наибольшую Π -насыщенную подформацию $\mathfrak{H} = LF_{\Pi}(h)$, где h – такой

Π -локальный спутник, что $h(\Pi') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = F(p)$ для любого $p \in \Pi$. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$, и пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична и ее единственная минимальная нормальная подгруппа T совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$. Допустим, что T является Π' -группой. Так как $h(\Pi') = \mathfrak{F}$, то T h -центральна в G , а значит, по теореме 3.2 получаем $G \in \mathfrak{H}$. Итак, T – Π -разделимая Πd -группа. Получается, что T – нормальная Π -подгруппа, являющаяся одновременно F -центральной и h -центральной в G . По теореме 3.2 $G \in \mathfrak{H}$. Получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.2 (см. [24; теорема 5.6]). *Любая разрешимо насыщенная формация имеет наибольшую насыщенную подформацию.*

Следующий пример, построенный в [24], показывает, что существуют формации, не имеющие наибольших насыщенных подформаций.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех разрешимых групп, у которых силовские подгруппы различных порядков перестановочны. Согласно [10; теорема VI.3.2] $\mathfrak{F}$ – формация. Каждому простому числу q поставим в соответствие локальный спутник f_q , определяемый следующим образом: $f_q(p) = \mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Насыщенная формация $LF(f_q)$ содержится в $\mathfrak{F}$ согласно [10; теорема VI.3.1]. Зафиксируем различные простые числа q_1, q_2 и рассмотрим канонический локальный спутник F наименьшей насыщенной формации, содержащей $LF(f_{q_1})$ и $LF(f_{q_2})$. Тогда $Z_{q_i} \in f_{q_i}(p) \cap LF(f_{q_i})$, $i = 1, 2$. По [19; лемма 9.15] $Z_{q_1} \times Z_{q_2} \in F(p)$ для любого простого p . Зафиксируем третье простое число q_3 , отличное от q_1 и q_2 . Согласно [7; теорема B.10.9] $Z_{q_1} \times Z_{q_2}$ имеет точное неприводимое представление над полем $GF(q_3)$. Пусть M – соответствующий этому представлению модуль. Рассмотрим полупрямое произведение $G = M(Z_{q_1} \times Z_{q_2})$. Ясно, что $G \in LF(F)$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Таким образом, $LF(f_{q_1})$ и $LF(f_{q_2})$ нельзя включить в одну и ту же насыщенную подформацию из $\mathfrak{F}$.

Следующий пример показывает, что следствие 4.1.2 не допускает обращения.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_2$, где $\mathfrak{N}_2$ – формация всех 2-групп, $\mathfrak{H}$ – формация, порожденная простой группой A_5 порядка 60. Предположим, что $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщена. По теореме 1.2 $\mathfrak{F}$ имеет композиционный спутник f . Ясно, что $f(2) \neq \emptyset$. Но тогда $SL(2, 5) \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $\mathfrak{F}$ не является разрешимо насыщенной и имеет наибольшую насыщенную подформацию $\mathfrak{N}_2$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – такой непустой класс простых групп, что $\Pi = \text{Char}(\mathfrak{X}) = \Pi(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{F}$ – формация с каноническим $\mathfrak{X}$ -локальным спутником F и минимальным $\mathfrak{X}$ -локальным спутником t . Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\mathfrak{F}$ Π -насыщена;
- 2) если H/K – главный $E\mathfrak{X}'$ -фактор группы $G \in \mathfrak{F}$ и $p \in \Pi(H/K) \cap \Pi$, то $G/c_G(H/K) \in t(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 1.1, видим, что при $\mathfrak{X} = \mathfrak{J}$ теорема верна. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{X}' \neq \emptyset$.

Пусть $\mathfrak{F}$ Π -насыщена. По теореме 4.1 $\mathfrak{F}$ имеет такой Π -локальный спутник h , что $h(\Pi') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = F(p)$ для любого $p \in \Pi$. Пусть группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет такой главный фактор H_0/K , что $H_0/K \simeq S \times \cdots \times S$, $S \in \mathfrak{X}'$ и $|S|$ делится на простое число $p \in \Pi$. Очевидно, S неабелева. Положим $C = c_G(H_0/K)$. Ясно, что $H_0C/C \simeq H_0/K$ и $c_{G/C}(H_0C/C) = 1$. Поэтому цокль группы $\overline{G} = G/C$ равен прямому произведению неабелевых минимальных нормальных подгрупп:

$$\text{Soc}(\overline{G}) = \overline{H}_0 \times \overline{H}_1 \times \cdots \times \overline{H}_t,$$

где $\overline{H}_i \in E(S)$ для любого i (случай $t = 0$ не исключается). Так как все $\overline{H}_i$ h -центральны в G , то

$$\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{H}_i) \in h(p) = F(p) = \mathfrak{N}_p m(p).$$

Применяя лемму 4.5, мы видим, что на самом деле $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{H}_i) \in m(p)$. Но тогда $\overline{G}/\overline{D} \in m(p)$, где $\overline{D} = \bigcap_i C_{\overline{G}}(\overline{H}_i)$. Подгруппа $\overline{D}$ централизует $\text{Soc}(\overline{G})$, а так как $F(\overline{G}) = 1$, то $\overline{D} = 1$ по известной теореме Шмида (см. [25] или [6; теорема 7.11]). Мы доказали, что $\overline{G} = G/C$ принадлежит $m(p)$.

