Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Городний, А. В. Чайковский, Об одном обобщении понятия секториального оператора, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 29–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:04:49

УДК 517.98

М. Ф. Городний, А. В. Чайковский**Об одном обобщении понятия секториального оператора**

Пусть B – комплексное банахово пространство, $G: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – невозрастающая функция такая, что $G(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и $1/G$ – липшицева функция на $[0, +\infty)$.

Линейный оператор $T: D(T) \subset B \rightarrow B$ называется G -секториальным, если существуют такие постоянные $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, что спектр оператора T содержится в множестве

$$S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a, |\arg(z - a)| < \varphi\}$$

и

$$\exists M > 0 \quad \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} \quad \|R_\lambda(T)\| \leq MG(|\lambda - a|),$$

где $R_\lambda(T)$ обозначает резольвенту оператора T .

В работе исследуются свойства операторной экспоненты и дробных степеней G -секториального оператора, а также вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с G -секториальным операторным коэффициентом.

Библиография: 8 названий.

Введение

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ – комплексное банахово пространство, $\mathcal{L}(B)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из B в B ; O – нулевой, I – единичный операторы в B . В дальнейшем $D(A)$, $R(A)$, $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$ обозначают соответственно область определения, множество значений, спектр и резольвенту линейного оператора A .

Напомним, что линейный оператор $A: D(A) \subset B \rightarrow B$ называется *секториальным*, если множество $D(A)$ всюду плотно в B и существуют такие постоянные $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, что для множества

$$S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a, |\arg(z - a)| < \varphi\}$$

выполняются условия:

- 1) $\sigma(A) \subset S_{a,\varphi}$;
- 2) $\exists C > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_{a,\varphi}, \lambda \neq 0 \quad \|R_\lambda(A)\| \leq \frac{C}{|\lambda - a|}$.

Теория секториальных операторов и связанная с ней теория аналитических полугрупп хорошо известны и имеют многочисленные применения (см., например, [1]–[4]). В частности, широко используются свойства экспоненты и дробных степеней секториального оператора. В настоящей работе определяется класс операторов, более общих, чем секториальные, и изучаются его свойства.

§ 1. Определения и примеры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $G: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ принадлежит классу Ψ , если она удовлетворяет следующим условиям:

- а) G невозрастающая на $[0, +\infty)$;
- б) $G(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$;
- в) функция $1/G$ липшицева на $[0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С учетом условия а) условие в) можно переписать в виде

$$\exists L > 0 \quad \forall t_2 > t_1 \geq 0 \quad G(t_1) \leq G(t_2) + L(t_2 - t_1)G(t_1)G(t_2). \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $G \in \Psi$, то

$$\exists C > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad tG(t) \geq C.$$

Действительно, вследствие условия в) для некоторой постоянной $L > 0$ и каждого $t \geq 0$ имеем

$$\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(0)} \leq Lt.$$

Поэтому

$$\frac{1}{tG(t)} \leq L + \frac{1}{G(0)}, \quad t \geq 1.$$

Вместе с каждой функцией $G \in \Psi$ мы будем рассматривать функцию

$$H(t) := \frac{1}{t} G\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

При этом

$$G(t) = \frac{1}{t} H\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $G \in \Psi$. Линейный оператор $T: D(T) \subset B \rightarrow B$ назовем G -секториальным, если существуют такие постоянные $a \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in (0, \pi/2)$, что для множества $S_{a,\varphi}$ выполняются условия:

- 1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;
- 2) $\exists M > 0 \quad \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} \quad \|R_\lambda(T)\| \leq MG(|\lambda - a|).$

ЛЕММА 1. Если T — G -секториальный оператор, то для каждого $b \in \mathbb{R}$, $b < c := \min_{\lambda \in \sigma(T)} \operatorname{Re} \lambda$, существует $\theta \in (0, \pi/2)$ такое, что определение 2 выполняется для сектора $S_{b,\theta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть определение 2 выполняется для сектора $S_{a,\varphi}$. Положим $\theta = \varphi$, если $b \leq a$, и

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{c-a}{c-b} \operatorname{tg} \varphi\right),$$

если $a < b < c$. Тогда $\sigma(T) \subset S_{b,\theta}$, а также

$$\exists M_0 > 0 \quad \forall \lambda \in S_{a,\varphi} \setminus S_{b,\theta} \quad \|R_\lambda(T)\| \leq M_0 G(|\lambda - b|).$$

Также, учитывая формулу (1), при $\lambda \notin S_{a,\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(T)\| &\leq MG(|\lambda - a|) \leq L|b - a|G(|\lambda - a|)G(|\lambda - b|) \\ &\leq G(|\lambda - b|)(1 + LG(0)|b - a|). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T: D(T) \subset B \rightarrow B$ – линейный оператор, для некоторого сектора $S_{a,\varphi}$ выполняется условие 1) определения 2 и $R_\lambda(T) \rightarrow O$ при $\lambda \rightarrow \infty$ вне сектора $S_{a,\varphi}$. Положим

$$G(t) := \max\{\|R_\lambda(T)\| \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_{a,\varphi}, |\lambda - a| \geq t\}, \quad t \geq 0.$$

