Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, Модулярные функции и вопросы трансцендентности, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 65–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:41:24

УДК 511.36

Ю. В. Нестеренко

Модулярные функции и вопросы трансцендентности

Устанавливаются результаты о степени трансцендентности полей, порожденных некоторыми числами, связанными с модулярной функцией $j(\tau)$. В частности, доказывается алгебраическая независимость чисел π и e^π , а также гипотеза Д. Бертрана об алгебраической независимости над $\mathbb{Q}$ значений в алгебраических точках модулярной функции и ее производных.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Формулировки основных результатов

Хорошо известно, что если $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$, — мнимая квадратичная иррациональность, то значение модулярной функции $j(\tau)$ есть алгебраическое число (см. [1, гл. 5]). Так, например,

$$j(i) = 1728, \quad j'(i) = 0, \quad j(\zeta) = j'(\zeta) = j''(\zeta) = 0,$$

где $i^2 = -1$ и $\zeta = e^{2\pi i/3}$.

В 1937 г. Т. Шнайдер [2] доказал, что в алгебраических точках верхней комплексной полуплоскости, отличных от мнимых квадратичных иррациональностей, функция $j(\tau)$ принимает трансцендентные значения. Настоящая статья посвящена исследованию алгебраической независимости чисел, связанных с $j(\tau)$.

В 1916 г. в работе [3] С. Рамануджан определил три функции

$$P(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \quad Q(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \\ R(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n,$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, и доказал ряд тождеств для них. В частности, С. Рамануджан установил, что эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\theta P = \frac{1}{12}(P^2 - Q), \quad \theta Q = \frac{1}{3}(PQ - R), \quad \theta R = \frac{1}{2}(PR - Q^2), \quad (1)$$

где $\theta = z \frac{d}{dz}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00739).

В 1969 г. К. Малер доказал, что функции $P(z), Q(z), R(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ (это утверждение легко следует из теоремы, доказанной в [4]).

Упомянутые свойства функций Рамануджана, а также тот факт, что коэффициенты их разложений в ряды Тейлора являются целыми числами и растут не очень быстро, играют ключевую роль при доказательстве результатов этой статьи. Отметим, что функции $E_4(\tau) = Q(e^{2\pi i\tau})$, $E_6(\tau) = R(e^{2\pi i\tau})$, $\text{Im } \tau > 0$, являются модулярными формами веса 4 и 6, соответственно. Функция $E_2(\tau) = P(e^{2\pi i\tau})$ также обладает некоторыми модулярными свойствами. Все это существенно при выводе следствий из формулируемой ниже теоремы – основного результата статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, среди чисел $q, P(q), Q(q), R(q)$ имеется не менее трех алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$.*

Положим

$$\Delta = \frac{1}{1728}(Q^3 - R^2) = z + \dots, \quad J(z) = \frac{Q(z)^3}{\Delta(z)} = \frac{1}{z} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)z^n.$$

Последний ряд дает разложение модулярной функции $j(\tau)$ в ряд Фурье $j(\tau) = J(e^{2\pi i\tau})$. Из дифференциальных уравнений (1) и определения функций $J(z)$ и $\Delta(z)$ следует, что

$$\theta\Delta = P\Delta, \quad J = \frac{Q^3}{\Delta}, \quad \theta J = -\frac{Q^2 R}{\Delta}, \quad \theta^2 J = \frac{-PQ^2 R + 4QR^2 + 3Q^4}{6\Delta}.$$

Последние три формулы могут быть обращены:

$$P = 6\frac{\theta^2 J}{\theta J} - 4\frac{\theta J}{J} - 3\frac{J}{J - 1728}, \quad Q = \frac{(\theta J)^2}{J(J - 1728)}, \quad R = -\frac{(\theta J)^2}{J^2(J - 1728)}.$$

Учитывая, что равенства $j(\tau) = 0$, $j(\tau) = 1728$, $j'(\tau) = 0$ возможны лишь в точках τ , конгруэнтных относительно модулярной группы числам i, ζ , получаем из приведенных выше равенств

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для каждого $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$, не конгруэнтного относительно модулярной группы одному из чисел i или ζ , и $q = e^{2\pi i\tau}$ каждый из наборов*

- 1) $q, J(q), J'(q), J''(q)$,
- 2) $q, j(\tau), \pi^{-1}j'(\tau), \pi^{-2}j''(\tau)$

содержит не менее трех алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть q – алгебраическое число, $0 < |q| < 1$, тогда каждая совокупность*

- 1) $P(q), Q(q), R(q)$,
- 2) $J(q), \theta J(q), \theta^2 J(q)$

состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел. В частности, каждое из этих чисел трансцендентно.

Первое утверждение, очевидно, сразу же следует из теоремы 1. Для доказательства второго отметим, что если $q = e^{2\pi i\tau}$, то согласно теореме Гельфонда–Шнайдера τ не есть алгебраическая иррациональность и, следовательно, не конгруэнтно i, ζ относительно модулярной группы. Применяя следствие 1, получаем нужное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами g_2, g_3 ; ω_1, ω_2 – ее периоды, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, η_1 – квазипериод, соответствующий ω_1 . Тогда числа

$$e^{2\pi i(\omega_2/\omega_1)}, \quad \frac{\omega_1}{\pi}, \quad \frac{\eta_1}{\pi}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Для доказательства, не уменьшая общности, можно считать, что ω_1 и ω_2 – основные периоды, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. При $q = e^{2\pi i(\omega_2/\omega_1)}$ и $\omega = \omega_1$, $\eta = \eta_1$ справедливы равенства (см. [1, гл. 4])

$$P(q) = 3 \cdot \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\eta}{\pi}, \quad Q(q) = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^4 g_2, \quad R(q) = \frac{27}{8} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^6 g_3.$$

Из этих формул следует, что все три числа $P(q), Q(q), R(q)$ алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\omega/\pi, \eta/\pi)$, и по теореме 1 степень трансцендентности поля $\mathbb{Q}(q, \omega/\pi, \eta/\pi)$ равна 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами g_2, g_3 и с комплексным умножением над полем $\mathbb{k}$. Тогда для любого ее периода ω , соответствующего квазипериода η и произвольного $\tau \in \mathbb{k}$, $\text{Im } \tau \neq 0$, каждый набор

$$\{\pi, \omega, e^{2\pi i\tau}\}, \quad \{\omega, \eta, e^{2\pi i\tau}\}$$

состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел.

Действительно, не уменьшая общности, можно считать, что ω – примитивный период, т.е. не кратен никакому другому периоду $\wp(z)$. Кроме того, можно считать, что $\tau = \omega_2/\omega$, причем пара чисел $\omega_1 = \omega$ и ω_2 образует базис решетки периодов $\wp(z)$. В случае комплексного умножения числа ω_2 и η_2 алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\omega, \eta)$ (см. [5, гл. 3]). С помощью соотношения Лежандра получаем отсюда, что η алгебраично над полем $\mathbb{Q}(\omega, \pi)$ и π алгебраично над полем $\mathbb{Q}(\omega, \eta)$. Нужное утверждение теперь получается из следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Каждый из наборов*

$$\{\pi, e^\pi, \Gamma(1/4)\}, \quad \{\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3)\}$$

состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел. В частности, числа π, e^π алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Для доказательства нужно применить следствие 4 к эллиптическим кривым с комплексным умножением, задаваемым уравнениями

$$y^2 = 4x^3 - 4x, \quad y^2 = 4x^3 - 4.$$

Первая из них имеет полем комплексного умножения $\mathbb{Q}(i)$, а вторая – поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{2\pi i/3}$, а периодами соответственно

$$\omega = 2 \int_1^\infty \frac{dx}{(4x^3 - 4x)^{1/2}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{(8\pi)^{1/2}} \quad \text{и} \quad \omega = 2 \int_1^\infty \frac{dx}{(4x^3 - 4)^{1/2}} = \frac{\Gamma(1/3)^3}{\pi \cdot 2^{8/3}}.$$

Для любого натурального числа D существует эллиптическая функция Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами и комплексным умножением над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. Так что получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. *Для любого натурального D числа*

$$\pi, e^{\pi\sqrt{D}}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Сделаем несколько замечаний исторического характера.

Предположение о трансцендентности значений функции $J(z)$ в алгебраических точках q , $0 < |q| < 1$, было высказано в 1969 г. К. Малером [6] и доказано в 1995 г. в совместной работе К. Барре-Сирие, Г. Диаса, Ф. Грмейна и Ж. Филибера [7]. Эта работа дала толчок исследованиям, приведшим к доказательству настоящих результатов.

Утверждение об алгебраической независимости над $\mathbb{Q}$ чисел ω_1/π , η_1/π в условиях следствия 3 и чисел π, ω в условиях следствия 4 впервые было доказано Г. Чудновским в 1976 г. (см. [8], [9]). Как следствие, в этих же работах доказана и алгебраическая независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $\pi, \Gamma(1/4)$ и чисел $\pi, \Gamma(1/3)$ (см. следствие 5). В 1977 г. Д. Бертран [10] показал, что первое из указанных выше утверждений Чудновского эквивалентно утверждению об алгебраической независимости над $\mathbb{Q}$ чисел $\theta J(q)$ и $\theta^2 J(q)$ в предположении, что $J(q)$ – алгебраическое число, отличное от 0 и 1728. Он предположил [10], что значения $J(q), \theta J(q), \theta^2 J(q)$ в любой алгебраической точке q , $0 < |q| < 1$, должны быть алгебраически независимы. Эта гипотеза доказывается в следствии 2.

Утверждение об алгебраической независимости чисел π и e^π (следствие 5) – одна из старых фольклорных гипотез теории трансцендентных чисел. Печатное упоминание ее можно найти, например, в [11].

Метод доказательства теоремы 1 позволяет легко установить и количественные результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, и $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{C}$ таковы, что все числа $q, P(q), Q(q), R(q)$ алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда существует постоянная γ_1 , зависящая только от чисел q и θ_i , такая, что для любого многочлена $A \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, $A \neq 0$, справедливо неравенство

$$|A(\theta_1, \theta_2, \theta_3)| > \exp(-\gamma_1 t(A)^4 \ln^2 t(A)),$$

где $t(A) = \ln H(A) + \deg A$ и $H(A)$ – максимум модулей коэффициентов многочлена A . В частности, такая оценка имеет место для каждого из наборов чисел

$$\pi, e^\pi, \Gamma(1/4) \quad \text{и} \quad \pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3).$$

Как уже указывалось, функции $P(z), Q(z), R(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Следующая теорема 3 оценивает их меру алгебраической независимости. Она играет важную роль в доказательстве теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть L_1, L_2 – целые числа, $L_1 \geq 1, L_2 \geq 1$. Тогда для любого многочлена $A(z, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, $A \neq 0$, $\deg_z A \leq L_1$, $\deg_{x_i} A \leq L_2$, справедливо неравенство

$$\text{ord } A(z, P(z), Q(z), R(z)) \leq cL_1L_2^3,$$

где $c = 2 \cdot 10^{45}$.

В формулировке этой теоремы и в дальнейшем в статье символом $\text{ord } \varphi(z)$ обозначается кратность нуля функции $\varphi(z)$ в точке $z = 0$.

Отметим в заключение параграфа, что утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, могут быть доказаны и в p -адической области.

