Общероссийский математический портал

В. Н. Тютянов, Факторизации π -нильпотентными сомножителями, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 97–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:42:12

УДК 512.542

В. Н. Тютянов

Факторизации π -нильпотентными сомножителями

Пусть A и B – π -нильпотентные подгруппы конечной группы G и $(|G : A|, p) = (|G : B|, p) = 1$ для всех $p \in \pi$. Доказано, что если G есть произведение группы A и группы B , то G является π -нильпотентной группой.

Библиография: 8 названий.

В работе доказан следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа, π – некоторое подмножество простых делителей ее порядка. Если группа G является произведением двух своих π -нильпотентных подгрупп, индексы которых в G взаимно просты со всеми элементами множества π , то G – π -нильпотентная группа.

Все рассматриваемые группы конечны. Обозначения, в основном, стандартны. $\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G , $S(G)$ – ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа. $I(G)$ – множество всех инволюций в группе G , $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G . $H \subset_e G$ означает, что подгруппа H максимальна в G . Пусть $T \in \text{Syl}_p(G)$, тогда $m_p(T)$ – p -ранг группы T . $X \rtimes Y$ – полупрямое произведение с нормальной подгруппой X . Остальные обозначения можно найти, например, в [1] и [2].

1. Вспомогательные результаты

ЛЕММА 1 [1, теорема 4.13]. Пусть нециклическая абелева p -группа A действует на p' -группе X как группа операторов, p – простое число. Тогда $X = \langle C_X(B) \mid B \subseteq A, |A : B| \leq p \rangle$. В частности, $X = \langle C_X(a) \mid a \in A^\# \rangle$.

ЛЕММА 2 [2, лемма 2.12]. Пусть группа $G = AB$. Тогда если $A \subseteq X \subseteq G$, то $X = A(X \cap B)$.

ЛЕММА 3 [3]. Пусть группа $G = AB$, причем $A \cap B \supseteq D$ и $D \trianglelefteq A$. Тогда $B_G = \bigcap_{g \in G} B^g \supseteq D$.

2. Минимальный контрпример к теореме

Всюду далее будем считать, что группа G – минимальный контрпример к теореме.

(1) $G = AB$, где $A = A_1 \rtimes D$, $B = B_1 \rtimes D$. Группа D – холловская π -подгруппа в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $A = A_{\pi'} \rtimes A_{\pi}$, $B = B_{\pi'} \rtimes B_{\pi}$, где $A_{\pi'}$ и $B_{\pi'}$ – холловские π' -подгруппы в A и B , соответственно, а A_{π} и B_{π} – холловские π -подгруппы в группе G . Имеем: $|G| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$. Отсюда следует, что $|A \cap B|$ делится на порядок холловской π -подгруппы группы G . Так как $A \cap B \subseteq A$, то $A \cap B$ – π -нильпотентная группа. Значит, $A \cap B = (A \cap B)_{\pi'} \rtimes D$ для некоторой холловской π -подгруппы D в группе G . Поскольку $D \subseteq A$, то $A = A_{\pi'} \rtimes D$ в силу того, что A – π -нильпотентная группа. Аналогично, $B = B_{\pi'} \rtimes D$. Это доказывает (1).

(2) Можно считать A и B максимальными подгруппами в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subseteq M \subset G$. Тогда согласно равенству Дедекинда (лемма 2) $M = A(M \cap B) = A(D \rtimes \tilde{B}_1) = (A_1 \rtimes D)\tilde{B}_1 = A_1(D \rtimes \tilde{B}_1)$, где $\tilde{B}_1 \subset B_1$. Поскольку группа G – минимальный контрпример, то M – π -нильпотентная группа и $G = MB$. Аналогично, $B \subseteq M_1 \subset G$, где M_1 – π -нильпотентная подгруппа в группе G и $G = MM_1$, что доказывает утверждение (2) (условие взаимной простоты индексов подгрупп M и M_1 в группе G с элементами из π , очевидно, выполняется).

(3) $O_{\pi'}(G) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = O_{\pi'}(G) \neq 1$. Если $N \not\subseteq A$, то согласно (2) $G = NA$. Отсюда следует, что $G/N \cong A/A \cap N$ – π -нильпотентная группа. Значит, G – π -нильпотентная группа, что невозможно. Аналогично исключается случай, когда $N \not\subseteq B$. Таким образом, $N \subseteq A \cap B$. В этом случае $G/N = (A/N)(B/N)$ – π -нильпотентная группа, так как группа G – минимальный контрпример. Отсюда G – π -нильпотентная группа, что невозможно. Значит, $O_{\pi'}(G) = 1$. Это доказывает (3).

