Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 10, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:25:05

УДК 515.145.256

С. В. Лапин

 D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений

В работе введено понятие E_∞ -алгебры с фильтрацией. Установлены связи между E_∞ -алгебрами с фильтрациями и теорией D_∞ -дифференциальных E_∞ -алгебр над полями. На основе техники D_∞ -дифференциальных E_∞ -алгебр разработан аппарат спектральных последовательностей для E_∞ -алгебр с фильтрациями и даны применения этого аппарата к мультипликативным когомологическим спектральным последовательностям расслоений.

Библиография: 21 название.

В классической работе Лерэ [1] была построена спектральная последовательность дифференциального модуля с фильтрацией и, кроме того, была описана мультипликативная структура в членах этой спектральной последовательности для случая, когда дифференциальный модуль с фильтрацией является дифференциальной алгеброй с фильтрацией. Далее в классической работе Серра [2] на основе результатов из работы [1] была построена мультипликативная когомологическая спектральная последовательность расслоения и, кроме того, было показано, что если база расслоения является односвязной, то второй член этой спектральной последовательности, рассматриваемый как градуированная алгебра, является тензорным произведением алгебры когомологий базы и алгебры когомологий слоя данного расслоения. Начиная с работ [1] и [2], аппарат теории мультипликативных спектральных последовательностей является основным средством вычислений в алгебраической топологии, гомологической алгебре, а также во многих других областях математики и теоретической физики, использующих гомологии и когомологии с мультипликативными структурами.

С другой стороны, в работе Смирнова [3] было введено понятие E_∞ -алгебры в категории дифференциальных модулей, которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры. В настоящее время методы гомотопической теории E_∞ -(ко)алгебр, которая была построена в работе [4], являются основным инструментом исследования гомологий итерированных пространств петель, предельного члена спектральной последовательности Адамса и гомотопических групп топологических пространств [5].

Настоящая работа посвящена введению понятия E_∞ -алгебры с фильтрацией, построению на основе теории D_∞ -дифференциальных E_∞ -алгебр [6]–[10] аппарата спектральных последовательностей для E_∞ -алгебр с фильтрациями и применению этого аппарата к мультипликативным когомологическим спектральным последовательностям расслоений. Основными результатами этой

работы являются утверждения теоремы 5.2 и теоремы 6.3, которые соответственно являются обобщениями на E_∞ -алгебры с фильтрациями классического результата из работы Лерэ [1] о мультипликативной структуре в членах спектральной последовательности дифференциального модуля с фильтрацией и классического результата из работы Серра [2] о мультипликативном строении когомологической спектральной последовательности расслоения.

§ 1. D_∞ -дифференциальные модули

В этом параграфе напоминаются необходимые определения и утверждения из работы [6], связанные с понятием D_∞ -дифференциального модуля.

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом параграфе модули и отображения модулей являются соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей.

Напомним сначала, что дифференциальным градуированным модулем или, более кратко, просто дифференциальным модулем (X, d) называется произвольный градуированный модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабженный дифференциалом $d: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, который является отображением градуированных модулей степени (-1) и для которого выполнено условие $d^2 = 0$. Отображением дифференциальных модулей $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется отображение градуированных модулей $f: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ степени 0, удовлетворяющее условию $df = fd$. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение градуированных модулей $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ степени 1, для которого выполнено условие $dh + hd = f - g$.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ называется *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

Одним из источников появления SDR-ситуаций дифференциальных модулей являются гомологии заданных над полем дифференциальных модулей. Действительно, пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – гомологический модуль любого заданного над полем дифференциального модуля (X, d) . Если градуированный модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Полученную SDR-ситуацию дифференциальных модулей далее будем называть *гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d)* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Назовем $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом градуированного модуля $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, где $s \geq 0$ – фиксированное целое число, семейство отображений модулей $\{d^{i+s}: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} d^{j+s} = 0.$$

$D_\infty^{(s)}$ -дифференциальным модулем или, более кратко, $D_\infty^{(s)}$ -модулем (X, d^{i+s}) называется произвольный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе

с некоторым фиксированным $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом $\{d^{i+s}: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1} \mid i \geq 0\}$ этого градуированного модуля.

Легко видеть, что для любого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) определен дифференциальный модуль (X, d^s) , поскольку выполнено соотношение $d^s d^s = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -модулей $f: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений модулей $f = \{f^i: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \mid i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^{j+s} = \sum_{i+j=k} d^{i+s} f^j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей $f, g: X \rightarrow Y$ называется семейство гомоморфизмов $h = \{h^{i-s}: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1} \mid i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k.$$

Напомним основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$ -модулей. Пусть заданы произвольные морфизмы $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\eta: X \rightleftarrows Y: \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $h h = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta: X \rightleftarrows Y: \xi, h)$ называется *SDR-ситуацией* $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$ -модуль X , дифференциальный модуль Y и *SDR-ситуация* $(\eta: (X, d^s) \rightleftarrows (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство отображений модулей $\{d^{i+s}: Y_\bullet \rightarrow Y_{\bullet-1}\}$, определяемых формулами

$$d^s = d, \quad d^{i+s} = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (1)$$

является $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом градуированного модуля Y . Более того, имеется *SDR-ситуация* $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\tilde{\eta}: X \rightleftarrows Y: \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая определяется формулами

$$\tilde{\xi}^0 = \xi, \quad \tilde{\xi}^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (2)$$

$$\tilde{\eta}^0 = \eta, \quad \tilde{\eta}^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (3)$$

$$\tilde{h}^{-s} = h, \quad \tilde{h}^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

и, следовательно, продолжает заданную SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть над любым полем задан $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) , и пусть $H(X)$ – гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s) . Тогда формулы (1)–(4) задают на $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}$ -модуля

$$\{d^{i+s}: H_\bullet(X) \rightarrow H_{\bullet-1}(X)\},$$

где $d^s = 0$, и определяют SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей

$$(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \tilde{\xi}, \tilde{h}),$$

которая продолжает гомологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, d^s) .

Так как для $D_\infty^{(s)}$ -модуля $H(X)$ из следствия 1.1 выполнено условие $d^s = 0$, то $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$ -модулем. В частности, определен дифференциальный модуль $(H(X), d^{s+1})$, к которому можно снова применять следствие 1.1. Итерация применения следствия 1.1 к заданному над полем $D_\infty^{(1)}$ -модулю приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1.2. Любой заданный над полем $D_\infty^{(1)}$ -модуль (X, d^{i+1}) определяет спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$, где $(X_1, d_1) = (X, d^1)$. Для каждого $s \geq 1$ член (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X_s, d_s^{i+s}) , где $d_s^s = d_s$. Структура $D_\infty^{(s+1)}$ -модуля в члене X_{s+1} индуцирована при помощи следствия 1.1 структурой $D_\infty^{(s)}$ -модуля в члене X_s и, в частности, $D_\infty^{(s+1)}$ -модуль X_{s+1} , если рассматривать его как $D_\infty^{(s)}$ -модуль, является гомотопически эквивалентным $D_\infty^{(s)}$ -модулю X_s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) называется стабильным, если для каждого $x \in X$ найдется номер $k \geq 0$, зависящий от элемента x , для которого выполнены условия $d^{i+s}(x) = 0$, $i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля X называется модуль гомологий $\text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ модуля X относительно суммарного дифференциала

$$D_s = (d^s + d^{1+s} + \dots + d^{i+s} + \dots): X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}.$$

Отметим, что суммарный дифференциал корректно определен только в случае стабильных $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Легко видеть, что если в условиях теоремы 1.1 данный $D_\infty^{(s)}$ -модуль X является стабильным, то получаемый в этой теореме $D_\infty^{(s)}$ -модуль Y также является стабильным. Применяя это наблюдение к спектральной последовательности стабильного $D_\infty^{(1)}$ -модуля из теоремы 1.2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. Если заданный над полем $D_\infty^{(1)}$ -модуль X является стабильным, то спектральная последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 0}$ этого $D_\infty^{(1)}$ -модуля сходится к модулю его гомологий $H(X) = \text{Ker } D_1 / \text{Im } D_1$. Все члены X_s , $s \geq 1$, этой спектральной последовательности, если их рассматривать как дифференциальные модули с суммарными дифференциалами $D_s: (X_s)_\bullet \rightarrow (X_s)_{\bullet-1}$, гомотопически эквивалентны между собой и гомотопически эквивалентны дифференциальному модулю $(H(X), d = 0)$.

§ 2. Дифференциальные модули с (1)-фильтрациями над полями и стабильные $D_\infty^{(1)}$ -дифференциальные модули

В этом параграфе рассматриваются дифференциальные модули с (1)-фильтрациями и устанавливается связь между заданными над полями дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(1)}$ -дифференциальными модулями.

Напомним, что *фильтрацией* $\{X^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, *дифференциального модуля* (X, d) называется семейство градуированных подмодулей $X_\bullet^n \subseteq X_\bullet$, для которых выполнены следующие условия:

$$\cdots \subseteq X_\bullet^n \subseteq X_\bullet^{n+1} \subseteq \cdots, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X^n = X, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} X^n = 0, \quad d(X^n) \subseteq X^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отображением $f: (X, \{X^n\}) \rightarrow (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с фильтрациями называется отображение $f: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей, для которого выполнено условие $f(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Гомотопией* h *между отображениями* $f, g: (X, \{X^n\}) \rightarrow (Y, \{Y^n\})$ *дифференциальных модулей с фильтрациями* называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. (1)-*фильтрацией дифференциального модуля* (X, d) будем называть произвольную фильтрацию $\{X^n\}$ этого дифференциального модуля, удовлетворяющую условию $d(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отображениями дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем считать отображения дифференциальных модулей с фильтрациями. *Гомотопией* h *между отображениями* $f, g: (X, \{X^n\}) \rightarrow (Y, \{Y^n\})$ *дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями* будем называть любую гомотопию $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Легко видеть, что категория дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями является полной подкатегорией категории дифференциальных модулей с фильтрациями. Однако функтор вложения из категории дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями в категорию дифференциальных модулей с фильтрациями не сохраняет гомотопии между морфизмами и, следовательно, не индуцирует какой-либо функтор, а тем более функтор вложения, между соответствующими гомотопическими категориями.

Под SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем понимать SDR-ситуацию $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ дифференциальных модулей, в которой отображения $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$ являются морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями и гомотопия $h: X \rightarrow X$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

Пусть задан любой дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$, и пусть $i^n: H(X^n) \rightarrow H(X)$ – отображение модулей гомологий, индуцированное вложением $X^n \subseteq X$. Тогда семейство подмодулей $H(X)^n \subseteq H(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $H(X)^n = \text{Im}(i^n)$, является фильтрацией $\{H(X)^n\}$ гомологического модуля $H(X)$, которую можно считать (1)-фильтрацией. Легко видеть, что если дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ задан над полем, то гомологическая SDR-ситуация $(\eta: X \rightrightarrows H(X): \xi, h)$ является SDR-ситуацией

дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{H(X)^n\}$. Эту SDR-ситуацию дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями далее будем называть гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$.