Пусть теперь выполняется условие 2). Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является Π -насыщенной. Тогда по теореме 4.1 $\mathfrak{F}$ имеет наибольшую Π -насыщенную подформацию $\mathfrak{H} = LF_{\Pi}(h)$, где $h(\Pi') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = F(p)$ для любого $p \in \Pi$. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Ясно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу T , совпадающую с $G^{\mathfrak{H}}$. Очевидно, $c_G(T) = 1$. Рассмотрим возможные случаи.

Допустим, что T – Π' -группа. Так как $G \in \mathfrak{F} = h(\Pi')$, то T h -центральна в G . Отсюда и из соотношения $G/T \in \mathfrak{H}$ следует, что в G все главные факторы h -центральны, и по теореме 3.2 имеем $G \in \mathfrak{H}$.

Рассмотрим теперь случай $T \in E\mathfrak{X}$. В этом случае T является Π -группой. Из F -центральности T в G следует, что

$$G/C_G(T) \in F(p)$$

для любого $p \in \Pi \cap \Pi(T)$. Мы видим, что T h -центральна в G . По теореме 3.2 $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть, наконец, T – Pd -группа, не являющаяся Π -группой. Ясно, что T неабелева и $T = S \times \cdots \times S$, где $S \in \mathfrak{X}'$. По условию 2) $G \simeq G/c_G(T) \in m(p)$ для любого $p \in \Pi \cap \Pi(T)$. Так как $m(p) \subseteq F(p) = h(p)$, то получается, что $G \in h(p)$ для любого $p \in \Pi \cap \Pi(T)$. Таким образом, T h -центральна в G . Учитывая, что $G/T \in \mathfrak{H}$, и применяя теорему 3.2, снова получаем, что $G \in \mathfrak{H}$. Пришли к противоречию.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольное непустое семейство неабелевых простых групп. Очевидно, формация $\mathfrak{F} = E\mathfrak{X}$ разрешимо насыщена, а значит, по теореме 1.2 она имеет композиционный спутник. Покажем с помощью теоремы 4.1, что $\mathfrak{F}$ не является p -насыщенной ни для какого $p \in \Pi(\mathfrak{F})$.

Зафиксируем $p \in \Pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, $\mathfrak{F} = LF_{(Z_p)}(F) = LF_{(Z_p)}(m)$, где m – минимальный (Z_p) -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ p -насыщена. Тогда по теореме 4.1 $\mathfrak{F} = LF_p(h)$, где h – такой p -локальный спутник, что $h(p) = \mathfrak{N}_p m(p) = F(p)$. Так как $Z_p \notin \mathcal{K}(\mathfrak{F})$, то по лемме 4.14 имеем $m(p) = \emptyset$. Но тогда и $h(p) = \emptyset$, откуда следует, что $p \notin \Pi(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору p .

Тот факт, что $\mathfrak{F}$ не p -насыщена, можно вывести и из леммы 4.15. Действительно, если бы $\mathfrak{F}$ была p -насыщенной, то тогда по лемме 4.15 мы имели бы

$$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(O_{p',p}) \subseteq \mathfrak{F},$$

что невозможно.

§ 5. О разложении FG -модулей

В этом параграфе мы дадим другое, более простое доказательство теоремы 4.1 из [18]. Если V – FG -модуль и $N \leq G$, то через $\text{Ker}(N \text{ on } V)$ обозначается множество всех тех элементов из N , которые действуют тождественно на V , т.е.

$$\text{Ker}(N \text{ on } V) = \{x \in N : vx = v \text{ для всех } v \in V\}.$$

Иногда пишут V_N , если V рассматривается как FN -модуль.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть V – конечномерный FG -модуль, где F – поле характеристики $p > 0$, G – группа. Пусть N – некоторая нормальная p' -подгруппа группы G . Тогда V представим в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus V_2$, где FG -модули V_1 и V_2 обладают следующими свойствами:

- 1) $\text{Ker}(N \text{ on } V_1) = N$;
- 2) $\text{Ker}(N \text{ on } R/S) \neq N$ для любого FG -композиционного фактора модуля V_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Машке V_N вполне приводим. Пусть V_1 – сумма всех таких неприводимых подмодулей U модуля V_N , что $\text{Ker}(N \text{ on } U) = N$. И пусть V_2 – сумма всех таких неприводимых подмодулей U модуля V_N , что $\text{Ker}(N \text{ on } U) \neq N$. Покажем, что V_1 и V_2 – подмодули FG -модуля V . Будем считать, что $V_1 \neq 0$ и $V_2 \neq 0$. Если U – неприводимый подмодуль модуля V_N такой, что $\text{Ker}(N \text{ on } U) = N$ и $g \in G$, то Ug – неприводимый FN -модуль, изоморфный сопряженному FN -модулю $U^{g^{-1}}$ (см. [7; определение В.7.2]. Согласно [7; лемма В.7.6] имеем

$$\text{Ker}(N \text{ on } Ug) = \text{Ker}(N \text{ on } U^{g^{-1}}) = (\text{Ker}(N \text{ on } U))^g = N^g = N.$$

Поэтому $Ug \subseteq V_1$, а значит, V_1 является FG -подмодулем. Теперь возьмем элемент $g \in G$ и рассмотрим неприводимый подмодуль U модуля V_N такой, что $\text{Ker}(N \text{ on } U) \neq N$. Заметим, что $\text{Ker}(N \text{ on } Ug) \neq N$, так как в противном случае ввиду [7; определение В.7.2, лемма В.7.6] мы имели бы

$$\text{Ker}(N \text{ on } U) = (\text{Ker}(N \text{ on } U^{g^{-1}}))^{g^{-1}} = (\text{Ker}(N \text{ on } Ug))^{g^{-1}} = N^{g^{-1}} = N,$$

что противоречило бы выбору U . Таким образом, $Ug \subseteq V_2$ и, следовательно, V_2 является FG -подмодулем.

Пусть R/S – композиционный фактор FG -модуля V_1 . Согласно [7; лемма В.7.1] $R/S = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_t$, где все A_i являются неприводимыми FN -модулями. Кроме того, ввиду теоремы Жордана–Гёльдера A_i изоморфен неприводимому FN -подмодулю модуля V_1 . Отсюда следует, что

$$\text{Ker}(N \text{ on } A_i) = N, \quad i \in \{1, 2, \dots, t\}.$$

Поэтому $\text{Ker}(N \text{ on } R/S) = N$. Так как V_1 есть прямая сумма неприводимых FN -модулей, то $\text{Ker}(N \text{ on } V_1) = N$.

Пусть теперь R/S – композиционный фактор FG -модуля V_2 . Мы знаем, что $R/S = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_t$, где все A_i являются неприводимыми FN -модулями такими, что $\text{Ker}(N \text{ on } A_i) \neq N$. Но тогда $\text{Ker}(N \text{ on } R/S) \neq N$.

В работе [18] было введено следующее определение. Пусть V – FG -модуль, где F – поле характеристики $p > 0$, G – группа. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая p -насыщенная формация с p -локальным спутником f . Композиционный фактор R/S модуля V называется:

- 1) f -центральным, если $G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \in f(p)$;
- 2) f -эксцентральным, если R/S не является f -центральным.

ТЕОРЕМА 5.2 (см. [18; теорема 4.1]). Пусть V – конечномерный FG -модуль, где F – поле характеристики $p > 0$, G – группа из $\mathfrak{F} = LF_p(f)$. Тогда V представим в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus V_2$, где FG -модули V_1 и V_2 обладают следующими свойствами:

- 1) каждый фактор композиционного ряда модуля V_1 f -централен;
- 2) каждый фактор композиционного ряда модуля V_2 f -эксцентрален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(p) = \emptyset$, то мы можем взять $V_1 = 0$ и $V_2 = V$. Теорема очевидна и в случае, когда G – p' -группа. Поэтому будем считать, что G – pd -группа и $f(p) \neq \emptyset$.

Предположим вначале, что спутник f интегрирован и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Пусть $N = G^{f(p)}$. Так как $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$, то N – p' -группа. Рассмотрим разложение $V_1 \oplus V_2$, которое дает теорема 5.1. Если R/S – композиционный фактор модуля V_1 , то из $N \subseteq \text{Ker}(G \text{ on } R/S)$ получаем $G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \in f(p)$. Любой композиционный фактор R/S модуля V_2 f -эксцентрален, так как в противном случае мы имели бы $N \subseteq \text{Ker}(G \text{ on } R/S)$, а отсюда следовало бы $N = \text{Ker}(N \text{ on } R/S)$, что невозможно.