Тогда $G \in \Psi$ и T – G -секториальный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия а), б) определения 1 и второе условие определения 2, очевидно, выполняются. Потому достаточно проверить выполнение условия (1). Пусть $t_2 > t_1 \geq 0$. Существует $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus S_{a,\varphi}$ такое, что $|\lambda_1 - a| \geq t_1$ и $G(t_1) = \|R_{\lambda_1}(T)\|$. Если $|\lambda_1 - a| \geq t_2$, то $G(t_2) = G(t_1)$ и условие (1) выполняется. Если же $|\lambda_1 - a| < t_2$, то обозначим

$$\lambda_2 := a + t_2 \frac{\lambda_1 - a}{|\lambda_1 - a|}.$$

Тогда $\lambda_2 \in S_{a,\varphi}$, $|\lambda_2 - a| = t_2$ и

$$|\lambda_2 - \lambda_1| = \left(\frac{t_2}{|\lambda_1 - a|} - 1 \right) |\lambda_1 - a| = t_2 - |\lambda_1 - a| \leq t_2 - t_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G(t_1) &= \|R_{\lambda_1}(T)\| \leq \|R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T)\| + \|R_{\lambda_2}(T)\| \\ &= |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \|R_{\lambda_1}(T)\| \cdot \|R_{\lambda_2}(T)\| + \|R_{\lambda_2}(T)\| \\ &\leq |\lambda_2 - \lambda_1| G(t_1) G(t_2) + G(t_2). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Каждый секториальный оператор T является G -секториальным, если положить $G(t) = (t + 1)^{-1}$, $t \geq 0$.

Для построения примеров G -секториальных операторов, которые не являются секториальными, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $G \in \Psi$ и последовательности положительных действительных чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ и $\{L_n : n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям:

- 1) $\forall n \geq 1 \quad a_n < a_{n+1}$;
- 2) $\forall n \geq 1 \quad a_n/L_n^2 > a_{n+1}/L_{n+1}^2$;
- 3) $a_n/L_n^2 \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$;
- 4) существует такая постоянная $k > 0$, что

$$\frac{a_n}{L_n^2 + c_n} \sim \frac{a_n}{L_n^2 + c_{n-1}} \sim kG(\sqrt{c_n}) \sim kG(\sqrt{c_{n-1}}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$c_n := \frac{a_n L_{n+1}^2 - L_n^2 a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}, \quad n \geq 1.$$

Тогда оператор $A: l_\infty \rightarrow l_\infty$, который задается формулой

$$\begin{aligned} Ax &= (L_1 x_1 + a_1 x_2, L_1 x_2, L_2 x_3 + a_2 x_4, L_2 x_4, \dots, L_n x_{2n-1} + a_n x_{2n}, L_n x_{2n}, \dots), \\ x &= (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_\infty, \end{aligned}$$

является G -секториальным и не является G_1 -секториальным, если $G_1 \in \Psi$ и $G_1(t) = o(G(t))$, $t \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что A – ограниченный оператор с собственными числами $\{L_n : n \geq 1\}$. Кроме того, для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{L_n : n \geq 1\}$ формулами

$$(R_\lambda(A)x)_{2n-1} = \frac{x_{2n-1}}{L_n - \lambda} - \frac{a_n x_{2n}}{(L_n - \lambda)^2}, \quad (R_\lambda(A)x)_{2n} = \frac{x_{2n}}{L_n - \lambda},$$

$$n \geq 1, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_\infty,$$

определена резольвента оператора A . Ее ограниченность следует из равенства

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{|L_n - \lambda|} + \frac{a_n}{|L_n - \lambda|^2} \right),$$

а также условий 1)–3).

Проверим второе условие определения 2 для $a = 0$ и произвольного фиксированного $\varphi \in (0, \pi/2)$. Для $\lambda \notin S_{0,\varphi}$ такого, что $|\lambda| = r$, $\arg \lambda = \psi$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \|(A - \lambda I)^{-1}\| - \sup_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{|L_n - \lambda|^2} \right) \right| \\ & \leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{|L_n - \lambda|} \right) = \frac{1}{\rho(\lambda, \{L_n : n \geq 1\})} \leq \frac{1}{|\lambda| \sin \varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$|L_n - \lambda|^2 = L_n^2 + r^2 - 2rL_n \cos \psi \geq (L_n^2 + r^2)(1 - \cos \varphi),$$

$$|L_n - \lambda|^2 \leq 2(L_n^2 + r^2).$$

Поэтому

$$\sup_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{|L_n - \lambda|^2} \right) \in \left[\frac{\Omega(r)}{2}, \frac{\Omega(r)}{1 - \cos \varphi} \right], \quad (3)$$