(4) $\langle A_1, B_1 \rangle = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $L = \langle A_1, B_1 \rangle \trianglelefteq G$. Согласно равенству Дедекинда (лемма 2), $L = A_1(L \cap B) = A_1(D_1 \rtimes B_1) = (A_1 \rtimes D_1)B_1$, где $D_1 \subseteq D$. Если $L \neq G$, то L – π -нильпотентная группа в силу того, что G – минимальный контрпример. Значит, $L = L_{\pi'} \rtimes L_{\pi}$ ($L_{\pi'} \neq 1$, так как $A_1, B_1 \subseteq L$) и $L_{\pi'} \text{ char } L \triangleleft G$. Отсюда следует, что $1 \neq L_{\pi'} \triangleleft G$. Последнее противоречит утверждению (3). Таким образом, $L = G$.

(5) Пусть $p \in \pi(D)$. Если $|D/D'| \equiv 0 \pmod{p}$, то $|G/G'| \equiv 0 \pmod{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \text{Syl}_p(D)$, $t \in P$. Покажем, что включение $t^{-1}t^g \in P$ влечет $t^{-1}t^g \in B_1D'$ для всех $g \in G$. Из $t^{-1}t^g \in P$ следует, что $t^g \in P$. Пусть $g = a_1d_1b_1$, где $a_1 \in A_1$, $d_1 \in D$, $b_1 \in B_1$ (такое представление возможно в силу (1)). Тогда $t^{a_1d_1} \in P^{b_1^{-1}} \cap P^{a_1d_1} \subseteq A \cap B$. Имеем: $t^{a_1d_1} = (a_1^{-1}ta_1)^{d_1} = (tt^{-1}a_1^{-1}ta_1)^{d_1} = t^{d_1}[t, a_1]^{d_1} \in A \cap B$. Поскольку $t^{d_1} \in A \cap B$, то $[t, a_1]^{d_1} \in A \cap B$. Очевидно, что $[t, a_1]^{d_1}$ – π' -число. Значит, $[t, a_1]^{d_1} = \tilde{b}_1 \in B_1$. Так как $g = a_1d_1b_1$, то $t^g = (t^{d_1}\tilde{b}_1)^{b_1} = t^{d_1b_1}\tilde{b}_1^{b_1} = t^{d_1b_1}b_2$, где $b_2 = \tilde{b}_1^{b_1} \in B_1$. Отсюда $t^g = b_1^{-1}t^{d_1}b_1b_2 = t^{d_1}(t^{d_1})^{-1}b_1^{-1}t^{d_1}b_1b_2 = t^{d_1}[t^{d_1}, b_1]b_2 = t^{d_1}b_3$, где $b_3 = [t^{d_1}, b_1]b_2 \in B_1$. Таким образом, $t^{-1}t^g = t^{-1}t^{d_1}b_3 = [t, d_1]b_3 \in D'B_1$.

Рассмотрим фокальную подгруппу $P \cap G' = \langle t^{-1}t^g \mid t, t^g \in P \rangle$. Очевидно, что $P \cap G' \subseteq B_1D'$. Так как $|D/D'| \equiv 0 \pmod{p}$, то $|B/B_1D'| \equiv 0 \pmod{p}$. Значит, $P \not\subseteq B_1D'$. Если $|G/G'| \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $P \subseteq G'$. Отсюда $P = P \cap G' \subseteq B_1D'$, что невозможно. Утверждение доказано.

$$(6) \ S(G) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(G) \neq 1$. Рассмотрим минимальную нормальную разрешимую подгруппу N в группе G . Тогда $N \cong Z_r \times \cdots \times Z_r$, где $r \in \pi(G)$.

$$1) \ r \in \pi(D).$$

В этом случае $[A_1, N] = [B_1, N] = 1$. Таким образом, в силу (4) $N \subseteq Z(G)$. Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/N = (A/N)(B/N)$, которая является π -нильпотентной в силу минимальности контрпримера. Значит, $\overline{G} = \overline{G}_{\pi'} \rtimes \overline{G}_{\pi}$, причем $\overline{G}_{\pi'} \neq 1$. Поскольку $N \subseteq Z(G)$, то полный прообраз в G факторгруппы $\overline{G}_{\pi'}$ есть группа $(N \times G_{\pi'}) \trianglelefteq G$. Отсюда следует, что $1 \neq G_{\pi'} \triangleleft G$. Противоречие с (3).