§ 2. Сведение теорем 1 и 2 к теореме 3

ЛЕММА 2.1. Для всех достаточно больших целых N существует многочлен $A \in \mathbb{Z}[z, x_1, x_2, x_3]$, $A \neq 0$, такой, что

$$\deg_z A \leq N, \quad \deg_{x_i} A \leq N, \quad i = 1, 2, 3, \quad \ln H(A) \leq 85N \ln N,$$

где $H(A)$ есть максимум модулей коэффициентов A , и функция

$$F(z) = A(z, P(z), Q(z), R(z))$$

удовлетворяет равенствам

$$F^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{(N+1)^4}{2} \right] - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \leq n^k \sum_{d|n} 1 \leq n^{k+1}.$$

В действительности, справедлива и более точная оценка $\sigma_k(n)$ (см. [12]), но для нашего доказательства достаточно и приведенного выше тривиального неравенства. Далее имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n \ll \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdots (n+k) z^n = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}, \quad (2)$$

где знак $\ll$ означает мажоранту, и, следовательно,

$$P(z) \ll \frac{24 \cdot 2!}{(1-z)^3}, \quad Q(z) \ll \frac{240 \cdot 4!}{(1-z)^5}, \quad R(z) \ll \frac{504 \cdot 6!}{(1-z)^7}, \quad z \ll \frac{1}{1-z}.$$

Для любого вектора $\bar{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k_i \leq N$, $i = 0, 1, 2, 3$, имеем

$$z^{k_0} P(z)^{k_1} Q(z)^{k_2} R(z)^{k_3} = \sum_{n=0}^{\infty} d(\bar{k}, n) z^n \ll \frac{c_1^{3N}}{(1-z)^{16N}}, \quad (3)$$

где $c_1 = 504 \cdot 6!$ и $d(\bar{k}, n) \in \mathbb{Z}$. Из (3) и (2) следует, что

$$|d(\bar{k}, n)| \leq c_1^{3N} (n + 16N)^{16N} \leq (c_2 n N)^{16N} \leq (nN)^{17N}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

если N достаточно велико, $|d(\bar{k}, 0)| \leq 1$.

Пусть теперь

$$A = \sum_{0 \leq k_i \leq N} a(\bar{k}) z^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

где множество целых чисел $a(\bar{k})$ выбрано как нетривиальное решение системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{0 \leq k_i \leq N} d(\bar{k}, n) a(\bar{k}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{(N+1)^4}{2} \right] - 1.$$

Число переменных $u = (N+1)^4$ и число уравнений $v = [(N+1)^4/2]$ этой системы связаны неравенством $2v \leq u$. Поэтому по лемме Зигеля о решении системы линейных однородных уравнений (см., например, [11]) и в силу (4) система имеет нетривиальное решение в целых числах, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{\bar{k}} |a(\bar{k})| \leq (N+1)^4 \left(\frac{(N+1)^4}{2} N \right)^{17N} \leq N^{85N}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Введем теперь следующее обозначение

$$M = \text{ord } F(z).$$

Из леммы 2.1 и теоремы 3 следуют неравенства

$$\frac{1}{2} N^4 \leq M \leq c N^4. \quad (5)$$

Положим также $r = \min((1+|q|)/2, 2|q|)$. Тогда $|q| < r < 1$.

ЛЕММА 2.2. Если N достаточно велико, то при всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq r$, справедлива оценка

$$|F(z)| \leq |z|^M N^{189N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $F(z)$ имеет следующее разложение в ряд Тейлора в начале координат:

$$F(z) = \sum_{n=M}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда

$$b_n = \sum_{0 \leq k_i \leq N} d(\bar{k}, n) a(\bar{k}) \in \mathbb{Z}$$

и в силу (4)

$$|b_n| \leq \sum_{0 \leq k_i \leq N} (nN)^{17N} N^{85N} \leq n^{17N} N^{103N}, \quad n \geq M.$$

При $|z| \leq r$ мы имеем

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \sum_{n=M}^{\infty} |b_n| \cdot |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+M}| \cdot |z|^{n+M} \\ &\leq |z|^M N^{103N} \sum_{n=0}^{\infty} (n+M)^{17N} |z|^n \\ &\leq |z|^M N^{103N} (M+1)^{17N} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{17N} |z|^n \right) \\ &\leq |z|^M N^{103N} (cN^4 + 1)^{17N} \frac{(17N)!}{(1-r)^{17N+1}} \leq |z|^M N^{189N}, \end{aligned}$$

если N достаточно велико. Лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. Существует целое число T , $0 \leq T \leq \gamma N \ln N$, для которого справедливо неравенство

$$|F^{(T)}(q)| > \left(\frac{1}{2} |q| \right)^{2M},$$

где $\gamma = 190 (\ln |r/q|)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что имеют место неравенства

$$4^{L+1}|F^{(k)}(q)| \leq \left(\frac{1}{2}|q|\right)^M, \quad 0 \leq k \leq L = [\gamma N \ln N]. \quad (6)$$

На окружности $C : |z| = r$ справедливы равенства $z\bar{z} = r^2$ и

$$|r^2 - \bar{q}z| = |r^2 - \bar{q}z| \cdot \left|\frac{\bar{z}}{r}\right| = |r\bar{z} - r\bar{q}| = r|z - q|.$$

С их помощью, а также с помощью леммы 2.2 заключаем, что интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{M+1}} \cdot \left(\frac{r^2 - \bar{q}z}{r(z - q)}\right)^{L+1} dz$$

может быть оценен следующим образом:

$$|I| \leq N^{189N}. \quad (7)$$

В то же время

$$I = \operatorname{Res}_{z=0} G(z) + \operatorname{Res}_{z=q} G(z), \quad (8)$$

где

$$G(z) = \frac{F(z)}{z^{M+1}} \cdot \left(\frac{r^2 - \bar{q}z}{r(z - q)}\right)^{L+1}.$$

Вычеты в точках 0 и q вычисляются следующим образом:

$$\operatorname{Res}_{z=0} G(z) = b_M \left(-\frac{r}{q}\right)^{L+1}$$

и

$$\operatorname{Res}_{z=q} G(z) = \frac{1}{L!} \left(\frac{d}{dz}\right)^L \left(F(z) \cdot \frac{(r^2 - \bar{q}z)^{L+1}}{z^{M+1}r^{L+1}}\right) \Big|_{z=q} = \sum_{k=0}^L \frac{F^{(L-k)}(q)}{(L-k)!r^{L+1}} \cdot c_k, \quad (9)$$

где

$$c_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{(r^2 - \bar{q}z)^{L+1}}{z^{M+1}}\right) \Big|_{z=q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(r^2 - \bar{q}z)^{L+1}}{z^{M+1}(z - q)^{k+1}} dz$$

и C_1 — окружность $|z - q| = |q|/2$. Так как на C_1 справедливы неравенства

$$|z| \geq |q| - |z - q| \geq \frac{1}{2}|q|,$$

$$|r^2 - \bar{q}z| = |r^2 - q\bar{q} + \bar{q}(q - z)| \leq r^2 - |q|^2 + \frac{1}{2}|q|^2 \leq r^2 \leq 2r|q|$$

и

$$\left|\frac{(r^2 - \bar{q}z)^{L+1}}{(z - q)^{k+1}}\right| \leq (2r|q|)^{L+1} \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{-k-1} \leq (4r)^{L+1},$$

то

$$|c_k| \leq (4r)^{L+1} \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{-M}, \quad 0 \leq k \leq L.$$

Последняя оценка вместе с (6) и (9) дает нам

$$\left| \operatorname{Res}_{z=q} G(z) \right| \leq \sum_{k=0}^L \frac{1}{(L-k)!} \leq e.$$

Теперь, поскольку $b_M \in \mathbb{Z}$, с помощью (8) и (7) мы получаем

$$\left| \frac{r}{q} \right|^{L+1} \leq \left| b_M \left(-\frac{r}{q} \right)^{L+1} \right| = \left| \operatorname{Res}_{z=0} G(z) \right| \leq |I| + \left| \operatorname{Res}_{z=q} G(z) \right| \leq N^{189N} + e.$$

Но это неравенство при $N \geq 2$ ложно. Получившееся противоречие означает существование целого числа $T \leq L$, для которого

$$|F^{(T)}(q)| > 4^{-L-1} \left(\frac{1}{2}|q|\right)^M > \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{2M},$$

если N достаточно велико. Лемма 2.3 доказана.

ЛЕММА 2.4. *Существует последовательность многочленов*

$$A_N \in \mathbb{Z}[z, x_1, x_2, x_3], \quad N \geq N_0,$$

такая, что

$$\deg A_N \leq 2\gamma N \ln N, \quad \ln H(A_N) \leq 2\gamma N \ln^2 N, \quad (10)$$

$$\exp(-\varkappa_2 N^4) \leq |A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq \exp(-\varkappa_1 N^4), \quad (11)$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{r}, \quad \varkappa_2 = 3c \ln \frac{2}{|q|}$$

и c — константа из теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого многочлена $B \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$ имеет место тождество

$$\frac{d}{dz} B(z, P(z), Q(z), R(z)) = z^{-1} D B(z, P(z), Q(z), R(z)), \quad (12)$$

где

$$D = z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{12} (x_1^2 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{3} (x_1 x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (x_1 x_3 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (13)$$

— оператор, соответствующий системе дифференциальных уравнений (1). Определим теперь последовательность многочленов A_N , положив для любого достаточно большого N

$$A_N(z, x_1, x_2, x_3) = (12z)^T (z^{-1} D)^T A(z, x_1, x_2, x_3).$$

Здесь A – многочлен, построенный в лемме 2.1, и T – целое число, определенное в лемме 2.3. По индукции легко доказать тождество

$$(z^{-1}D)^T = z^{-T} \prod_{k=0}^{T-1} (D - k), \quad T \geq 1, \quad (14)$$

так что $A_N \in \mathbb{Z}[z, x_1, x_2, x_3]$. Из (12) следует, что

$$A_N(z, P(z), Q(z), R(z)) = (12z)^T F^{(T)}(z).$$

Поэтому лемма 2.3 и (5) дают оценку снизу

$$|A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \geq \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{3M} \geq \exp(-\kappa_2 N^4).$$

Для оценки сверху мы воспользуемся формулой

$$F^{(T)}(q) = \frac{T!}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{F(z)}{(z-q)^{T+1}} dz,$$

где C_2 – окружность $|z - q| = r - |q|$. Из неравенств

$$|z| \leq |z - q| + |q| = r,$$

а также (5), леммы 2.2 и леммы 2.3 следует, что

$$|A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq 12^T \cdot T! \cdot (r - |q|)^{-T} r^M \cdot N^{189N} \leq \exp(-\kappa_1 N^4).$$

Это доказывает неравенства (11).

Для доказательства неравенств (10) мы воспользуемся тождеством (14). Если $B \in \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$ и $B \ll H(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^S$, то для любого целого k имеем

$$\begin{aligned} (D + k)B &\ll |k|H(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^S + HS(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{S-1} \\ &\quad \times (z + (x_1^2 + x_2) + (x_1x_2 + x_3) + (x_1x_3 + x_2^2)) \\ &\ll |k|H(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^S + HS(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{S+1} \\ &\ll H(S + |k|)(1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{S+1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$12^T \prod_{k=0}^{T-1} (D - k)B(z, x_1, x_2, x_3) \ll 12^T H(S + 2T)^T (1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{S+T}$$

и, так как

$$A \ll N^{85N} (1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{4N},$$

получаем

$$A_N(z, x_1, x_2, x_3) \ll N^{85N} (48N + 24T)^T (1 + z + x_1 + x_2 + x_3)^{4N+T}.$$

Это же означает, что

$$\deg A_N \leq 4N + T \leq 2\gamma N \ln N,$$

$$H(A_N) \leq N^{85N} (48N + 24T)^T \cdot 5^{4N} \leq \exp(2\gamma N \ln^2 N),$$

и доказывает оценки (10). Лемма 2.4 доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m$ и существует последовательность многочленов $A_N \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ такая, что

$$\deg A_N \leq \sigma(N), \quad \ln H(A_N) \leq \sigma(N)$$

и

$$\exp(-\kappa_2 \lambda(N)) \leq |A_N(\overline{\omega})| \leq \exp(-\kappa_1 \lambda(N)),$$

где $\kappa_2 > \kappa_1 > 0$ – некоторые константы, $\sigma(N)$ и $\lambda(N)$ – возрастающие до бесконечности функции с условиями

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma(N+1)}{\sigma(N)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda(N)}{\sigma(N)^{k+1}} = \infty$$

для некоторого целого k . Тогда

$$\text{tr deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_m) \geq k+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение легко выводится из теоремы 2.11 работы П. Филиппона [13], где нужно взять $\delta(N) = \sigma(N)$, $S(N) = \kappa_1 \lambda(N)$, $R(N) = 2\kappa_2 \lambda(N)$ и последовательность главных идеалов $I_N = (A_N)$.