где

$$\Omega(r) = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{L_n^2 + r^2} \right).$$

Исследуем поведение $\Omega(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Положим

$$b_n(r) := \frac{a_n}{L_n^2 + r^2}, \quad n \geq 1, \quad r > 0.$$

При фиксированном $r > 0$ согласно условию 3) $b_n(r) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, существует номер $N = N(r)$ такой, что $\Omega(r) = b_N(r)$. Из условия 1) следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $r_m > 0$ такое, что $b_1(r) < b_2(r) < \dots < b_m(r) < b_{m+1}(r)$ при всех $r \geq r_m$. Отсюда следует, что $N(r) \geq m + 1$ при $r \geq r_m$. Поэтому $N(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Будем считать, что $N \geq 2$. Учитывая условия 1) и 2), решаем неравенства $b_N \geq b_{N-1}$ и $b_N \geq b_{N+1}$. Получаем

$$\frac{a_{N-1}L_N^2 - L_{N-1}^2 a_N}{a_N - a_{N-1}} \leq r^2 \leq \frac{a_{N+1}L_N^2 - L_{N+1}^2 a_N}{a_N - a_{N+1}},$$

т.е. $c_{N-1} \leq r^2 \leq c_N$. Отсюда

$$G(\sqrt{c_N}) \leq G(r) \leq G(\sqrt{c_{N-1}})$$

и

$$\frac{a_N}{L_N^2 + c_N} \leq \Omega(r) \leq \frac{a_N}{L_N^2 + c_{N-1}}.$$

Поэтому, учитывая условие 4), имеем

$$\Omega(r) \sim kG(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Из соотношений (2)–(4) и замечания 2 получаем:

$$\begin{aligned} \exists M > 0 \quad \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\| &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{|L_n - \lambda|^2} \right) + \frac{1}{|\lambda| \sin \varphi} \leq \frac{\Omega(r)}{1 - \cos \varphi} + \frac{G(r)}{C \sin \varphi} \leq MG(r), \\ \forall M > 0 \quad \exists \lambda \notin S_{a,\varphi} \\ \|(A - \lambda I)^{-1}\| &\geq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{|L_n - \lambda|^2} \right) - \frac{1}{|\lambda| \sin \varphi} \geq \frac{\Omega(r)}{2} + \frac{G_1(r)}{C \sin \varphi} \\ &= G_1(r) \left(\frac{\Omega(r)}{2G(r)} \frac{G(r)}{G_1(r)} + \frac{1}{C \sin \varphi} \right) \geq MG_1(r). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следуют оба утверждения теоремы.

Приведем примеры применения леммы 2, в которых для разных функций G построены G -секториальные операторы, не являющиеся секториальными.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$G(t) = \frac{\ln^\beta(t + t_0)}{t + t_0}, \quad t \geq 0, \quad \beta > 0,$$

где $t_0 > 0$ – такое фиксированное число, что функция G монотонно убывает при $t \geq 0$. Пусть также $a_n = n + n_0$, $L_n = (n + n_0) \ln^{-\beta}(n + n_0)$, $n \geq 1$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ выбрано настолько большим, чтобы выполнялись условия 1)–3) леммы 2. Проверим условие 4). Имеем

$$\begin{aligned} c_n &= (n + n_0)(n + n_0 + 1)^2 \ln^{-2\beta}(n + n_0 + 1) - (n + n_0 + 1) \ln^{-2\beta}(n + n_0) \\ &\sim (n + n_0)^2 \ln^{-2\beta}(n + n_0), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{a_n}{L_n^2 + c_n} \sim \frac{a_n}{L_n^2 + c_{n-1}} \sim \frac{1}{2(n + n_0) \ln^{-2\beta}(n + n_0)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} G(\sqrt{c_n}) &\sim G(\sqrt{c_{n-1}}) \sim G\left(\sqrt{(n + n_0)^2 \ln^{-2\beta}(n + n_0)}\right) \\ &\sim \frac{\ln^\beta(n + n_0)}{\sqrt{(n + n_0)^2 \ln^{-2\beta}(n + n_0)}} \sim \frac{1}{(n + n_0) \ln^{-2\beta}(n + n_0)}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Пусть

$$G(t) = (t + 1)^{-\beta}, \quad t \geq 0, \quad \beta \in (0, 1), \quad \text{и} \quad a_n = n, \quad L_n = n^{\alpha/2}, \quad n \geq 1,$$