Легко видеть, что любая (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X индуцирует (1)-фильтрацию $\{(X^*)^{-n}\}$ на сопряженном дифференциальном модуле X^* , где $(X^*)^{-n} = (X/X^n)^*$. Ясно, что каждая SDR-ситуация дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ определяет SDR-ситуацию $(\xi^*: X^* \rightleftharpoons Y^*: \eta^*, h^*)$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

ПРИМЕР 1. Семейство примеров дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями можно получить при помощи конструкции нормализованного (ко)цепного комплекса симплициального множества [11]. Действительно, если $\{X^n\}$ – фильтрация симплициального множества X его остовами, то нормализованный цепной комплекс $N(X)$ и нормализованный коцепной комплекс $N^*(X)$ этого симплициального множества являются дифференциальными модулями соответственно с (1)-фильтрациями $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N(X)^n = N(X^n)$, $n \geq 0$. В частности, если для некоторого топологического пространства X рассмотреть симплициальное множество $S(X)$ его сингулярных симплексов [11], то получим, что дифференциальные модули $N(X) = N(S(X))$ и $N^*(X) = N^*(S(X))$ имеют соответственно (1)-фильтрации $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, которые индуцированы фильтрацией остовами $\{S(X)^n\}$ симплициального множества $S(X)$.

ПРИМЕР 2. Семейство примеров дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями можно еще получить при помощи операции взятия прообраза отображения дифференциальных модулей. Действительно, если задано отображение дифференциальных модулей $f: X \rightarrow Y$ и задана (1)-фильтрация $\{Y^n\}$ дифференциального модуля Y , то на дифференциальном модуле X также имеется (1)-фильтрация $\{X^n\}$, где $X^n = f^{-1}(Y^n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Например, если $f: X \rightarrow Y$ – отображение симплициальных множеств и $\{Y^n\}$ – фильтрация симплициального множества Y его остовами, то нормализованные цепной комплекс $N(X)$ и коцепной комплекс $N^*(X)$ являются дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N(X)^n = N(f^{-1}(Y^n))$. В частности, если $p: E \rightarrow B$ – произвольное расслоение Серра и $\{S(B)^n\}$ – фильтрация остовами симплициального множества $S(B)$ сингулярных симплексов базы B этого расслоения, то нормализованный цепной комплекс $N(E)$ и нормализованный коцепной комплекс $N^*(E)$ являются дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями $\{N(E)^n\}$ и $\{N^*(E)^{-n}\}$, где $N(E)^n = N(S(f)^{-1}(S(B)^n))$.

Рассмотрим связь между заданными над полем дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(1)}$ -модулями. Пусть над полем задан любой дифференциальный модуль (X, d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$. Обозначим через Z_X^k подмодуль градуированного модуля X^k , для которого $X^k = Z_X^k \oplus X^{k-1}$. При помощи условия $d(X_\bullet^k) \subseteq X_{\bullet-1}^{k-1}$ определим стабильный $D_\infty^{(1)}$ -модуль (X, d^{i+1}) , полагая

$$d^{i+1} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{i+1}: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}, \quad i \geq 0,$$

где отображение $d_k^{i+1}: (Z_X^k)_\bullet \rightarrow (Z_X^{k-(i+1)})_{\bullet-1}$ является компонентой отображения

$$d: (Z_X^k)_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}^{k-1} = ((Z_X^{k-1})_{\bullet-1} \oplus \cdots \oplus (Z_X^{k-(i+1)})_{\bullet-1} \oplus \cdots).$$

Легко видеть, что $D_\infty^{(1)}$ -модуль (X, d^{i+1}) является стабильным $D_\infty^{(1)}$ -модулем, для которого выполнено условие $(X, D_1) = (X, d)$, где D_1 – суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$ -модуля (X, d^{i+1}) . Аналогично показывается, что любое отображение заданных над полем дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями и любая гомотопия между отображениями заданных над полем дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяют соответственно морфизм $D_\infty^{(1)}$ -модулей и гомотопию между морфизмами $D_\infty^{(1)}$ -модулей. Таким образом, имеем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Каждый заданный над полем дифференциальный модуль (X, d) с (1)-фильтрацией однозначно определяет на градуированном модуле X структуру стабильного $D_\infty^{(1)}$ -модуля (X, d^{i+1}) , для которого $(X, D_1) = (X, d)$, где D_1 – суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$ -модуля (X, d^{i+1}) . Более того, каждая заданная над полем SDR-ситуация дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяет SDR-ситуацию стабильных $D_\infty^{(1)}$ -модулей, для которой суммарная SDR-ситуация дифференциальных модулей совпадает с исходной SDR-ситуацией дифференциальных модулей.*

Если рассмотреть спектральную последовательность дифференциального модуля с (1)-фильтрацией [1] и сравнить ее с указанной в теореме 1.2 спектральной последовательностью $D_\infty^{(1)}$ -модуля, определяемого данным дифференциальным модулем с (1)-фильтрацией, то получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ – спектральная последовательность произвольного заданного над полем дифференциального модуля (X, d) с (1)-фильтрацией. Тогда на каждом члене (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X_s, d_s^{i+s}) , которая связана с дифференциалом d_s в этом члене равенством $d_s^s = d_s$. Если (1)-фильтрация дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то для каждого $s \geq 1$ модуль гомологий $H(X_s) = \text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X_s, d_s^{i+s}) изоморфен предельному члену X_∞ спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ и, следовательно, изоморфен модулю гомологий $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ – заданная над полем (ко)гомологическая спектральная последовательность произвольного расслоения Серра $p: E \rightarrow B$. Тогда на каждом члене (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X_s, d_s^{i+s}) , которая связана с дифференциалом d_s в этом члене равенством $d_s^s = d_s$. Для каждого $s \geq 1$ модуль гомологий $H(X_s) = \text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X_s, d_s^{i+s}) изоморфен модулю (ко)гомологий $H(E)$ тотального пространства данного расслоения.*

§ 3. Операды и алгебры над операдами

В этом параграфе для введения терминологии и обозначений напоминаются основные определения и конструкции из работ [3]–[5], [12], [13] связанные с понятиями операды и алгебры над операдой в категории дифференциальных модулей.

Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ называется семейство дифференциальных модулей $\mathcal{E}(j)$, на которых справа действуют соответственно симметрические группы Σ_j , $j \geq 1$. Морфизмом $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ симметрических семейств называется семейство Σ_j -эквивариантных отображений дифференциальных модулей $f = \{f(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)\}_{j \geq 1}$.

Для симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = \{(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)\}_{j \geq 1}$, где $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ – фактормодуль Σ_j -свободного дифференциального модуля, порожденного дифференциальным модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k),$$

по некоторому отношению эквивалентности [3], [4], которое связано с действием симметрических групп. Отметим, что указанное $\times$ -произведение ассоциативно, т.е. для произвольных симметрических семейств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ имеется изоморфизм $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$ в категории симметрических семейств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Операдой* $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$. Морфизм симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ называется умножением операды $(\mathcal{E}, \pi)$. Морфизмом операд $f: (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\pi' = \pi''(f \times f)$.

Каноническим примером операды является операда $(\mathcal{E}_X, \pi)$, определяемая для любого дифференциального модуля X . Напомним конструкцию этой операды. Пусть $X^{\otimes j}$ – это j -я тензорная степень над K дифференциального модуля X . Определим дифференциальный модуль $\mathcal{E}_X(j)$, полагая $\mathcal{E}_X(j) = \text{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$, где $\text{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$ является дифференциальным градуированным модулем всех K -модульных отображений из $X^{\otimes j}$ в X . Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на симметрическом семействе $\mathcal{E}_X$, т.е. умножение $\pi: \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$, задается формулой

$$\pi(g \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_k) = g \circ (g_1 \otimes \dots \otimes g_k), \quad g_i \in \mathcal{E}_X(j_i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad g \in \mathcal{E}_X(k).$$

Аналогично определяется операда $(\mathcal{E}^X, \pi)$, структура которой задается следующими равенствами:

$$\mathcal{E}^X(j) = \text{Hom}_K(X; X^{\otimes j}), \quad \pi(g \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_k) = (g_1 \otimes \dots \otimes g_k) \circ g.$$

Рассмотрим построенную в [3] операду (E_∞, π) . По построению операда E_∞ является ациклической, свободной и Σ -свободной операдой. В частности, для каждого $j \geq 1$ дифференциальный модуль $E_\infty(j)$ является свободной резольвентой тривиального $K[\Sigma_j]$ -модуля K , где $K[\Sigma_j]$ – групповая K -алгебра симметрической группы Σ_j . Так, например, дифференциальный модуль $E_\infty(2)$

является $K[\mathbb{Z}_2]$ -свободным ациклическим цепным комплексом с образующими $\cup_i \in E_\infty(2)$ размерности $i \geq 0$ и граничным оператором

$$d(\cup_i) = \cup_{i-1} + (-1)^i \cup_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2 = \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим построенную в [4] операд (E, π) . Обозначим через $\bar{\Delta}[n]$ нормализованный цепной комплекс $N(\Delta[n])$ стандартного n -мерного симплицального симплекса $\Delta[n]$. Семейство цепных комплексов $\bar{\Delta}[*] = \{\bar{\Delta}[n]\}_{n \geq 0}$ является косимплициальным объектом в категории цепных комплексов. Обозначим через $\bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$ косимплициальный цепной комплекс, являющийся j -й тензорной степенью косимплициального цепного комплекса $\bar{\Delta}[*]$. Рассмотрим симметрическое семейство $E = \{E(j)\}_{j \geq 1}$, для которого $E(j)$ является дифференциальным градуированным модулем $\text{Hom}(\bar{\Delta}[*]; \bar{\Delta}[*]^{\otimes j})$ косимплициальных гомоморфизмов вида $\bar{\Delta}[*] \rightarrow \bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$. Действие симметрической группы Σ_j на $E(j)$ определяется действием Σ_j на $\bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей в тензорном произведении. Умножение $\pi: E \times E \rightarrow E$ операд (E, π) определяется точно так же, как и для рассмотренной выше операд $\mathcal{E}^X$.

Отметим [4], что имеется морфизм операд $\varphi_\infty: E_\infty \rightarrow E$, определяемый при помощи свойства универсальности операд E , для которого выполнено условие $\varphi_\infty(\cup_0) = \nabla$, где $\nabla: \bar{\Delta}[*] \rightarrow \bar{\Delta}[*] \otimes \bar{\Delta}[*]$ – стандартное ассоциативное коумножение на косимплициальном цепном комплексе $\bar{\Delta}[*]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Кооперადой $(\mathcal{L}, \nabla)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, для которого выполнено условие $(\nabla \times 1)\nabla = (1 \times \nabla)\nabla$. Морфизм симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ называется *коумножением кооперადы $(\mathcal{L}, \nabla)$* . Морфизмом кооперад $f: (\mathcal{L}', \nabla') \rightarrow (\mathcal{L}'', \nabla'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}''$, для которого выполнено условие $(f \times f)\nabla' = \nabla''f$.*

Простые примеры кооперад можно получить при помощи операции сопряжения модулей. В самом деле, пусть задана произвольная операд $(\mathcal{E}, \pi)$, у которой для любого номера $j \geq 1$ градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ в каждой размерности является конечно порожденным проективным K -модулем. Тогда симметрическое семейство $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}(j)^*\}_{j \geq 1}$, где $\mathcal{E}(j)^* = \text{Hom}_K(\mathcal{E}(j); K)$, является кооперадой относительно коумножения $\nabla = \pi^*: \mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E} \times \mathcal{E})^* = \mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^*$. Кооперад $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ называется кооперадой, сопряженной к операд $(\mathcal{E}, \pi)$.

Пусть заданы произвольные дифференциальный модуль X и симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$. Рассмотрим дифференциальный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{K[\Sigma_j]} X^{\otimes j},$$

где $K[\Sigma_j]$ – групповая K -алгебра симметрической группы Σ_j . Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ и любого дифференциального модуля X имеет место изоморфизм $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$ в категории дифференциальных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или просто $\mathcal{E}$ -алгеброй называется дифференциальный модуль X , рассматриваемый вместе с отображением дифференциальных модулей $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu)$. Морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$ называется любое*

отображение дифференциальных модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $f\mu = \mu(1 \times f)$.