Теорема 1 следует теперь из лемм 2.4 и 2.5 при $m = 4$, $k = 2$, $\sigma(N) = 2\gamma N \ln^2 N$, $\lambda(N) = N^4$, κ_1, κ_2 как в лемме 2.4 и $\overline{\omega} = (q, P(q), Q(q), R(q))$.

Для доказательства теоремы 2 нужно вместо леммы 2.5 использовать критерий М. Абли [14]. В обозначениях этой работы нужно взять $n = 4$, $k = 2$, функцию $u(x) = \gamma_2 x \ln^{-8} x$ с достаточно малой постоянной γ_2 и достаточно большую постоянную c_0 . Например, можно положить $\gamma_2 = \kappa_1 (3\gamma)^{-4}$, $c_0 = 6^4 \kappa_2 / \kappa_1$. Нужно также взять последовательность главных идеалов $I_N = (G_N)$, где $G_N = A_S$ и S есть наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2\gamma S \ln^2 S \leq N$. Тогда из критерия работы [14] следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, и $\overline{\omega} = (1, q, P(q), Q(q), R(q)) \in \mathbb{C}^5$. Тогда существует положительная постоянная γ_3 , зависящая только от точки q , такая, что для любого однородного несмешанного идеала $I \subset \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_4]$ с условиями $h(I) = 2$, $I \cap \mathbb{Z} = (0)$ справедливо неравенство

$$|I(\overline{\omega})| \geq \exp(-\gamma_3 t(I)^4 \ln^{24} t(I)).$$

Определения величин $h(I)$, $t(I)$, $|I(\overline{\omega})|$ см. в работе [15]. Ниже в § 3 мы приведем соответствующие определения для кольца многочленов $\mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Совершенно аналогично из леммы 2.4 и критерия Абли может быть выведена оценка величины $|I(\overline{\omega})|$ для идеалов с условием $h(I) = 3$. Соответствующее неравенство имеет вид

$$|I(\overline{\omega})| \geq \exp(-\gamma_4 t(I)^2 \ln^8 t(I)).$$

Покажем теперь, как теорема 2 выводится из теоремы 4. В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$\mathrm{tr} \deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(q, P(q), Q(q), R(q)) = 3.$$

Рассмотрим сначала случай, когда числа $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ содержатся среди $q, P(q), Q(q), R(q)$. Пусть $E \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_4]$ – однородный неприводимый многочлен с условием $E(\overline{\omega}) = 0$, а однородный многочлен B определен равенством $B = x_0^{\deg A} A(x_1/x_0, \dots, x_4/x_0)$. Тогда, применяя к простому идеалу $\mathfrak{p} = (E)$ предложение 1 работы [15], получим $|\mathfrak{p}(\overline{\omega})| = 0$. Теперь с помощью теоремы 4 и предложения 3 работы [15] находим

$$|\overline{\omega}|^{-\deg B} |B(\overline{\omega})| \geq \exp(-96t(E)t(B) - \gamma_3 T_1^4 \ln^{24} T_1),$$

где $T_1 \leq 32t(\mathfrak{p})t(B)$. Учитывая, что $t(B) = t(A)$, получаем отсюда неравенство теоремы 2.

В общем случае, когда числа $q, P(q), Q(q), R(q)$ алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, среди них имеется в точности 3 алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ числа. Обозначив их $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, получим, что все θ_i алгебраичны над полем $\mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Если $C \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ – многочлен такой, что с $\xi = C(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ все числа $\xi\theta_i$ целы над кольцом $\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, то, вычисляя норму числа $\xi^{3 \deg A} A(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ над полем $\mathbb{Q}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, получим многочлен A_1 с целыми коэффициентами от чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Применяя к этому многочлену уже доказанное выше неравенство, получим

$$|\mathrm{Norm}(\xi^{3 \deg A} A(\theta_1, \theta_2, \theta_3))| = |A_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)| \geq \exp(-\gamma_4 t(A_1)^4 \ln^{24} t(A_1)),$$

откуда, подобно доказательству теоремы Лиувилля, легко следует нужная оценка снизу для величины $|A(\theta_1, \theta_2, \theta_3)|$. Теорема 4 полностью доказана.

§ 3. Теорема 5 и вывод из нее теоремы 3

Доказательство теоремы 3 основано на методе, использующем некоторые идеи коммутативной алгебры и общей теории исключения. В работе [16] он использовался для доказательства подобного результата для $m \geq 1$ функций, составляющих решение алгебраической системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а в работе [17] в случае $m \geq 1$ функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. Общие вспомогательные утверждения этих работ будут использованы нами в кольце многочленов $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z, x_0, x_1, x_2, x_3]$ ($m = 3$). Кроме того, мы будем пользоваться вспомогательными утверждениями работ [18], [19]. Обозначения и определения также согласованы с работами [15]–[19], при этом в каждом случае мы делаем соответствующие ссылки.

Рассмотрим несмешанный идеал I кольца $\mathcal{A}$, однородный по переменным x_i и такой, что $r = 4 - h(I) \geq 1$. Символом $h(I)$ мы обозначаем, как и в работах [16], [17], высоту идеала I . В § 1 работы [18] идеалу I был поставлен в соответствие некоторый главный идеал $\overline{I}(r)$ в кольце $\mathbb{C}[z, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_r]$, где $\overline{u}_i$ – совокупность переменных

$u_{i0}, \dots, u_{i3}$. Пусть F – определенная с точностью до множителей из $\mathbb{C}$ образующая идеала $\bar{I}(r)$ (ассоциированная форма идеала I). Введем обозначения

$$N(I) = \deg_{\bar{u}_1} F, \quad B(I) = \deg_z F.$$

Для каждого элемента φ из поля $\mathbb{C}((z))$ формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами обозначим символом $\text{ord } \varphi$ порядок, с которого начинается разложение φ . Обозначим также $\mathcal{K}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{C}((z))$. Функция ord однозначно продолжается на поле $\mathcal{K}$ и отображает его в множество $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Условимся для каждого вектора $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_3) \in \mathcal{K}^4$ обозначать $|\bar{\varphi}| = \min_j (\text{ord } \varphi_j)$.

Определим величину $\text{ord } I(\bar{\varphi})$, которая в дальнейшем будет играть роль, аналогичную $\text{ord } P(\varphi)$ для многочленов $P \in \mathcal{A}$. Для этого, как и в §1 работы [18], рассмотрим r кососимметрических матриц $S^{(i)} = \|s_{jk}^{(i)}\|$, где индексы i, j, k меняются в пределах $1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq 3, 0 \leq k \leq 3$, предполагая, что за исключением косой симметрии, $s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)} = 0$, переменные $s_{jk}^{(i)}$ не связаны никакими алгебраическими соотношениями над кольцом $\mathcal{A}$. Для каждого многочлена $E \in \mathcal{K}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r]$ и вектора $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_3) \in \mathcal{K}^4$ будем обозначать через $\varkappa(E)$ многочлен от переменных $s_{jk}^{(i)}$, $0 \leq j < k \leq 3, 1 \leq i \leq r$, с коэффициентами из $\mathcal{K}$, полученный в результате подстановки в E вместо вектора переменных $\bar{u}_i = (u_{i0}, \dots, u_{i3})$ вектора $S^{(i)}\bar{\varphi}$, $i = 1, \dots, r$. Ясно, что отображение $\varkappa$ является гомоморфизмом кольца $\mathcal{K}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r]$ в кольцо многочленов $\mathcal{K}[s_{jk}^{(i)}, 0 \leq j < k \leq 3, 1 \leq i \leq r]$. Определим теперь $\text{ord } \varkappa(E)$ как наименьшее из значений ord на коэффициентах многочлена $\varkappa(E)$.

Положим

$$\text{ord } I(\bar{\varphi}) = \text{ord } \varkappa(F) - rN(I)|\bar{\varphi}|,$$

где F – ассоциированная форма идеала I .

ТЕОРЕМА 5. Пусть I – однородный по переменным $x_0, \dots, x_3$ несмешанный идеал кольца $\mathcal{A}$, $I \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $r = 4 - h(I) \geq 1$. Тогда

$$\text{ord } I(\bar{f}) \leq \rho^{2r-1} (B(I)N(I)^{r/(4-r)} + N(I)^{3/(4-r)}),$$

где $\bar{f} = (1, P(z), Q(z), R(z))$ и $\rho = 10^9$.

Теорема 5 доказывается с помощью индукции по r в пределах от $r = 1$ до $r = 3$.

Теорема 3 легко может быть выведена из теоремы 5. Для этого необходимо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть $C \in \mathcal{A}$ – однородный по переменным x_i многочлен, $I = (C)$ – соответствующий главный идеал в кольце $\mathcal{A}$. Тогда $N(I) = \deg_{\bar{x}} C$, $B(I) = \deg_z C$, а для каждого вектора $\bar{\varphi} \in \mathcal{K}^4$ справедливо неравенство

$$\text{ord } C(\bar{\varphi}) \leq \text{ord } I(\bar{\varphi}) + |\bar{\varphi}| \deg_{\bar{x}} C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [17, предложение 1].

Пусть теперь A – многочлен из формулировки теоремы 3,

$$C = x_0^{\deg A} A\left(z, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right),$$

где $\deg A$ – степень многочлена A по совокупности переменных x_i , а $I = (C)$ – соответствующий главный идеал в кольце $\mathcal{A}$. Так как $h(I) = 1$, то утверждение теоремы 3 легко следует из леммы 3.1 и теоремы 5, примененной с $r = 3$. Согласно лемме 3.1 имеем $B(I) \leq L_1$, $N(I) \leq L_2$ и

$$\text{ord } A(z, P(z), Q(z), R(z)) \leq \text{ord } I(\bar{f}) \leq \rho^5(L_1 + 1)L_2^3 \leq cL_1L_2^3.$$

Вывод теоремы 3 из теоремы 5 завершен.

§ 4. Идеалы, инвариантные относительно оператора D

Дифференциальный оператор D , действующий в кольце $\mathfrak{R} = \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, был определен нами в § 2 (см. (13)). Напомним, что для любого многочлена $G(z, x_1, x_2, x_3)$ этого кольца имеет место тождество

$$\theta G(z, P(z), Q(z), R(z)) = DG(z, P(z), Q(z), R(z)). \quad (15)$$

В дальнейшем идеалы I кольца $\mathfrak{R}$, а также кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, обладающие тем свойством, что $DI \subset I$, будут называться D -инвариантными идеалами.

ЛЕММА 4.1. *Существует лишь два главных простых D -инвариантных идеала кольца $\mathfrak{R}$, они порождаются многочленами z и $\Delta = x_2^3 - x_3^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $Dz = z$ и

$$D\Delta = x_2^2(x_1x_2 - x_3) - x_3(x_1x_3 - x_2^2) = x_1\Delta.$$

Таким образом, главные идеалы, порожденные многочленами z и Δ являются D -инвариантными.

Пусть теперь $A \in \mathfrak{R}$ – произвольный неприводимый многочлен, обладающий свойством $A \mid DA$. Другими словами, с некоторым многочленом $B \in \mathfrak{R}$ имеет место равенство $DA = BA$. Определим для любого многочлена $F(z, x_1, x_2, x_3)$ кольца $\mathfrak{R}$ его вес $\omega(F)$ следующим равенством:

$$\omega(F) = \deg_t F(z, tx_1, t^2x_2, t^3x_3).$$

Тогда

- 1) если все мономы многочлена F имеют одинаковый вес, то или $DF = 0$ или выполняется неравенство $\omega(DF) \geq \omega(F)$;
- 2) для любого $F \in \mathfrak{R}$ справедливо неравенство $\omega(DF) \leq \omega(F) + 1$;
- 3) для любых двух многочленов $F, G \in \mathfrak{R}$ справедливо равенство $\omega(FG) = \omega(F) + \omega(G)$.