где $\alpha = 2/(2 - \beta)$. Условия 1)–3) леммы 2, очевидно, выполняются. Проверим условие 4). Поскольку

$$c_n = n(n + 1)^\alpha - (n + 1)n^\alpha \sim (\alpha - 1)n^\alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{a_n}{L_n^2 + c_n} \sim \frac{a_n}{L_n^2 + c_{n-1}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$G(\sqrt{c_n}) \sim G(\sqrt{c_{n-1}}) \sim G(\sqrt{(\alpha - 1)n^\alpha}) \sim (\alpha - 1)^{-\beta/2} n^{1-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 4. Пусть

$$G(t) = \ln^{-\beta}(t+2), \quad t \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \text{и} \quad a_n = n, \quad L_n = \sqrt{n} \ln^{\beta/2}(n+1), \quad n \geq 1.$$

Условия 1)–3) леммы 1, очевидно, выполняются. Проверим условие 4). Имеем

$$c_n = n(n+1)(\ln^{\beta}(n+2) - \ln^{\beta}(n+1)) \sim \beta n \ln^{\beta-1} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\frac{a_n}{L_n^2 + c_n} \sim \frac{a_n}{L_n^2 + c_{n-1}} \sim \frac{1}{\ln^{\beta} n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$G(\sqrt{c_n}) \sim G(\sqrt{c_{n-1}}) \sim G\left(\sqrt{\beta n \ln^{\beta-1} n}\right) \sim 2^{\beta} \ln^{-\beta} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для функций из примеров 2–4 имеем $G_1(t) = o(G(t))$, $t \rightarrow +\infty$, где $G_1(t) = (t+1)^{-1}$. Поэтому соответствующие операторы не являются секториальными.

Частный случай G -секториального оператора изучается в работе [5].

Примеры дифференциальных операторов в пространствах L_p , для которых $G(t) = (1+t)^{-\beta}$, $\beta \in (0, 1)$, и их свойства исследуются в работах [6], [7].

§ 2. Свойства операторной экспоненты

В этом параграфе приводятся определение и свойства операторной экспоненты, обобщающие результаты из [1] об экспоненте секториального оператора.

Для чисел $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, $r \in (0, +\infty)$ обозначим

$$\Gamma_{a,\varphi,r}^1 := \{a - s \cos \varphi - is \sin \varphi \mid s \in (-\infty, -r]\},$$

$$\Gamma_{a,\varphi,r}^2 := \{a + s \cos \varphi - is \sin \varphi \mid s \in [r, +\infty)\},$$

$$\Gamma_{a,\varphi,r}^3 := \{a + r \cos s + ir \sin s \mid s \in [\varphi, 2\pi - \varphi]\},$$

$$\Gamma_{a,\varphi,r} := \Gamma_{a,\varphi,r}^1 \cup \Gamma_{a,\varphi,r}^2 \cup \Gamma_{a,\varphi,r}^3.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $r \in (0, +\infty)$, $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор, причем определение 2 выполняется для сектора $S_{a,\varphi}$. Операторной экспонентой для оператора T будем называть $\mathcal{L}(B)$ -значную функцию

$$e^{-Tt} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\varphi,r}} e^{-tz} R_z(T) dz, \quad t > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Здесь и далее все интегралы являются интегралами Римана (собственными или несобственными).

Корректность определения 3 обеспечивает следующая лемма.

ЛЕММА 3. Интеграл из определения 3 абсолютно сходится и имеет одно и то же значение при всех $r \in (0, +\infty)$ и (a, φ) таких, что определение 2 выполняется для сектора $S_{a,\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Абсолютная сходимость интеграла вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{a,\varphi,r}^1} |e^{-tz}| \cdot \|R_z(T)\| \cdot |dz| &\leq \int_{-\infty}^{-r} e^{-t(a-s\cos\varphi)} G(-s) ds \\ &\leq G(r) e^{-at} \int_{-\infty}^{-r} e^{ts\cos\varphi} ds = \frac{G(r) e^{-t(a+r\cos\varphi)}}{t\cos\varphi}, \\ \int_{\Gamma_{a,\varphi,r}^2} |e^{-tz}| \cdot \|R_z(T)\| \cdot |dz| &\leq \frac{G(r) e^{-t(a+r\cos\varphi)}}{t\cos\varphi}, \\ \int_{\Gamma_{a,\varphi,r}^3} |e^{-tz}| \cdot \|R_z(T)\| \cdot |dz| &\leq \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-t(a+r\cos s)} G(r) \cdot r ds \leq rG(r) e^{-at+rt}. \end{aligned}$$

Из этих оценок и равенства нулю интеграла вдоль замкнутого контура в области, где нет точек спектра оператора T , от аналитической в этой области функции $e^{-tz} R_z(T)$ следует независимость интеграла от r , a , φ .