Отметим, что введение структуры $\mathcal{E}$ -алгебры на дифференциальном модуле X равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Коалгеброй над кооператой $(\mathcal{L}, \nabla)$ или просто $\mathcal{L}$ -коалгеброй называется дифференциальный модуль X , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных модулей $\tau: X \rightarrow \mathcal{L} \times X$, для которого выполнено условие $(\nabla \times 1)\tau = (1 \times \tau)\tau$. Коалгебры над кооператой $(\mathcal{E}^*, \nabla)$, сопряженной к операде $(\mathcal{E}, \pi)$, называются $\mathcal{E}$ -коалгебрами. Морфизмом $\mathcal{L}$ -коалгебр $f: X \rightarrow Y$ называется любое отображение дифференциальных модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\tau f = (1 \times f)\tau$.

Ясно, что введение на дифференциальном модуле X структуры $\mathcal{E}$ -коалгебры равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^X$.

В работе [4] было показано, что на нормализованном сингулярном цепном комплексе $N(X)$ топологического пространства X имеется естественная структура E -коалгебры. Эта структура определяется морфизмом операд $\alpha: E \rightarrow \mathcal{E}^{N(X)}$, который для произвольного элемента $e \in E(j) = \text{Hom}(\bar{\Delta}[*]; \bar{\Delta}[*]^{\otimes j})$ и каждой образующей $x \in N_n(X)$ задается формулой

$$\alpha(e)(x) = (N(\bar{x}) \otimes \cdots \otimes N(\bar{x}))e(i_n),$$

где $N(\bar{x}): \bar{\Delta}[n] \rightarrow N(X)$ – цепное отображение, индуцированное симплициальным отображением $\bar{x}: \Delta[n] \rightarrow X$, $\bar{x}(i_n) = x$, и $i_n \in \bar{\Delta}[n]_n$ – образующая стандартного симплициального симплекса $\Delta[n]$.

Следствием структуры E -коалгебры на нормализованном сингулярном цепном комплексе $N(X)$ топологического пространства X является наличие на цепном комплексе $N(X)$ естественной структуры E_∞ -коалгебры, структурный морфизм операд $E_\infty \rightarrow \mathcal{E}^{N(X)}$ которой определяется как композиция указанных выше морфизмов операд $\varphi_\infty: E_\infty \rightarrow E$ и $\alpha: E \rightarrow \mathcal{E}^{N(X)}$.

Рассмотрим теперь конструкции $\vee$ -произведения и $\wedge$ -произведения симметрических семейств, которые необходимы для введения понятий A_∞ -морфизма алгебр над операдой и A_∞ -морфизма коалгебр над кооператой.

Пусть заданы произвольные симметрические семейства $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$. Обозначим через $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$, для которого дифференциальный Σ_j -модуль $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'')(j)$ порождается тензорными произведениями

$$\mathcal{E}'(k_1) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \mathcal{E}'(k_2) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}''(1), \quad j = k_1 + k_2 - 1.$$

Таким образом, симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ порождается элементами вида $a \odot_i b = a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$, где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $1 \in \mathcal{E}''(1)$, $b \in \mathcal{E}'(k_2)$, $1 \leq i \leq k_1$ и элемент b стоит в тензорном произведении $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ на месте с номером i . Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}'''$ симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''')$ изоморфно прямому слагаемому симметрического семейства $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$.

Для произвольного симметрического семейства $\mathcal{E}$ и для каждого целого числа $n \geq 0$ определим симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\odot n}$, полагая

$$\mathcal{E}^{\odot n} = (\cdots (\underbrace{(\mathcal{E} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}}_n) \odot \cdots) \odot \mathcal{E}, \quad n > 0, \quad \mathcal{E}^{\odot 0} = \mathcal{H},$$

где симметрическое семейство $\mathcal{K}$ определяется равенствами $\mathcal{K}(j) = 0$, $j > 1$, и $\mathcal{K}(1) = K$.

Рассмотрим для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$ перестановочный морфизм симметрических семейств $T: (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}$, который на элементах $(a \odot_i b) \odot_j c$, где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $b \in \mathcal{E}(k_2)$, $c \in \mathcal{E}(k_3)$, задается следующей формулой:

$$T((a \odot_i b) \odot_j c) = \begin{cases} (a \odot_i b) \odot_j c, & i \leq j \leq k_2 + i - 1, \\ (-1)^{\dim(b) \dim(c)} (a \odot_j c) \odot_{k_3+i-1} b, & j < i, \\ (-1)^{\dim(b) \dim(c)} (a \odot_{j-k_2+1} c) \odot_i b, & j > k_2 + i - 1. \end{cases}$$

Определим теперь действие симметрической группы Σ_{n-1} перестановок чисел $2, 3, \dots, n$ на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$. Для этого рассмотрим сначала действие произвольной транспозиции $\sigma = (k+1, k) \in \Sigma_{n-1}$ на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$, которое задается формулой

$$\sigma(e_1 \odot \dots \odot e_n) = T(((e_1 \odot \dots \odot e_{k-1}) \odot e_k) \odot e_{k+1}) \odot \dots \odot e_n \in \mathcal{E}^{\odot n},$$

где $T: (\mathcal{E}^{\odot(k-1)} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}^{\odot(k-1)} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}$ – указанный выше перестановочный морфизм симметрических семейств. Стандартная процедура разложения произвольной перестановки из Σ_{n-1} в произведение транспозиций соседних чисел определяет действие группы Σ_{n-1} на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$.

Пусть задано любое симметрическое семейство $\mathcal{E}$. Для каждого целого числа $n \geq 0$ определим симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\wedge n}$ как симметрическое фактор-семейство симметрического семейства $\mathcal{E}^{\odot n}$ по действию группы Σ_{n-1} . Двойственным образом определяется симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\vee n}$ как симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}^{\odot n}$, инвариантное относительно действия группы Σ_{n-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. A_∞ -морфизмом $f: X \rightarrow Y$ алгебр над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется семейство отображений

$$f = \{f_n: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid f_n((\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n}, n \geq 0\},$$

где $f_0: \mathcal{E}^{\vee 0} \times X = \mathcal{K} \times X = X \rightarrow Y$ – отображение дифференциальных модулей, которые для каждого целого числа $n \geq 0$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} df_{n+1} + (-1)^n f_{n+1} d &= (-1)^n \mu(1 \times f_n) - f_n(1 \vee \dots \vee 1 \times \mu) \\ &+ \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n} f_n(1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1), \end{aligned}$$

где t – номер места, на котором стоит π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений

$$h = \{h_n: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid h_n((\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n+1}, n \geq 0\},$$

где $h_0: (\mathcal{E}^{\vee 0} \times X)_\bullet = (\mathcal{K} \times X)_\bullet = X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ – гомотопия между отображениями f_0 и g_0 , которые для каждого целого числа $n \geq 0$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} dh_{n+1} + (-1)^{n+1} h_{n+1} d &= f_{n+1} - g_{n+1} + h_n(1 \vee \dots \vee 1 \times \mu) \\ &+ (-1)^n \mu(1 \times h_n) + \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n+1} h_n(1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1), \end{aligned}$$

где t – номер места, на котором стоит π .

Пусть заданы A_∞ -морфизмы $\mathcal{E}$ -алгебр $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h: X \rightarrow X$ между A_∞ -морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и называть A_∞ -SDR-ситуацией $\mathcal{E}$ -алгебр.

Двойственным образом при помощи $\wedge$ -произведения для симметрических семейств определяются понятия A_∞ -морфизма коалгебр над кооперацией, гомотопии между A_∞ -морфизмами коалгебр над кооперацией и A_∞ -SDR-ситуации коалгебр над кооперацией.

§ 4. D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры

В этом параграфе напоминаются необходимые понятия и утверждения из работы [10], связанные с понятием D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры.

Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$ -модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) . Тогда на тензорном произведении $X \otimes Y$ градуированных модулей X и Y имеется $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)_{\bullet-1}\}$, компоненты которого задаются формулой

$$d^{i+s}(x \otimes y) = d^{i+s}(x) \otimes y + (-1)^{\dim(x)} x \otimes d^{i+s}(y).$$

В частности, для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) и любого целого числа $n \geq 1$ определен $D_\infty^{(s)}$ -модуль $(X^{\otimes n}, d^{i+s})$.

Пусть задана любая операда $(\mathcal{E}, \pi)$. Рассмотрим каждый дифференциальный модуль $(\mathcal{E}(j), d)$ как $D_\infty^{(s)}$ -модуль $(\mathcal{E}(j), d^{i+s})$, где $d^s = d$, $d^{i+s} = 0$, $i > 0$. Тогда для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) на градуированном модуле $\mathcal{E} \times X$, определенном в § 3, имеется структура $D_\infty^{(s)}$ -модуля $(\mathcal{E} \times X, d^{i+s})$, компоненты $D_\infty^{(s)}$ -дифференциала которого определяются компонентами $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалов сомножителей в тензорном произведении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальный модуль (X, d^{i+s}) , где $s \geq 1$, называется $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальной $\mathcal{E}$ -алгеброй или, короче, $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгеброй, если задан некоторый морфизм $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\{\mu^i\}: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, который для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяет следующему условию:

$$\mu^k(\pi \times 1) = \sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times \mu^j).$$

Как было отмечено в § 3, задание структурного морфизма $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$ для $\mathcal{E}$ -алгебры X эквивалентно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X$. Покажем, что в случае $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр имеет место аналогичная эквивалентность.

Для любых $D_\infty^{(s)}$ -модулей (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) определим дифференциальный модуль $\text{hom}^{(s)}(X; Y) = \{\text{hom}^{(s)}(X; Y)_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Элементами модуля $\text{hom}^{(s)}(X; Y)_n$ являются семейства отображений модулей $f = \{f^{-ns+i}: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$, $i \geq 0$, и дифференциал $d: \text{hom}^{(s)}(X; Y)_n \rightarrow \text{hom}^{(s)}(X; Y)_{n-1}$ задается формулой

$$(d(f))^{-(n-1)s+i} = \sum_{k+m=i} d^{k+s} f^{-ns+m} + (-1)^{n+1} f^{-ns+k} d^{m+s}, \quad i \geq 0,$$

где $f = \{f^{-ns+i}\} \in \text{hom}^{(s)}(X; Y)_n$. Для произвольного дифференциального модуля (X, d) и любых $D_\infty^{(s)}$ -модулей (Y, d^{i+s}) , (Z, d^{i+s}) рассмотрим дифференциальный модуль $\text{hom}^{(s)}(X \otimes Y; Z)$, где дифференциальный модуль (X, d) рассматривается $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) , $d^s = d$, $d^{i+s} = 0$, $i > 0$, и рассмотрим дифференциальный модуль $\text{hom}(X; \text{hom}^{(s)}(Y; Z))$, стандартно определяемый для дифференциальных модулей X и $\text{hom}^{(s)}(Y; Z)$. Легко видеть, что имеется изоморфизм дифференциальных модулей

$$\text{hom}^{(s)}(X \otimes Y; Z) \rightarrow \text{hom}(X; \text{hom}^{(s)}(Y; Z)),$$