$$2) \ r \notin \pi(D).$$

В этом случае N — π' -подгруппа в группе G , что невозможно в силу утверждения (3). Таким образом, $S(G) = 1$ и утверждение (6) доказано.

$$(7) \text{ Пусть } \tau \in I(D). \text{ Тогда } C_G(\tau) = C_A(\tau)C_B(\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau^g = \tau$, где $g = a_1b$, $a_1 \in A_1$, $b \in B$. Тогда $\tau^{a_1} = \tau^{b^{-1}} \in A \cap B$. Покажем, что τ^{a_1} сопряжена с τ в $A \cap B$. Рассмотрим группу $\langle \tau, \tau^{a_1} \rangle \subseteq A \cap B$. Если $\langle \tau, \tau^{a_1} \rangle$ — абелева, то $|\tau\tau^{a_1}|$ равняется двум. С другой стороны, $\tau\tau^{a_1} \in A_1$ и $|\tau\tau^{a_1}|$ — нечетное число. Таким образом, $\tau\tau^{a_1} = 1$ и $\tau = \tau^{a_1}$. Следовательно, τ и τ^{a_1} будут сопряжены в $A \cap B$. Значит, $\langle \tau, \tau^{a_1} \rangle = \langle \tau\tau^{a_1} \rangle \rtimes \langle \tau \rangle = \langle [\tau, a_1] \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$ — диэдр порядка $2t$, где t — нечетное число. Все инволюции в $\langle \tau, \tau^{a_1} \rangle$ сопряжены. Таким образом, $(\tau^{a_1})^x = \tau$ для некоторого элемента $x \in \langle \tau, \tau^{a_1} \rangle$. Сопряженность инволюций τ и τ^{a_1} в $A \cap B$ доказана. Имеем, что $\tau = \tau^g = \tau^{a_1b} = \tau^{(a_1x)(x^{-1}b)} = \tau^{x^{-1}b}$. Отсюда следует, что $g = (a_1x)(x^{-1}b)$, где $a_1x \in A$, $x^{-1}b \in B$ и $[a_1x, \tau] = [x^{-1}b, \tau] = 1$. Значит, $C_G(\tau) = C_A(\tau)C_B(\tau)$.

3. Доказательство теоремы

Если $2 \notin \pi(D)$, то по теореме Томпсона–Фейта D — разрешимая группа. Значит, для некоторого $r \in \pi(D)$ $|D/D'| \equiv 0 \pmod{r}$. Согласно (5) $|G/G'| \equiv 0 \pmod{r}$. Поэтому в группе G существует подгруппа индекса r , которая, очевидно, содержит подгруппы A_1 и B_1 . Противоречие с (4). Поэтому будем считать, что $2 \in \pi(D)$, D — неразрешимая группа и $O^r(D) = D$ для всех $r \in \pi(D)$. Из пункта (1) следует, что $G = AB$, $A = A_1 \rtimes D$, $B = B_1 \rtimes D$, где A_1, B_1 — холловские π' -подгруппы в A и B , соответственно; D — холловская π -подгруппа в группе G .

Пусть $T \in \text{Syl}_2(D)$, $\tau \in I(T)$. Согласно (7) $C_G(\tau) = C_A(\tau)C_B(\tau)$. Так как G — минимальный контрпример к теореме, то $C_G(\tau)$ — π -нильпотентная группа.

$$1) \ m_2(T) \geq 3.$$

В этом случае найдется $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \cong W \subseteq T$. Покажем, что $\theta(C_G(\tau)) = O_{\pi'}(C_G(\tau))$ — W -сигнализаторный функтор (здесь $\tau \in W^\#$). Пусть $a, b \in W^\#$. Поскольку $C_G(a)$ и $C_G(b)$ — π -нильпотентные группы, то очевидно, что $C_G(a) \cap$