ЛЕММА 4. Если $G \in \Psi$ и $T - G$ -секториальный оператор, то

- 1) $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad e^{-(T+\tau I)t} = e^{-\tau t} \cdot e^{-Tt};$
- 2) $\forall t_1, t_2 > 0 \quad e^{-(t_1+t_2)T} = e^{-Tt_1} \cdot e^{-Tt_2}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие леммы 3 доказательство такое же, как и в случае ограниченного оператора T (см. [8]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $T - G$ -секториальный оператор и определение 2 выполняется для сектора $S_{a,\varphi}$, то оператор $T - bI$, где $b \in \mathbb{R}$, также является G -секториальным, причем определение 2 выполняется для сектора $S_{a-b,\varphi}$. Лемма 4 дает простую связь операторных экспонент для операторов T и $T - bI$. Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать только случай $a = 0$.

Далее рассматриваются только G -секториальные операторы T , спектр которых удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \sigma(T) > 0$$

и положено $a := 0$.

ЛЕММА 5. Если $G \in \Psi$ и $T - G$ -секториальный оператор, то

- 1) $\forall t > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad R(e^{-Tt}) \subset D(T^n);$
- 2) $\forall t > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall r > 0 \quad \forall \lambda \notin (S_{0,\varphi} \cup \Gamma_{0,\varphi,r})$

$$(T - \lambda I)^n e^{-Tt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,r}} (z - \lambda)^n e^{-zt} R_z(T) dz + F_n(\lambda, t),$$

где

$$F_n(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{-n-1} (R_\lambda(T))^{-n-k} \frac{(-t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

если λ и $S_{0,\varphi}$ лежат по одну сторону от $\Gamma_{0,\varphi,r}$ и $n < 0$, и $F_n(\lambda, t) = O$ в других случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \notin (S_{0,\varphi} \cup \Gamma_{0,\varphi,r})$ и $t > 0$. Обозначим

$$J_n := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,r}} (z - \lambda)^n e^{-zt} R_z(T) dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Сходимость этих интегралов доказывается аналогично лемме 3. По определению 3 $J_0 = e^{-Tt}$. Кроме того, при $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,r}} (z - \lambda)^{n-1} e^{-zt} (-I + (T - \lambda I)R_z(T)) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,r}} (z - \lambda)^{n-1} e^{-zt} dz \cdot I + (T - \lambda I)J_{n-1} = f_n(\lambda, t) + (T - \lambda I)J_{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$f_n(\lambda, t) = e^{-\lambda t} \frac{(-t)^{-n}}{(-n)!} I,$$

если λ и $S_{0,\varphi}$ лежат по одну сторону от $\Gamma_{0,\varphi,r}$ и $n \leq 0$, и $f_n(\lambda, t) = O$ в других случаях. Поэтому при $n \geq 0$

$$J_n = (T - \lambda I)^n J_0 = (T - \lambda I)^n e^{-Tt},$$

а при $n < 0$

$$J_n = - \sum_{k=0}^{-n-1} (R_\lambda(T))^{-k-n} f_{-k}(\lambda, t) + (R_\lambda(T))^{-n} J_0 = -F_n(\lambda, t) + (T - \lambda I)^n e^{-Tt}.$$

ЛЕММА 6. Пусть $G \in \Psi$, $T - G$ -секториальный оператор и функция

$$K: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

такова, что для некоторого $\gamma > -1$ выполняются неравенства

$$\frac{K(s_1)}{s_1^\gamma} \leq \frac{K(s_2)}{s_2^\gamma}, \quad 0 < s_2 \leq s_1 < +\infty.$$

Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для произвольного $t > 0$ и для произвольной определенной и непрерывной на $\Gamma_{0,\varphi,t-1}$ комплекснозначной функции f такой, что $|f(z)| \leq K(|z|)$, $z \in \Gamma_{0,\varphi,t-1}$, выполняется неравенство

$$\left\| \int_{\Gamma_{0,\varphi,t-1}} f(z) e^{-zt} R_z(T) dz \right\| \leq CH(t) K(t^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим интегралы по частям кривой $\Gamma_{0,\varphi,t-1}$, делая замену $ts = u$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t-1}^1} |f(z)| \cdot \|R_z(T)\| \cdot |dz| &\leq \int_{t-1}^{+\infty} K(s) e^{-ts \cos \varphi} G(s) ds \\ &= t^{-1} \int_1^{+\infty} K\left(\frac{u}{t}\right) e^{-u \cos \varphi} G\left(\frac{u}{t}\right) du \\ &\leq t^{-1} G(t^{-1}) \int_1^{+\infty} \left(\frac{u}{t}\right)^\gamma \frac{K(t^{-1})}{t^{-\gamma}} e^{-u \cos \varphi} du \\ &\leq H(t) K(t^{-1}) \int_0^{+\infty} u^\gamma e^{-u \cos \varphi} du, \end{aligned}$$