сопоставляющий семейству отображений $g = \{g^{-ns+i}: (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow Z_{\bullet+n}\}$ отображение $f: X_\bullet \rightarrow \text{hom}^{(s)}(Y; Z)_{\bullet+n}$, которое задается следующей формулой:

$$f(x)^{-(n+k)s+i}(y) = g^{-ns+i}(x \otimes y), \quad k = \dim(x).$$

Определим теперь для произвольного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) операду $(\mathcal{E}_X^{(s)}, \pi)$, полагая $\mathcal{E}_X^{(s)}(j) = \text{hom}^{(s)}(X^{\otimes j}; X)$. Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X^{(s)}(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на $\mathcal{E}_X^{(s)}$, т.е. умножение $\pi: \mathcal{E}_X^{(s)} \times \mathcal{E}_X^{(s)} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(s)}$, задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) &= \{(\pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i}\}, \quad i \geq 0, \\ (\pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i} &= \sum_{i_0 + \cdots + i_k = i} g_0^{-n_0s+i_0} \circ (g_1^{-n_1s+i_1} \otimes \cdots \otimes g_k^{-n_ks+i_k}), \end{aligned}$$

где $g_t = \{g_t^{n_t s+i}\} \in \mathcal{E}_X^{(s)}(j_t)_{n_t}$, $1 \leq t \leq k$, $j_0 = k$, $n_0 + \cdots + n_k = n$. Таким образом, для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) определена операда $(\mathcal{E}_X^{(s)}, \pi)$. Легко видеть, что введение структуры $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры на дифференциальном модуле X равносильно заданию морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(s)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. A_∞ -морфизмом $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений

$$f = \{f_n^{-ns+i}: (\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n} \mid n \geq 0, i \geq 0\},$$

где $\{f_0^i\}: X \rightarrow Y$ – морфизм $D_\infty^{(s)}$ -модулей, которые для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} f_{n+1}^{-(n+1)s+j} + (-1)^n f_{n+1}^{-(n+1)s+i} d^{j+s} &= \sum_{k=i+j} (-1)^n \mu^i(1 \times f_n^{-ns+j}) \\ &+ \sum_{l=1}^n (-1)^{l+n} f_n^{-ns+k} (1 \vee \cdots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \cdots \vee 1 \times 1) \\ &- \sum_{k=i+j} f_n^{-ns+i} (1 \vee \cdots \vee 1 \times \mu^j), \end{aligned}$$

где l – номер места, на котором стоит π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между A_∞ -морфизмами $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений

$$h = \{h_n^{-(n+1)s+i}: (\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n+1} \mid n \geq 0, i \geq 0\},$$

которые для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} h_{n+1}^{-(n+2)s+j} + (-1)^{n+1} h_{n+1}^{-(n+2)s+i} d^{j+s} &= f_{n+1}^{-(n+1)s+k} - g_{n+1}^{-(n+1)s+k} \\ &+ \sum_{k=i+j} h_n^{-(n+1)s+i} (1 \vee \dots \vee 1 \times \mu^j) + \sum_{k=i+j} (-1)^n \mu^i (1 \times h_n^{-(n+1)s+j}) \\ &+ \sum_{l=1}^n (-1)^{l+n+1} h_n^{-(n+1)s+k} (1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1), \end{aligned}$$

где l – номер места, на котором стоит π .

Пусть заданы A_∞ -морфизмы $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $\eta: X \rightrightarrows Y: \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между A_∞ -морфизмами $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренная ситуация называется A_∞ -SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр и записывается в виде $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) называется *стабильной*, если $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) является стабильным и для каждого $e \times x \in \mathcal{E} \times X$ найдется целое число $k \geq 1$, зависящее от элемента $e \times x$, для которого выполнено условие $\mu^i(e \times x) = 0$, $i > k$.

Отметим, что любая стабильная $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) определяет суммарную $\mathcal{E}$ -алгебру (X, D_s, μ) , где отображение $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$ задается формулой $\mu = \mu^0 + \mu^1 + \dots + \mu^i + \dots$, а D_s – это суммарный дифференциал стабильного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) .

Напомним теперь (см. [12]), что структура E_∞ -алгебры является гомотопически инвариантной и для любой заданной над полем E_∞ -алгебры X определена E_∞ -алгебра гомологий $H(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. E_∞ -алгеброй гомологий $H(X)$, заданной над полем стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) , называется E_∞ -алгебра гомологий ее суммарной E_∞ -алгебры (X, D_s, μ) .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть задана любая $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра X и задана произвольная SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$. Тогда на $D_\infty^{(s)}$ -модуле Y имеется структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры Y , кроме того, имеется A_∞ -SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр $(\tilde{\eta}: X \rightrightarrows Y: \tilde{\xi}, \tilde{h})$, для которой выполнены начальные условия $\tilde{\eta}_0^i = \eta^i$, $\tilde{\xi}_0^i = \xi^i$, $\tilde{h}_0^{i-s} = h^{i-s}$, $i \geq 0$. Если заданная $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра X является стабильной, то $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра Y также является стабильной.

Так как каждую SDR-ситуацию дифференциальных модулей можно рассматривать как SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей, то частным случаем теоремы 4.1 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть задана любая $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра X и задана произвольная SDR-ситуация $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда на дифференциальном модуле Y имеется структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры Y , кроме

того, имеется A_∞ -SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр $(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons Y: \tilde{\xi}, \tilde{h})$, для которой выполнены начальные условия $\tilde{\eta}_0^0 = \eta$, $\tilde{\xi}_0^0 = \xi$, $\tilde{h}_0^{-s} = h$. Если $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра X является стабильной, то $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра Y также является стабильной.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть над любым полем задана произвольная $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебра X . Тогда на гомологическом модуле $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$ имеется структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры, для которой выполнено условие $d^s = 0$, и, кроме того, имеется A_∞ -SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр $(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая продолжает гомологическую SDR-ситуацию $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ дифференциального модуля (X, d^s) .

В работе [10] было показано, что условие $d^s = 0$ для $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $H(X)$ из следствия 4.2 позволяет рассматривать $H(X)$ как $D_\infty^{(s+1)}E_\infty$ -алгебру, к которой можно снова применять следствие 4.2. Итерация применения следствия 4.2 к заданной над полем $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебре приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть над полем задана любая $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебра X , и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ – спектральная последовательность $D_\infty^{(1)}$ -модуля X . Тогда каждый член (X_{s+1}, d_{s+1}) , $s \geq 1$, этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_{s+1}, d_{s+1}^{i+s}, \mu_{s+1}^i)$, где $d_{s+1}^s = 0$ и $d_{s+1}^{s+1} = d_{s+1}$, которая индуцирована при помощи следствия 4.2 структурой $D_\infty^{(s-1)}E_\infty$ -алгебры в члене X_s . Если $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебра X является стабильной, то E_∞ -алгебра гомологий стабильной $D_\infty^{(s-1)}E_\infty$ -алгебры X_s для каждого номера $s \geq 1$ A_∞ -изоморфна градуированной E_∞ -алгебре $(X_\infty, D = 0, \mu)$, где $(X_\infty, D = 0, \mu)$ – суммарная E_∞ -алгебра для предельной $D_\infty^{(\infty)}E_\infty$ -алгебры $(X_\infty, d^{i+\infty} = 0, \mu_\infty^i)$.

§ 5. E_∞ -алгебры с фильтрациями и спектральные последовательности

В этом параграфе вводится понятие алгебры с фильтрацией над операдой и, в частности, понятие E_∞ -алгебры с фильтрацией. Устанавливается связь между алгебрами с фильтрациями над операдами и D_∞ -дифференциальными алгебрами над операдами. При помощи гомотопической техники $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр определяется спектральная последовательность E_∞ -алгебры с фильтрацией над полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d, μ) называется $\mathcal{E}$ -алгеброй с фильтрацией $\{X^n\}$, если $\{X^n\}$ является (1)-фильтрацией дифференциального модуля X и если для любых $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 1$, выполнено следующее условие:

$$\mu(\mathcal{E}(j)_n \otimes X^{k_1} \otimes \dots \otimes X^{k_j}) \subseteq X^{n+k_1+\dots+k_j}.$$

Двойственным образом для кооперады $(\mathcal{L}, \nabla)$ определяется понятия $\mathcal{L}$ -коалгебры с фильтрацией и, в частности, для операды $(\mathcal{E}, \pi)$ определяется понятия $\mathcal{E}$ -коалгебры с фильтрацией.

Определим для любых дифференциальных модулей X и Y с (1)-фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ дифференциальный модуль

$$\text{Hom}^f(X; Y) = \{\text{Hom}^f(X; Y)_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Элементами модуля $\text{Hom}^f(X; Y)_n$ являются отображения модулей $f: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$, которые для каждого номера $k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию $f(X^k) \subseteq Y^{n+k}$, и дифференциал

$$d: \text{Hom}^f(X; Y)_n \rightarrow \text{Hom}^f(X; Y)_{n-1}$$

задается обычной формулой $d(f) = df + (-1)^{n+1}fd$, где $f \in \text{Hom}^f(X; Y)_n$.

При помощи дифференциального модуля $\text{Hom}^f(X; Y)$ рассмотрим более детально случай, когда $\mathcal{E}$ -алгебра с фильтрацией задана над полем.

Пусть над полем задан любой дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда на дифференциальном модуле $X \otimes X$ также имеется (1)-фильтрация $\{(X \otimes X)^n\}$, определяемая следующими равенствами:

$$(X \otimes X)^n = \bigoplus_{n_1+n_2 \leq n} Y^{n_1} \otimes Y^{n_2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь Y^k – это подмодуль модуля X^k , для которого $X^k = Y^k \oplus X^{k-1}$. Аналогично задается (1)-фильтрация $\{(X^{\otimes j})^n\}$ дифференциального модуля $X^{\otimes j}$, $j > 2$.

Определим для каждого заданного над полем дифференциального модуля X с (1)-фильтрацией операд $(\mathcal{E}_X^f, \pi)$, полагая $\mathcal{E}_X^f(j) = \text{Hom}^f(X^{\otimes j}; X)$. Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X^f(j)$ и умножение $\pi: \mathcal{E}_X^f \times \mathcal{E}_X^f \rightarrow \mathcal{E}_X^f$ задаются так же, как и для рассмотренной в §3 операд $(\mathcal{E}_X, \pi)$. Двойственным образом для каждого заданного над полем дифференциального модуля X с (1)-фильтрацией определяется операда $(\mathcal{E}_f^X, \pi)$.

Ясно, что для любого дифференциального модуля X над полем с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ введение на X структуры $\mathcal{E}$ -алгебры с фильтрацией $\{X^n\}$ равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^f$. Аналогично, введение на указанном выше X структуры $\mathcal{E}$ -коалгебры с фильтрацией $\{X^n\}$ равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_f^X$.

