Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:30:21

УДК 514.763

А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов

Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка

Доказано, что любая проективная связность на n -мерном многообразии M определяется локально системой $\mathcal{S}$ из $n - 1$ разрешенных относительно старших производных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кубическими по первым производным правыми частями и каждая дифференциальная система $\mathcal{S}$ задает проективную связность на M . Введено понятие эквивалентности дифференциальных систем, и найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заменой переменных система $\mathcal{S}$ приводилась к системе, интегральные кривые которой являются прямыми линиями. Доказано, что группа симметрий дифференциальной системы $\mathcal{S}$ является группой проективных преобразований в n -мерном пространстве с ассоциированной проективной связностью и имеет размерность $r \leq n^2 + 2n$. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых система допускает максимальную группу симметрий, приведены базисные векторные поля и структурные уравнения максимальной алгебры Ли симметрий. В качестве приложения дана классификация систем $\mathcal{S}$ двух дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих трехмерные разрешимые группы симметрий.

Библиография: 22 названия.

Основы теории непрерывных групп преобразований заложил С. Ли, задавшись целью распространить методы теории Галуа разрешения алгебраических уравнений в радикалах на проблему интегрирования дифференциальных уравнений. Освоению глубоких идей С. Ли и Э. Нётер, связанных с приложениями групп Ли к дифференциальным уравнениям, посвящены работы Г. Биркгофа [1], Л. В. Овсянникова [2], Н. Х. Ибрагимова [3], [4], А. М. Виноградова, И. С. Красильщика, В. В. Лычагина [5], А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [6], Б. А. Дубровина, И. М. Кривевер, С. П. Новикова [7], В. С. Дрюмы [8], П. Олвера [9] и др.

Ли стремился придать симметриям дифференциальных уравнений отчетливый геометрический характер. Картан искал такое обобщение метрического пространства, которое позволило бы рассматривать интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка как геодезические линии обобщенного пространства. Создавая теорию пространств с проективной связностью, Картан подчеркивал ее значение в исследованиях

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00996)

дифференциальных уравнений. Методы дифференциальной геометрии, в частности методы теории Картана, позволяют развить систематический геометрический подход к определению и изучению локальных и нелокальных симметрий больших классов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными и нахождению их решений.

Основам такого подхода посвящена статья одного из авторов [10], в которой обсуждаются групповые свойства уравнений геодезических в пространствах с аффинной, в частности римановой, связностью. Любая точечная симметрия уравнений геодезических в таком пространстве является проективным преобразованием. С другой стороны, проективные преобразования римановых многообразий определяют симметрии гамильтоновых систем и преобразования Ли–Беклунда уравнений Гамильтона–Якоби с квадратичными гамильтонианами [10].

В настоящей статье изучаются групповые свойства систем разрешенных относительно старших производных дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями, кубическими относительно первых производных. Какого-либо предварительного предположения о наличии геометрической структуры (римановой, аффинной и т.п.) в пространстве зависимых и независимых переменных системы не делается. Мы устанавливаем закон преобразования системы при общей замене переменных (теорема 2.1) и показываем, что определенные комбинации коэффициентов системы преобразуются при такой замене как компоненты проективной связности. Замечательно, что каждая проективная связность, записанная в координатах, может быть получена таким образом: согласно теореме 2.2 любая проективная связность на n -мерном многообразии M определяется локально системой $\mathcal{S}$ $n - 1$ (разрешенных относительно вторых производных) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых являются полиномами третьей степени относительно производных неизвестных функций, и каждая дифференциальная система $\mathcal{S}$ задает (ассоциированную) проективную связность на M (§2). Иными словами, теория систем $\mathcal{S}$ дифференциальных уравнений есть теория проективных связностей.

В §3 вводится понятие об эквивалентных дифференциальных системах и находятся необходимые и достаточные условия того, чтобы заменой переменных дифференциальная система $\mathcal{S}$ приводилась к дифференциальной системе, интегральные кривые которой являются прямыми линиями и выражаются n линейными параметрическими уравнениями или $n - 1$ линейными уравнениями с постоянными коэффициентами (теоремы 3.3, 3.4). Отсюда при $n = 2$ следуют выведенные Трессе (1894) условия, которым должны удовлетворять коэффициенты дифференциального уравнения второго порядка с кубической относительно первой производной правой частью для того, чтобы оно было приводимо к виду $y'' = 0$.

В §4 обсуждаются проективные преобразования многообразий проективной связности, выводится формула для производной Ли параметров Томаса, устанавливается ее тензорный характер и анализируются условия интегрируемости

уравнений, определяющих проективное движение. В §5 рассматриваются инфинитезимальные симметрии систем $\mathcal{S}$ и доказывается, что группа симметрий дифференциальной системы $\mathcal{S}$ является группой проективных преобразований в n -мерном пространстве с ассоциированной проективной связностью и имеет размерность не больше $n^2 + 2n$ (теорема 5.2). В теореме 5.3 указываются необходимые и достаточные условия, при которых система допускает максимальную группу симметрий, приведены базисные векторные поля и структурные уравнения максимальной алгебры Ли симметрий. В качестве приложения в последнем параграфе дана классификация систем $\mathcal{S}$ двух дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих трехмерные разрешимые группы симметрий. Необходимые сведения о многообразиях проективной связности приведены в §1, где выводятся также важные тождества для тензора проективной кривизны.

§ 1. Проективная связность

Пусть f – отображение окрестности начала O в $\mathbb{R}^n$ в n -мерное гладкое многообразие $M^n \equiv M$. Если “склеить” все отображения f , которые имеют в O одинаковые частные производные порядков $l \leq k$, то получится k -струя $J_O^k(f)$ в O . Если f есть диффеоморфизм окрестности начала O на открытое подмножество из M , то k -струя $J_O^k(f)$ в O называется *репером k -го порядка* или *k -репером* в точке $x = f(O)$. Если h – диффеоморфизм окрестности точки O в $\mathbb{R}^n$ на окрестность точки O в $\mathbb{R}^n$, то множество k -реперов $J_O^k(h)$ в точке $O \in \mathbb{R}^n$ образует группу $G^k(n)$ с операцией умножения $J_O^k(h) \cdot J_O^k(h') = J_O^k(h \circ h')$. Множество $P^k(M)$ k -реперов многообразия M является главным расслоением над M с естественной проекцией $\pi: \pi(J_O^k(f)) = f(O)$ и структурной группой $G^k(n)$, действующей на $P^k(M)$ справа. Репер первого порядка есть обычный линейный репер, поэтому $G^1(n) = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, а $P^1(M)$ есть расслоение LM линейных реперов над M .

Расслоение $P^1(\mathbb{R}^n)$ линейных реперов над $\mathbb{R}^n$ изоморфно группе $\hat{A}(n, \mathbb{R})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, рассматриваемой как главное расслоение над $\mathbb{R}^n = \hat{A}(n, \mathbb{R})/\text{GL}(n, \mathbb{R})$ со структурной группой $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, при этом касательное пространство к $P^1(\mathbb{R}^n)$ в единице $e \equiv J_O^1(\text{id})$ отождествляется с касательным пространством к $\hat{A}(n, \mathbb{R})$ в e , т.е. с алгеброй Ли $A(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n + \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ группы $\hat{A}(n, \mathbb{R})$, где $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ – алгебра Ли группы $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Диффеоморфизм f окрестности начала O в $\mathbb{R}^n$ на окрестность точки $f(O) \in M$ индуцирует диффеоморфизм окрестности точки $e \in P^1(\mathbb{R}^n)$ на окрестность точки $J_O^1(f) \in P^1(M)$ и изоморфизм $\bar{f}$ касательного пространства $A(n, \mathbb{R}) = T_e(P^1(\mathbb{R}^n))$ на касательное пространство к $P^1(M)$ в $J_O^1(f)$. Каноническая $A(n, \mathbb{R})$ -значная 1-форма θ на $P^2(M)$ определяется условием $\theta(X) = \bar{f}^{-1}(X')$, где X – вектор, касательный к $P^2(M)$ в $J_O^2(f)$, а X' – его образ при морфизме $P^2(M) \rightarrow P^1(M)$, задаваемом соответствием $J_O^2(f) \rightarrow J_O^1(f)$. Каждый 2-репер u в $\mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде полинома

$$f(x) = \left(u^i + u_j^i x^j + \frac{1}{2} u_{jk}^i x^j x^k \right) e_i,$$

где $x = x^i e_i \in \mathbb{R}^n$ и $u_{jk}^i = u_{kj}^i$.¹ Набор (u^i, u_j^i, u_{jk}^i) определяет естественную систему координат в $P^2(\mathbb{R}^n)$, а его сужение $(u_j^i, u_{jk}^i) \equiv (s_j^i, s_{jk}^i)$ на $G^2(n)$ – естественную систему координат в $G^2(n)$. Аналогично вводятся естественные системы координат (u^i, u_j^i) в $P^1(\mathbb{R}^n)$ и (s_j^i) в $G^1(n)$.

Пусть (E_i, E_i^j) , где $E_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_e$, $E_i^j = \frac{\partial}{\partial u_j^i} \Big|_e$, – базис в $A(n, \mathbb{R})$. Каноническая форма θ на $P^2(\mathbb{R}^n)$ в локальных координатах имеет вид

$$\theta = \theta^i E_i + \theta_j^i E_i^j.$$

Если $\theta = (\theta^i, \theta_j^i)$ – каноническая форма на $P^2(M)$, то [11]

$$d\theta^i = -\theta_j^i \wedge \theta^j.$$

Пусть L – факторизованная по центру группа $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ и L_0 – факторизованная по центру группа матриц из $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ вида $\{(A, 0), (\xi, a)\}$, где $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, а ξ есть n -мерный вектор-строка. Пусть L/L_0 – вещественное проективное пространство размерности n . Будем рассматривать L_0 как подгруппу группы $G^2(n) = \{(a_j^i, a_{jk}^i)\}$. Главное подрасслоение Π расслоения $P^2(M)$ со структурной группой $L_0 \subset G^2(n)$ называется *проективной структурой* на M . Сужение (ω^i, ω_j^i) на Π канонической формы (θ^i, θ_j^i) расслоения $P^2(M)$ называется *канонической формой расслоения Π* .