$O_{\pi'}(C_G(b)) \subseteq O_{\pi'}(C_G(a))$. Таким образом, условие баланса выполнено. Функтор θ является разрешимым, так как $2 \in \pi(D)$. Таким образом, θ – разрешимый сигнализаторный функтор. В силу теоремы [1, 4.38] функтор θ полон. Значит, замыкание $\theta(G, W) = \langle O_{\pi'}(C_G(\tau)) \mid \tau \in W^\# \rangle$ – разрешимая группа. Поскольку (это следует из (7)) $C_G(\tau) = C_{A_1}(\tau)(C_D(\tau) \ltimes C_{B_1}(\tau)) = (C_{A_1}(\tau) \rtimes C_D(\tau))C_{B_1}(\tau)$ для $\tau \in W^\#$, то согласно лемме 1 $\langle O_{\pi'}(C_G(\tau)) \mid \tau \in W^\# \rangle \supseteq \langle A_1, B_1 \rangle$. В силу (4) $\langle A_1, B_1 \rangle = G$. Таким образом, G – разрешимая группа, что невозможно.

2) $m_2(T) = 2$.

Пусть сначала G – простая неабелева группа. Согласно результатам Алперина, Брауэра, Горенштейна [4], [5], [6] группа $G \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q^2), q$ – нечетное число; $A_7, M_{11}, PSU_3(4^2)\}$. Максимальные подгруппы в A_7 и M_{11} описаны в [7]. Из этого описания легко заключить, что группы A_7 и M_{11} не обладают нужной факторизацией. В группе $PSU_3(4^2)$ имеется подгруппа $Z_2 \times Z_2 \cong W \subseteq D$, и для всякой инволюции $\tau \in W^\#$ $C_G(\tau) = C_{A_1}(\tau)(C_D(\tau) \ltimes C_{B_1}(\tau)) = (C_{A_1}(\tau) \rtimes C_D(\tau))C_{B_1}(\tau)$ – π -нильпотентная группа. Согласно лемме 1 найдется инволюция $\mu \in W^\#$, для которой $O(C_G(\mu)) \neq 1$. Это невозможно в группах Шевалле характеристики 2. Значит, $G \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q^2), \text{ где } q = p^f \text{ (} p \text{ – простое число)}\}$.

Пусть сначала $p \in \pi(D)$. Рассмотрим $U \in \text{Syl}_p(D)$ и покажем, что $N_G(U) = (N_{A_1}(U) \rtimes N_D(U))N_{B_1}(U) = N_{A_1}(U)(N_D(U) \ltimes N_{B_1}(U))$. Пусть $U^g = U$ для $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $U^a = U^{b^{-1}} \subseteq A \cap B$. Отсюда $U^a = U^{b^{-1}} = U^d$ для некоторого элемента $d \in A \cap B$. Значит, $U^{ad^{-1}} = U$ и $U^{b^{-1}d^{-1}} = U$. Поэтому $ad^{-1} \in N_A(U)$ и $b^{-1}d^{-1} \in N_B(U)$. Отсюда $a \in N_A(U)d$, $b \in d^{-1}N_B(U)$. Таким образом, $ab = n_1dd^{-1}n_2 = n_1n_2$, где $n_1 \in N_A(U)$, $n_2 \in N_B(U)$. Поскольку $ab \in N_G(U)$, то $N_G(U) = N_A(U)N_B(U)$.

Теперь покажем, что $N_A(U) = N_{A_1}(U)N_D(U)$. Пусть $a = a_1d \in N_A(U)$, где $a_1 \in A_1$, $d \in D$. Тогда $U^{a_1d} = U$, или $U^{a_1} = U^{d^{-1}} \subseteq D$. Значит, $U^{a_1} \subseteq D$. Поэтому для всех элементов $u \in U$ $u^{a_1} = d_1 \in D$ или $a_1^{-1}ua_1 = d_1 \in D$. Отсюда $u^{-1}a_1^{-1}ua_1 = u^{-1}d_1 \in D \cap A_1 = 1$. Значит, $U^{a_1} = U$ и $a_1 \in N_{A_1}(U)$. Поэтому $U^{a_1d} = U^d = U$ и $d \in N_D(U)$. Таким образом, $N_A(U) = N_{A_1}(U)N_D(U)$. Аналогично можно показать, что $N_B(U) = N_{B_1}(U)N_D(U)$. Значит, $N_G(U) = (N_{A_1}(U) \rtimes N_D(U))N_{B_1}(U) = N_{A_1}(U)(N_D(U) \ltimes N_{B_1}(U))$. Согласно (6) $G \supset N_G(U)$ – π -нильпотентная группа. Поскольку $O_{p'}(N_G(U)) = 1$, то $N_G(U) = N_D(U)$. Значит, $N_D(U) \supseteq B$ – борелевская подгруппа. Отсюда $D \subset A = A_1 \rtimes D$ – максимальная параболическая подгруппа в G согласно (2). Поэтому $O_{p'}(A) = 1$, а значит, $A_1 = 1$. Последнее невозможно.