Примеры E_∞ -(ко)алгебр с фильтрациями можно получить при рассмотрении нормализованных (ко)цепных комплексов симплициальных множеств и топологических пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть задано произвольное симплициальное множество X , и пусть фильтрация $\{X^n\}$ – фильтрация X его остовами. Тогда E_∞ -коалгебра нормализованных цепей $N(X)$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X^n)\}$ и, следовательно, E_∞ -алгебра нормализованных коцепей $N^*(X)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N^*(X)^{-n} = (N(X)/N(X^n))^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для произвольного симплициального множества X указанная выше E -коалгебра $N(X)$ со структурным морфизмом $\alpha: E \rightarrow \mathcal{E}^{N(X)}$ является E -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X^n)\}$. Для этого рассмотрим фильтрацию $\{\bar{\Delta}[m]^k\}$ цепного комплекса $\bar{\Delta}[m] = N(\Delta[m])$, индуцированную фильтрацией остовами $\{\Delta[m]^k\}$ стандартного симплициального m -мерного симплекса $\Delta[m]$. Так как для каждого $k \geq 0$ имеет место равенство $\bar{\Delta}[m]_k = \bar{\Delta}[m]_k^k$, то для любой образующей $x \in N_m(X^k) = N_m(X^m)$, $0 \leq m \leq k$,

и любого элемента $e \in E(j)_n$ получаем цепочку включений

$$\begin{aligned} \alpha(e)(x) &= N(\bar{x})^{\otimes j} e(i_m) \in \bigoplus_{k_1 + \dots + k_j = m+n} N(\bar{x})(\bar{\Delta}[m]_{k_1}^{k_1}) \otimes \dots \otimes N(\bar{x})(\bar{\Delta}[m]_{k_j}^{k_j}) \\ &\subseteq \bigoplus_{k_1 + \dots + k_j = m+n} (N(X^{k_1}) \otimes \dots \otimes N(X^{k_j}))_{n+m} \\ &\subseteq \bigoplus_{k_1 + \dots + k_j = k+n} (N(X^{k_1}) \otimes \dots \otimes N(X^{k_j}))_{n+m}, \end{aligned}$$

наличие которой говорит о том, что E -коалгебра $N(X)$ является E -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X^n)\}$. Если теперь взять композицию указанного в § 3 морфизма операд $\varphi_\infty: E_\infty \rightarrow E$ и структурного морфизма операд $\alpha: E \rightarrow \mathcal{E}^{N(X)}$, то получим, что E_∞ -коалгебра $N(X)$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X^n)\}$. Из этого следует, что E_∞ -алгебра $N^*(X)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть задано произвольное топологическое пространство X , и пусть $\{S(X)^n\}$ – фильтрация остовами симплициального множества $S(X)$ сингулярных симплексов этого топологического пространства. Тогда E_∞ -коалгебра $N(X)$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(S(X)^n)\}$ и, следовательно, E_∞ -алгебра $N^*(X)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(S(X))^{-n}\}$.

Рассмотрим один из способов введения фильтраций на $\mathcal{E}$ -алгебрах и $\mathcal{L}$ -коалгебрах. Прямая проверка коммутативности соответствующих диаграмм показывает, что справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть задан любой морфизм $\mathcal{E}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$, где $\mathcal{E}$ -алгебра Y является $\mathcal{E}$ -алгеброй с фильтрацией $\{Y^n\}$. Тогда $\mathcal{E}$ -алгебра X является $\mathcal{E}$ -алгеброй с фильтрацией $\{X^n\}$, где $X^n = f^{-1}(Y^n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть задан любой морфизм $\mathcal{L}$ -коалгебр $f: X \rightarrow Y$, где $\mathcal{L}$ -коалгебра Y является $\mathcal{L}$ -коалгеброй с фильтрацией $\{Y^n\}$. Тогда $\mathcal{L}$ -коалгебра X является $\mathcal{L}$ -коалгеброй с фильтрацией $\{X^n\}$, где $X^n = f^{-1}(Y^n)$.

Предложения 5.2 и 5.3 дают примеры E_∞ -(ко)алгебр с фильтрациями, которые возникают при рассмотрении цепных отображений, индуцированных отображениями симплициальных множеств. Действительно, так как каждое отображение симплициальных множеств $f: X \rightarrow Y$ индуцирует морфизм E_∞ -коалгебр $N(f): N(X) \rightarrow N(Y)$ и так как $N(f)^{-1}(N(Y^n)) = N(f^{-1}(Y^n))$, где $\{Y^n\}$ является фильтрацией симплициального множества Y его остовами, то из предложений 5.2 и 5.3 получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть задано любое отображение симплициальных множеств $f: X \rightarrow Y$, и пусть $\{Y^n\}$ – фильтрация симплициального множества Y его остовами. Тогда E_∞ -коалгебра $N(X)$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X)^n = N(f^{-1}(Y^n))\}$ и, следовательно, E_∞ -алгебра $N^*(X)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть задано любое непрерывное отображение топологических пространств $f: X \rightarrow Y$, и пусть $\{S(Y)^n\}$ – фильтрация остовами симплициального множества $S(Y)$ сингулярных симплексов топологического

пространства Y . Тогда E_∞ -коалгебра $N(X) = N(S(X))$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(X)^n = N(S(f)^{-1}(S(Y)^n))\}$ и, следовательно, E_∞ -алгебра $N^*(X)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(X)^{-n}\}$.

Рассмотрим теперь связь между $\mathcal{E}$ -алгебрами с фильтрациями и $D_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебрами над полями, где $(\mathcal{E}, \pi)$ – произвольная операда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Каждая заданная над полем $\mathcal{E}$ -алгебра X с фильтрацией однозначно определяет на градуированном модуле X структуру стабильной $D_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебры, для которой суммарная $\mathcal{E}$ -алгебра является $\mathcal{E}$ -алгеброй X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В § 2 было показано, что для каждого заданного над полем дифференциального модуля (X, d) с (1) -фильтрацией $\{X^n\}$ однозначно определен стабильный $D_\infty^{(1)}$ -модуль (X, d^{i+1}) . Так же как в § 2 обозначим через Z_X^k подмодуль градуированного модуля X^k , для которого $X^k = Z_X^k \oplus X^{k-1}$. Пусть над полем заданы произвольные дифференциальные модули X, Y соответственно с (1) -фильтрациями $\{X^n\}, \{Y^n\}$ и задан произвольный элемент $f \in \text{Hom}^f(X; Y)_n$. При помощи условия $f(X_\bullet^k) \subseteq Y_{\bullet+n}^{k+n}$ определим семейство отображений модулей $\{f^{-n+i}\} \in \text{hom}^{(1)}(X; Y)_n$, полагая

$$f^{-n+i} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{-n+i} : X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}, \quad i \geq 0,$$

где отображение $f_k^{-n+i} : (Z_X^k)_\bullet \rightarrow (Z_Y^{k-(n+i)})_{\bullet+n}$ является компонентой отображения модулей

$$f : (Z_X^k)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}^{k+n} = ((Z_Y^{k+n})_{\bullet+n} \oplus \dots \oplus (Z_Y^{k+n-i})_{\bullet+n} \oplus \dots).$$

Ясно, что $f = (f^{-n} + f^{-n+1} + \dots + f^{-n+i} + \dots)$. Прямыми вычислениями проверяется, что сопоставление отображению $f \in \text{Hom}^f(X; Y)_n$ семейства отображений $\{f^{-n+i}\} \in \text{hom}^{(1)}(X; Y)_n$ определяет отображение дифференциальных модулей $\text{Hom}^f(X; Y) \rightarrow \text{hom}^{(1)}(X; Y)$. В частности, для каждого заданного над полем дифференциального модуля X с (1) -фильтрацией определено отображение дифференциальных модулей $\text{Hom}^f(X^{\otimes j}; X) \rightarrow \text{hom}^{(1)}(X^{\otimes j}; X)$, $j \geq 1$, которое индуцирует морфизм операд $\mathcal{E}_X^f \rightarrow \mathcal{E}_X^{(1)}$. Пусть теперь над полем задана любая $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$, и пусть $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^f$ – морфизм операд, определяемый этой $\mathcal{E}$ -алгеброй с (1) -фильтрацией. Если рассмотреть стабильный $D_\infty^{(1)}$ -модуль (X, d^{i+1}) , соответствующий дифференциальному модулю (X, d) с (1) -фильтрацией $\{X^n\}$, и взять композицию указанных выше морфизмов операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^f$ и $\mathcal{E}_X^f \rightarrow \mathcal{E}_X^{(1)}$, то получим некоторый морфизм операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(1)}$, однозначно определяющий на $D_\infty^{(1)}$ -модуле (X, d^{i+1}) структуру стабильной $D_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебры (X, d^{i+1}, μ^i) . Ясно, что по построению суммарная $\mathcal{E}$ -алгебра для $D_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебры (X, d^{i+1}, μ^i) является исходной $\mathcal{E}$ -алгеброй (X, d, μ) .

Отметим теперь, что $\mathcal{E}$ -алгебры с фильтрациями, где $\mathcal{E}$ – произвольная операда, плохо приспособлены к построению спектральных последовательностей. Действительно, пусть задана любая $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$, где дифференциальные модули $\mathcal{E}(j)$, $j > 1$, не все сосредоточены в размерности 0, и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ – спектральная последовательность дифференциального модуля X с (1) -фильтрацией $\{X^n\}$. Так как

$$X_s^{n,m} = Z_{n-1,m+1}^s / (Z_{n-1,m+1}^{s-1} + d(Z_{n+s-1,m-s+2}^{s-1})),$$

где $Z_{n,m}^s = \{x \in X_{n+m}^n \mid d(x) \in X_{n+m-1}^{n-s}\}$, и так как легкая проверка показывает, что

$$\mu(\mathcal{E}(j)_n \otimes Z_{n_1, m_1}^s \otimes \cdots \otimes Z_{n_j, m_j}^s) \subseteq Z_{n_1 + \cdots + n_j + n, m_1 + \cdots + m_j - n}^1,$$

то при $s > 1$ структурное отображение μ в общем случае не индуцирует на членах спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ структур $\mathcal{E}$ -алгебр.

Покажем теперь, что для заданных над полем E_∞ -алгебр указанную выше трудность в построении структур E_∞ -алгебр на членах соответствующей спектральной последовательности можно преодолеть при помощи гомотопической техники $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр.

Пусть задана любая E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда градуированный модуль X является гомотопически коммутативной и гомотопически ассоциативной дифференциальной алгеброй (X, π) относительно умножения $\pi: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$, задаваемого формулой $\pi(x_1 \otimes x_2) = \mu(\cup_0 \otimes x_1 \otimes x_2)$, $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$, которую далее будем записывать в сокращенном виде $\pi = \mu(\cup_0)$. Так как для умножения дифференциальной алгебры (X, d, π) выполнено условие сохранения фильтрации $\pi(X^{n_1} \otimes X^{n_2}) \subseteq X^{n_1+n_2}$, то определена мультипликативная спектральная последовательность $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ дифференциальной алгебры (X, d, π) с фильтрацией $\{X^n\}$, где умножение π_s в члене X_s при $s \geq 2$ является коммутативным и ассоциативным. Если рассматриваемая E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$ задана над полем, то из теорем 2.1, 4.2 и предложения 5.5 получаем, что для указанной выше спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть над полем задана произвольная E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$, пусть (X, d, π) – соответствующая этой E_∞ -алгебре дифференциальная алгебра с фильтрацией, где $\pi = \mu(\cup_0)$, $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$, и пусть $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ – мультипликативная спектральная последовательность дифференциальной алгебры (X, d, π) с фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда*

1) *Для каждого номера $s \geq 1$ член X_{s+1} этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_{s+1}, d_{s+1}^{i+s}, \mu_{s+1}^i)$, где $d_{s+1}^s = 0$, которая связана со структурой дифференциальной алгебры $(X_{s+1}, d_{s+1}, \pi_{s+1})$ в этом члене равенствами $d_{s+1}^{s+1} = d_{s+1}$, $\mu_{s+1}^0(\cup_0) = \pi_{s+1}$. Структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры в члене X_{s+1} индуцирована при помощи следствия 4.2 структурой $D_\infty^{(s-1)}E_\infty$ -алгебры в члене X_s .*

2) *Если (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то E_∞ -алгебра гомологий $H(X_{s+1})$ стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_{s+1}, d_{s+1}^{i+s}, \mu_{s+1}^i)$ для каждого номера $s \geq 1$ A_∞ -изоморфна E_∞ -алгебре гомологий $H(X)$ данной E_∞ -алгебры (X, d, μ) .*