оценка для $\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}^2$ аналогична,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}^3} |f(z)| \cdot \|R_z(T)\| \cdot |dz| &\leq \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} K(t^{-1}) e^{-\cos s} G(t^{-1}) \cdot t^{-1} ds \\ &= H(t) K(t^{-1}) \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-\cos s} ds \leq H(t) K(t^{-1}) \cdot 2\pi e. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) $\forall n \geq 0 \quad \exists C_n > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|T^n e^{-Tt}\| \leq C_n H(t) t^{-n};$
- 2) $\|e^{-Tt}\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что при $n \geq 0$

$$T^n e^{-Tt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} z^n e^{-zt} R_z(T) dz.$$

Поэтому утверждение 1) является следствием леммы 6 при $K(s) = s^n, s > 0$. Второе утверждение следует из первого при $n = 0$, поскольку $H(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор. Тогда выполняются следующие оценки:

- 1) $\forall n \geq 0 \quad \exists L_n > 0 \quad \forall t_1, t_2 > 0, \min\{1, t_1\} > t_2 - t_1 > 0,$

$$\|T^{n-1}(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2})\| \leq L_n(t_2 - t_1) H(t_1) t_1^{-n};$$

- 2) $\forall n \geq 0 \quad \exists M_n > 0 \quad \forall t_1, t_2 > 0, \min\{1, t_1\} > t_2 - t_1 > 0,$

$$\|T^{n-2}(e^{-Tt_2} - e^{-Tt_1} + T(t_2 - t_1)e^{-Tt_1})\| \leq M_n(t_2 - t_1)^2 H(t_1) t_1^{-n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 5 при $n \geq 0$

$$\begin{aligned} T^n(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t_1^{-1}}} z^n (e^{-zt_1} - e^{-zt_2}) R_z(T) dz, \\ T^n(e^{-Tt_2} - e^{-Tt_1} + T(t_2 - t_1)e^{-Tt_1}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t_1^{-1}}} z^n (e^{-zt_2} - e^{-zt_1} + z(t_2 - t_1)e^{-zt_1}) R_z(T) dz. \end{aligned}$$

Поэтому оценки 1), 2) следуют из леммы 6, если положить соответственно

$$\begin{aligned} K(s) &= L s^{n+1}, \quad s > 0, \quad \text{где } L := \max \left\{ \frac{|1 - e^{-z}|}{|z|} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} z \geq -1 \right\}, \\ K(s) &= M s^{n+2}, \quad s > 0, \quad \text{где } M := \max \left\{ \frac{|e^{-z} - 1 + z|}{|z|^2} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} z \geq -1 \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t > 0 \quad (e^{-Tt})^{(n)} = (-T)^n e^{-Tt}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t > 0$. Вследствие теоремы 3

$$\left\| \frac{(-T)^{n-1} e^{-T(t+\tau)} - (-T)^{n-1} e^{-Tt}}{\tau} - (-T)^n e^{-Tt} \right\| \leq M_{n+1} H(t) \tau t^{-(n+1)} \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор. Тогда

- 1) $(e^{-Tt} - I)T^{-1} \rightarrow O$, $t \rightarrow 0+$;
- 2) $((e^{-Tt} - I)/t + T)T^{-2} \rightarrow O$, $t \rightarrow 0+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Используя представление из леммы 5 и лемму 6 для $f(z) = t^{-1}z^{-1}$, $K(s) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|(e^{-Tt} - I)T^{-1}\| &= \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} z^{-1} e^{-zt} R_z(T) dz \right\| \\ &\leq CtH(t) = CG(t^{-1}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

2) Из леммы 5 и леммы 6 для $f(z) = t^{-2}z^{-2}$, $K(s) = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} &\|t^{-1}(e^{-Tt}T^{-2} - T^{-2}) + T^{-1}\| \\ &= \left\| t^{-1} \left(\left(T^{-2} - T^{-1}t - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} z^{-2} e^{-zt} R_z(T) dz \right) - T^{-2} \right) + T^{-1} \right\| \\ &= \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} t^{-1} z^{-2} e^{-zt} R_z(T) dz \right\| \leq CtH(t) = CG(t^{-1}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 5 справедливы следующие утверждения:

- 1) $\forall x \in D(T) \quad e^{-Tt}x \rightarrow x$, $t \rightarrow 0+$;
- 2) $\forall x \in D(T^2) \quad ((e^{-Tt} - I)/t + T)x \rightarrow \bar{0}$, $t \rightarrow 0+$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для каждого $t > 0$ существует интеграл

$$\int_0^t e^{-Ts} ds = T^{-1}(I - e^{-Tt}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 4 и 5 следует, что

$$\int_\varepsilon^t e^{-Ts} ds = T^{-1}(e^{-T\varepsilon} - e^{-Tt}) \rightarrow T^{-1}(I - e^{-Tt}), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