Имеется единственная *связность Картана* $(\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$, кривизна которой

$$\Omega = (0, \Omega_j^i, \Omega_j), \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum_{k,l} K_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l,$$

удовлетворяет условию $K_{jil}^i = 0$. Эта связность называется *нормальной проективной связностью* [12]. В локальных координатах (x^i) нормальная проективная связность Картана задается *параметрами Томаса* $\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i$, $\Pi_{ik}^i = 0$, а ее кривизна – тензором Вейля проективной кривизны

$$W_{jkl}^i = \Pi_{jkl}^i + \frac{1}{n-1} (\delta_l^i \Pi_{jk} - \delta_k^i \Pi_{jl}), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{jkl}^i &= \partial_k \Pi_{jl}^i - \partial_l \Pi_{jk}^i + \Pi_{jl}^h \Pi_{hk}^i - \Pi_{jk}^h \Pi_{hl}^i, \\ \Pi_{jk} &= \Pi_{jhk}^h = \partial_s \Pi_{jk}^s - \Pi_{js}^h \Pi_{hk}^s = \Pi_{kj}, \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее всюду под проективной связностью понимается нормальная проективная связность.

Из (1.1), (1.2) следуют тождества

$$W_{jkl}^i = -W_{jlk}^i, \quad W_{jkl}^i + W_{klj}^i + W_{ljk}^i = 0.$$

Дифференцируя (1.1), получаем следующий результат.

¹Строчные латинские индексы здесь и далее принимают значения от 1 до n .

ТЕОРЕМА 1.1. Тензор Вейля проективной кривизны (1.1) удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \partial_m W_{jkl}^i + \partial_k W_{jlm}^i + \partial_l W_{jmk}^i + \Pi_{hm}^i W_{jkl}^h + \Pi_{hk}^i W_{jlm}^h + \Pi_{hl}^i W_{jmk}^h \\ & \quad - \Pi_{jm}^h W_{hkl}^i - \Pi_{jk}^h W_{hlm}^i - \Pi_{jl}^h W_{hmk}^i \\ & = \frac{1}{1-n} (A_{jkl} \delta_m^i + A_{jlm} \delta_k^i + A_{jmk} \delta_l^i), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где введено обозначение

$$A_{jkl} \equiv \partial_l \Pi_{jk} - \partial_k \Pi_{jl} + \Pi_{jk}^h \Pi_{hl} - \Pi_{jl}^h \Pi_{hk} = -A_{jlk}. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. При $n = 2$ тензор проективной кривизны W_{jkl}^i и правая часть равенства (1.3) тождественно равны нулю. При $n > 2$ из равенства $W_{jkl}^i = 0$ следует равенство $A_{jkl} = 0$.

Действительно, если $W_{jkl}^i = 0$, то, свертывая тождество (1.3) по $i = m$ и учитывая равенства $A_{jkl} = -A_{jlk}$, получаем $(n-2)A_{jkl} = 0$. Отсюда при $n > 2$ следует $A_{jkl} = 0$.

Будем называть гладкое многообразие M^n *многообразием* (или *пространством*) *проективной связности*, если в каждой карте (x, U) с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ задан набор гладких функций (параметров Томаса)

$$\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i, \quad \Pi_{ik}^i = 0,$$

преобразующихся при переходе от одной карты к другой по закону

$$\Pi_{j'k'}^{i'} = \Pi_{pq}^h \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h} - \frac{1}{n+1} \left(\delta_{j'}^{i'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{k'}} + \delta_{k'}^{i'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{j'}} \right), \quad (1.5)$$

где

$$\Delta = \det \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right). \quad (1.6)$$

Параметры Томаса определяют геометрический объект Π_{jk}^i , называемый *объектом проективной связности*, функции Π_{jk}^i называются *коэффициентами проективной связности*.

Проективная связность на многообразии M^n называется *плоской*, если в окрестности каждой точки $x \in M^n$ существуют координаты, называемые *проективными координатами*, в которых все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль:

$$\Pi_{jk}^i = 0.$$

Многообразие с плоской проективной связностью называется *плоским*.

Касательное пространство в каждой точке многообразия проективной связности есть обычное проективное пространство. Проективная связность задает точечное соответствие между касательными проективными пространствами, связанными с двумя бесконечно близкими точками. Если все компоненты

тензора проективной кривизны (1.1) многообразия проективной связности размерности $n > 2$ равны нулю, то многообразие плоское. Кривизна пространства определяет отклонение проективной связности Π_{jk}^i от плоской. Если тензор проективной кривизны отличен от нуля, то не существует координат, в которых во всех точках $\Pi_{jk}^i = 0$ (см. теорему 3.1, где рассмотрен также случай $n = 2$).

Гладкая кривая γ на многообразии M^n с проективной связностью Π_{jk}^i называется *геодезической*, если “при установлении соответствия между проекттивными пространствами, связанными с различными точками этой кривой, она дает прямую” [12]. Дифференциальные уравнения геодезических линий имеют вид [12]

$$\frac{d\omega^1 - \omega^1\omega_0^0 + \sum_{i=0}^n \omega^i\omega_i^1}{\omega^1} = \dots = \frac{d\omega^n - \omega^n\omega_0^0 + \sum_{i=0}^n \omega^i\omega_i^n}{\omega^n}$$

или

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

при условии, что t – канонический параметр.

Если проективная связность плоская, то в проективных координатах уравнения (1.7) принимают вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0.$$

Таким образом, в подходящих координатах геодезические линии n -мерного плоского пространства проективной связности выражаются n линейными параметрическими уравнениями (с каноническим параметром) или $n - 1$ линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

§ 2. Дифференциальные уравнения и проективная связность

Пусть M – дифференцируемое многообразие, (x^i) – локальные координаты на M , $x \in M$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{n^2}} + a_{\beta\gamma}(x) \frac{dx^\alpha}{dx^n} \frac{dx^\beta}{dx^n} \frac{dx^\gamma}{dx^n} + b_{\beta\gamma}^\alpha(x) \frac{dx^\beta}{dx^n} \frac{dx^\gamma}{dx^n} + c_\beta^\alpha(x) \frac{dx^\beta}{dx^n} + d^\alpha(x) = 0 \quad (2.1)$$

с $n - 1$ неизвестными функциями $x^1, \dots, x^{n-1}$ независимой переменной x^n , где $a_{\beta\gamma} = a_{\gamma\beta}$ и $b_{\beta\gamma}^\alpha = b_{\gamma\beta}^\alpha$ – произвольные функции от $x^1, \dots, x^n$ (здесь и далее греческие индексы принимают значения от 1 до $n - 1$). Определим величины Π_{jk}^i :

$$\begin{aligned} \Pi_{\beta\gamma}^\alpha &= b_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{1}{n+1}(b_{\delta\beta}^\alpha \delta_\gamma^\delta + b_{\delta\gamma}^\alpha \delta_\beta^\delta), & 2\Pi_{n\beta}^\alpha &= c_\beta^\alpha - \frac{1}{n+1}c_\delta^\delta \delta_\alpha^\beta, \\ \Pi_{\beta\gamma}^n &= -a_{\beta\gamma}, & \Pi_{nn}^\alpha &= d^\alpha, \\ \Pi_{n\gamma}^n &= -\frac{1}{n+1}b_{\delta\gamma}^\delta, & \Pi_{nn}^n &= -\frac{1}{n+1}c_\delta^\delta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как последние формулы можно однозначно разрешить относительно функций

$$a_{\beta\gamma} = -\Pi_{\beta\gamma}^n, \quad b_{\beta\gamma}^\alpha = \Pi_{\beta\gamma}^\alpha - \Pi_{n\gamma}^n \delta_{\beta}^\alpha - \Pi_{n\beta}^n \delta_{\gamma}^\alpha, \quad c_{\beta}^\alpha = 2\Pi_{n\beta}^\alpha - \Pi_{nn}^n \delta_{\beta}^\alpha, \quad d^\alpha = \Pi_{nn}^\alpha, \quad (2.3)$$

то между коэффициентами уравнения (2.1) и величинами Π_{jk}^i (2.2) существует взаимно однозначное соответствие.

Найдем закон преобразования уравнения (2.1) при общей замене переменных

$$x^i = x^i(x^{1'}(x^{n'}), \dots, x^{(n-1)'}(x^{n'}), x^{n'}),$$

где $i = 1, \dots, n$, $x^{n'}$ — новая независимая переменная, а $x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'}$ — новые неизвестные функции этой переменной. Подставив (2.3) в уравнение (2.1), приведем его к виду

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dx^{n^2}} + \left(\Pi_{jk}^\alpha - \frac{dx^\alpha}{dx^n} \Pi_{jk}^n \right) \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = 0 \quad (2.4)$$

или

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dx^{n^2}} + \Pi_{jk}^\alpha \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = \lambda \frac{dx^\alpha}{dx^n}, \quad (2.5)$$

$\alpha = 1, \dots, n-1$, $j, k = 1, \dots, n$, где λ определено равенством

$$\Pi_{jk}^n \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = \lambda, \quad (2.6)$$

которое можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{d^2 x^n}{dx^{n^2}} + \Pi_{jk}^n \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = \lambda \frac{dx^n}{dx^n}. \quad (2.7)$$

Из (2.5), (2.7) имеем

$$\frac{d^2 x^i}{dx^{n^2}} + \Pi_{jk}^i \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = \lambda \frac{dx^i}{dx^n}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

затем из (2.6), (2.8) выводим уравнение

$$\frac{d^2 x^i}{dx^{n^2}} + \left(\Pi_{jk}^i - \frac{dx^i}{dx^n} \Pi_{jk}^n \right) \frac{dx^j}{dx^n} \frac{dx^k}{dx^n} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

равносильное (2.1). Подставив в (2.9) выражения

$$\frac{dx^i}{dx^n} = \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^n}, \quad \frac{d^2 x^i}{dx^{n^2}} = \frac{\dot{x}^n \ddot{x}^i - \dot{x}^i \ddot{x}^n}{(\dot{x}^n)^3}$$

(точка над x означает дифференцирование по $x^{n'}$, так что $\ddot{x}^{n'} = 0$), получим равенство

$$\dot{x}^n (\ddot{x}^i + \Pi_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k) - \dot{x}^i (\ddot{x}^n + \Pi_{jk}^n \dot{x}^j \dot{x}^k) = 0,$$

из которого следует

$$\ddot{x}^i + \Pi_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = \lambda' \dot{x}^i. \quad (2.10)$$

Введем обозначения

$$A_{k'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad A_k^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

и, подставив $\dot{x}^i = A_{l'}^i \dot{x}^{l'}$, $\ddot{x}^i = \dot{x}^{k'} \dot{x}^{l'} \partial_{k'} A_{l'}^i + A_{l'}^i \ddot{x}^{l'}$ в уравнение (2.10), умножим его на $A_i^{i'}$ и просуммируем по i :

$$\ddot{x}^{i'} + (\Pi_{pq}^h A_h^{i'} A_j^p A_{k'}^q + A_h^{i'} \partial_{k'} A_{j'}^h) \dot{x}^{k'} \dot{x}^{j'} = \lambda' \dot{x}^{i'}.$$