Введем понятие гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры. Пусть задана произвольная градуированная E_∞ -алгебра $(X, d = 0, \mu)$. Так как μ является отображением дифференциальных модулей, то дифференциал d операды E_∞ и структурное отображение μ операды E_∞ связаны между собой соотношением $\mu(d \times 1) = 0$. Рассмотрим на градуированном модуле X произвольный дифференциал $\partial: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, который, вообще говоря, никак не связан со структурным отображением μ . Тогда из соотношения $\mu(d \times 1) = 0$ следует, что отображения $\partial\mu$ и $\mu(1 \times \partial)$ являются отображениями степени (-1)

дифференциальных модулей

$$\partial\mu, \mu(1 \times \partial): ((E_\infty \times X)_\bullet, d \times 1) \rightarrow (X_{\bullet-1}, d = 0).$$

Так как отображения ∂ и μ , вообще говоря, между собой никак не связаны, то и отображения дифференциальных модулей $\partial\mu$ и $\mu(1 \times \partial)$ тоже, вообще говоря, между собой никак не связаны. Ясно, что если отображения $\partial\mu$ и $\mu(1 \times \partial)$ связаны равенством $\partial\mu = \mu(1 \times \partial)$, то для градуированной E_∞ -алгебры $(X, d = 0, \mu)$ тройка (X, ∂, μ) является дифференциальной E_∞ -алгеброй, удовлетворяющей дополнительному условию $\mu(d \times 1) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть заданы дифференциальный модуль (X, ∂) и градуированная E_∞ -алгебра $(X, d = 0, \mu)$. Тройку (X, ∂, μ) будем называть гомотопически дифференциальной E_∞ -алгеброй, если отображения дифференциальных модулей $\partial\mu, \mu(1 \times \partial): ((E_\infty \times X)_\bullet, d \times 1) \rightarrow (X_{\bullet-1}, d = 0)$ степени (-1) являются гомотопными, т.е. если между $\partial\mu$ и $\mu(1 \times \partial)$ найдется некоторая гомотопия $h: (E_\infty \times X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$, $h(d \times 1) = \partial\mu - \mu(1 \times \partial)$.

Примеры гомотопически дифференциальных E_∞ -алгебр можно получить при рассмотрении $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр (X, d^{i+s}, μ^i) , удовлетворяющих условию $d^s = 0$. В самом деле, из определения $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры получаем, учитывая условие $d^s = 0$, что тройка $(X, d^s = 0, \mu)$ является градуированной E_∞ -алгеброй, а пара (X, d^{s+1}) является дифференциальным модулем и, кроме того, выполнено соотношение $d^{s+1}\mu^0 = \mu^0(1 \times d^{s+1}) + \mu^1(d \times 1)$. Это соотношение, переписанное в виде

$$\mu^1(d \times 1) = d^{s+1}\mu^0 - \mu^0(1 \times d^{s+1}),$$

говорит о том, что отображение μ^1 является гомотопией между отображениями дифференциальных модулей $d^{s+1}\mu^0$ и $\mu^0(1 \times d^{s+1})$. Таким образом, для произвольной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) , удовлетворяющей условию $d^s = 0$, тройка (X, d^{s+1}, μ^0) является гомотопически дифференциальной E_∞ -алгеброй.

Так как каждая гомотопически дифференциальная E_∞ -алгебра (X, ∂, μ) удовлетворяет условию $\mu(d \times 1) = 0$, то для любой гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры (X, ∂, μ) всегда определена коммутативная и ассоциативная дифференциальная алгебра (X, ∂, π) , где $\pi = \mu(\cup_0)$, $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какая структура имеется на гомологиях $H(X) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры (X, ∂, μ) . Ответ на этот вопрос можно получить при помощи теории Гугенхейма, Ламбе и Шташеффа дифференциальных возмущений со структурой [14], [15]. В самом деле, если в качестве структуры в теории Гугенхейма, Ламбе и Шташеффа взять структуру градуированной E_∞ -алгебры и воспользоваться понятием B -конструкции для E_∞ -алгебры [13], а также учесть, что операда E_∞ , рассматриваемая как градуированная операда, является свободной операдой, то получим, аналогично тому как это было сделано в [16], следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Пусть над полем заданы произвольные дифференциальный модуль (X, ∂) и градуированная E_∞ -алгебра $(X, d = 0, \mu)$, структурные отображения ∂ и μ которых между собой, вообще говоря, никак не связаны. Тогда на модуле гомологий $H(X) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ имеется структура градуированной E_∞ -алгебры $(H(X), \partial_* = 0, \mu_*)$, для которой определена A_∞ -SDR-ситуация E_∞ -алгебр $(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \xi, \tilde{h})$, продолжающая гомологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, ∂) .

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Для любой заданной над полем гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры (X, ∂, μ) модуль гомологий $H(X) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ имеет структуру градуированной E_∞ -алгебры $(H(X), \partial_* = 0, \mu_*)$, для которой определена A_∞ -SDR-ситуация E_∞ -алгебр $(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \tilde{\xi}, \tilde{h})$, продолжающая гомотологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, ∂) .

Введем теперь понятие присоединенной E_∞ -алгебры для E_∞ -алгебры с фильтрацией. Пусть задана любая E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда для дифференциального модуля (X, d) с (1) -фильтрацией $\{X^n\}$ определен присоединенный дифференциальный модуль $(\tilde{X}, \tilde{d})$, где

$$\tilde{X}_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} X^n / X^{n-1}$$

и компоненты $(X^n / X^{n-1})_\bullet \rightarrow (X^{n-1} / X^{n-2})_{\bullet-1}$ дифференциала $\tilde{d}: \tilde{X}_\bullet \rightarrow \tilde{X}_{\bullet-1}$ индуцированы дифференциалом $d: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, $d(X^n) \subseteq X^{n-1}$. Прямая проверка показывает, что дифференциальный модуль $(\tilde{X}, \tilde{d})$ имеет структуру E_∞ -алгебры $(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{\mu})$, где структурное отображение $\tilde{\mu}: E_\infty \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ индуцировано структурным отображением $\mu: E_\infty \times X \rightarrow X$. Далее E_∞ -алгебру $(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{\mu})$ будем называть присоединенной E_∞ -алгеброй для E_∞ -алгебры (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$.

Без труда проверяется, что если E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$ задана над полем, то присоединенная E_∞ -алгебра $(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{\mu})$ и $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебра (X, d^{i+1}, μ^i) , соответствующие этой E_∞ -алгебре с фильтрацией, связаны между собой, с точностью до изоморфизма модулей, равенством E_∞ -алгебр

$$(\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{\mu}) = (X, d^1, \mu^0).$$

Из этого следует, что если для любой заданной над полем E_∞ -алгебры (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$ рассмотреть ее E_∞ -алгебру гомологий $(H(X), d = 0, \mu_*)$ с указанной в § 2 фильтрацией $\{H(X)^n = \text{Im}(H(X^n) \rightarrow H(X))\}$, то присоединенная E_∞ -алгебра $(\widetilde{H(X)}, \tilde{d} = 0, \tilde{\mu}_*)$ и $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебра $(H(X), d_*^{i+1} = 0, \mu_*^i)$, соответствующие E_∞ -алгебре $H(X)$ с фильтрацией $\{H(X)^n\}$, связаны между собой, с точностью до изоморфизма модулей, равенством градуированных E_∞ -алгебр

$$(\widetilde{H(X)}, \tilde{d} = 0, \tilde{\mu}_*) = (H(X), d_*^1 = 0, \mu_*^0).$$

Если теперь вспомнить, что для каждой $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебры (X, d^{i+1}, μ^i) определена E_∞ -алгебра (X, d^1, μ^0) и что для каждой $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) , $s \geq 1$, удовлетворяющей условию $d^s = 0$, определена гомотопически дифференциальная E_∞ -алгебра (X, d^{s+1}, μ^0) , то получим следующее утверждение, которое является важным частным случаем теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть над полем задана произвольная E_∞ -алгебра (X, d, μ) с фильтрацией $\{X^n\}$, пусть (X, d, π) – дифференциальная алгебра с фильтрацией $\{X^n\}$, соответствующая E_∞ -алгебре (X, d, μ) , где $\pi = \mu(\cup_0)$, $\cup_0 \in E_\infty(2)_0$, и пусть $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ – мультипликативная спектральная последовательность дифференциальной алгебры (X, d, π) с фильтрацией $\{X^n\}$. Тогда

1) Член X_1 спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ имеет структуру E_∞ -алгебры (X_1, d_1, μ_1) , которая связана с умножением π_1

в члене X_1 условием равенства дифференциальных алгебр $(X_1, d_1, \pi_1) = (X_1, d_1, \mu_1(\cup_0))$.

2) Для каждого номера $s \geq 2$ член X_s спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ имеет структуру гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры (X_s, d_s, μ_s) , которая связана с умножением π_s в члене X_s равенством дифференциальных алгебр $(X_s, d_s, \pi_s) = (X_s, d_s, \mu_s(\cup_0))$.

3) Структура градуированной E_∞ -алгебры $(X_2, d = 0, \mu_2)$ в члене X_2 индуцирована, в смысле гомотопической инвариантности, структурой E_∞ -алгебры в члене X_1 . Структура градуированной E_∞ -алгебры $(X_s, d = 0, \mu_s)$ в члене X_s для каждого $s \geq 3$ индуцирована в смысле предложения 5.6 и следствия 5.3 структурой гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры в члене X_{s-1} .

4) Если (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X является ограниченной снизу, то предельная градуированная E_∞ -алгебра (X_∞, μ_∞) является присоединенной E_∞ -алгеброй $(\widetilde{H(X)}, \widetilde{\mu}_*)$ для градуированной E_∞ -алгебры гомотопий $(H(X), \mu_*)$ с фильтрацией $\{H(X)^n\}$, $H(X)^n = \text{Im}(i^n: H(X^n) \rightarrow H(X))$, где отображение модулей i^n индуцировано отображением вложения $X^n \subseteq X$.

В заключение параграфа отметим, что утверждение теоремы 5.2 является обобщением на E_∞ -алгебры с фильтрациями классического утверждения из работы [1] о мультипликативной структуре в членах спектральных последовательностей дифференциальных алгебр с фильтрациями.

§ 6. D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений

В этом параграфе рассматриваются применения гомотопической техники стабильных $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебр к мультипликативным когомологическим спектральным последовательностям расслоений.

Пусть $p: E \rightarrow B$ – произвольное расслоение Серра и $\{S(B)^n\}$ – фильтрация остовами симплицального множества $S(B)$ сингулярных симплексов базы B этого расслоения. В силу следствия 5.2 E_∞ -коалгебра $N(E)$ является E_∞ -коалгеброй с фильтрацией $\{N(E)^n\}$, где $N(E)^n = N(S(p)^{-1}(S(B)^n))$, и, следовательно, E_∞ -алгебра $N^*(E)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(E)^{-n}\}$, $N^*(E)^{-n} = (N(E)/N(E)^n)^*$. Если E_∞ -алгебра $N^*(E)$ с фильтрацией $\{N^*(E)^{-n}\}$ задана над полем, то применяя к ней теорему 5.1, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $p: E \rightarrow B$ – любое расслоение Серра, $(N^*(E), d, \mu)$ – заданная над полем E_∞ -алгебра нормализованных коцепей тотального пространства этого расслоения, и пусть $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ – мультипликативная когомологическая спектральная последовательность данного расслоения. Тогда

1) Для каждого номера $s \geq 1$ член X_s этой спектральной последовательности имеет структуру стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \mu_s^i)$, которая связана со структурой дифференциальной алгебры (X_s, d_s, π_s) в этом члене равенствами $d_s^s = d_s$, $\mu_s^0(\cup_0) = \pi_s$. Структура $D_\infty^{(s+1)}E_\infty$ -алгебры в члене X_{s+1} индуцирована при помощи следствия 4.2 структурой $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры в члене X_s .