§ 3. Дробные степени G -секториальных операторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор. Обозначим

$$\Omega_0 := \left\{ \alpha > 0 \mid \int_0^1 t^{\alpha-1} H(t) dt < +\infty \right\}, \quad \Omega := \Omega_0 \cup \{1\},$$

и для каждого $\alpha \in \Omega$ положим

$$T^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-Tt} dt,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для каждого G -секториального оператора

$$(1, +\infty) \subset \Omega_0,$$

поскольку

$$t^{\alpha-1}H(t) = t^{\alpha-2}G(t^{-1}) = o(t^{\alpha-2}), \quad t \rightarrow 0+.$$

ПРИМЕР 5. Найдем множества Ω_0 и Ω для операторов из примеров 1–4:

- 1) для секториального оператора $\Omega_0 = \Omega = (0, +\infty)$;
- 2) для оператора в примере 2 $\Omega_0 = \Omega = (0, +\infty)$;
- 3) для оператора в примере 3 $\Omega_0 = \Omega = (1 - \beta, +\infty)$;
- 4) для оператора в примере 4 имеем $\Omega_0 = (1, +\infty)$ при $\beta \leq 1$ и $\Omega_0 = [1, +\infty)$ при $\beta > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $\alpha \in \Omega_0$, то

$$H(t)t^\alpha \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Действительно, при $\alpha \geq 1$

$$H(t)t^\alpha = G(t^{-1})t^{\alpha-1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+,$$

а при $\alpha \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} H(t)t^\alpha &= G(t^{-1})t^{\alpha-1} \leq \int_t^{2t} G(s^{-1})2^{2-\alpha}s^{\alpha-2} ds \\ &= 2^{2-\alpha} \int_t^{2t} H(s)s^{\alpha-1} ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Оператор T^{-1} в смысле определения 4 является обратным к T оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 и теоремы 2, обозначив через T^{-1} обратный к T оператор, получим

$$\int_0^{+\infty} e^{-Ts} ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} (I - e^{-Tt})T^{-1} = T^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия определения 4. Тогда

- 1) $\forall \alpha \in \Omega \quad T^{-\alpha} \in \mathcal{L}(B)$;
- 2) $\forall \alpha, \beta \in \Omega \quad T^{-\alpha}T^{-\beta} = T^{-(\alpha+\beta)}$;
- 3) $\forall n \geq 1 \quad T^{-n}$ совпадает с обычной отрицательной степенью оператора;
- 4) $\forall \alpha \in \Omega \quad T^{-\alpha}$ – инъекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $\alpha = 1$ это утверждение следует из леммы 7. При $\alpha \in \Omega_0$ интеграл в определении 4 абсолютно сходится, что следует из замечания 6 и теоремы 2.

2) Пусть $\alpha, \beta \in \Omega_0$. Тогда, учитывая абсолютную сходимость интегралов, получаем

$$\begin{aligned} T^{-\alpha}T^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-T(t+s)} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}e^{-Tu} dt \right) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \right) u^{\alpha+\beta-1}e^{-Tu} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1}e^{-Tu} du = T^{-(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$, $\beta \in \Omega_0$ вследствие леммы 7 и теорем 2, 5

$$\begin{aligned} T^{-1}T^{-\beta} &= T^{-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-Tt} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(-\beta^{-1} t^{\beta} e^{-Tt} T^{-1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \beta^{-1} t^{\beta} e^{-Tt} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^{+\infty} t^{\beta} e^{-Tt} dt = T^{-(\beta+1)}. \end{aligned}$$

Случай $\beta = 1$, $\alpha \in \Omega_0$ рассматривается аналогично.

Пусть $\alpha = \beta = 1$. Отметим, что при $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{+\infty} t e^{-Tt} dt &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} t T e^{-Tt} dt \cdot T^{-1} \\ &= \left(-t e^{-Tt} T^{-1} \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-Tt} dt \cdot T^{-1} \right) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-Tt} dt \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

Перейдя с учетом леммы 7 к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$, получим

$$T^{-2} = \int_0^{+\infty} t e^{-Tt} dt = T^{-1} T^{-1}.$$

Утверждение 3) следует из утверждения 2) и леммы 7.