Эти свойства тривиально следуют из определений веса и оператора D . С помощью 2) и 3) из равенства $DA = BA$ находим

$$\omega(B) + \omega(A) = \omega(DA) \leq \omega(A) + 1,$$

так что $\omega(B) \leq 1$. Получившееся неравенство означает, что

$$DA = (ax_1 + b)A, \quad (16)$$

где $a, b \in \mathbb{C}[z]$. Сравнивая в равенстве (16) степени многочленов по переменной z , приходим к заключению, что $a, b \in \mathbb{C}$.

Обозначим через C сумму мономов многочлена A , имеющих минимальный вес. Сравнивая в обеих частях равенства (16) суммы мономов веса $\omega(C)$, приходим с помощью свойства 1) к заключению

$$z \frac{\partial C}{\partial z} = bC.$$

Сравнивая в последнем равенстве коэффициенты при максимальной степени z в многочлене $C \in \mathfrak{R}$, получаем, что $b \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь

$$A(z, P(z), Q(z), R(z)) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad c_m \neq 0, \quad m \geq 0.$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор θ , с помощью (15), (16) и определения функции $P(z)$ находим

$$mc_m z^m + \dots = (a(1 - 24z + \dots) + b)(c_m z^m + \dots),$$

и, следовательно, $a + b = m$. Итак, мы доказали, что a и b — целые числа.

Дифференциальный оператор D может быть продолжен естественным способом на поле $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$. При этом, как легко проверить, тождество (15) останется справедливым и для любого элемента F этого поля. Равенство $DF = 0$, $F \in \mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$, означает в силу (15), что

$$\theta F(z, P(z), Q(z), R(z)) = 0,$$

и, следовательно, $F(z, P(z), Q(z), R(z)) = c \in \mathbb{C}$. Но последнее, в силу алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций P, Q и R , означает, что $F = c \in \mathbb{C}$, и, следовательно, поле констант оператора D в $\mathbb{C}(z, x_1, x_2, x_3)$ совпадает с $\mathbb{C}$.

Поскольку, как легко проверить,

$$D(\Delta^{-a} z^{-b}) = -(ax_1 + b)\Delta^{-a} z^{-b},$$

то с помощью (16) находим

$$D(A \cdot \Delta^{-a} z^{-b}) = 0,$$

т.е. по доказанному с некоторой константой $c \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $A \cdot \Delta^{-a} z^{-b} = c$ или $A = c\Delta^a z^b$. Поскольку A есть неприводимый многочлен, заключаем, что возможны лишь две ситуации $a = 1, b = 0$ или $a = 0, b = 1$, что и завершает доказательство леммы 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически мы доказали, что каждый D -инвариантный главный идеал кольца $\mathfrak{R}$ имеет вид $(\Delta^a z^b)$, где a и b – неотрицательные целые числа.

Мы определим далее все простые D -инвариантные идеалы кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

СЛЕДСТВИЕ. В кольце $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ существует единственный главный D -инвариантный простой идеал. Он порождается многочленом Δ .

Действительно, если A – неприводимый многочлен, порождающий D -инвариантный главный идеал кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, то главный идеал, порождаемый в $\mathfrak{R}$ многочленом A , также будет простым и D -инвариантным. Согласно лемме 4.1 заключаем теперь, что $A = \Delta$.

ЛЕММА 4.2. Все простые D -инвариантные идеалы кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ размерности 0 имеют вид $(x_1 - c, x_2 - c^2, x_3 - c^3)$, где $c \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ размерности 0 имеет вид $(x_1 - c_1, x_2 - c_2, x_3 - c_3)$ с некоторыми $c_i \in \mathbb{C}$. Предположим теперь, что выполняется включение $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Применяя оператор D к многочленам $x_i - c_i$, получаем, что следующие три многочлена

$$x_1^2 - x_2, \quad x_1x_2 - x_3, \quad x_1x_3 - x_2^2 \quad (17)$$

принадлежат идеалу $\mathfrak{p}$. Так как все они должны обращаться в нуль в точке (c_1, c_2, c_3) , заключаем, что $c_2 = c_1^2$, $c_3 = c_1c_2 = c_1^3$, т.е. $\mathfrak{p} = (x_1 - c, x_2 - c^2, x_3 - c^3)$ при $c = c_1$. Обратно, каждый идеал $\mathfrak{p} = (x_1 - c, x_2 - c^2, x_3 - c^3)$ содержит многочлены (17) и потому является D -инвариантным.

ЛЕММА 4.3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (x^2 - f)f' &= 4(xf - g), \\ (x^2 - f)g' &= 6(xg - f^2) \end{aligned} \quad (18)$$

имеет единственное решение в алгебраических функциях $f(x)$, $g(x)$ с условием $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, а именно $f = x^2$, $g = x^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $f = x^2$, $g = x^3$ образуют решение системы (18). Так что мы можем далее предполагать $f \neq x^2$. Обозначим $u = x^2 - f \neq 0$, $v = xf - g$. Тогда

$$xg - f^2 = x^2u - u^2 - xv$$

и

$$\begin{aligned} uu' &= 2ux - uf' = 2ux - 4v, \\ uv' &= uf + 4xv - 6x^2u + 6u^2 + 6xv = 5u^2 - 5x^2u + 10xv = 5u^2 - \frac{5}{2}xuu'. \end{aligned}$$

Мы получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} uu' &= 2xu - 4v, \\ 2v' &= 10u - 5xu'. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как $u(x)$ и $v(x)$ – алгебраические функции, то существует натуральное число e и параметризация (рассматриваются параметризации ветвей в точке $x = 1$; напомним, что $u(1) = v(1) = 0$)

$$x = 1 + t^e, \quad u = \sum_{k=\lambda}^{\infty} a_k t^k, \quad v = \sum_{k=\mu}^{\infty} b_k t^k,$$

где $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$, а $a_\lambda b_\mu \neq 0$. Мы можем предполагать, что e выбрано минимальным возможным.

Имеем следующие начальные члены разложений функций, участвующих в уравнениях (19):

$$\begin{aligned} xu &= a_\lambda t^\lambda + \dots, & xu' &= \frac{\lambda}{e} a_\lambda t^{\lambda-e} + \dots, \\ uu' &= \frac{\lambda}{e} a_\lambda^2 t^{2\lambda-e} + \dots, & v' &= \frac{\mu}{e} b_\mu t^{\mu-e} + \dots. \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения во второе уравнение системы (19), приходим к равенству

$$2\frac{\mu}{e} b_\mu t^{\mu-e} + \dots = 10a_\lambda t^\lambda + \dots - 5\frac{\lambda}{e} a_\lambda t^{\lambda-e} + \dots. \quad (20)$$

Сравнивая показатели при минимальных степенях t в левой и правой его частях, приходим к заключению, что $\lambda = \mu$. Подставляя теперь эти разложения в первое уравнение системы (19), получаем равенство

$$\frac{\lambda}{e} a_\lambda^2 t^{2\lambda-e} + \dots = 2a_\lambda t^\lambda + \dots - 4b_\lambda t^\lambda - \dots. \quad (21)$$

Из него следует, что должно быть выполнено неравенство $2\lambda - e \geq \lambda$ и, следовательно, $\lambda \geq e$.

Сравним теперь коэффициенты при $t^{\lambda-e}$ в левой и правой частях равенства (20). Получится равенство

$$2b_\lambda = -5a_\lambda. \quad (22)$$

Если $\lambda > e$, то из сравнения коэффициентов при степенях t^λ в равенстве (21) получаем

$$2a_\lambda - 4b_\lambda = 0,$$

что вместе с (22) противоречит условию $a_\lambda \neq 0$. Следовательно, $\lambda = e$ и из (21) находим уравнение

$$a_e^2 = 2a_e - 4b_e.$$

В силу (22) это означает $a_e^2 = 12a_e$. Учитывая, что $a_e \neq 0$, получаем $a_e = 12$ и, следовательно, $b_e = -30$.

Предположим теперь, что $e \geq 2$ и определим r как наименьшее число, для которого выполнены условия $a_r \neq 0$ и $r \not\equiv 0 \pmod{e}$. Такое число существует в силу минимальности e (в противном случае из первого уравнения системы (19) следовало бы, что все ненулевые коэффициенты b_k имеют номера, делящиеся на e).

Сравнивая теперь коэффициенты при t^r в левой и правой частях первого уравнения системы (19), получаем равенство

$$\frac{r+e}{e}a_r a_e = 2a_r - 4b_r$$

или, поскольку $a_e = 12$,

$$12\frac{r+e}{e}a_r = 2a_r - 4b_r. \quad (23)$$

Проделив такую же подстановку во второе уравнение системы (19) и сравнив коэффициенты при t^{r-e} , найдем

$$2\frac{r}{e}b_r = -5\frac{r}{e}a_r$$

или

$$2b_r + 5a_r = 0.$$

Последнее равенство вместе с (23) дают нам $ra_r = 0$ и, поскольку $r > e$, $a_r = 0$, что невозможно. Итак, $e = 1$, функции $u(x)$ и $v(x)$ однозначны в окрестности точки $x = 1$ и

$$u(1) = v(1) = 0, \quad u'(1) = 12, \quad v'(1) = -30. \quad (24)$$

Докажем теперь, что все производные функций $u(x)$ и $v(x)$ определяются единственным образом, т.е. существует единственное решение системы дифференциальных уравнений (19), аналитическое в окрестности точки $x = 1$ и удовлетворяющее условиям (24). Пусть $k \geq 2$. Дифференцируя k раз первое из уравнений системы (19), мы найдем, что функция

$$uu^{(k+1)} + (k+1)u'u^{(k)} - 2xu^{(k)} + 4v^{(k)}$$

выражается в виде многочлена от x и функций $u, u', \dots, u^{(k-1)}$. Учитывая равенства (24), получаем отсюда, что величина

$$(6k+5)u^{(k)}(1) + 2v^{(k)}(1)$$

определяется единственным образом по $u(1), u'(1), \dots, u^{(k-1)}(1)$. Точно так же дифференцируя второе уравнение системы (19) $k-1$ раз, находим, что величина

$$5u^{(k)}(1) + 2v^{(k)}(1)$$

может быть определена единственным образом по $u^{(j)}(1), v^{(j)}(1), 0 \leq j \leq k-1$. Но тогда и производные $u^{(k)}(1), v^{(k)}(1)$ определяются единственным образом. Единственность аналитического в окрестности точки $x = 1$ решения системы (19) с начальными данными (24) доказана.

В некоторой окрестности точки $x = 1$ равенство $x = P(z)$ однозначно определяет z как аналитическую функцию от x , равную 0 при $x = 1$. Положим

$$F(x) = Q(P^{-1}(x)), \quad G(x) = R(P^{-1}(x)).$$

Тогда $F(x)$ и $G(x)$ – аналитические в окрестности точки $x = 1$ функции, удовлетворяющие, как легко проверить, системе дифференциальных уравнений (18) и начальным условиям $F(1) = 1, G(1) = 1$. Причем

$$z = -\frac{1}{24}(x-1) + \dots, \quad F(x) = 1 - 10(x-1) + \dots, \quad G(x) = 1 + 21(x-1) + \dots.$$

Но тогда для функций $U(x) = x^2 - F(x)$, $V(x) = xF(x) - G(x)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (19), выполняются, как легко проверить, условия (24). В силу доказанной выше единственности заключаем, что $u(x) = U(x)$, $v(x) = V(x)$, а тогда и $f(x) = F(x)$, $g(x) = G(x)$, т.е. $F(x)$ и $G(x)$ являются алгебраическими функциями. Но тождество $A(x, F(x)) = 0$, $A(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, после подстановки в него $x = P(z)$ превращается в алгебраическое соотношение $A(P(z), Q(z)) = 0$ между функциями $P(z)$ и $Q(z)$. В силу алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций $P(z)$, $Q(z)$ и $R(z)$ такое алгебраическое соотношение невозможно. Это противоречие и завершает доказательство леммы 4.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Все нетривиальные простые D -инвариантные идеалы кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, имеющие нулем точку $(1, 1, 1)$, содержатся в следующем списке:*

- 1) $(x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1)$;
- 2) $(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3)$;
- 3) $(x_2^3 - x_3^2)$.