2) E_∞ -алгебра гомологий стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, \mu_s^i)$ для каждого номера $s \geq 1$ A_∞ -изоморфна E_∞ -алгебре когомологий $H^*(E)$ тотального пространства заданного расслоения.

Напомним теперь, что операда (E_∞, π) является операдой Хопфа [3], т.е. для операды (E_∞, π) в категории симметрических семейств имеется ассоциативное коумножение $\nabla: E_\infty \rightarrow E_\infty \otimes E_\infty$, где $(E_\infty \otimes E_\infty)(j) = E_\infty(j) \otimes E_\infty(j)$, $j \geq 1$, которое является морфизмом операд. Из этого следует, что для любых топологических пространств X и Y на тензорном произведении $N^*(X) \otimes N^*(Y)$ имеется структура E_∞ -алгебры, определяемая структурами E_∞ -алгебр на сомножителях этого тензорного произведения.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $p: E \rightarrow B$ – произвольное расслоение Серра со слоем F , где $\pi_0(B) = 0$, $\pi_1(B) = 0$, и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ – заданная над полем когомологическая спектральная последовательность этого расслоения. Тогда второй член X_2 , имеющий структуру $D_\infty^{(2)}E_\infty$ -алгебры $(X_2, d_2^{i+2}, \mu_2^i)$, является, если его рассматривать как градуированную E_∞ -алгебру (X_2, μ_2^0) , тензорным произведением E_∞ -алгебры когомологий базы $H^*(B)$ и E_∞ -алгебры когомологий слоя $H^*(F)$ данного расслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как гомотопические категории топологических пространств и симплициальных множеств являются эквивалентными [17], то доказательство теоремы достаточно провести в категории симплициальных множеств. Напомним, что указанную эквивалентность гомотопических категорий индуцируют функтор симплициального множества сингулярных симплексов топологического пространства и сопряженный ему функтор геометрической реализации симплициального множества, которые соответственно переводят расслоения Серра в расслоения Кана [11] и расслоения Кана в расслоения Серра [18]. Напомним еще [11], что каждое расслоение Кана симплициальных множеств $p: E \rightarrow B$ со слоем F и линейно связной базой B гомотопически эквивалентно симплициальной проекции $\text{pr}: F \times_\tau B \rightarrow B$, где $F \times_\tau B$ – скрученное декартово произведение симплициальных множеств F и B относительно скручивающей функции $\tau: B_\bullet \rightarrow \text{Aut}(F)_{\bullet-1}$. Из этого следует, что доказательство теоремы достаточно провести для когомологической спектральной последовательности скрученного декартова произведения симплициальных множеств [11].

Итак, пусть задано произвольное скрученное декартово произведение симплициальных множеств $F \times_\tau B$, где B является линейно связным и односвязным симплициальным множеством. Рассмотрим E_∞ -алгебру $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau, \mu)$ нормализованных коцепей симплициального множества $F \times_\tau B$. Если применить предложение 5.4 к симплициальной проекции $\text{pr}: F \times_\tau B \rightarrow B$, то получим, что E_∞ -алгебра $N^*(F \times_\tau B)$ является E_∞ -алгеброй с фильтрацией $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}_{n \geq 0}$, которая индуцирована фильтрацией $\{F \times_\tau B^n\}_{n \geq 0}$, где $\{B^n\}_{n \geq 0}$ – фильтрация симплициального множества B его остовами. Так как E_∞ -алгебра $N^*(F \times_\tau B)$ с фильтрацией $\{N^*(F \times_\tau B)^{-n}\}$ задана над полем, то однозначно определена соответствующая ей $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебра $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^{i+1}, \mu^i)$ и, в частности, определена E_∞ -алгебра $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \mu^0)$. Аналогично, если рассмотреть декартово произведение указанных выше симплициальных множеств $F \times B$ с фильтрацией $\{F \times B^n\}_{n \geq 0}$, где $\{B^n\}_{n \geq 0}$ – фильтрация симплициального множества B его остовами, то получим заданную

над полем $D_{\infty}^{(1)}E_{\infty}$ -алгебру $(N^*(F \times B), d^{i+1}, \mu^i)$ и, в частности, получим E_{∞} -алгебру $(N^*(F \times B), d^1, \mu^0)$. Заметим теперь, что E_{∞} -алгебры $N^*(F \times_{\tau} B)$ и $N^*(F \times B)$ с указанными выше фильтрациями совпадают как градуированные E_{∞} -алгебры с фильтрациями. Из этого получаем равенство $(N^*(F \times_{\tau} B), \mu^0) = (N^*(F \times B), \mu^0)$ градуированных E_{∞} -алгебр. Обозначим градуированный модуль $N^*(F \times_{\tau} B) = N^*(F \times B)$ через X . Тогда для градуированной E_{∞} -алгебры (X, μ^0) имеем две дифференциальные градуированные E_{∞} -алгебры (X, d_{τ}^1, μ^0) и (X, d^1, μ^0) .

Покажем, что дифференциальные модули (X, d_{τ}^1) и (X, d^1) являются гомотопически эквивалентными. Для этого напомним [19], [11], что для рассматриваемого скрученного декартова произведения $F \times_{\tau} B$ имеется SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}) \rightleftharpoons (N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*}),$$

где $(N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*})$ – скрещенное тензорное произведение относительно скрещивающей коцепи $\varphi^*: N^*_{\bullet}(\text{Aut}(F)) \rightarrow N^*_{\bullet-1}(B)$, которая соответствует скручивающей функции $\tau: B_{\bullet} \rightarrow \text{Aut}(F)_{\bullet-1}$. Если рассмотреть на дифференциальных модулях $N^*(F \times_{\tau} B)$ и $N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B)$ соответственно указанную выше фильтрацию $\{N^*(F \times_{\tau} B)^{-n}\}$ и фильтрацию $\{(N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B))^{-n}\}$, где

$$(N^*(F \otimes_{\varphi^*} N^*(B)))_{-k}^{-n} = \bigoplus_{m \leq n} N^*_{-k+m}(F) \otimes N^*_{-m}(B),$$

то SDR-ситуация $(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}) \rightleftharpoons (N^*(F) \otimes_{\varphi^*} N^*(B), d_{\varphi^*})$, как показано в [19], [11], является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с фильтрациями. От этой SDR-ситуации перейдем к SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}),$$

где $\tilde{\varphi}^*$ является A_{∞} -скрещивающей коцепью [20], [21], которая соответствует скрещивающей коцепи φ^* . Легко видеть, что SDR-ситуация дифференциальных модулей $(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*})$, рассматриваемая относительно фильтраций $\{N^*(F \times_{\tau} B)^{-n}\}$ и $\{(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B))^{-n}\}$, где

$$(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B))_{-k}^{-n} = \bigoplus_{m \leq n} H^*_{-k+m}(F) \otimes N^*_{-m}(B),$$

является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями. Так как все рассматриваемые здесь модули заданы над полем, то SDR-ситуация дифференциальных модулей $(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*})$ с (1)-фильтрациями однозначно определяет SDR-ситуацию $D_{\infty}^{(1)}$ -модулей

$$(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}^{i+1}) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}^{i+1}).$$

В частности, определена SDR-ситуация дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}^1) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}^1),$$

которую можно переписать в виде SDR-ситуации дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times_{\tau} B), d_{\tau}^1) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d),$$

поскольку $(H^*(F) \otimes_{\tilde{\varphi}^*} N^*(B), d_{\tilde{\varphi}^*}^1) = (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d)$. Применяя аналогичные рассуждения к SDR-ситуации Эйленберга–Зильбера для нормализованных коцепных комплексов с фильтрациями, получим SDR-ситуацию дифференциальных модулей:

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d).$$

При помощи последних двух рассмотренных SDR-ситуаций дифференциальных модулей получаем для дифференциальных модулей (X, d_τ^1) и (X, d^1) взаимнообратные гомотопические эквивалентности

$$(X = N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1) \rightleftharpoons (X = N^*(F \times B), d^1).$$

Таким образом, для определенных выше E_∞ -алгебр (X, d_τ^1, μ^0) и (X, d^1, μ^0) дифференциальные модули (X, d_τ^1) и (X, d^1) гомотопически эквивалентны.

Покажем теперь, что E_∞ -алгебры (X, d_τ^1, μ^0) и (X, d^1, μ^0) являются A_∞ -гомотопически эквивалентными E_∞ -алгебрами. Для этого рассмотрим B -конструкции $B_V(X, d_\tau^1, \mu^0)$ и $B_V(X, d^1, \mu^0)$ [13] E_∞ -алгебр (X, d_τ^1, μ^0) и (X, d^1, μ^0) как бикомплексы, у которых первый дифференциал определяется отображением μ^0 , а второй дифференциал определяется соответственно отображениями d_τ^1 и d^1 . Если вычислить спектральные последовательности бикомплексов $B_V(X, d_\tau^1, \mu^0)$ и $B_V(X, d^1, \mu^0)$, то получим, пользуясь гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей (X, d_τ^1) и (X, d^1) , что соответствующие градуированные модули гомологий $H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0))$ и $H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0))$ являются A_∞ -изоморфными A_∞ -коалгебрами над кооперацией $B_V(E_\infty)$. Из этого следует, что ко- B -конструкции $F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0)))$ и $F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0)))$ [13] являются изоморфными $F_\wedge B_V(E_\infty)$ -алгебрами. Так как операда E_∞ , если рассматривать ее как градуированную операду, является свободной операдой, то стандартную гомотопическую эквивалентность симметрических семейств $E_\infty \rightarrow F_\wedge B_V(E_\infty)$ можно выбрать морфизмом операд. При помощи указанного морфизма операд получаем, что $F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0)))$ и $F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0)))$ имеют структуры E_∞ -алгебр и являются изоморфными E_∞ -алгебрами. Теперь заметим, что имеются гомотопические эквивалентности E_∞ -алгебр

$$\begin{aligned} F_\wedge B_V(X, d_\tau^1, \mu^0) &\rightleftharpoons F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0))), \\ F_\wedge B_V(X, d^1, \mu^0) &\rightleftharpoons F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0))), \end{aligned}$$

которые соответственно индуцированы A_∞ -гомотопическими эквивалентностями $B_V(X, d_\tau^1, \mu^0) \rightleftharpoons H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0))$ и $B_V(X, d^1, \mu^0) \rightleftharpoons H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0))$ A_∞ -коалгебр над кооперацией $B_V(E_\infty)$. При помощи указанных гомотопических эквивалентностей E_∞ -алгебр, учитывая изоморфность E_∞ -алгебр

$$F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d_\tau^1, \mu^0))), \quad F_\wedge(H_\bullet(B_V(X, d^1, \mu^0))),$$

получаем гомотопическую эквивалентность E_∞ -алгебр

$$F_\wedge B_V(X, d_\tau^1, \mu^0) \rightleftharpoons F_\wedge B_V(X, d^1, \mu^0).$$

Из этой гомотопической эквивалентности E_∞ -алгебр, пользуясь A_∞ -SDR-ситуациями E_∞ -алгебр $F_\wedge B_V(X, d_\tau^1, \mu^0) \rightleftharpoons (X, d_\tau^1, \mu^0)$ и $F_\wedge B_V(X, d^1, \mu^0) \rightleftharpoons (X, d^1, \mu^0)$, получаем, что дифференциальные E_∞ -алгебра $(X, d_\tau^1, \mu^0) = (N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \mu^0)$ и E_∞ -алгебра $(X, d^1, \mu^0) = (N^*(F \times B), d^1, \mu^0)$ являются A_∞ -гомотопически эквивалентными E_∞ -алгебрами.