Положив здесь $i' = n'$, найдем

$$\lambda' = (\Pi_{pq}^h A_h^{n'} A_j^p A_{k'}^q + A_h^{n'} \partial_{k'} A_{j'}^h) \dot{x}^{k'} \dot{x}^{j'}.$$

Из двух последних выражений получим преобразованное уравнение (2.9), отнесенное к переменным $x^{i'}$:

$$\ddot{x}^{i'} + (\Pi_{pq}^h A_h^{i'} A_j^p A_{k'}^q + A_h^{i'} \partial_{k'} A_{j'}^h - \dot{x}^{i'} (\Pi_{pq}^h A_h^{n'} A_j^p A_{k'}^q + A_h^{n'} \partial_{k'} A_{j'}^h)) \dot{x}^{k'} \dot{x}^{j'} = 0.$$

При $i' = n'$ это уравнение обращается в тождество, а при $i' = \alpha'$ его можно записать в форме

$$\ddot{x}^{\alpha'} + a_{\beta'\gamma'}(x') \dot{x}^{\alpha'} \dot{x}^{\beta'} \dot{x}^{\gamma'} + b_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(x') \dot{x}^{\beta'} \dot{x}^{\gamma'} + c_{\beta'}^{\alpha'}(x') \dot{x}^{\beta'} + d^{\alpha'}(x') = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\beta'\gamma'} &= -\Pi_{pq}^h A_h^{n'} A_{\beta'}^p A_{\gamma'}^q - A_h^{n'} \partial_{\beta'} A_{\gamma'}^h, \\ b_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} &= \Pi_{pq}^h A_h^{\alpha'} A_{\beta'}^p A_{\gamma'}^q + A_h^{\alpha'} \partial_{\beta'} A_{\gamma'}^h - \Pi_{pq}^h A_h^{n'} A_{n'}^p (\delta_{\beta'}^{\alpha'} A_{\gamma'}^q + \delta_{\gamma'}^{\alpha'} A_{\beta'}^q) \\ &\quad - \delta_{\beta'}^{\alpha'} A_h^{n'} \partial_{\gamma'} A_{n'}^h - \delta_{\gamma'}^{\alpha'} A_h^{n'} \partial_{\beta'} A_{n'}^h, \\ c_{\beta'}^{\alpha'} &= 2\Pi_{pq}^h A_h^{\alpha'} A_{n'}^p A_{\beta'}^q + 2A_h^{\alpha'} \partial_{n'} A_{\beta'}^h - \delta_{\beta'}^{\alpha'} (\Pi_{pq}^h A_h^{n'} A_{n'}^p A_{n'}^q + A_h^{n'} \partial_{n'} A_{n'}^h), \\ d^{\alpha'} &= \Pi_{pq}^h A_h^{\alpha'} A_{n'}^p A_{n'}^q + A_h^{\alpha'} \partial_{n'} A_{n'}^h, \quad A_{k'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad A_k^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Пользуясь этими равенствами, составим в новых переменных по формулам (2.2) величины $\Pi_{j'k'}^{i'}$ и найдем закон их преобразования:

$$\Pi_{j'k'}^{i'} = \Pi_{pq}^h A_h^{i'} A_j^p A_{k'}^q + A_h^{i'} \partial_{k'} A_{j'}^h - \frac{1}{n+1} (\delta_{j'}^{i'} A_h^{l'} \partial_{k'} A_{l'}^h + \delta_{k'}^{i'} A_h^{l'} \partial_{j'} A_{l'}^h). \quad (2.13)$$

Из полученных результатов следует вывод:

ТЕОРЕМА 2.1. *При общей замене переменных*

$$x^i = x^i(x^{1'}(x^{n'}), \dots, x^{(n-1)'}(x^{n'}), x^{n'}),$$

где $x^{n'}$ – новая независимая переменная, а $x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'}$ – новые неизвестные функции этой переменной, форма уравнения (2.1) не меняется, новые коэффициенты $a_{\beta'\gamma'}, b_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}, c_{\beta'}^{\alpha'}, d^{\alpha'}$ в преобразованном уравнении (2.11) выражаются через старые коэффициенты $a_{\beta\gamma}, b_{\beta\gamma}^{\alpha}, c_{\beta}^{\alpha}, d^{\alpha}$ по формулам (2.12), в которых следует заменить величины Π_{pq}^h выражениями (2.2). При этом величины Π_{jk}^i преобразуются по закону (2.13).

Сравнивая (1.5), (2.13) и учитывая равенства $A_h^{l'} \partial_{k'} A_{l'}^h = \partial_{k'} \ln |\Delta|$, видим, что величины Π_{jk}^i (2.2), составленные для уравнения (2.1), являются координатами объекта проективной связности, т.е. параметрами Томаса (§1). Поскольку коэффициенты уравнения (2.1) могут задаваться произвольно и, как показано выше, между этими коэффициентами и параметрами Томаса Π_{jk}^i существует взаимно однозначное соответствие, мы приходим к заключению:

ТЕОРЕМА 2.2. *Любая проективная связность Π_{jk}^i на многообразии M определяется локально системой дифференциальных уравнений (2.1), и каждая дифференциальная система (2.1) задает проективную связность (2.2).*

Иными словами, теория проективных связностей есть теория дифференциальных уравнений вида (2.1). Для определенности будем далее называть проективную связность (2.2) ассоциированной с дифференциальной системой (2.1).

§ 3. Эквивалентность дифференциальных систем

Назовем две дифференциальные системы вида (2.1) эквивалентными, если существует замена переменных, при которой одна система переходит в другую. Если $a_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}^\alpha$, c_β^α , d^α и $a_{\beta'\gamma'}$, $b_{\beta'\gamma'}^\alpha$, $c_{\beta'}^\alpha$, $d^{\alpha'}$ – коэффициенты уравнения (2.1) в координатах (x^i) и $(x^{i'})$ соответственно, то выполняются условия (2.12), (2.2) или эквивалентное им уравнение (2.13), равносильное (1.5). Умножая последнее уравнение на $\frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}$ и суммируя по i' , получаем

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} = \Pi_{j'k'}^{m'} \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} - \Pi_{pq}^r \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \tau_{k'} + \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \tau_{j'} \right) \quad (3.1)$$

и аналогичное равенство

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{l'}} = \Pi_{j'l'}^{m'} \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} - \Pi_{pq}^r \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{l'}} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \tau_{l'} + \frac{\partial x^r}{\partial x^{l'}} \tau_{j'} \right),$$

где

$$\tau_{k'} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^s} = \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{k'}}$$

(см. (1.6)). Если продифференцировать первое равенство по $x^{l'}$, второе – по $x^{k'}$ и затем исключить из них $\frac{\partial^3 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'} \partial x^{l'}}$, то полученное соотношение можно будет записать в виде

$$\Pi_{j'l'k'}^{i'} - \Pi_{psq}^r \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} + \delta_{l'}^{i'} T_{j'k'} - \delta_{k'}^{i'} T_{j'l'} = 0, \quad (3.2)$$

где Π_{jkl}^i определено формулой (1.2) и введено обозначение

$$(n+1)T_{j'k'} = \Pi_{j'k'}^{m'} \tau_{m'} - \frac{\partial \tau_{j'}}{\partial x^{k'}} + \frac{1}{n+1} \tau_{j'} \tau_{k'}. \quad (3.3)$$

Свертывая (3.2) по $i' = k'$, находим

$$T_{j'l'} = \frac{1}{n-1} \left(\Pi_{ps} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{l'}} - \Pi_{j'l'} \right), \quad (3.4)$$

где, как и раньше, $\Pi_{jk} = \Pi_{jhk}^h$. С учетом этого равенства выражение (3.2) примет вид

$$W_{j'k'l'}^{i'} = W_{qrs}^p \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{l'}},$$

где W_{jkl}^i – тензор Вейля проективной кривизны (1.1) ассоциированной проективной связности Π_{jk}^i .

Рассмотрим условия, при которых уравнение (3.1) допускает n независимых решений $x^i = f^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, с помощью которых системы коэффициентов $(a_{\beta\gamma}, \dots)$, $(a_{\beta'\gamma'}, \dots)$ уравнений (2.1) и (2.11) преобразуются одна в другую.

Если положить

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = v_{l'}^i, \quad (3.5)$$

то равенства (3.1) примут вид

$$\frac{\partial v_{j'}^r}{\partial x^{k'}} = \Pi_{j'k'}^{m'} v_{m'}^r - \Pi_{pq}^r v_{j'}^p v_{k'}^q + \frac{1}{n+1} (v_{j'}^r \tau_{k'} + v_{k'}^r \tau_{j'}). \quad (3.6)$$

Из (3.3), (3.4) имеем

$$\frac{\partial \tau_{j'}}{\partial x^{k'}} = \Pi_{j'k'}^{m'} \tau_{m'} + \frac{1}{n+1} \tau_{j'} \tau_{k'} - \frac{n+1}{n-1} (\Pi_{ps} v_{j'}^p v_{k'}^s - \Pi_{j'k'}). \quad (3.7)$$

Таким образом, задача сводится к определению $n(n+2)$ функций x^r , $v_{l'}^i$, $\tau_{k'}$ от n переменных $x^{1'}, \dots, x^{n'}$, удовлетворяющих уравнениям (3.5)–(3.7). Условия интегрируемости уравнений (3.5) выполняются тождественно вследствие (3.6), а условия интегрируемости уравнений (3.6) и (3.7) имеют соответственно вид

$$W_{j'k'l'}^{i'} v_{l'}^p - W_{qrs}^p v_{j'}^q v_{k'}^r v_{l'}^s = 0, \quad (3.8)$$

$$\tau_{s'} W_{j'l'k'}^{s'} + \frac{n+1}{n-1} (A_{j'k'l'} - A_{pqs} v_{j'}^p v_{k'}^q v_{l'}^s) = 0. \quad (3.9)$$

Если решение существует, то оно содержит не более $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Таким образом, *общее преобразование $(x^i) \rightarrow (x^{i'})$ дифференциальной системы (2.1) в другую дифференциальную систему* (того же вида, см. теорему 2.1) *содержит не более $n(n+2)$ произвольных постоянных.*

Число $n(n+2)$ достигается в том и только том случае, когда условия (3.8), (3.9) выполняются тождественно. В противном случае следует учитывать условия, которые получаются дифференцированием уравнений (3.8), (3.9) и заменой первых производных выражениями из (3.6), (3.7).