Пусть теперь f – произвольный p -локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Из доказанного в предыдущем абзаце и леммы 4.16 вытекает, что $G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \in \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F})$ для любого композиционного фактора R/S модуля V_1 . Так как

$$O_p(G) \subseteq \text{Ker}(G \text{ on } R/S),$$

то получается, что

$$G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \in f(p) \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p).$$

Если же R/S – композиционный фактор модуля V_2 , то мы имеем

$$G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \notin \mathfrak{N}_p(f(p) \cap \mathfrak{F}).$$

А отсюда следует, что

$$G/\text{Ker}(G \text{ on } R/S) \notin f(p) \cap \mathfrak{F}.$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, мы заключаем, что R/S f -эксцентрален.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из теоремы 5.2 легко получить теорему 5.1. Для этого достаточно заметить, что в теореме 5.1 группа G принадлежит формации $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, где $f(p) = \text{form}(G/N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В работе [26] построены новые типы формаций локального типа. Остается открытым вопрос о связи этих формаций с формациями, рассмотренными в настоящей статье.

Список литературы

- [1] С. А. Чунихин, “О Π -свойствах конечных групп”, *Матем. сб.*, **25(67)** (1949), 321–346; англ. пер.: S. A. Čunihin, “On Π -properties of finite groups”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **72** (1952).
- [2] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964; англ. пер.: S. A. Chunikhin, *Subgroups of finite groups*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.
- [3] W. Gaschütz, “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 300–305.
- [4] Л. А. Шеметков, “Два направления в развитии теории непростых конечных групп”, *УМН*, **30**:2 (1975), 179–198; англ. пер.: L. A. Shemetkov, “Two directions in the development of the theory of non-simple finite groups”, *Russian Math. Surveys*, **30**:2 (1975), 185–206.
- [5] Л. А. Шеметков, “Ступенчатые формации групп”, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 628–648; англ. пер.: L. A. Šemetkov, “Graduated formations of groups”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:4 (1974), 593–611.
- [6] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978.
- [7] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.
- [8] О. Ю. Шмидт, “Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп”, *Матем. сб.*, **33** (1926), 161–172.
- [9] B. Huppert, “Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen”, *Math. Z.*, **60**:1 (1954), 409–434.
- [10] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [11] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite groups. III*, Grundlehren Math. Wiss., **243**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [12] P. Förster, “Projektive Klassen endlicher Gruppen. IIa: Gesättigte Formationen: Ein allgemeiner Satz von Gaschütz–Lubeseder–Baer-Typ”, *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*, **29**:2–3 (1985), 39–76.
- [13] A. Ballester-Bolínches, C. Calvo, R. Esteban-Romero, “On $\mathfrak{X}$ -saturated formations of finite groups”, *Comm. Algebra*, **33**:4 (2004), 1053–1064.

- [14] Л. А. Шеметков, “О произведении формаций”, *Докл. АН БССР*, **28**:2 (1984), 101–103.
- [15] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, “О частично локальных формациях”, *Докл. АН Беларуси*, **39**:3 (1995), 9–11.
- [16] A. Ballester-Bolinches, L. A. Shemetkov, “On lattices of p -local formations of finite groups”, *Math. Nachr.*, **186** (1997), 57–65.
- [17] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, “Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп”, *Матем. Труды*, **2**:2 (1999), 114–147; англ. пер.: L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, “Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups”, *Siberian Adv. Math.*, **10**:2 (2000), 112–141.
- [18] Л. А. Шеметков, “К теореме Хупперта”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:1 (2003), 224–231; англ. пер.: L. A. Shemetkov, “On Huppert’s theorem”, *Siberian Math. J.*, **44**:1 (2003), 184–189.
- [19] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Наука, М., 1989.
- [20] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985; англ. пер.: Yu. A. Bakhturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [21] L. A. Shemetkov, “On partially saturated formations and residuals of finite groups”, *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4125–4137.
- [22] C. Calvo-López, *Formaciones $\mathfrak{X}$ -locales de grupos finitos*, Master’s thesis, Facultat de Matemàtiques, Universitat de València, 2004.
- [23] A. Ballester-Bolinches, C. Calvo, R. Esteban-Romero, “A question of the Kurovka notebook on formation products”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **68**:3 (2003), 461–470.
- [24] E. Salomon, *Über lokale und Baerlokale Formationen endlicher Gruppen*, Master’s thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Mainz, 1983.
- [25] P. Schmid, “Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen”, *Arch. Math. (Basel)*, **23**:1 (1972), 236–242.
- [26] V. A. Vedernikov, “Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, *Algebra. Topology, suppl. 2*, 2001, 217–233.

А. Баллестер-Болинше (A. Ballester-Bolinches)

Universitat de València

E-mail: adolfo.ballester@uv.es

Поступила в редакцию

24.05.2006 и 20.03.2007

К. Кальво (C. Calvo)

Universitat de València

E-mail: clara.calvo@uv.es

Л. А. Шеметков (L. A. Shemetkov)

Гомельский государственный университет

E-mail: shemetkov@gsu.unibel.by