Напомним теперь, что выше была построена SDR-ситуация дифференциальных модулей $(N^*(F \times B), d^1) \rightleftharpoons (H^*(F) \otimes N^*(B), 1 \otimes d)$, которая является, как легко видеть, естественной в функториальном смысле. Так как все дифференциальные модули рассматриваются над полем, то эта естественная SDR-ситуация определяет естественную SDR-ситуацию дифференциальных модулей

$$(N^*(F \times B), d^1) \rightleftharpoons (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes)$$

дифференциальных модулей, где $d^\otimes$ – стандартный дифференциал в тензорном произведении. Заметим теперь, что имеет место равенство дифференциальных модулей $(N(\Delta[n]), d) = (N(\Delta[n]), d^1)$, где $(N(\Delta[n]), d^1)$ – дифференциальный модуль, соответствующий нормализованному цепному комплексу $(N(\Delta[n]), d)$ стандартного n -мерного симплицального симплекса $\Delta[n]$, который рассматривается с фильтрацией $\{\Delta[n]^k\}_{k \geq 0}$ своими остовами. Из равенства дифференциальных модулей $(N(\Delta[n]), d) = (N(\Delta[n]), d^1)$ следует, как легко видеть, равенство дифференциальных модулей

$$(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d) = (N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1).$$

Здесь $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1)$ – дифференциальный модуль, соответствующий нормализованному цепному комплексу $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d)$ симплицального множества $\Delta[n] \times \Delta[n]$, которое рассматривается с фильтрацией $\{\Delta[n] \times \Delta[n]^k\}_{k \geq 0}$. При помощи равенства $(N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d) = (N(\Delta[n] \times \Delta[n]), d^1)$ указанная выше естественная SDR-ситуация $(N^*(F \times B), d^1) \rightleftharpoons (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes)$ дифференциальных модулей методом ациклических моделей стандартным образом продолжается до A_∞ -SDR-ситуации E_∞ -алгебр

$$(N^*(F \times B), d^1, \mu^0) \rightleftharpoons (N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes, \mu),$$

где $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes, \mu)$ – тензорное произведение E_∞ -алгебр $(N^*(F), d, \mu)$ и $(N^*(B), d, \mu)$. Из этой A_∞ -SDR-ситуации E_∞ -алгебр получаем, учитывая построенную выше A_∞ -гомотопическую эквивалентность E_∞ -алгебр $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \mu^0)$ и $(N^*(F \times B), d^1, \mu^0)$, что E_∞ -алгебры $(N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \mu^0)$ и $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes, \mu)$ являются A_∞ -гомотопически эквивалентными E_∞ -алгебрами.

Таким образом, член (X_1, d_1) когомологической спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ скрученного декартова произведения $F \times_\tau B$, где симплицальное множество B является линейно связным и односвязным, имеет структуру $D_\infty^{(1)} E_\infty$ -алгебры $(X_1, d_1^{i+1}, \mu_1^i) = (N^*(F \times_\tau B), d_\tau^{i+1}, \mu^i)$, для которой E_∞ -алгебра $(X_1, d_1 = d_1^1, \mu_1^0) = (N^*(F \times_\tau B), d_\tau^1, \mu^0)$ является A_∞ -гомотопически эквивалентной E_∞ -алгебре $(N^*(F) \otimes N^*(B), d^\otimes, \mu)$. Наличие этой A_∞ -гомотопической эквивалентности говорит о том, что член (X_2, d_2) спектральной последовательности $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ имеет структуру $D_\infty^{(2)} E_\infty$ -алгебры $(X_2, d_2^{i+2}, \mu_2^i)$, для которой градуированная E_∞ -алгебра (X_2, μ_2^0) является A_∞ -изоморфной тензорному произведению градуированных E_∞ -алгебр когомологий $H^*(B)$ и $H^*(F)$. Теперь вспомним, что начальная компонента любого A_∞ -изоморфизма градуированных E_∞ -алгебр всегда является изоморфизмом E_∞ -алгебр. Из этого получаем, что градуированная E_∞ -алгебра (X_2, μ_2^0) изоморфна тензорному произведению E_∞ -алгебры когомологий базы $H^*(B)$ и E_∞ -алгебры когомологий слоя $H^*(F)$ симплицального расслоения $\text{pr}: F \times_\tau B \rightarrow B$.

Следующее утверждение о E_∞ -структуре в членах мультипликативной когомологической спектральной последовательности расслоения непосредственно следует из теорем 6.1 и 6.2.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $p: E \rightarrow B$ – произвольное расслоение Серра со слоем F , где $\pi_0(B) = 0$, $\pi_1(B) = 0$, пусть $(N^*(E), d, \mu)$ – заданная над полем E_∞ -алгебра нормализованных коцепей тотального пространства этого расслоения, и пусть $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ – мультипликативная когомологическая спектральная последовательность данного расслоения. Тогда

1) Член X_1 спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ имеет структуру E_∞ -алгебры (X_1, d_1, μ_1) , которая связана с умножением π_1 в члене X_1 условием равенства дифференциальных алгебр $(X_1, d_1, \pi_1) = (X_1, d_1, \mu_1(\cup_0))$.

2) Для каждого номера $s \geq 2$ член X_s спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$ имеет структуру гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры (X_s, d_s, μ_s) , которая связана с умножением π_s в члене X_s условием равенства дифференциальных алгебр $(X_s, d_s, \pi_s) = (X_s, d_s, \mu_s(\cup_0))$.

3) Структура градуированной E_∞ -алгебры $(X_2, d = 0, \mu_2)$ в члене X_2 индуцирована, в смысле гомотопической инвариантности, структурой E_∞ -алгебры в члене X_1 . Структура градуированной E_∞ -алгебры $(X_s, d = 0, \mu_s)$ в члене X_s для каждого $s \geq 3$ индуцирована, в смысле предложения 5.6 и следствия 5.3, структурой гомотопически дифференциальной E_∞ -алгебры в члене X_{s-1} .

4) Член X_2 спектральной последовательности $\{(X_s, d_s, \pi_s)\}_{s \geq 1}$, если его рассматривать как градуированную E_∞ -алгебру $(X_2, d = 0, \mu_2)$, изоморфен E_∞ -алгебре $H^*(B) \otimes H^*(F)$, являющейся тензорным произведением E_∞ -алгебр когомологий базы $H^*(B)$ и когомологий слоя $H^*(F)$ данного расслоения.

5) Предельная E_∞ -алгебра (X_∞, μ_∞) является присоединенной E_∞ -алгеброй для E_∞ -алгебры когомологий $H^*(E)$ тотального пространства данного расслоения с (1)-фильтрацией $\{H^*(E)^{-n}\}$, $H^*(E)^{-n} = \text{Im}(i^{-n}: H(N^*(E)^{-n}) \rightarrow H^*(X))$, где i^{-n} индуцировано отображением вложения $N^*(E)^{-n} \subseteq N^*(E)$.

В заключение параграфа отметим, что утверждение теоремы 6.3 является обобщением на E_∞ -алгебры с (1)-фильтрациями классического утверждения из работы [2] о мультипликативной структуре в членах когомологических спектральных последовательностей расслоений.

Список литературы

- [1] J. Leray, “L’anneau spectral et l’anneau filtré d’homologie d’un espace localement compact et d’une application continue”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **29** (1950), 1–139.
- [2] J.-P. Serre, “Homologie singulière des espaces fibrés. Applications”, *Ann. of Math.* (2), **54:3** (1951), 425–505.
- [3] В. А. Смирнов, “О коцепном комплексе топологических пространств”, *Матем. сб.*, **115(157):1(5)** (1981), 146–158; англ. пер.: V. A. Smirnov, “On the cochain complex of topological spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **43:1** (1982), 133–144.
- [4] В. А. Смирнов, “Гомотопическая теория коалгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49:6** (1985), 1302–1321; англ. пер.: V. A. Smirnov, “Homotopy theory of coalgebras”, *Math. USSR-Izv.*, **27:3** (1986), 575–592.
- [5] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002; англ. пер.: V. A. Smirnov, *Simplicial and operad methods in algebraic topology*, Transl. Math. Monogr., **198**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

- [6] С. В. Лапин, “Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 55–76; англ. пер.: S. V. Lapin, “Differential perturbations and D_∞ -differential modules”, *Sb. Math.*, **192**:11 (2001), 1639–1659.
- [7] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные A_∞ -алгебры и спектральные последовательности”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 119–142; англ. пер.: S. V. Lapin, “ D_∞ -differential A_∞ -algebras and spectral sequences”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 119–142.
- [8] С. В. Лапин, “ $(DA)_\infty$ -модули над $(DA)_\infty$ -алгебрами и спектральные последовательности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 103–130; англ. пер.: S. V. Lapin, “ $(DA)_\infty$ -modules over $(DA)_\infty$ -algebras and spectral sequences”, *Izv. Math.*, **66**:3 (2002), 543–568.
- [9] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциалы и A_∞ -структуры в спектральных последовательностях”, *Соврем. матем. и ее прил.*, **1** (2003), 56–91; англ. пер.: S. V. Lapin, “ D_∞ -differentials and A_∞ -structures in spectral sequences”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **123**:4 (2004), 4221–4254.
- [10] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и мультипликативные спектральные последовательности”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 75–108; англ. пер.: S. V. Lapin, “ D_∞ -differential E_∞ -algebras and multiplicative spectral sequences”, *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1627–1658.
- [11] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1967.
- [12] В. А. Смирнов, “Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 80–96; англ. пер.: V. A. Smirnov, “Homology of B -constructions and of co- B -constructions”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 79–95.
- [13] В. А. Смирнов, “Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 121–154; англ. пер.: V. A. Smirnov, “Lie algebras over operads and their applications in homotopy theory”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 549–580.
- [14] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, “Perturbation theory in differential homological algebra. I”, *Illinois J. Math.*, **33**:4 (1989), 566–582.
- [15] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, J. D. Stasheff, “Perturbation theory in differential homological algebra. II”, *Illinois J. Math.*, **35**:3 (1991), 357–373.
- [16] V. K. A. M. Gugenheim, J. D. Stasheff, “On perturbations and A_∞ -structures”, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A*, **38** (1986), 237–246.
- [17] D. G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., **43**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [18] П. Габриель, М. Цисман, *Категории частных и теория гомотопий*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [19] E. H. Brown, jr., “Twisted tensor products. I”, *Ann. of Math. (2)*, **69**:1 (1959), 223–240.
- [20] Т. В. Кадеишвили, “К теории гомологий расслоенных пространств”, *УМН*, **35**:3 (1980), 183–188; англ. пер.: T. V. Kadeishvili, “On the homology theory of fibre spaces”, *Russian Math. Surveys*, **35**:3 (1980), 231–238.
- [21] В. А. Смирнов, “Гомологии расслоенных пространств”, *УМН*, **35**:3 (1980), 227–230; англ. пер.: V. A. Smirnov, “Homology of fibre spaces”, *Russian Math. Surveys*, **35**:3 (1980), 294–298.

С. В. Лапин (S. V. Lapin)

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск
E-mail: slapin@mail.ru

Поступила в редакцию
08.06.2006 и 29.06.2007