В случае $n = 2$ тензор Вейля тождественно равен нулю и (3.9) сводится к равенству

$$A_{j'k'l'} = A_{pqs} v_{j'}^p v_{k'}^q v_{l'}^s,$$

из которого следует, что *при $n = 2$ величины A_{jkl} являются компонентами ковариантного тензора.*

Рассмотрим, в частности, случай двух дифференциальных систем, для каждой из которых при $n > 2$ компоненты тензора Вейля ассоциированной проективной связности тождественно равны нулю: $W_{jkl}^i = W_{j'k'l'}^{i'} = 0$, и, следовательно, $A_{jkl} = A_{j'k'l'} = 0$ (см. замечание 1.1), а при $n = 2$ для обеих систем компоненты тензора A_{jkl} тождественно равны нулю. В этом случае условия (3.8), (3.9) выполняются тождественно и системы преобразуются одна в другую с помощью преобразования, содержащего $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Тензор Вейля W_{jkl}^i (соответственно тензор A_{jkl} при $n = 2$) тождественно равен нулю, если система уравнений (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dx^{n^2}} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

при этом $\Pi_{jk}^i = 0$ и многообразие проективной связности является плоским (§1). Тогда и для преобразованной дифференциальной системы (2.11) тензор $W_{j'k'l'}^{i'}$ (соответственно $A_{j'k'l'}$) должен равняться нулю. Мы приходим таким образом к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для того чтобы n -мерная проективная связность Π_{jk}^i была плоской, необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ компоненты ее тензора Вейля проективной кривизны (1.1) были равны нулю, а при $n = 2$ компоненты тензора A_{jkl} (1.4) равнялись нулю.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Для того чтобы дифференциальная система (2.1) была эквивалентна дифференциальной системе*

$$\frac{d^2 y^\alpha}{dt^2} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \quad t \equiv y^n, \quad (3.10)$$

т.е. заменой переменных $(x^i) \rightarrow (y^i)$ приводилась к виду (3.10), необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ компоненты тензора Вейля W_{jkl}^i (1.1) ассоциированной проективной связности Π_{jk}^i (2.2) равнялись нулю:

$$W_{jkl}^i = 0, \quad (3.11)$$

а при $n = 2$ компоненты тензора A_{jkl} (1.4) равнялись нулю:

$$A_{112} = A_{212} = 0, \quad (3.12)$$

соответствующее преобразование содержит $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Записывая с помощью формул (1.1), (1.4) и (2.2) условия (3.11), (3.12) и полагая при $n = 2$

$$x^1 = y, \quad x^2 = x, \quad a_{11} = a(x, y), \quad b_{11}^1 = b(x, y), \quad c_1^1 = c(x, y), \quad d^1 = d(x, y), \quad (3.13)$$

получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.3. Заменой переменных дифференциальная система (2.1) при $n > 2$ приводится к дифференциальной системе (3.10), интегральные кривые которой являются прямыми линиями и выражаются n линейными параметрическими уравнениями или $n - 1$ линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{aligned}
 (2n-1)c_{,\delta} - 2(n-2)b_{\delta,n} + (n+1)(c_{\rho}^{\sigma}b_{\sigma\delta}^{\rho} - c_{\delta,\alpha}^{\alpha} - b_{\sigma}c_{\delta}^{\sigma} + 2(n-2)a_{\delta\sigma}d^{\sigma}) &= 0, \\
 (n+1)\{2b_{\sigma}b_{\beta\gamma}^{\sigma} - ca_{\beta\gamma} + (n-2)(2a_{\beta\gamma,n} - c_{\beta}^{\sigma}a_{\sigma\gamma}) + 2b_{\beta\gamma,\sigma}^{\sigma} - 2b_{\beta\rho}^{\sigma}b_{\rho\gamma}^{\rho} + a_{\beta\sigma}c_{\gamma}^{\sigma}\} \\
 - 2(nb_{\beta,\gamma} + b_{\gamma,\beta}) &= 0, \\
 (n-1)(4d_{,\gamma}^{\alpha} - 2c_{\gamma,n}^{\alpha} + 4b_{\gamma\sigma}^{\alpha}d^{\sigma} - c_{\sigma}^{\alpha}c_{\gamma}^{\sigma}) + \delta_{\gamma}^{\alpha}(2c_{,n} + c_{\rho}^{\sigma}c_{\sigma}^{\rho} - 4b_{\sigma}d^{\sigma} - 4d_{,\sigma}^{\sigma}) &= 0, \\
 a_{\beta[\gamma,\delta]} + b_{\beta[\gamma}^{\sigma}a_{\delta]\sigma} &= 0, \\
 (n^2-1)(c_{\beta,\gamma}^{\alpha} - 2b_{\beta\gamma,n}^{\alpha} + b_{\gamma\sigma}^{\alpha}c_{\beta}^{\sigma} - b_{\beta\gamma}^{\sigma}c_{\sigma}^{\alpha} + 2d^{\alpha}a_{\beta\gamma}) \\
 + \delta_{\gamma}^{\alpha}\{(n+1)(b_{\beta\rho}^{\sigma}c_{\sigma}^{\rho} - c_{\beta,\sigma}^{\sigma} - b_{\sigma}c_{\beta}^{\sigma} - 2a_{\beta\sigma}d^{\sigma}) + 2nb_{\beta,n} + c_{,\beta}\} \\
 + (n-1)\delta_{\beta}^{\alpha}(2b_{\gamma,n} - c_{,\gamma}) &= 0, \\
 2(n^2-1)(2b_{\beta[\delta,\gamma]}^{\alpha} + 2b_{\beta[\delta}^{\sigma}b_{\gamma]\sigma}^{\alpha} - a_{\beta[\delta}c_{\gamma]}^{\alpha}) + \delta_{\gamma}^{\alpha}K_{\beta\delta} - \delta_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\gamma} + 4(n-1)\delta_{\beta}^{\alpha}b_{[\gamma,\delta]} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

где использованы обозначения: $c = c_{\sigma}^{\sigma}$, $b_{\beta} = b_{\sigma\beta}^{\sigma}$,

$$\begin{aligned}
 K_{\beta\gamma} &= (n+1)(2a_{\beta\gamma,n} + ca_{\beta\gamma}) + 2(n+1)(b_{\beta\rho}^{\sigma}b_{\sigma\gamma}^{\rho} - b_{\beta\gamma,\sigma}^{\sigma} - b_{\beta\gamma}^{\sigma}b_{\sigma} - a_{\sigma(\beta}c_{\gamma)}^{\sigma}) \\
 &\quad + 2(nb_{\beta,\gamma} + b_{\gamma,\beta})
 \end{aligned}$$

(греческие индексы принимают значения от 1 до $n-1$, запятая означает частное дифференцирование, круглые скобки здесь и далее означают симметрирование, а квадратные – альтернирование: $2a_{(\beta\gamma)} = a_{\beta\gamma} + a_{\gamma\beta}$, $2a_{[\beta\gamma]} = a_{\beta\gamma} - a_{\gamma\beta}$).

ТЕОРЕМА 3.4. Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + b(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + c(x, y)\frac{dy}{dx} + d(x, y) = 0$$

заменой переменных $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ приводится к уравнению

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2} = 0
 \tag{3.15}$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{aligned}
 3\frac{\partial^2 d}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + 3d\frac{\partial b}{\partial y} + 3b\frac{\partial d}{\partial y} - 2c\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + c\frac{\partial b}{\partial x} - 6d\frac{\partial a}{\partial x} - 3a\frac{\partial d}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} - b\frac{\partial c}{\partial y} + 3d\frac{\partial a}{\partial y} + 6a\frac{\partial d}{\partial y} + 3\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial b}{\partial x} - 3c\frac{\partial a}{\partial x} - 3a\frac{\partial c}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Заметим, что, положив в (3.16) $a = -D$, $b = -3C$, $c = -3B$, $d = -A$, мы получим выведенные Трессе [13], [14] условия, которым должны удовлетворять коэффициенты дифференциального уравнения второго порядка с кубической по первой производной правой частью для того, чтобы оно было приводимо к виду (3.15); ср. Картан [12; VIII, п. 24], где в последней формуле допущена опечатка – вместо $3B\frac{\partial C}{\partial y}$ следует читать $3B\frac{\partial C}{\partial x}$.

§ 4. Проективные преобразования многообразий проективной связности

Проективное преобразование многообразия M^n проективной связности переводит геодезические снова в геодезические и сохраняет проективную связность подобно тому, как аффинное преобразование многообразия аффинной связности сохраняет аффинную связность.

Пусть Π и Π' – проективные структуры (§ 1) на многообразиях M и M' соответственно. Диффеоморфизм f из M в M' индуцирует изоморфизм

$$f_*: P^2(M) \rightarrow P^2(M').$$

Если f_* переводит Π в Π' , то f называется *проективным изоморфизмом* из M в M' .

Если диффеоморфизм f задается в локальных координатах набором функций $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$, а обратный диффеоморфизм f^{-1} – функциями $x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, то объект проективной связности $\tilde{\Pi}_{jk}^i$ на M' выражается через объект проективной связности Π_{jk}^i на M по формуле

$$\tilde{\Pi}_{j'k'}^{i'} = \Pi_{qr}^p \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} - \frac{1}{n+1} \left(\delta_{j'}^{i'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{k'}} + \delta_{k'}^{i'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{j'}} \right), \quad (4.1)$$

где $\Delta = \det \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right)$ – якобиан отображения f .

Если $M = M'$ и $\Pi = \Pi'$, то изоморфизм f называется *проективным преобразованием* в M или *автоморфизмом проективной структуры* Π .

Проективное преобразование сохраняет объект проективной связности, т.е. коэффициенты увлеченной связности $\tilde{\Pi}_{jk}^i$ в увлеченной изоморфизмом f системе координат совпадают с коэффициентами проективной связности Π_{jk}^i :

$$\tilde{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i.$$

Пусть M – дифференцируемое многообразие и $F_X(t)$ – локальный поток векторного поля X в окрестности точки $x \in M$, т.е. (локальная) 1-параметрическая группа (локальных) преобразований $\varphi_t: x^i \rightarrow x^{i'}(t) = e^{tX} x^i$. Дифференциал φ_{t*} преобразования $\varphi_t \in F_X(t)$ переводит каждый касательный вектор $Y \in T_{\varphi_t^{-1}(x)} M$ в касательный вектор $\varphi_{t*} Y \in T_x M$. Если

$$Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \varphi_{t*} Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то

$$\xi^i = \eta^l \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \Big|_{\varphi_t^{-1}(x)},$$

где x^i – координаты точки x , а y^i – координаты точки $\varphi_t^{-1}(x)$. Отображение φ_{t*} задает линейный изоморфизм касательных пространств $T_{\varphi_t^{-1}(x)} M$ и $T_x M$ и порождает отображение $\tilde{\varphi}_t$ множества геометрических объектов в точке $\varphi_t^{-1}(x)$ в множество геометрических объектов в точке x .