Все они содержат многочлен $\Delta = x_2^3 - x_3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{p}$ – простой D -инвариантный идеал кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Если $\dim \mathfrak{p} = 0$, то согласно лемме 4.2 (в этом случае по условию $c = 1$) идеал $\mathfrak{p}$ имеет вид, указанный в пункте 1).

Если $\dim \mathfrak{p} = 2$, т.е. $\mathfrak{p}$ – главный идеал, то его расширение $\mathfrak{p}^e$ в кольцо $\mathfrak{A}$ также будет простым главным и D -инвариантным идеалом. Так как $z \notin \mathfrak{p}^e$, то согласно лемме 4.1 имеем $\mathfrak{p}^e = (\Delta)$. Но тогда и $\mathfrak{p} = (\Delta)$, т.е. имеет место случай 3).

Пусть теперь $\dim \mathfrak{p} = 1$. Если $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[x_1] \neq (0)$, то в силу простоты идеала $\mathfrak{p}$ с некоторой константой c имеем $x_1 - c \in \mathfrak{p}$. Но тогда $x_1^2 - x_2 = 12D(x_1 - c) \in \mathfrak{p}$ и, следовательно, $x_2 - c^2 \in \mathfrak{p}$. Далее, $x_1 x_2 - x_3 = 3D(x_2 - c^2) \in \mathfrak{p}$ и $x_3 - c^3 \in \mathfrak{p}$. Включение же $(x_1 - c, x_2 - c^2, x_3 - c^3) \subset \mathfrak{p}$ невозможно, поскольку $\dim \mathfrak{p} = 1$. Следовательно, $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[x_1] = (0)$ и тогда $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[x_1, x_2] \neq (0)$ и $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[x_1, x_3] \neq (0)$. Обозначим через $A(x_1, x_2)$, $B(x_1, x_3)$ неприводимые многочлены кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, лежащие в идеале $\mathfrak{p}$. Согласно условию выполняются равенства $A(1, 1) = B(1, 1) = 0$, поэтому существуют алгебраические функции $y = y(x)$, $z = z(x)$, удовлетворяющие условиям

$$A(x, y(x)) = 0, \quad B(x, z(x)) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1, \quad (25)$$

причем набор функций $(x, y(x), z(x))$ является нулем идеала $\mathfrak{p}$. Дифференцируя первое из равенств (25) по переменной x , найдем

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0. \quad (26)$$

Учитывая, что набор функций $(x, y(x), z(x))$ является нулем идеала $\mathfrak{p}$ и, в частности, многочлена $DA \in \mathfrak{p}$, заключаем, что

$$\frac{1}{12}(x^2 - y(x))\frac{\partial A}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{1}{3}(xy(x) - z(x))\frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x)) = 0. \quad (27)$$

Умножая теперь равенство (26) на $\frac{1}{12}(x^2 - y(x))$ и вычитая получившееся выражение почленно из (27), а также пользуясь тем, что

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0,$$

находим, что функции $y(x), z(x)$ удовлетворяют первому дифференциальному уравнению системы (18). Аналогично, дифференцируя второе равенство (25), заключаем, что они удовлетворяют и второму уравнению системы (18). По лемме 4.3 теперь можно утверждать, что $y(x) = x^2$ и $z(x) = x^3$, т.е. $A(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, $B(x_1, x_3) = x_1^3 - x_3$. Это означает, что идеал $\mathfrak{p}$ содержит простой идеал из пункта 2) формулировки предложения 1. Так как размерности этих идеалов равны, заключаем, что идеалы совпадают. Предложение 1 доказано полностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Каждый простой D -инвариантный идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$ с нулем $(0, 1, 1, 1)$ содержит либо многочлен z , либо многочлен $\Delta = x_2^3 - x_3^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой D -инвариантный идеал кольца $\mathfrak{R}$, тогда $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ — простой D -инвариантный идеал кольца $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Если $\mathfrak{q} \neq (0)$, то согласно предложению 1 имеем $\Delta \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Если же $\mathfrak{q} = (0)$, то $\mathfrak{p}$ — главный идеал. Но тогда по лемме 4.1 $z \in \mathfrak{p}$. Предложение 2 доказано.

§ 5. Вспомогательные утверждения

Доказательство следующего утверждения содержится в [17] как часть доказательства теоремы 2 этой работы (с. 44–45, см. также [16, с. 267–268]). Для удобства дальнейших ссылок мы выделили соответствующее рассуждение в виде леммы 5.1 и приведем ниже его доказательство в общем случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$ при $m \geq 1$. Мы будем называть идеал кольца $\mathcal{A}$ *однородным*, если он однороден по переменным $x_0, \dots, x_m$.

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал кольца $\mathcal{A}$, $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, вектор $\overline{\varphi} \in \mathcal{H}^{m+1}$ не является нулем идеала $\mathfrak{p}$, $|\overline{\varphi}| = 0$, C и A — однородные многочлены кольца $\mathcal{A}$, $A \in \mathfrak{p}$, $C \notin \mathfrak{p}$, причем с некоторым $s \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\text{ord } C(\overline{\varphi}) \geq \text{ord } A(\overline{\varphi}) - s.$$

Тогда при $r = m + 1 - h(I) \geq 2$ существует однородный несмешанный идеал $J \subset \mathcal{A}$ такой, что его множество нулей в проективном пространстве над алгебраическим замыканием $\mathbb{C}(z)$ совпадает с множеством нулей идеала $(\mathfrak{p}, C)$, и, кроме того,

- 1) $N(J) \leq N(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C$,
- 2) $B(J) \leq B(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C + N(\mathfrak{p}) \deg_z C$,
- 3) $\text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}) \leq \text{ord } J(\overline{\varphi}) + B(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C + N(\mathfrak{p})(\deg_z C + s)$.

При $r = 1$ неравенство 3) также имеет место, если формально положить в этом случае $\text{ord } J(\overline{\varphi}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности можно считать, что $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Леммы 2 и 3 работы [17] устанавливают, что существует конечное нормальное расширение $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{C}(z, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_{r-1})$ такое, что ассоциированная форма F идеала $\mathfrak{p}$ раскладывается над $\mathbb{K}$ в произведение линейных форм

$$F = a \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (u_{r0} + \alpha_1^{(j)} u_{r1} + \dots + \alpha_m^{(j)} u_{rm}),$$

где $a \in \mathbb{C}[z, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_{r-1}]$ и $\alpha_i^{(j)} \in \mathbb{K}$, а каждая из точек $(1 : \alpha_1^{(j)} : \dots : \alpha_m^{(j)}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^m$ является общим нулем идеала $\mathfrak{p}$. Если при этом

$$G = a^{\deg_{\overline{x}} Q} \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} C(1, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_m^{(j)}), \quad (28)$$

то $G \in \mathbb{C}[z, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_{r-1}]$, $G \not\equiv 0$ и

$$\deg_z G \leq B(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C + N(\mathfrak{p}) \deg_z C. \quad (29)$$

Далее, при $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$\deg_{\overline{u}_1} G \leq N(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C, \quad (30)$$

и существует однородный несмешанный идеал $J \subset \mathcal{A}$, $h(J) = m - r + 2$, ассоциированная форма которого имеет вид $w^{-1}G$ с некоторым многочленом $w \in \mathbb{C}[z]$, а множество нулей в проективном пространстве над алгебраическим замыканием $\mathbb{C}(z)$ совпадает с множеством нулей идеала $(\mathfrak{p}, C)$.

При $r \geq 2$ из неравенств (29), (30) следуют оценки 1) и 2) леммы 5.1.

Осталось доказать оценку 3). Согласно лемме 5 [17] и замечанию, сделанному после доказательства леммы 6 этой же работы, существует гомоморфизм колец

$$\tau: \mathbb{C}[z, \overline{u}_1, \dots, \overline{u}_{r-1}, a^{-1}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(N(\mathfrak{p}))}] \rightarrow \mathcal{K}$$

над $\mathbb{C}[z]$ такой, что

$$\text{ord } \tau(a) = \text{ord } \varkappa(a), \quad \text{ord } \tau(G) = \text{ord } \varkappa(G) \quad (31)$$

(отображение $\varkappa$ определено в §3) и, кроме того, для $\beta_i^{(j)} = \tau(\alpha_i^{(j)})$ векторы $\overline{\beta}_j = (1, \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_m^{(j)})$, $j = 1, \dots, N(\mathfrak{p})$, будут нулями идеала $\mathfrak{p}$ и будут удовлетворять неравенствам

$$\text{ord } \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} |\overline{\beta}_j| \geq (r-1)N(\mathfrak{p})|\overline{\varphi}| \geq 0, \quad (32)$$

$$\text{ord } \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| + |\overline{\beta}_j|) \geq \text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}) + (r-1)N(\mathfrak{p})|\overline{\varphi}| \geq \text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}). \quad (33)$$

Здесь и в дальнейшем для любых двух векторов $\overline{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{X}^{m+1}$, $\overline{\psi} = (\psi_0, \dots, \psi_m) \in \mathcal{X}^{m+1}$ мы используем обозначение

$$\|\overline{\varphi} - \overline{\psi}\| = \min_{0 \leq i < j \leq m} \text{ord}(\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i) - |\overline{\varphi}| - |\overline{\psi}|.$$

Заметим, что всегда $\|\overline{\varphi} - \overline{\psi}\| \geq 0$.

Пусть j – фиксированный индекс, $1 \leq j \leq N(\mathfrak{p})$. Определим индекс n так, чтобы выполнялось равенство $|\overline{\beta}_j| = \text{ord } \beta_n^{(j)}$. Тогда вследствие равенства $A(\overline{\beta}_j) = 0$ с помощью леммы 1 [17], примененной к $V = A$ и $W = x_n^{\deg_{\overline{x}} R}$, имеем неравенство

$$\text{ord } A(\overline{\varphi}) \geq \|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\|.$$

Согласно условию мы можем утверждать теперь, что

$$\text{ord } C(\overline{\varphi}) \geq \|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| - s. \quad (34)$$

Применяя опять лемму 1 [17], на этот раз к $V = C$ и $W = x_i^{\deg_{\overline{x}} Q}$, где индекс i выбран так, что $\text{ord } \varphi_i = |\overline{\varphi}| = 0$, получаем

$$\text{ord}(C(\overline{\varphi})(\beta_i^{(j)})^{\deg_{\overline{x}} C} - C(\overline{\beta}_j)\varphi_i^{\deg_{\overline{x}} C}) \geq \|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| + |\overline{\beta}_j| \deg_{\overline{x}} C. \quad (35)$$

Далее, из тождества

$$C(\overline{\beta}_j)\varphi_i^{\deg_{\overline{x}} C} = C(\overline{\varphi})(\beta_i^{(j)})^{\deg_{\overline{x}} C} - (C(\overline{\varphi})(\beta_i^{(j)})^{\deg_{\overline{x}} C} - C(\overline{\beta}_j)\varphi_i^{\deg_{\overline{x}} C})$$

и неравенств (34), (35) находим

$$\text{ord } C(\overline{\beta}_j) \geq \|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| + |\overline{\beta}_j| \deg_{\overline{x}} C - s. \quad (36)$$

Так как согласно (28)

$$\tau(G) = \tau(a)^{\deg_{\overline{x}} C} \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} C(1, \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_m^{(j)}),$$

то, используя (31) и (36), а также (32) и (33), имеем

$$\begin{aligned} \text{ord } \varkappa(G) &= \text{ord } \tau(G) = \deg_{\overline{x}} C \cdot \text{ord } \tau(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} \text{ord } C(\overline{\beta}_j) \\ &\geq \deg_{\overline{x}} C \cdot \text{ord } \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| + |\overline{\beta}_j| \deg_{\overline{x}} C - s) \\ &\geq \text{ord } \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\overline{\varphi} - \overline{\beta}_j\| + |\overline{\beta}_j|) - sN(\mathfrak{p}) \\ &\geq \text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}) - sN(\mathfrak{p}). \end{aligned} \quad (37)$$

Допустим, что $r = 1$. Тогда $G \in \mathbb{C}[z]$ и из неравенств (37) и (29) получаем

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}) \leq \text{ord } G + sN(\mathfrak{p}) \leq \deg_z G + sN(\mathfrak{p}) \leq B(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C + N(\mathfrak{p})(\deg_z C + s).$$

Таким образом, нужное неравенство в случае $r = 1$ доказано.