Таким образом, $p \notin \pi(D)$.

(a) $G \cong PSL_2(q)$.

По теореме Диксона [2, теорема 8.27] неразрешимые подгруппы из $PSL_2(p^f)$ содержатся в следующем списке: $\{PSL_2(p^m) \mid m \mid f; PGL_2(p^m) \mid 2m \mid f; A_5, p = 5, \text{ или } p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod{5}\}$. Значит, D изоморфна одной из подгрупп данного списка. Так как $(|D|, p) = 1$, то $D \not\cong PSL_2(p^m)$, $D \not\cong PGL_2(p^m)$; $D \not\cong A_5$, когда $p = 5$. Отсюда имеем: $D \cong A_5$ и $p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Так как $D \subset A_1 \rtimes D$, то этот случай также невозможен.

(b) $G \cong PSL_3(p^f)$.

В этом случае D содержится в некоторой p -локальной подгруппе, а значит, в максимальной параболической подгруппе P группы $PSL_3(p^f)$. Для подгруппы P имеет место разложение Леви: $P = O_p(P)(LH)$, где $L \cong SL_2(p^l)$, H – подгруппа Картана в $PSL_3(p^f)$. Так как $(|D|, p) = 1$, то можно считать, что $D \subseteq LH$. Поскольку D – неразрешимая группа и $(|D|, p) = 1$, то по теореме Диксона [2, теорема 8.27] $D \cong A_5$ или $D \cong S_5$. В первом случае 2-силовская подгруппа в G изоморфна $Z_2 \times Z_2$, что невозможно. Во втором случае группа D содержит подгруппу индекса 2, и противоречие получается из (5).

(с) $G \cong PSU_3(q^2)$.

В группе $PSU_3(q^2)$ все параболические подгруппы сопряжены с борелевской подгруппой, а значит, разрешимы. Противоречие с тем, что неразрешимая группа D содержится в параболической подгруппе.

Таким образом, G не является простой неабелевой группой. Пусть M – собственная минимальная нормальная подгруппа в G . Рассмотрим факторгруппу $\bar{G} = G/M$, которая является π -нильпотентной группой. Значит, $\bar{G} = \bar{G}_{\pi'} \rtimes \bar{G}_{\pi}$. Если $\bar{G}_{\pi} \neq 1$, то, рассмотрев полный прообраз L группы $\bar{G}_{\pi'}$ в G , получим, что $L \supseteq \langle A_1, B_1 \rangle$. Противоречие с (4). Значит, $\bar{G} = \bar{G}_{\pi'}$ – π' -группа и $M \supseteq D$. Согласно (6) $M = M_1 \times \dots \times M_l$, где M_i – изоморфные простые неабелевы группы. Поскольку $m_2(T) = 2$ для $T \in \text{Syl}_2(G)$, то $l = 1$ и $M \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q^2), q \text{ – нечетное число}, A_7, M_{11}, PSU_3(4^2)\}$. Так как $G \subseteq \text{Aut}(M)$ и $|G/M|$ – нечетное число, то $M \notin \{A_7, M_{11}, PSU_3(4^2)\}$. Значит, $M \in \{PSL_2(p^f), PSL_3(p^f), PSU_3(p^{2f})\}$, где p – нечетное простое число.

Рассмотрим $M \cap A = \tilde{A}_1 \rtimes D$, где $\tilde{A}_1 \subseteq A_1$. Если $\tilde{A}_1 = 1$, то $D \trianglelefteq A$. Отсюда, согласно лемме Чунихина (лемма 3) $D \subseteq B_G = \bigcap_{g \in G} B^g \subseteq B$. Поскольку $O_{\pi'}(G) = 1$, то $B_G = D$. Так как $[D, A_1] = [D, B_1] = 1$, то $D \subseteq C_G(\langle A_1, B_1 \rangle) = C_G(G) = Z(G)$, что невозможно, так как D – неразрешимая группа. Таким образом, $\tilde{A}_1 \neq 1$. Аналогично можно показать, что $M \cap B = \tilde{B}_1 \rtimes D$, где $1 \neq \tilde{B}_1 \subseteq B_1$.