Пусть Π_{jk}^i – геометрический объект с законом преобразования (1.5), а

$$\tilde{\Pi}_{jk}^i(t) = \tilde{\varphi}_t \Pi_{jk}^i$$

– увлеченный геометрический объект:

$$(\tilde{\varphi}_t \Pi_{jk}^i)(x) = \tilde{\varphi}(\Pi_{jk}^i(\varphi_t^{-1}(x))).$$

Производная Ли геометрического объекта Ω определяется равенством

$$(L_X \Omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Omega_x - \tilde{\Omega}_x(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Omega_x - (\tilde{\varphi}_t \Omega)_x).$$

Пусть

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \xi^i \partial_i$$

в локальных координатах x^i . Так как $\varphi_t = \varphi_{-t}$, то, применяя формулу Тейлора и учитывая только члены первого порядка малости по t , получаем

$$x^{i'}(t) = x^i + t\xi^i, \quad \Pi_{pq}^l(\varphi_t^{-1}(x)) = \Pi_{pq}^l(x'(-t)) = \Pi_{pq}^l - t\xi^h \partial_h \Pi_{pq}^l.$$

Затем, пользуясь формулой (4.1), находим

$$\begin{aligned} (L_X \Pi_{jk}^i)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Pi_{jk}^i - \tilde{\varphi}_t \Pi_{jk}^i)(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \Pi_{jk}^i - \left[(\Pi_{pq}^l - t\xi^h \partial_h \Pi_{pq}^l)(\delta_j^p - t\partial_j \xi^p)(\delta_k^q - t\partial_k \xi^q)(\delta_l^i + t\partial_l \xi^i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - t\partial_{jk} \xi^i + \frac{t}{n+1} (\delta_j^i \partial_{hk} \xi^h + \delta_k^i \partial_{hj} \xi^h) \right] \right\} (x), \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} L_X \Pi_{jk}^i &= \xi^l \partial_l \Pi_{jk}^i - \Pi_{jk}^l \partial_l \xi^i + \Pi_{pk}^i \partial_j \xi^p + \Pi_{jq}^i \partial_k \xi^q + \partial_{jk} \xi^i \\ &\quad - \frac{1}{n+1} (\delta_j^i \partial_{hk} \xi^h + \delta_k^i \partial_{hj} \xi^h). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя обозначения

$$A_{k'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad A_k^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k},$$

условия $A_{j'}^i A_k^{j'} = \delta_k^i$, $A_j^{i'} A_{k'}^j = \delta_{k'}^{i'}$ и их дифференциальные следствия, а также легко проверяемое равенство

$$\partial_i \xi^i = \partial_{i'} \xi^{i'} + \xi^{l'} A_s^{h'} \partial_{l'} A_{h'}^s,$$

можно доказать, что производная Ли $L_X \Pi_{jk}^i$ при замене координат $x^{i'} = x^i(x^l)$ преобразуется по закону

$$(L_X \Pi_{jk}^i)' = (L_X \Pi_{pq}^r) A_r^{i'} A_j^p A_k^q,$$

т.е. является тензором.

Векторное поле X на многообразии M с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная 1-параметрическая группа преобразований состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры Π . Инфинитезимальное проективное преобразование называется также *проективным (киллинговым) векторным полем*.

Векторное поле X на M является проективным движением, если и только если все преобразования φ_t из потока $F_X(t)$ сохраняют проективную связность, т.е. если поле объекта проективной связности инвариантно при действии (локальной) 1-параметрической группы (локальных) преобразований, порожденной векторным полем X : $\tilde{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i$. Необходимое и достаточное условие этого состоит в обращении в нуль производной Ли объекта проективной связности:

$$\begin{aligned} L_X \Pi_{jk}^i &\equiv \xi^l \partial_l \Pi_{jk}^i - \Pi_{jk}^h \partial_h \xi^i + \Pi_{pk}^i \partial_j \xi^p + \Pi_{jq}^i \partial_k \xi^q + \partial_{jk} \xi^i \\ &\quad - \frac{1}{n+1} (\delta_j^i \partial_{hk} \xi^h + \delta_k^i \partial_{hj} \xi^h) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(см. [15], [16; т. 1]).

Так как производная Ли вдоль коммутатора $[X, Y]$ векторных полей X, Y равна коммутатору $[L_X, L_Y]$ производных Ли вдоль этих полей, то для любых двух проективных движений X и Y в M их скобка Ли $[X, Y]$ также является проективным движением. Поэтому *множество $P(M)$ всех проективных движений в M образует алгебру Ли*, называемую *проективной алгеброй Ли* в M .

Если $X = \xi^i \partial_i$ – проективное движение в M , то в каждой карте на M выполняются уравнения (4.3). Введем новые функции $u_j^i = \partial_j \xi^i$, $\sigma_k = \partial_{hk} \xi^h$ и запишем эти уравнения в виде следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} (a) \quad &\partial_j \xi^i = u_j^i, \\ (b) \quad &\partial_k u_j^i = \Pi_{jk}^h u_h^i - \Pi_{pk}^i u_j^p - \Pi_{jq}^i u_k^q - \xi^h \partial_h \Pi_{jk}^i + \frac{1}{n+1} (\delta_j^i \sigma_k + \delta_k^i \sigma_j), \end{aligned}$$

содержащей $n(n+2)$ неизвестных функций ξ^i , u_j^i и σ_k [17]. Условия интегрируемости уравнений (а) выполняются в силу уравнений (b). Свертывая условия интегрируемости $\partial_{kl} u_j^i = \partial_{lk} u_j^i$ уравнений (b) по индексам i, l , с помощью (b) находим

$$(c) \quad \partial_k \sigma_j = \Pi_{jk}^h \sigma_h - \frac{n+1}{n-1} (\Pi_{pk} u_j^p + \Pi_{jq} u_k^q + \xi^l \partial_l \Pi_{jk}),$$

где Π_{jk} определено формулой (1.2). С учетом последнего равенства условия интегрируемости уравнений (b) примут вид

$$L_X W_{jkl}^i \equiv \xi^h \partial_h W_{jkl}^i - W_{jkl}^h u_h^i + W_{hkl}^i u_j^h + W_{jhl}^i u_k^h + W_{jkh}^i u_l^h = 0, \quad (4.4)$$

где W_{jkl}^i – тензор проективной кривизны (1.1).

Условия интегрируемости уравнений (с): $\partial_{kl}\sigma_j = \partial_{lk}\sigma_j$, можно записать в виде

$$W_{jlk}^h \sigma_h = \frac{n+1}{n-1} (u_j^s A_{skl} + u_k^s A_{jsl} + u_l^s A_{jks} + \xi^s \partial_s A_{jkl}), \quad (4.5)$$

где A_{jkl} определено формулой (1.4).

Если условия интегрируемости (4.4), (4.5) выполняются тождественно, то решение зависит от $n^2 + 2n$ произвольных параметров. При этом многообразие проективной связности допускает проективную алгебру Ли максимальной размерности $n^2 + 2n$.

В случае $n = 2$ ввиду равенства нулю тензора Вейля равенство (4.4) превращается в тождество, а (4.5) сводится к условию

$$u_r^s (\delta_j^r A_{skl} + \delta_k^r A_{jsl} + \delta_l^r A_{jks}) + \xi^s \partial_s A_{jkl} = 0,$$

которое выполняется тождественно тогда и только тогда, когда $A_{jkl} = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} A_{112} &\equiv \partial_2 \Pi_{11} - \partial_1 \Pi_{12} + \Pi_{11}^h \Pi_{h2} - \Pi_{12}^h \Pi_{h1} = 0, \\ A_{212} &\equiv \partial_2 \Pi_{12} - \partial_1 \Pi_{22} + \Pi_{12}^h \Pi_{h2} - \Pi_{22}^h \Pi_{h1} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы условия интегрируемости системы уравнений (а), (б), (с) относительно $n(n+2)$ неизвестных функций ξ^i , u_j^i и σ_k выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ было верно равенство*

$$W_{jkl}^i = 0, \quad (4.7)$$

а при $n = 2$ – равенства (4.6).

Необходимость условия (4.7) при $n > 2$ следует из (4.4), а достаточность – из (4.4), (4.5) и замечания 1.1.

Ранее было показано, что при условиях (4.7) при $n > 2$ и (4.6) при $n = 2$ на многообразии M существуют координаты, в которых все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль: $\Pi_{jk}^i = 0$, т.е. многообразие является плоским (теорема 3.1).

Таким образом, если M – связное многообразие с проективной связностью Π_{jk}^i , то алгебра Ли $P(M)$ инфинитезимальных проективных преобразований в M имеет размерность не больше $n^2 + 2n$, где $n = \dim M$, а так как проективная алгебра Ли конечна, то по теореме Пале [18] группа $\hat{P}(M)$ проективных преобразований в M есть группа Ли с алгеброй Ли $P(M)$.

Если $\dim P(M) = n^2 + 2n$, то M плоское, т.е. (проективная) кривизна многообразия M тождественно равна нулю и в подходящих локальных координатах все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль.

В плоском пространстве группой проективных преобразований является $(n^2 + 2n)$ -мерная группа дробно-линейных подстановок от n переменных.

§ 5. Инфинитезимальные симметрии дифференциальных систем

Группой (точечных) симметрий системы дифференциальных уравнений k -го порядка

$$\Delta^\nu(t, x^{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, s, \quad (5.1)$$

называется локальная группа Ли G преобразований [19; § 60], действующая на открытом подмножестве N пространства $T \times \Xi$ независимых (t) и зависимых (x) переменных системы и обладающая следующим свойством. Пусть $x = f(t)$ – решение системы (5.1), определенное в области $\Omega \subset T$. Если для $h \in G$ определено $h \circ f$, то $x = h \circ f(t)$ есть также решение системы.

Алгебра Ли группы G состоит из инфинитезимальных симметрий – векторных полей на N , порождающих 1-параметрические группы симметрий системы.

Система (5.1) определяет подмногообразие F в пространстве k -струй (§ 1) $T \times \Xi^{(k)}$, координаты которого представляют независимые переменные, зависимые переменные и все производные от зависимых переменных вплоть до порядка k .