Пусть теперь $r \geq 2$. Тогда с помощью неравенств (37) и (29) получаем

$$\begin{aligned} \text{ord } \mathfrak{p}(\overline{\varphi}) &\leq \text{ord } \varkappa(G) + sN(\mathfrak{p}) = \text{ord } w + \text{ord } J(\overline{\varphi}) + sN(\mathfrak{p}) \\ &\leq \text{ord } J(\overline{\varphi}) + sN(\mathfrak{p}) + \deg_z G \\ &\leq \text{ord } J(\overline{\varphi}) + B(\mathfrak{p}) \deg_{\overline{x}} C + N(\mathfrak{p})(\deg_z C + s). \end{aligned}$$

Нужное неравенство доказано и при $r \geq 2$.

В дальнейшем мы будем применять эту лемму при $m = 3$, $s = 0$ и $r = 1$ или $r = 2$. Ссылки на леммы работы [17] также будут делаться при $m = 3$. Мы также вернемся к обозначению $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z, x_0, x_1, x_2, x_3]$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathcal{A}$ — простой однородный идеал с условиями $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $r = 4 - h(\mathfrak{p}) \geq 1$ и ν, μ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu^{4-r} \geq \lambda N(\mathfrak{p}), \quad (\mu + 1)\nu^{3-r} \geq \lambda B(\mathfrak{p}), \quad (38)$$

где $\lambda = 18^3 = 5832$. Тогда существует многочлен $E \in \mathfrak{p}$, однородный по переменным $\overline{x}$ и такой, что

$$\deg_z E \leq \mu, \quad \deg_{\overline{x}} E \leq \nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [19, следствие 2 из теоремы 2 при $m = 3$].

Заметим, что неравенства (38) выполняются, например, при

$$\nu = 1 + \lceil \lambda N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)} \rceil, \quad \mu = \lceil \lambda B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-(3-r)/(4-r)} \rceil, \quad (39)$$

где $\lceil \cdot \rceil$ обозначает целую часть числа.

Определим теперь на кольце $\mathcal{A}$ однородный аналог оператора D из (13) равенством

$$T = z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{12}(x_1^2 - x_0 x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{3}(x_1 x_2 - x_0 x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(x_1 x_3 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Тогда $Tx_0 = 0$.

ЛЕММА 5.3. Если $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал кольца $\mathcal{A}$ с условием

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\overline{f}) > B(\mathfrak{p}) + 3N(\mathfrak{p}),$$

то не существует однородных простых идеалов $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq (0)$, с условием $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$.

В этой лемме, как и в формулировке теоремы 3, мы используем обозначение $\overline{f} = (1, P(z), Q(z), R(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем следовать доказательству леммы 7 из [17] и при этом использовать доказанные в § 3 факты о D -инвариантных идеалах. Предположим, вопреки утверждению леммы 5.3, что найдется однородный простой идеал $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq (0)$, удовлетворяющий условию $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$.

Согласно лемме 6 [17] существует нуль $\bar{\beta} \in \mathcal{K}^4$ идеала $\mathfrak{p}$, для которого

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\bar{f}) \leq rN(\mathfrak{p}) \cdot \|\bar{f} - \bar{\beta}\| + B(\mathfrak{p}).$$

Учитывая неравенство из условия леммы, заключаем, что $\|\bar{f} - \bar{\beta}\| > 1$.

Обозначим буквой n индекс с условием $\text{ord } \beta_n = |\bar{\beta}|$. Пусть V — какой-нибудь однородный многочлен, принадлежащий идеалу $\mathfrak{p}$ и $W = x_n^d$, где $d = \deg_{\bar{x}} V$. Применяя к многочленам V и W лемму 1 [17], получим неравенство

$$\text{ord}(V(\bar{f})W(\bar{\beta}) - V(\bar{\beta})W(\bar{f})) \geq \|\bar{f} - \bar{\beta}\| + (|\bar{f}| + |\bar{\beta}|)d$$

или, поскольку $V(\bar{\beta}) = 0$, $|\bar{f}| = 0$, $\|\bar{f} - \bar{\beta}\| > 1$, неравенство

$$\text{ord } V(\bar{f}) + d \cdot \text{ord } \beta_n > 1 + |\bar{\beta}| \cdot d.$$

Учитывая определение n , наконец, получаем

$$V(\bar{f}) > 1. \quad (40)$$

Для многочлена $V = x_0$ неравенство (40) не выполняется. Значит, $x_0 \notin \mathfrak{p}$ и $x_0 \notin \mathfrak{q}$.

Обозначим $\mathfrak{q}_0$ идеал в кольце $\mathfrak{R} = \mathbb{C}[z, x_1, x_2, x_3]$, состоящий из всех многочленов C , для каждого из которых найдутся многочлены $C_0 \in \mathfrak{q}$, $B \in \mathcal{A}$ с условием

$$C = C_0 + (x_0 - 1)B, \quad (41)$$

причем C_0 однороден.

Идеал $\mathfrak{q}_0$ прост. Действительно, если $U, V \in \mathfrak{R}$ таковы, что $UV \in \mathfrak{q}_0$, то существуют однородные многочлены U_0, V_0, W_0 с условиями

$$U = U_0 + (x_0 - 1)U_1, \quad V = V_0 + (x_0 - 1)V_1, \quad UV = W_0 + (x_0 - 1)W_1, \quad W_0 \in \mathfrak{q},$$

причем $U_1, V_1, W_1 \in \mathcal{A}$. Можно считать, что $\deg_{\bar{x}} U_0 + \deg_{\bar{x}} V_0 = \deg_{\bar{x}} W_0$. В противном случае какой-нибудь из многочленов U_0, V_0, W_0 можно домножить на недостающую степень x_0 . Из выписанных выше равенств следует, что

$$W_0 - U_0 V_0 = (x_0 - 1)G, \quad G \in \mathcal{A},$$

и, так как многочлен $W_0 - U_0 V_0$ однороден, заключаем, что $W_0 - U_0 V_0 = 0$ и $U_0 V_0 = W_0 \in \mathfrak{q}$. Так как идеал $\mathfrak{q}$ прост, заключаем, что один из многочленов U_0 или V_0 принадлежит $\mathfrak{q}$. Но тогда согласно определению идеала $\mathfrak{q}_0$ один из сомножителей U или V должен принадлежать $\mathfrak{q}_0$. Простота идеала $\mathfrak{q}_0$ доказана.

Применяя к равенству (41) оператор T , получим

$$TC = TC_0 + (x_0 - 1)TB$$

и с некоторым многочленом $B_1 \in \mathcal{A}$

$$DC = TC_0 + (x_0 - 1)B_1.$$

Так как $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$, то $TC_0 \in \mathfrak{q}$ и, следовательно, $DC \in \mathfrak{q}_0$. Мы доказали, что идеал $\mathfrak{q}_0$ D -инвариантен. Из (41) и (40) следует, что для любого многочлена $C \in \mathfrak{q}_0$ выполняется неравенство

$$\text{ord } C(\bar{f}) = \text{ord } C_0(\bar{f}) > 1. \quad (42)$$

В частности, это означает, что точка $(0, 1, 1)$ является нулем идеала $\mathfrak{q}_0$. Согласно предложению 4.2 либо $z \in \mathfrak{q}_0$, либо $\Delta = x_2^3 - x_3^2 \in \mathfrak{q}_0$. Но ни тот, ни другой многочлен не удовлетворяют неравенству (42). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 5.3.

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathcal{A}$ — простой однородный идеал, $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $r = 4 - h(I) \geq 1$ и

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\bar{f}) > B(\mathfrak{p}) + 3N(\mathfrak{p}).$$

Тогда существует однородный многочлен $A \in \mathfrak{p}$, для которого $C = TA \notin \mathfrak{p}$ и

$$\deg_{\bar{x}} C \leq 9\lambda^2 N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)}, \quad \deg_z C \leq 3\lambda(B(\mathfrak{p}) + 1)N(\mathfrak{p})^{-(3-r)/(4-r)}, \quad (43)$$

где, как и в лемме 5.2, $\lambda = 18^3 = 5832$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E — однородный многочлен из идеала $\mathfrak{p}$, для которого го достигает минимума выражение

$$N(\mathfrak{p}) \deg_z E + (B(\mathfrak{p}) + 1) \deg_{\bar{x}} E.$$

Многочлен E , очевидно, неприводим. Для краткости обозначим $L = \deg_{\bar{x}} E$, $M = \deg_z E$. Определив числа μ и ν с помощью равенств (39), в соответствии с леммой 5.2 находим

$$N(\mathfrak{p})M + (B(\mathfrak{p}) + 1)L \leq N(\mathfrak{p})\mu + (B(\mathfrak{p}) + 1)\nu \leq 3\lambda(B(\mathfrak{p}) + 1)N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)},$$

откуда следует, что

$$L \leq 3\lambda N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)}, \quad M \leq 3\lambda(B(\mathfrak{p}) + 1)N(\mathfrak{p})^{-(3-r)/(4-r)}. \quad (44)$$

Так как $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, имеем неравенство $L \geq 1$.

Положим $E_0 = E$, $E_1 = TE$. Справедливы неравенства

$$\deg_z E_1 \leq M, \quad \deg_{\bar{x}} E_1 \leq L + 1.$$

Если $E_1 \notin \mathfrak{p}$, мы положим $A = E$, $C = E_1$. При таком выборе утверждение леммы 5.4 выполнено. Поэтому далее считаем $E_1 \in \mathfrak{p}$.

Положим $J_0 = (E_0)$ и $J_1 = (E_0, E_1)$. Имеем $h(J_0) = 1$. Многочлен E_0 неприводим и $E_0 \nmid E_1$. В противном случае простой главный идеал J_0 был бы T -инвариантным, что запрещается леммой 5.3. Но тогда идеал J_1 несмешан, $h(J_1) = 2$.

Согласно лемме 4 [17], примененной к идеалам J_0, J_1 и многочлену E_1 , имеют место неравенства

$$\begin{aligned} N(J_1) &\leq N(J_0) \deg_{\bar{x}} E_1 \leq (L+1)^2, \\ B(J_1) &\leq B(J_0) \deg_{\bar{x}} E_1 + N(J_0) \deg_z E_1 \leq M(2L+1) \leq 2M(L+1). \end{aligned}$$

При оценке $N(J_0)$ и $B(J_0)$ мы воспользовались равенствами леммы 3.1.

Положим

$$\chi_0 = 0, \quad \chi_1 = a_1 = c_1 = 1, \quad b_1 = 2$$

и определим числа $\chi_i, a_i, b_i, c_i, i = 2, 3$, с помощью равенств

$$\chi_{i+1} = \chi_i + 2\lambda b_i, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$c_{i+1} = c_i + \lambda b_i, \quad i = 1, 2, \quad (46)$$

$$a_{i+1} = a_i c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (47)$$

$$b_{i+1} = b_i c_{i+1} + a_i, \quad i = 1, 2. \quad (48)$$

Обозначим теперь для каждого $k = 0, 1, 2, 3$ символом J_k идеал в кольце $\mathcal{A}$, порожденный многочленами $T^i E, 0 \leq i \leq \chi_k$.