1) $p \notin \pi(D)$.

Покажем, что $G = AM = BM$. Если $A \not\subseteq M$, то $G = AM$ в силу (2). Значит, $A \subseteq M$. Поскольку $A \subset G$, то $M = A = A_1 \rtimes D$. Тогда $A_1 = 1$ и $G = B$, что невозможно. Таким образом, $G = AM$. Аналогично можно установить, что $G = BM$. Пусть $p \notin \pi(A \cap M) \cup \pi(B \cap M)$. Так как $M \triangleleft G$, то найдутся $A_p \in \text{Syl}_p(A)$, $B_p \in \text{Syl}_p(B)$, $M_p \in \text{Syl}_p(M)$, $G_p \in \text{Syl}_p(G)$ такие, что $G_p = A_p B_p = A_p M_p = B_p M_p$ см. [8, (1.10)]. $G_p = M_p A_p$, причем $M_p \cap A_p = 1$. Так как $M_p \subset M \triangleleft G$, то $M_p = M \cap G_p \triangleleft G_p$. Отсюда $G_p = M_p \rtimes A_p$. Аналогично, $G_p = M_p \rtimes B_p$. Таким образом, $G_p = A_p B_p = M_p \rtimes A_p = M_p \rtimes B_p$. Поскольку порядок группы диагональных автоморфизмов M взаимно прост с p , то A_p и B_p содержатся в группе полевых автоморфизмов группы M . Значит, A_p и B_p – циклические p -группы. По свойству Редери или $A_p \cap Z(G_p) \neq 1$, или $B_p \cap Z(G_p) \neq 1$. Пусть $A_p \cap Z(G_p) \neq 1$. Так как G_p является произведением двух своих циклических подгрупп и $p > 2$, то согласно [2, (11.5)] G_p – метациклическая группа. Если M_p не циклическая группа, то она содержит элементарную абелеву подгруппу, изоморфную $Z_p \times Z_p$. Поскольку $A_p \cap Z(G_p) \neq 1$ и $G_p = M_p \rtimes A_p$, то группа G_p содержит элементарную абелеву подгруппу порядка p^3 . Противоречие с тем, что G_p – метациклическая группа. Поэтому группа M_p циклическая. Значит, M изо-

морфна $PSL_2(p)$. Отсюда следует, что $(|\text{Aut}(M)/M|, p) = 1$ и $G_p \subseteq M$. Поэтому или $p \in \pi(A \cap M)$, или $p \in \pi(B \cap M)$. Таким образом, D содержится в некоторой p -локальной подгруппе группы M . Рассуждая как и в случае, когда G – простая неабелева группа, приходим к противоречию.

2) $p \in \pi(D)$.

Пусть $U \in \text{Syl}_p(D)$. Имеем: $L = N_G(U) = L_{\pi'} \rtimes N_D(U)$ – π -нильпотентная группа. Отсюда $N_M(U) = L \cap M = N_D(U)$, так как $O_{p'}(N_M(U)) = 1$. Поскольку $M \cap A = \tilde{A}_1 \rtimes D$, где $\tilde{A}_1 \neq 1$, то, рассуждая как в случае, когда G – простая неабелева группа, снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает пример группы $G \cong S_4$, условие взаимной простоты индексов подгрупп в G с элементами из π отбросить нельзя. Действительно, G допускает факторизацию: $G = AB$, где $A \cong A_4$, $B \cong Z_2$, но не является 3-нильпотентной группой.

Список литературы

1. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
2. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1967.
3. Чулихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964.
4. Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. Finite groups with quasidihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 151. № 1. P. 1–261.
5. Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. Finite simple groups of 2-rank two // Scripta Comput. Sci. Appl. Math. 1973. V. 29. № 3–4. P. 191–214.
6. Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. The extended ZJ -theorem. Proc. Gaintsville Conf. Amsterdam, 1972.
7. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. An Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
8. Казарин Л. С. О проблеме Сепы // Изв. АН СССР. 1986. Т. 50. № 3. С. 467–495.

Гомель, Белоруссия

Поступила в редакцию
29.06.1995