Связная локальная группа Ли G преобразований является группой симметрий невырожденной [9] системы (5.1), если и только если ее k -е продолжение $\text{pr}^{(k)}G$ оставляет подмногообразие F инвариантным.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы k -е продолжение $\text{pr}^{(k)}X$ любого векторного поля X из алгебры Ли группы G удовлетворяло условиям [2], [3], [9]

$$\text{pr}^{(k)}X[\Delta^\nu(t, x^{(k)})] = 0 \quad \text{при} \quad \Delta^\nu(t, x^{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Для системы

$$\Delta^\alpha \equiv \ddot{x}^\alpha + a_{\beta\gamma}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + b_{\beta\gamma}^\alpha(x)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + c_\beta^\alpha(x)\dot{x}^\beta + d^\alpha(x) = 0, \quad (5.2)$$

где $a_{\beta\gamma} = a_{\gamma\beta}$, $b_{\beta\gamma}^\alpha = b_{\gamma\beta}^\alpha$ – функции от $x^1, \dots, x^n$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$ и точка над x означает дифференцирование по x^n , так что $\ddot{x}^n = 0$, эти условия принимают вид

$$\text{pr}^{(2)}X(\Delta^\alpha)|_{\Delta^\alpha=0} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1, \quad (5.3)$$

где (см., например, [2])

$$\begin{aligned} X &= \xi^i \partial_i, \\ \text{pr}^{(1)}X &= X + (\partial_n \xi^\alpha + \dot{x}^\beta \partial_\beta \xi^\alpha - \dot{x}^\alpha \partial_n \xi^n - \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\beta \xi^n) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}, \\ \text{pr}^{(2)}X &= \text{pr}^{(1)}X + [\partial_{nn} \xi^\alpha + \dot{x}^\beta (2\partial_{\beta n} \xi^\alpha - \partial_{nn} \xi^n \delta_\beta^\alpha) \\ &\quad + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma (\partial_{\beta\gamma} \xi^\alpha - \partial_{\beta n} \xi^n \delta_\gamma^\alpha - \partial_{\gamma n} \xi^n \delta_\beta^\alpha) \\ &\quad + \dot{x}^\beta (\partial_\beta \xi^\alpha - 2\partial_n \xi^n \delta_\beta^\alpha) - \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_{\beta\gamma} \xi^n \\ &\quad - 2\ddot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\beta \xi^n - \dot{x}^\alpha \ddot{x}^\beta \partial_\beta \xi^n] \frac{\partial}{\partial \ddot{x}^\alpha}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.3) и используя (5.2), приходим к системе уравнений, левые части которых являются полиномами третьей степени от $\dot{x}^\alpha$. Приравняв к нулю коэффициенты этих полиномов, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 Xa_{\beta\gamma} - a_{\beta\gamma}\partial_n\xi^n + 2a_{\sigma(\beta}\partial_\gamma)\xi^\sigma + b_{\beta\gamma}^\sigma\partial_\sigma\xi^n - \partial_{\beta\gamma}\xi^n &= 0, \\
 Xb_{\beta\gamma}^\alpha + a_{\beta\gamma}\partial_n\xi^\alpha + 2\delta_{(\beta}^\alpha a_{\gamma)\sigma}\partial_n\xi^\sigma - b_{\beta\gamma}^\sigma\partial_\sigma\xi^\alpha + 2b_{\sigma(\beta}^\alpha\partial_\gamma)\xi^\sigma \\
 + c_{(\beta}^\alpha\partial_\gamma)\xi^n + \delta_{(\beta}^\alpha c_{\gamma)\sigma}\partial_\sigma\xi^n + \partial_{\beta\gamma}\xi^\alpha - 2\delta_{(\beta}^\alpha\partial_\gamma)\xi^n &= 0, \\
 Xc_\beta^\alpha + 2b_{\beta\sigma}^\alpha\partial_n\xi^\sigma + c_\sigma^\alpha\partial_\beta\xi^\sigma + c_\beta^\alpha\partial_n\xi^n - c_\beta^\sigma\partial_\sigma\xi^\alpha \\
 + 2d^\alpha\partial_\beta\xi^n + \delta_\beta^\alpha d^\sigma\partial_\sigma\xi^n + 2\partial_{n\beta}\xi^\alpha - \delta_\beta^\alpha\partial_{nn}\xi^n &= 0, \\
 Xd^\alpha + c_\sigma^\alpha\partial_n\xi^\sigma - d^\sigma\partial_\sigma\xi^\alpha + 2d^\alpha\partial_n\xi^n + \partial_{nn}\xi^\alpha &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Вычисляя с помощью полученных равенств и формул (2.2) выражения $X\Pi_{jk}^i$, находим

$$X\Pi_{jk}^i - \Pi_{jk}^h\partial_h\xi^i + \Pi_{pk}^i\partial_j\xi^p + \Pi_{jq}^i\partial_k\xi^q + \partial_{jk}\xi^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i\partial_{hk}\xi^h + \delta_k^i\partial_{hj}\xi^h) = 0.$$

Отсюда, учитывая (4.2), получаем

$$\begin{aligned}
 L_X\Pi_{jk}^i &\equiv \xi^l\partial_l\Pi_{jk}^i - \Pi_{jk}^h\partial_h\xi^i + \Pi_{pk}^i\partial_j\xi^p + \Pi_{jq}^i\partial_k\xi^q + \partial_{jk}\xi^i \\
 &- \frac{1}{n+1}(\delta_j^i\partial_{hk}\xi^h + \delta_k^i\partial_{hj}\xi^h) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Очевидно, что из (5.6) и (2.3) следует (5.5). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Векторное поле X порождает 1-параметрическую группу (точечных) симметрий дифференциальной системы (5.2) тогда и только тогда, когда выполнены условия (5.5) или равносильное им условие (5.6), где величины Π_{jk}^i определены формулами (2.2).*

Так как из (4.3), (5.6) вытекает, что X есть инфинитезимальное проективное преобразование в пространстве с ассоциированной проективной связностью, задаваемой объектом Π_{jk}^i (§ 2), мы приходим к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 5.2. *Группа симметрий дифференциальной системы (5.2) есть группа проективных преобразований в n -мерном пространстве с проективной связностью, задаваемой в локальных координатах (x^i) формулами (2.2).*

Если при $n > 2$ тензор Вейля W_{jkl}^i (1.1) ассоциированной проективной связности Π_{jk}^i (2.2) обращается в нуль, а при $n = 2$ выполняются условия (4.6), то ассоциированная проективная связность является плоской и допускает максимальную $(n^2 + 2n)$ -мерную проективную алгебру Ли (§ 4). В этом случае дифференциальная система (5.2) заменой переменных приводится к системе (3.10), интегральные кривые которой являются прямыми линиями (теорема 3.2). Отсюда, принимая во внимание теорему 5.2, приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 5.3. *Максимальная группа Ли (точечных) симметрий дифференциальной системы (2.1) имеет размерность $n^2 + 2n$, и это число достигается, если и только если при $n > 2$ выполнены условия (3.14), а при $n = 2$ – условия (3.13), (3.16). В этом случае (2.1) приводится к системе*

$$\frac{d^2 y^\alpha}{dt^2} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

алгебра Ли симметрий которой натянута на векторные поля

$$T_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad E_{jk} = y^j \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad E_i = y^i y^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

$i, j, k, l = 1, \dots, n$, $y^n \equiv t$, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$\begin{aligned} [T_i, E_{ij}] &= T_j, \\ [T_i, E_j] &= E_{ji}, \quad i \neq j, \\ [T_i, E_i] &= E_{ii} + \sum_{l=1}^n E_{il}, \\ [E_{ij}, E_{kl}] &= \delta_k^j E_{il} - \delta_l^i E_{kj}, \\ [E_{ij}, E_j] &= E_i, \end{aligned}$$

остальные коммутаторы равны нулю.

§ 6. Дифференциальные системы 4-го порядка с трехмерной разрешимой группой симметрий

Развитый в предыдущих параграфах подход позволяет применить накопленный в дифференциальной геометрии богатый фактический материал к исследованию систем дифференциальных уравнений. Используя, в частности, теоремы 3.3, 5.2 и классификацию А. Я. Султанова трехмерных пространств проективной связности по группам автоморфизмов [20]–[22], получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если система дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ независимого переменного t :*

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x}P + Q_1 &= 0, \\ \ddot{y} + \dot{y}P + Q_2 &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где точка над x означает дифференцирование по t и

$$\begin{aligned} P &= a_{11}(t, x, y)\dot{x}^2 + 2a_{12}(t, x, y)\dot{x}\dot{y} + a_{22}(t, x, y)\dot{y}^2, \\ Q_\alpha &= b_{11}^\alpha(t, x, y)\dot{x}^2 + 2b_{12}^\alpha(t, x, y)\dot{x}\dot{y} + b_{22}^\alpha(t, x, y)\dot{y}^2 \\ &\quad + c_1^\alpha(t, x, y)\dot{x} + c_2^\alpha(t, x, y)\dot{y} + d^\alpha(t, x, y), \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \tag{6.2}$$

– полиномы второго порядка от $\dot{x}$, $\dot{y}$ с коэффициентами, зависящими от x , y , t , допускает трехмерную разрешимую группу симметрий со структур-

ными уравнениями $e_i e_j = C_{ij}^{k,2}$ и базисными векторными полями E_1, E_2, E_3 соответствующей алгебры Ли, то эта система и алгебра Ли принадлежат к одному из перечисленных ниже типов, где используются обозначения

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$$

и т.п., штрих означает производную функции одного переменного. Система (6.2) заменой переменных $(t, x, y) \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ приводится к виду

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{y}}{d\tilde{t}^2} = 0 \quad (6.3)$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.14), в которых следует положить $n = 3$.

I. Структурные уравнения: $e_1 e_2 = e_1 e_3 = e_2 e_3 = 0$.

Тип $A_1^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \psi(t, y) \dot{y}^2 + \phi(t, y) \dot{y} + \rho(t, y), & Q_2 &= 0, \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= y \partial_x, & E_3 &= t \partial_x. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\phi_t = 2\rho_y, \quad \phi_y = 2\psi_t.$$

Тип $A_2^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \mu(t)(\phi'^2 \dot{x}^2 - 2\phi' \dot{x} \dot{y} + \dot{y}^2) - 2\nu(t)(\phi' \dot{x} - \dot{y}) + \theta(t), \\ Q_2 &= \rho(t)(\phi'^2 \dot{x}^2 - 2\phi' \dot{x} \dot{y} + \dot{y}^2) - (\phi'' + \lambda(t)\phi' + \nu(t)\phi'^2) \dot{x} \\ &\quad + (\lambda(t) + \nu(t)\phi') \dot{y} + \psi(t), \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= \partial_y, & E_3 &= t \partial_x + \phi(t) \partial_y. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

- (1) $\mu = \rho = 0$, $2\nu' + \lambda\nu - \nu^2 \phi' = 0$, $2\lambda' + \lambda^2 - \lambda\nu\phi' + 6\nu\phi'' = 0$, $2\phi''' + 3(\lambda - \nu\phi')\phi'' = 0$ или
- (2) $\phi = k_1 t + k_0$, $2\lambda' = 2(k_1 \mu + 2k_2)(\psi - k_1 \theta) + k_1 \lambda \nu - \lambda^2$, $2\mu' = \mu(\lambda - k_1 \nu) - 2k_2 \nu$, $2\nu' = 2\mu(\psi - k_1 \theta) + \nu(k_1 \nu - \lambda)$, $\rho = k_1 \mu + k_2$, где k_0, k_1, k_2 – постоянные.