Пусть теперь k – наибольшее целое число такое, что $J_k \subset \mathfrak{p}$ и существуют однородные многочлены $E_0, \dots, E_k$, удовлетворяющие условиям

- 1) $\deg_{\bar{x}} E_j \leq c_j(L+1), \deg_z E_j \leq M, j = 1, \dots, k$,
- 2) идеал $\mathfrak{a}_k = (E_0, \dots, E_k)$ содержится в идеале J_k ,
- 3) все примарные компоненты $\mathfrak{a}_k$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют высоту $k+1$, и если $\mathfrak{u}_k$ – несмешанный идеал, равный пересечению таких компонент, то

$$N(\mathfrak{u}_k) \leq a_k(L+1)^{k+1}, \quad B(\mathfrak{u}_k) \leq b_k M(L+1)^k. \quad (49)$$

Легко видеть, что при $k = 1$ указанные условия выполняются с построенными ранее многочленами E_0 и E_1 , так что $k \geq 1$. С другой стороны, из включения $\mathfrak{u}_k \subset \mathfrak{p}$ следует, что $k+1 = h(\mathfrak{u}_k) \leq h(\mathfrak{p}) = 4-r$, т.е. $k \leq 3-r$. Предположим, что $J_{k+1} \subset \mathfrak{p}$. Ниже это предположение будет приведено к противоречию.

Пусть $\mathfrak{b}$ – примарная компонента идеала $\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ и l – показатель идеала $\mathfrak{q}$, т.е. наименьшее натуральное число с условием $\mathfrak{q}^l \subset \mathfrak{b}$. Докажем, что

$$l \leq 2\lambda b_k. \quad (50)$$

Предположим противное, т.е. $l > 2\lambda b_k$. Тогда, согласно (49) и равенству 1 из предложения 2 [17], имеем

$$a_k(L+1)^{k+1} \geq N(\mathfrak{u}_k) \geq lN(\mathfrak{q}) \geq l > 2\lambda b_k \geq 2\lambda a_k.$$

Отсюда следует, что $(L+1)^3 \geq (L+1)^{k+1} > 2\lambda$ и $L \geq 22$. Далее,

$$\left(\frac{L-1}{L+1}\right)^3 \geq \left(\frac{21}{23}\right)^3 > \frac{1}{2}$$

и $(L+1)^3 < 2(L-1)^3$. Согласно предложению 2 [17] и неравенствам (49) отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned}\lambda B(\mathfrak{q}) &\leq \frac{\lambda B(\mathfrak{u}_k)}{l} \leq \frac{B(\mathfrak{u}_k)}{2b_k} \leq \frac{1}{2}(M+1)(L+1)^k < (M+1)(L-1)^k, \\ \lambda N(\mathfrak{q}) &\leq \frac{\lambda N(\mathfrak{u}_k)}{l} \leq \frac{N(\mathfrak{u}_k)}{2b_k} \leq \frac{1}{2}(L+1)^{k+1} < (L-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

Мы воспользовались также тем, что $a_k \leq b_k$. Таким образом, для идеала $\mathfrak{q}$ выполняются неравенства (38) с $\nu = L-1$ и $\mu = M$. Согласно лемме 5.2 можно утверждать, что существует однородный многочлен $G \in \mathfrak{q}$, удовлетворяющий неравенствам

$$\deg_{\overline{x}} G \leq L-1, \quad \deg_z G \leq M.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, последние неравенства противоречат определению многочлена E . Итак, неравенство (50) доказано.

Докажем теперь, что существуют индексы i, j , $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq 2\lambda b_k$, такие, что $T^j E_i \notin \mathfrak{q}$. Идеал $\mathfrak{q}$ изолирован в множестве простых идеалов, ассоциированных с $\mathfrak{a}_k$. Поэтому найдется многочлен $H \notin \mathfrak{q}$, удовлетворяющий для любого $G \in \mathfrak{q}$ включению $G^l H \in \mathfrak{a}_k$. Если предположить, что индексов i, j с указанным условием не существует, то ввиду неравенства $l \leq 2\lambda b_k$ получаем $T^l(G^l H) \in \mathfrak{q}$. Отсюда, поскольку $G \in \mathfrak{q}$, следует, что $(TG)^l H \in \mathfrak{q}$, и, так как $\mathfrak{q}$ прост, $H \notin \mathfrak{q}$, то $TG \in \mathfrak{q}$. Следовательно, $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$. Полученное включение противоречит лемме 5.3. Итак, существование индексов i, j с требуемыми свойствами установлено.

Пусть $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ — все простые идеалы, ассоциированные с $\mathfrak{u}_k$. По доказанному для каждого v , $1 \leq v \leq s$, существуют индексы i_v, j_v , $0 \leq i_v \leq k$, $0 \leq j_v \leq 2\lambda b_k$, такие, что $T^{j_v} E_{i_v} \notin \mathfrak{q}_v$.

Обозначим

$$E_{k+1} = \sum_{v=1}^s \eta_v T^{j_v} E_{i_v},$$

где $\eta_v \in \mathbb{C}$ подобраны так, чтобы $E_{k+1} \notin \mathfrak{q}_v$, $1 \leq v \leq s$.

Докажем, что многочлены $E_0, \dots, E_{k+1}$ удовлетворяют условиям 1)–3) с заменой k на $k+1$. Так как оператор T не повышает степень многочленов по z , то имеет место неравенство $\deg_z E_{k+1} \leq M$. А с помощью (46) получаем

$$\deg_{\overline{x}} E_{k+1} \leq c_k(L+1) + 2\lambda b_k \leq c_{k+1}(L+1).$$

Таким образом, условие 1) при замене k на $k+1$ выполняется. Справедливость условия 2) следует из равенства (45).

Пусть $\mathfrak{r}$ — простой идеал, ассоциированный с идеалом $\mathfrak{a}_{k+1}$ и содержащийся в $\mathfrak{p}$ (такие идеалы существуют в силу включения $\mathfrak{a}_{k+1} \subset J_{k+1} \subset \mathfrak{p}$). Поскольку $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{a}_{k+1} = (\mathfrak{a}_k, E_{k+1})$, то имеют место включения $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{a}_k$. Учитывая, что совокупность всех простых идеалов, ассоциированных с $\mathfrak{a}_k$ и содержащихся в $\mathfrak{p}$, совпадает с множеством $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$, заключаем, что существует идеал $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{r}$. Следовательно, $h(\mathfrak{r}) \geq h(\mathfrak{q}_j) = k+1$. Если $h(\mathfrak{r}) = k+1$, то $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_j$. Но это невозможно, так как $E_{k+1} \in \mathfrak{r}$ и $E_{k+1} \notin \mathfrak{q}_j$. Из неравенства $h(\mathfrak{r}) \geq k+2$ ввиду того, что идеал $\mathfrak{a}_{k+1}$ порождается $k+2$ многочленами, следует, что $h(\mathfrak{r}) = k+2$.

Этим доказано, что все примарные компоненты $\mathfrak{a}_{k+1}$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют высоту $k + 2$.

Пусть $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{u}_k \cap \mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}'$ — пересечение примарных компонент $\mathfrak{a}_k$, не входящих в $\mathfrak{u}_k$. Если I — примарная компонента $\mathfrak{u}_{k+1}$, $\mathfrak{r} = \sqrt{I}$, то из включения $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{a}'$ следовало бы $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{a}'$, что невозможно. Значит, идеал $\mathfrak{a}'$ не содержится в $\mathfrak{r}$ и тогда из включения $\mathfrak{u}_k \cap \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_k \subset \mathfrak{a}_{k+1} \subset I$ получаем $\mathfrak{u}_k \subset I$. Итак, $\mathfrak{u}_k \subset \mathfrak{u}_{k+1}$, а поскольку $E_{k+1} \in \mathfrak{a}_{k+1} \subset \mathfrak{u}_{k+1}$, то

$$(\mathfrak{u}_k, E_{k+1}) \subset \mathfrak{u}_{k+1}.$$

Из этого включения, ввиду [17, лемма 4], (49), (47) и (48), находим

$$\begin{aligned} N(\mathfrak{u}_{k+1}) &\leq N(\mathfrak{u}_k) \deg_{\overline{x}} E_{k+1} \leq a_{k+1} (L + 1)^{k+2}, \\ B(\mathfrak{u}_{k+1}) &\leq B(\mathfrak{u}_k) \deg_{\overline{x}} E_{k+1} + N(\mathfrak{u}_k) \deg_z E_{k+1} \leq b_{k+1} M (L + 1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что многочлены $E_0, \dots, E_{k+1}$ удовлетворяют всем условиям 1)–3) с заменой k на $k + 1$. Таким образом, предположение $J_{k+1} \subset \mathfrak{p}$ привело нас к противоречию с определением k .

Значит, идеал J_{k+1} не содержится в $\mathfrak{p}$ и ввиду неравенств $k \leq 3 - r \leq 2$ заключаем, что включение $J_3 \subset \mathfrak{p}$ невозможно. Отсюда следует, что существует индекс i , $0 \leq i \leq \chi_3 - 1$, такой, что $A = T^i E \in \mathfrak{p}$, но $C = TA \notin \mathfrak{p}$. Из равенств (45)–(48) следует, что $\chi_3 = 8\lambda^2 + 10\lambda + 1$. Наконец, с помощью (44) получаем

$$\begin{aligned} \deg_z C &\leq M \leq 3\lambda(B(\mathfrak{p}) + 1)N(\mathfrak{p})^{-(3-r)/(4-r)}, \\ \deg_{\overline{x}} C &\leq \deg_{\overline{x}} E + \chi_3 = L + \chi_3 \leq 9\lambda^2 N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)}. \end{aligned}$$

Лемма 5.4 доказана.

§ 6. Завершение доказательства теоремы 5

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 5. Предположим, что существуют идеалы, удовлетворяющие условию теоремы 5, для которых ее утверждение неверно. Пусть I — один из таких идеалов, а именно тот, у которого высота $h(I)$ наибольшая, $r = 4 - h(I)$. Тогда

$$\text{ord } I(\overline{f}) > \rho^{2r-1} (B(I)N(I)^{r/(r-4)} + N(I)^{3/(4-r)}). \quad (51)$$

Обозначим $I_1, \dots, I_s$ — все примарные компоненты идеала I , имеющие тривиальное пересечение с кольцом $\mathbb{C}[z]$, k_j — их показатели и $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$ — их радикалы. Из условия следует, что $s \geq 1$. По предложению 2 [17] с некоторым многочленом $b \in \mathbb{C}[z]$ имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^s k_j N(\mathfrak{p}_j) = N(I), \quad (52)$$

$$\deg_z b + \sum_{j=1}^s k_j B(\mathfrak{p}_j) = B(I), \quad (53)$$

$$\text{ord } b + \sum_{j=1}^s k_j \text{ord } \mathfrak{p}_j(\overline{f}) = \text{ord } I(\overline{f}). \quad (54)$$

Если для всех индексов j выполняются неравенства

$$\text{ord } \mathfrak{p}_j(\bar{f}) \leq \rho^{2r-1} (B(\mathfrak{p}_j)N(\mathfrak{p}_j)^{r/(4-r)} + N(\mathfrak{p}_j)^{3/(4-r)}),$$

то с помощью равенств (52)–(54) находим

$$\begin{aligned} \text{ord } I(\bar{f}) &= \text{ord } b + \sum_{j=1}^s k_j \text{ord } \mathfrak{p}_j(\bar{f}) \\ &\leq \deg_z b + \sum_{j=1}^s k_j \rho^{2r-1} B(\mathfrak{p}_j)N(\mathfrak{p}_j)^{r/(4-r)} + \rho^{2r-1} \sum_{j=1}^s k_j N(\mathfrak{p}_j)^{3/(4-r)} \\ &\leq \rho^{2r-1} N(I)^{r/(4-r)} \left(\deg_z b + \sum_{j=1}^s k_j B(\mathfrak{p}_j) \right) + \rho^{2r-1} \left(\sum_{j=1}^s k_j N(\mathfrak{p}_j) \right)^{3/(4-r)} \\ &\leq \rho^{2r-1} (B(I)N(I)^{r/(4-r)} + N(I)^{3/(4-r)}), \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (51). Получившееся противоречие означает, что существует простой идеал $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $h(\mathfrak{p}) = 4 - r$, такой, что

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\bar{f}) > \rho^{2r-1} (B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{r/(4-r)} + N(\mathfrak{p})^{3/(4-r)}). \quad (55)$$

Пусть A и C – многочлены, существование которых доказано в лемме 5.4.

Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Применяя к идеалу $\mathfrak{p}$, многочленам A, C и вектору $\bar{f}$ лемму 5.1 (в нашем случае $s = 0$) и пользуясь неравенствами (43) при $r = 1$, находим

$$\text{ord } \mathfrak{p}(\bar{f}) \leq B(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} C + N(\mathfrak{p}) \deg_z C \leq (9\lambda^2 + 3\lambda)B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{1/3} + 3\lambda N(\mathfrak{p}),$$

что противоречит неравенству (55) при $r = 1$. Итак, этот случай невозможен.

В случае $r \geq 2$ рассмотрим идеал J , существование которого утверждается леммой 5.1. Мы применяем ее к идеалу $\mathfrak{p}$ и многочленам A, C , построенным в лемме 5.4. Пользуясь неравенствами (43), в соответствии с леммой 5.1 имеем оценки

$$N(J) \leq N(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} C \leq 9\lambda^2 N(\mathfrak{p})^{(5-r)/(4-r)}, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} B(J) &\leq B(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} C + N(\mathfrak{p}) \deg_z C \\ &\leq (9\lambda^2 + 3\lambda)B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)} + 3\lambda N(\mathfrak{p})^{1/(4-r)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Для идеала J имеем $h(J) = h(\mathfrak{p}) + 1 > h(I)$. Согласно определению идеала I должно выполняться неравенство

$$\text{ord } J(\bar{f}) \leq \rho^{2r-3} (B(J)N(J)^{(r-1)/(5-r)} + N(I)^{3/(5-r)}).$$

С помощью этого неравенства, неравенства 3) леммы 5.1, а также неравенств (56), (57) и (43) находим

$$\begin{aligned} \text{ord } \mathfrak{p}(\bar{f}) &\leq \text{ord } J(\bar{f}) + B(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} C + N(\mathfrak{p}) \deg_z C \\ &\leq \rho^{2r-3} \left((9\lambda^2 + 3\lambda)B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{4-r}} + 3\lambda N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{4-r}} \right) \left(9\lambda^2 N(\mathfrak{p})^{\frac{5-r}{4-r}} \right)^{\frac{r-1}{5-r}} \\ &\quad + \rho^{2r-3} \left(9\lambda^2 N(\mathfrak{p})^{\frac{5-r}{4-r}} \right)^{\frac{3}{5-r}} + (9\lambda^2 + 3\lambda)B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{4-r}} + 3\lambda N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{4-r}} \\ &< \rho^{2r-1} (B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{r/(4-r)} + N(\mathfrak{p})^{3/(4-r)}). \end{aligned}$$

Получившееся неравенство противоречит (55), и это противоречие означает справедливость теоремы 5.

Приведенное выше доказательство теоремы 5 изложено таким образом, что дает возможность установить и более общий результат. Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений

$$t(z)y'_j = F_j(z, y_1, \dots, y_m), \quad j = 1, \dots, m, \quad (58)$$

где $t(z), F_j(z, y_1, \dots, y_m)$ — многочлены от всех своих переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что решение $f_1(z), \dots, f_m(z)$ системы (58) *обладает D -свойством в точке $\xi \in \mathbb{C}$* , если эти функции аналитичны в точке ξ и пересечение всех простых идеалов кольца $\mathbb{C}[z, y_1, \dots, y_m]$, инвариантных относительно оператора

$$D = t(z) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^m F_j(z, y_1, \dots, y_m) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

а, кроме того, обладающих тем свойством, что их многообразия нулей в $\mathbb{C}^{m+1}$ не содержат аналитическую кривую $(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$, но содержат точку этой кривой, соответствующую $z = \xi$, отлично от (0) .

В случае, если функции $f_i(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, последнее условие означает, что пересечение всех простых D -инвариантных идеалов, имеющих нулем точку $(\xi, f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))$, должно быть нетривиальным или же таких идеалов не должно быть вовсе.

Например, как это доказано в предложении 2, § 4, совокупность функций $(P(z), Q(z), R(z))$ обладает D -свойством в точке $\xi = 0$. Многочлен $z(y_2^3 - y_3^2)$ содержится в пересечении всех простых D -инвариантных идеалов с нулем $(0, 1, 1, 1)$. В работе [17] используется тот факт, что алгебраически независимая над $\mathbb{C}(z)$ совокупность функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, удовлетворяющая линейной и однородной относительно y_j системе дифференциальных уравнений (58), обладает D -свойством в любой точке $\xi \in \mathbb{C}$.

Легко доказать, что если точка ξ отлична от нулей многочлена $t(z)$, т.е. не является особой, то любое решение системы (58), аналитическое в точке ξ обладает D -свойством. Действительно, пусть простой D -инвариантный идеал $\mathfrak{p}$ имеет среди своих нулей точку $(\xi, f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))$. Так как для любого многочлена $A \in \mathfrak{p}$ и функции $\varphi(z) = A(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$ при каждом $n \geq 0$ имеем тождество $t(z)^n \varphi^{(n)}(z) = B(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$, где $B = t(z)^n (t(z)^{-1} D)^n A \in \mathfrak{p}$, то, пользуясь условием $t(\xi) \neq 0$, заключаем, что $\varphi^{(n)}(\xi) = 0, n \geq 0$, т.е. $\varphi(z) \equiv 0$ и, следовательно, вся кривая $(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$ принадлежит многообразию нулей $\mathfrak{p}$. Итак, в рассматриваемом случае простых идеалов с перечисленными в определении свойствами не существует. Подобная ситуация встретила в работе [16], где рассматривалась совокупность функций, удовлетворяющая системе уравнений (58) с постоянными коэффициентами ($t(z) \equiv 1, F_j$ не зависят от z) и потому обладающая D -свойством в любой точке ξ .

Следующее утверждение обобщает теорему 3.

ТЕОРЕМА 6. Пусть решение $f_1(z), \dots, f_m(z)$ системы (58) состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций и обладает D -свойством в некоторой комплексной точке ξ . Тогда для каждого многочлена $A \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$, $A \not\equiv 0$, выполняется неравенство

$$\text{ord}_{z=\xi} A(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \leq \gamma_5 (\deg_z A + 1) (\deg_{\overline{\mathbb{C}}} A)^m,$$

где γ_5 — некоторая постоянная, зависящая только от точки ξ и функций $f_i(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы практически не отличается от доказательства теоремы 3. Вместо неравенства теоремы 5 необходимо индукцией по r , $1 \leq r \leq m$, доказать, что для любого однородного несмешанного идеала $I \subset \mathcal{A} = \mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$ с условиями $I \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $h(I) = m + 1 - r$, выполняется неравенство

$$\text{ord } I(\overline{f}) \leq \rho^{2r-1} (B(I)N(I)^{r/(m+1-r)} + N(I)^{m/(m+1-r)}) \quad (59)$$

с некоторой достаточно большой постоянной ρ . Необходимо лишь внести естественные изменения в доказательство леммы 5.3, изменить соответствующим образом выбор последовательностей a_i, b_i, c_i, χ_i , а оценку на степени многочленов E_j по переменной z в доказательстве леммы 5.4 записать в виде $\deg_z E_j \leq c_j(M+1)$. Никаких более существенных изменений в доказательстве производить не придется.

Условие алгебраической независимости функций $f_j(z)$ в формулировке теоремы 6 может быть опущено, можно также доказать оценку для суммы кратностей нулей в различных точках. Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 6 и основные теоремы работ [16] и [17].

ТЕОРЕМА 7. Пусть решение $f_1(z), \dots, f_m(z)$ системы (58) обладает D -свойством в каждой из различных комплексных точек $\xi_1, \dots, \xi_q$. Тогда для любого многочлена $A \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ с условием $A(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \not\equiv 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^q \text{ord}_{z=\xi_j} A(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \leq \gamma_6 (\deg_z A + q) (\deg_{\overline{\mathbb{C}}} A)^k,$$

где γ_6 — некоторая постоянная, зависящая только от точки ξ , функций $f_i(z)$ и системы (58), а k есть максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций среди $f_i(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы проводится по изложенной выше схеме. В формулировке леммы 5.3 условие $\mathfrak{q} \neq (0)$ нужно заменить условием, что идеал $\mathfrak{q}$ не содержится в идеале $\mathfrak{E}$, состоящем из всех алгебраических соотношений над $\mathbb{C}[z]$ между функциями $f_j(z)$. Аналог неравенства из формулировки теоремы 5 примет вид

$$\sum_{j=1}^q \text{ord}_{z=\xi_j} I(\overline{f}) \leq \rho^{2r-1} (B(I)N(I)^{r/(k+1-r)} + qN(I)^{k/(k+1-r)}),$$

где, как и ранее, $r = m + 1 - h(I)$, и доказываться оно должно индукцией по r в пределах $1 \leq r \leq k$. Все необходимые изменения, связанные с наличием большого числа точек, можно найти в работах [16] и [17].

В заключение хотелось бы выразить признательность М. Вальдшмидту, познакомившему меня со статьей [7] и близкими проблемами. Я также приношу благодарность Д. Бертрону и П. Филиппону, регулярные беседы с которыми имели большое влияние на мою работу.

Список литературы

1. *Lang S.* Elliptic functions. Reading: Addison Wesley, 1973.
2. *Schneider Th.* Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale // Math. Ann. 1937. V. 113. P. 1–13.
3. *Ramanujan S.* On certain arithmetical functions // Trans. Cambridge Philosoph. Soc. 1916. V. 22. №9. P. 159–184; // Collected Papers of Srinivasa Ramanujan. New York: Chelsea Publishing Co., 1962. P. 136–162.
4. *Mahler K.* On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. P. 445–450.
5. *Masser D.* Elliptic functions and transcendence // Lecture Notes in Math. V. 437. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
6. *Mahler K.* Remarks on a paper by W. Schwarz // J. Number Theory. 1969. V. 1. P. 512–521.
7. *Barré-Sirieux K., Diaz G., Gramain F., Philibert G.* Une preuve de la conjecture de Mahler–Manin // Invent. Math. 1996. V. 124. P. 1–9.
8. *Чудновский Г. В.* Алгебраическая независимость постоянных, связанных с экспоненциальной и эллиптической функциями // Докл. АН УССР. 1976. №8. С. 698–701.
9. *Waldschmidt M.* Les travaux de G. V. Chudnovskii sur les nombres transcendants // Lecture Notes in Math. V. 567. Berlin: Springer-Verlag, 1977. P. 274–292.
10. *Bertrand D.* Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique // Semin. Delange–Pisot–Poitou. 19e année. 1977/78. №36.
11. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
12. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
13. *Philippon P.* Critères pour l'indépendance algébrique // Publ. Math. IHES. 1986. №64. P. 5–52.
14. *Aby M.* Résultats quantitatifs d'indépendance algébrique pour les groupes algébriques // J. Number Theory. 1992. V. 42. №2. P. 194–231.
15. *Нестеренко Ю. В.* Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел // Матем. сб. 1984. Т. 123 (165). №4. С. 435–459.
16. *Nesterenko Yu.* Estimates for the number of zeros of certain functions // New Advances in Transcendence Theory / ed. A. Baker. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. P. 263–269.
17. *Нестеренко Ю. В.* Оценки числа нулей функций некоторых классов // Acta Arith. 1989. V. LIII. №1. P. 29–46.
18. *Нестеренко Ю. В.* Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. №2. С. 253–284.
19. *Нестеренко Ю. В.* Оценки характеристической функции простого идеала // Матем. сб. 1984. Т. 123 (165). №1. С. 11–34.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nest@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию
07.03.1996