II. Структурные уравнения: $e_2 e_3 = e_1$.³

Тип $A_3^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \zeta(x) \dot{x}^2 + \eta(x) \dot{x} + \theta(x), & Q_2 &= \phi(x) \dot{x}^2 + \chi(x) \dot{x} + \psi(x), \\ E_1 &= \partial_y, & E_2 &= \partial_t, & E_3 &= t \partial_y. \end{aligned}$$

²Здесь и далее $e_i e_j$ означает лиево произведение базисных элементов e_i, e_j , C_{ij}^k – структурные константы.

³Здесь и далее нулевые лиевы произведения не выписываются.

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\eta' = 0, \quad 4\psi' = \eta\chi - 4\theta\phi, \quad 4\theta' = \eta^2 - 4\zeta\theta, \quad \chi' = \zeta\chi - \eta\phi.$$

Тип $A_4^{(3)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \nu(t)(\dot{y}^2 - 2\dot{x}) + \eta(t)\dot{y} + \theta(t), \quad Q_2 = \eta(t), \\ E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = y\partial_x + t\partial_y.$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\nu = (k_0 - t)^{-1}, \quad \eta = k_1(k_0 - t)^{-3},$$

где k_0, k_1 – постоянные.

Тип $A_5^{(3)}$:

$$P = (p_3y^3 + p_2y^2 + p_1y + p_0)\dot{x}^2 + 2(q_2y^2 + q_1y + q_0)\dot{x}\dot{y} + (r_1y + r_0)\dot{y}^2, \\ Q_1 = -(3p_3y^2 + 2p_2y + p_1)\dot{x}^2 - 2(2q_2y + q_1)\dot{x}\dot{y} - r_1\dot{y}^2 \\ + (3p_3y + p_2)\dot{x} + 2q_2\dot{y} - p_3, \\ Q_2 = (s_2y^2 + s_1y + s_0)\dot{x}^2 + 2(l_0 + l_1y - p_3y^2)\dot{x}\dot{y} + (m_0 - 2q_2y)\dot{y}^2 \\ - (2s_2y + s_1)\dot{x} + (p_3y - 2l_1 - p_2)\dot{y} + s_2, \\ E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t + \partial_y,$$

$l..., m..., p..., q..., r..., s...$ – постоянные.⁴

III. Структурные уравнения: $e_1e_3 = e_1, \quad e_2e_3 = qe_2, \quad q \in \mathbb{R}$.

Тип $A_6^{(3)}$:

$$P = Q_1 = 0, \quad Q_2 = \rho(x, y)\dot{x}^2 + 2\sigma(x, y)\dot{x}\dot{y} + \tau(x, y)\dot{y}^2, \\ E_1 = \partial_t, \quad E_2 = x\partial_t, \quad E_3 = t\partial_t, \quad q = 1.$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\tau_x - \sigma_y = 0, \quad \sigma_x - \rho_y + \sigma^2 - \rho\tau = 0.$$

Тип $A_7^{(3)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \lambda(v)\dot{x}^2 + u\mu(v)\dot{x} + u^2\nu(v), \\ Q_2 = e^x(\rho(v)\dot{x}^2 + u\sigma(v)\dot{x} + u^2\tau(v)), \\ E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = (1 - q)t\partial_t + \partial_x + y\partial_y, \\ u = e^{(q-1)x}, \quad v = tu, \quad q \neq 1.$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$2\lambda' + (1 - q)(\mu + v\mu') = 0, \quad 2\mu' + \mu^2 - 4\nu\lambda + 4(1 - q)(2\nu + v\nu') = 0, \\ 2\rho' - \mu\rho + \sigma(\lambda - 1) + (1 - q)(\sigma + v\sigma') = 0, \\ 2\sigma' + \mu\sigma - 4(\tau + \nu\rho) + 4(1 - q)(2\tau + v\tau') = 0.$$

---

⁴Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3) для типов $A_5^{(3)}$, $A_{14}^{(3)}$ и $A_{18}^{(3)}$ – $A_{20}^{(3)}$ громоздки и поэтому не приводятся.

Тип $A_8^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= 2\mu(y)\dot{x}\dot{y}, & Q_2 &= \tau(y)\dot{y}^2, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= \partial_x, & E_3 &= t\partial_t + qx\partial_x, \quad q \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\mu = \exp\left(\int \tau(y) dy\right) \left(\int \exp\left(\int \tau(y) dy\right) dy + k_0\right)^{-1}, \quad k_0 = \text{const.}$$

Тип $A_9^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \lambda(y)\dot{x}^2 + 2\mu(y)\dot{x}\dot{y} + \nu(y)\dot{y}^2, \\ & & Q_2 &= \rho(y)\dot{x}^2 + 2\sigma(y)\dot{x}\dot{y} + \tau(y)\dot{y}^2 = 0, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= \partial_x, & E_3 &= t\partial_t, \quad q = 0. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\begin{aligned} \sigma &= -\lambda + k_0, & \lambda' + \mu(\lambda - k_0) + \nu\rho &= 0, & \mu' + \mu(\mu - \tau) + \nu(k_0 - 2\lambda) &= 0, \\ \rho' + \rho(\tau - \mu) - 2\lambda^2 + 3k_0\lambda - k_0^2 &= 0, & k_0 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Тип $A_{10}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \zeta(t)\dot{x} + \eta(t)\dot{y}, & Q_2 &= \phi(t)\dot{x} + \chi(t)\dot{y}, \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= \partial_y, & E_3 &= x\partial_x, \quad q = 0. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$2\eta' + (\zeta + \chi)\eta = 0, \quad 2\phi' + (\zeta + \chi)\phi = 0, \quad 2(\zeta - \chi)' + \zeta^2 - \chi^2 = 0.$$

Тип $A_{11}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \nu(t)\dot{y}^2 + \zeta(t)\dot{x}, & Q_2 &= \chi(t)\dot{y}, \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= \partial_y, & E_3 &= x\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y, \quad q = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$2\nu' + (\zeta - \chi)\nu = 0, \quad 2(\zeta - \chi)' + \zeta^2 - \chi^2 = 0.$$

Тип $A_{12}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= 2\mu(y)\dot{x}\dot{y}, & Q_2 &= \tau(y)\dot{y}^2 + \phi(y)\dot{x}, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= \partial_x, & E_3 &= t\partial_t - x\partial_x, \quad q = -1. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

- (1) $\tau = \phi = 0$, $\mu = (y + k_0)^{-1}$ или
 (2) $\mu = 0$, $\phi = k_1 \exp\left(-\int \tau dy\right)$, где k_0, k_1 – постоянные.

Тун $A_{13}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \zeta(t)\dot{x}, & Q_2 &= \psi(t), \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= \partial_y, & E_3 &= x\partial_x + t\partial_y, & q &= 0. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\zeta = 2(t + k_0)^{-1}, \quad k_0 = \text{const.}$$

Тун $A_{14}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= (p_0 e^{-2qy} \dot{x}^2 + 2p_1 e^{-qy} \dot{x}\dot{y} + p_2 \dot{y}^2) e^y, \\ Q_1 &= q_0 e^{-qy} \dot{x}^2 + 2q_1 \dot{x}\dot{y} + q_2 e^{qy} \dot{y}^2 + (r_0 \dot{x} + r_1 e^{qy} \dot{y} + r_2 e^{(q-1)y}) e^{-y}, \\ Q_2 &= s_0 e^{-2qy} \dot{x}^2 + 2s_1 e^{-qy} \dot{x}\dot{y} + s_2 \dot{y}^2 + (l_0 e^{-qy} \dot{x} + l_1 \dot{y} + l_2 e^{-y}) e^{-y}, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= \partial_x, & E_3 &= t\partial_t + qx\partial_x + \partial_y, \end{aligned}$$

$l, \dots, p, \dots, q, \dots, r, \dots, s, \dots$ – постоянные.

IV. Структурные уравнения: $e_1 e_3 = e_2$, $e_2 e_3 = q e_2 - e_1$, $q \in \mathbb{R}$.

Тун $A_{15}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= uv^{-3} \lambda(y) \dot{x}^2 + 2uv^{-1} \mu(y) \dot{x}\dot{y} + uv\nu(y) \dot{y}^2, \\ Q_1 &= 0, & Q_2 &= v^{-4} \rho(y) \dot{x}^2 + 2v^{-2} (x + \sigma(y)) \dot{x}\dot{y} + \tau(y) \dot{y}^2, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= x\partial_t, & E_3 &= tx\partial_t + (1 - qx + x^2) \partial_x, & 0 \leq q \leq 2, \end{aligned}$$

где $u = \exp[(1-x)^{-1}]$, $v = x - 1$ при $q = 2$ и $u = \exp[q\zeta \arctg(\zeta(2x - q))]$, $v = \sqrt{x^2 - qx + 1}$ при $q \neq 2$, $\zeta = 1/\sqrt{4 - q^2}$. Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\sigma = \text{const}, \quad \lambda' + \nu\rho - \mu(\sigma + q) = 0, \quad \mu' - \mu\tau + \nu\sigma = 0, \quad \rho' + \rho\tau - \sigma(\sigma + q) - 1 = 0.$$

Тун $A_{16}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= 0, & Q_1 &= \zeta(t)\dot{x} + \eta(t)\dot{y}, & Q_2 &= -\eta(t)\dot{x} + (\zeta(t) - q\eta(t))\dot{y}, \\ E_1 &= \partial_x, & E_2 &= \partial_y, & E_3 &= -y\partial_x + (x + qy)\partial_y, & 0 < q < 2. \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\eta = 2 \exp\left(-\int \zeta(t) dt\right) \left(k_0 - q \int \exp\left(-\int \zeta(t) dt\right) dt\right)^{-1}, \quad k_0 = \text{const.}$$

Тун $A_{17}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= \eta(y) \dot{x}\dot{y}, & Q_1 &= \eta(y) \dot{y}, & Q_2 &= \rho(y)(\dot{x}^2 + 1) + \tau(y) \dot{y}^2, \\ E_1 &= \partial_t, & E_2 &= \partial_x, & E_3 &= -x\partial_t + t\partial_x, & q &= 0, \end{aligned}$$

Необходимые и достаточные условия приводимости к виду (6.3):

$$\eta = k_0 \exp\left(\int \tau(y) dy\right), \quad \rho = k_1 \exp\left(-\int \tau(y) dy\right), \quad k_0 k_1 = 0,$$

k_0, k_1 – постоянные.

$Tun A_{18}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= (2[k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_0] \dot{x}^2 + 2[(qk_1 - \kappa k_2) f_1 + (qk_2 - \kappa k_1) f_2 + qk_0] \dot{x} \dot{y} \\ &\quad + [(k_1(q^2 - 2) - q\kappa k_2) f_1 + (k_2(q^2 - 2) - q\kappa k_1) f_2 + 2k_0] \dot{y}^2) e^{-qt}, \\ Q_1 &= ((q(l_1 - 2l_3) + \kappa l_2) g_1 + (q(l_2 - 2l_4) + \kappa l_1) g_2 \\ &\quad - (ql_5 + \kappa l_6) h_1 - (\kappa l_5 + ql_6) h_2] \dot{x}^2 \\ &\quad + [(2l_1 - (q^2 + 2)l_3 + q\kappa l_4) g_1 \\ &\quad + (2l_2 - (q^2 + 2)l_4 + q\kappa l_3) g_2 - 4(l_5 h_1 + l_6 h_2)] \dot{x} \dot{y} \\ &\quad + [(q\kappa l_4 - ql_3) g_1 + (\kappa l_3 - ql_4) g_2 + (\kappa l_6 - ql_5) h_1 + (\kappa l_5 - ql_6) h_2] \dot{y}^2) e^{-qt/2} \\ &\quad + [(\kappa r_2 - qr_1) f_1 + (\kappa r_1 - qr_2) f_2 + 2r_3] \dot{x} + [(q\kappa r_2 + (2 - q^2)r_1) f_1 \\ &\quad + (q\kappa r_1 + (2 - q^2)r_2) f_2 - 2r_0] \dot{y} + \left[s_1 g_1 - \frac{1}{\kappa}(qs_1 + 2s_2) g_2\right] e^{qt/2}, \\ Q_2 &= ([2(l_3 g_1 + l_4 g_2) + (l_5(q^2 - 2) + q\kappa l_6) h_1 + (l_6(q^2 - 2) + q\kappa l_5) h_2] \dot{x}^2 \\ &\quad + [(q(l_1 + l_3) + \kappa(l_2 - l_4)) g_1 + (q(l_2 + l_4) + \kappa(l_1 - l_3)) g_2 \\ &\quad + 2(ql_5 + \kappa l_6) h_1 + 2(ql_6 + \kappa l_5) h_2] \dot{x} \dot{y} \\ &\quad + 2[l_1 g_1 + l_2 g_2 + l_5 h_1 + l_6 h_2] \dot{y}^2) e^{-qt/2} \\ &\quad + 2[r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_0] \dot{x} + [(qr_1 - \kappa r_2) f_1 \\ &\quad + (qr_2 - \kappa r_1) f_2 + 2(r_3 + qr_0)] \dot{y} + \left[s_2 g_1 + \frac{1}{\kappa}(qs_2 + 2s_1) g_2\right] e^{qt/2}, \\ E_1 &= \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y + \partial_t, \quad q \neq 0, \pm 2, \end{aligned}$$

$f_1 = \text{ch}(\kappa t)$, $f_2 = \text{sh}(\kappa t)$, $g_1 = \text{ch}(\kappa t/2)$, $g_2 = \text{sh}(\kappa t/2)$, $h_1 = \text{ch}(3\kappa t/2)$, $h_2 = \text{sh}(3\kappa t/2)$, $\kappa = \sqrt{q^2 - 4}$, $k, \dots, p, \dots, r, \dots, s, \dots$ – постоянные.

$Tun A_{19}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} P &= (k_0 + k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t) \dot{x}^2 + 2(k_1 \sin 2t - k_2 \cos 2t) \dot{x} \dot{y} \\ &\quad + (k_0 - k_1 \cos 2t - k_2 \sin 2t) \dot{y}^2, \\ Q_1 &= (p_1 \cos t + p_2 \sin t + p_3 \cos 3t + p_4 \sin 3t) \dot{x}^2 \\ &\quad + ((p_6 - p_2) \cos t + (p_1 - p_5) \sin t - 2p_4 \cos 3t + 2p_3 \sin 3t) \dot{x} \dot{y} \\ &\quad + (p_5 \cos t + p_6 \sin t - p_3 \cos 3t - p_4 \sin 3t) \dot{y}^2 \\ &\quad + (r_0 + r_1 \cos 2t + r_2 \sin 2t) \dot{x} \\ &\quad + (r_3 - r_2 \cos 2t + r_1 \sin 2t) \dot{y} + s_1 \cos t - s_2 \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & (p_5 \sin t - p_6 \cos t + p_3 \sin 3t - p_4 \cos 3t)\dot{x}^2 \\
& + ((p_1 - p_5) \cos t + (p_2 - p_6) \sin t - 2p_3 \cos 3t - 2p_4 \sin 3t)\dot{x}\dot{y} \\
& + (p_1 \sin t - p_2 \cos t - p_3 \sin 3t + p_4 \cos 3t)\dot{y}^2 \\
& + (r_1 \sin 2t - r_2 \cos 2t - r_3)\dot{x} \\
& + (r_0 - r_1 \cos 2t - r_2 \sin 2t)\dot{y} + s_2 \cos t + s_1 \sin t, \\
E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = -y\partial_x + x\partial_y + \partial_t,
\end{aligned}$$

$q = 0, \quad k_{\dots}, p_{\dots}, r_{\dots}, s_{\dots}$ – постоянные.

$T_{un} A_{20}^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
P = & ([k_2 t^2 + k_1 t + k_0]\dot{x}^2 + 2[lk_2 t^2 + (lk_1 - k_2)t + lk_0 - k_1/2]\dot{x}\dot{y} \\
& + [k_2 t^2 + (k_1 - 2lk_2)t + k_0 - lk_1 + k_2]\dot{y}^2)e^{-qt}, \\
Q_1 = & ([3lp_3 t^3 + 3p_2 t^2 + 6lp_1 t + 2p_0]\dot{x}^2 + 2[3p_3 t^3 + 3l(p_2 - p_3)t^2 \\
& + (3p_1 - 2p_2 - lp_4)t + l(p_0 - 3p_1 + p_5) - p_4]\dot{x}\dot{y} + [3lp_3 t^3 + 3(p_2 - 2p_3)t^2 \\
& + (l(3p_3 - 4p_2) - 2p_4)t + p_2 + 2p_5]\dot{y}^2)e^{-qt/2} + 2[r_2 t^2 + r_1 t - r_0]\dot{x} \\
& + [2lr_2 t^2 + 2(lr_1 - r_2)t - r_1 + l(r_2 + r_3)]\dot{y} + (s_1 t + s_0)e^{qt/2}, \\
Q_2 = & ([-3p_3 t^3 - 3l(p_2 + p_3)t^2 + 2(lp_4 - p_2)t + 2(p_4 - lp_5)]\dot{x}^2 \\
& + 2[-3lp_3 t^3 - 3p_2 t^2 + 3l(p_1 + p_3) + p_4)t + p_0 + p_2 + 2lp_4 - 3p_5]\dot{x}\dot{y} \\
& + l[-3lp_3 t^3 + 3(p_3 - p_2)t^2 + (3l(2p_1 + p_3) + 2(lp_2 + 2p_4))t + 2(p_0 - 2p_5) \\
& - 3(2p_1 + p_3) + p_2]\dot{y}^2)e^{-qt/2} - [2lr_2 t^2 + 2(lr_1 + r_2)t + r_1 + l(r_2 + r_3)]\dot{x} \\
& - 2[r_2 t^2 + r_1 t + r_0 + r_3]\dot{y} - [l(s_1 t + s_0) + s_1]e^{qt/2}, \\
E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y + \partial_t, \quad q = \pm 2,
\end{aligned}$$

$l = \operatorname{sgn}(q), \quad k_{\dots}, p_{\dots}, r_{\dots}, s_{\dots}$ – постоянные.

Список литературы

- [1] Г. Биркгоф, *Гидродинамика. Постановка задач, результаты и подобие*, ИЛ, М., 1954.
- [2] М. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [3] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [4] R. L. Anderson, N. H. Ibragimov, *Lie-Bäcklund transformations in applications*, SIAM Stud. Appl. Math., **1**, SIAM, Philadelphia, PA, 1979.
- [5] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1986.
- [6] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прилож.*, **12:2** (1978), 46–56.
- [7] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Интегрируемые системы. I”, *Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем.*, **4**, ВИНТИ, М., 1985, 179–284.
- [8] В. С. Дрюма, *Геометрическая теория нелинейных динамических систем*, Препринт ИМ с ВЦ АН МССР, Кишинев, 1986.

- [9] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [10] А. В. Аминова, “Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **186**:12 (1995), 21–36.
- [11] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
- [12] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion projective”, *Bull. Soc. Math. France*, **52** (1924), 205–241.
- [13] A. Tresse, “Sur les invariants différentielles des groupes continus de transformations”, *Acta Math.*, **18**:1 (1894), 1–3.
- [14] A. Tresse, *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$* , S. Hirkei, Leipzig, 1896.
- [15] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957.
- [16] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981.
- [17] И. П. Егоров, *Движения в пространствах аффинной связности*, Изд-во КГУ, Казань, 1965.
- [18] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.
- [19] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1973.
- [20] А. Я. Султанов, “Трёхмерные пространства проективной связности малой подвижности”, *Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та*, 1974, 27–32.
- [21] А. Я. Султанов, *О некоторых трёхмерных пространствах проективной связности, допускающих прямые произведения групп движений*, Деп. в ВИНТИ, №288-81, Пенз. гос. пед. ин-т, Пенза, 1980.
- [22] А. Я. Султанов, *Об автоморфизмах в пространствах проективной связности*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Пензенск. гос. пед. ин-т, Пенза, 1981.

А. В. Аминова (A. V. Aminova)
Казанский государственный университет
E-mail: asya.aminova@ksu.ru

Поступила в редакцию
17.02.2005

Н. А.-М. Аминов (N. A.-M. Aminov)
Казанский государственный технический университет