4) Пусть $\alpha \in \Omega$ и $x \in B$ такие, что $T^{-\alpha}x = \bar{0}$. Тогда при $n = [\alpha] + 2$, учитывая утверждение 2) и то, что $n - \alpha \in (1, +\infty) \subset \Omega$, имеем $T^{-n}x = T^{-(n-\alpha)}T^{-\alpha}x = \bar{0}$. Действуя n раз на это равенство оператором T , получаем $x = \bar{0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Вследствие утверждения 4) теоремы 6 существует линейный оператор

$$T^{\alpha} := (T^{-\alpha})^{-1}, \quad \alpha \in \Omega.$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим оператор из леммы 2 при $L_n = n^{\alpha}$, $a_n = n^{\delta}$, $n \geq 1$. Аналогично примеру 3 можно убедиться, что условия леммы 2 выполняются при $\alpha > 0$, $\delta \in (\alpha, 2\alpha)$ и при этом $G(t) = (t+1)^{-\beta}$, $t \geq 0$, где $\beta = 2 - \delta/\alpha$. Тогда операторная экспонента задается формулой

$$\begin{aligned} e^{-At}x &= (e^{-t}x_1 - te^{-t}x_2, e^{-t}x_2, e^{-2^{\alpha}t}x_3 - t2^{\delta}e^{-2^{\alpha}t}x_4, e^{-2^{\alpha}t}x_4, \dots, \\ &\quad e^{-n^{\alpha}t}x_{2n-1} - tn^{\delta}e^{-n^{\alpha}t}x_{2n}, e^{-n^{\alpha}t}x_{2n}, \dots), \\ &\quad t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_{\infty}, \end{aligned}$$

отрицательные степени оператора A – формулой

$$\begin{aligned} A^{-\gamma}x &= (x_1 - \gamma x_2, x_2, 2^{-\alpha\gamma}x_3 - \gamma 2^{-\alpha\gamma+\delta-\alpha}x_4, 2^{-\alpha\gamma}x_4, \dots, \\ &\quad n^{-\alpha\gamma}x_{2n-1} - \gamma n^{-\alpha\gamma+\delta-\alpha}x_{2n}, n^{-\alpha\gamma}x_{2n}, \dots), \\ &\quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_{\infty}, \end{aligned}$$

соответствующие положительные степени – формулой

$$\begin{aligned} A^{\gamma}x &= (x_1 + \gamma x_2, x_2, 2^{\alpha\gamma}x_3 + \gamma 2^{\alpha\gamma+\delta-\alpha}x_4, 2^{\alpha\gamma}x_4, \dots, \\ &\quad n^{\alpha\gamma}x_{2n-1} + \gamma n^{\alpha\gamma+\delta-\alpha}x_{2n}, n^{\alpha\gamma}x_{2n}, \dots), \\ &\quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_{\infty}. \end{aligned}$$

Можно непосредственно убедиться, что операторы $A^{-\gamma}$ являются ограниченными при $\gamma \geq \delta/\alpha - 1 = 1 - \beta$. При $\gamma > 1 - \beta$ они совпадают с операторами, заданными определением 4.

Далее,

$$\|e^{-At}\| = \sup_{n \geq 1} (|e^{-n^\alpha t} - tn^\delta e^{-n^\alpha t}| + |e^{-n^\alpha t}|),$$

поэтому при $t = t_n = n^{-\alpha}$, $n \geq 1$,

$$\|e^{-At_n}\| \geq e^{-1} n^{\delta-\alpha} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. операторная экспонента не ограничена в окрестности нуля (в отличие от случая секториального оператора).

Пусть теперь $\gamma_1 > \gamma_2 > 1 - \beta$. Рассмотрим вектор $v \in l_\infty$, для которого $v_{2n-1} = -\gamma_1 n^{-\alpha\gamma_1 + \delta - \alpha}$, $v_{2n} = n^{-\alpha\gamma_1}$, $n \geq 1$. Тогда

$$(A^{\gamma_1} x)_{2n-1} = 0, \quad (A^{\gamma_1} x)_{2n} = 1, \quad n \geq 1,$$

откуда $v \in D(A^{\gamma_1})$. Кроме того,

$$(A^{\gamma_2} x)_{2n-1} = n^{\alpha\gamma_2 - \alpha\gamma_1 + \delta - \alpha}(\gamma_2 - \gamma_1), \quad (A^{\gamma_2} x)_{2n} = n^{-\alpha\gamma_1 + \alpha\gamma_2}, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, при $\gamma_1 - \gamma_2 < \delta/\alpha - 1$ имеем $v \notin D(A^{\gamma_2})$.

Этот пример показывает, в частности, что для G -секториального оператора A включение

$$D(A^{\gamma_1}) \subset D(A^{\gamma_2}), \quad \gamma_1 > \gamma_2,$$

выполняющееся для секториальных операторов (см. [1]), может быть неверным.

Заметим, однако, что если $\gamma_1 - \gamma_2 \in \Omega$, то это включение верно для G -секториального оператора вследствие утверждения 2) теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор, $\alpha \in \Omega$. Тогда

- 1) $(e^{-Tt} - I)T^{-\alpha} \rightarrow O$, $t \rightarrow 0+$;
- 2) $\exists C_\alpha > 0 \quad \forall t > 0 \quad \|e^{-Tt}T^{-\alpha}\| \leq C_\alpha$;
- 3) $((Tt)^{-1}(I - e^{-Tt}) - I)T^{-\alpha} \rightarrow O$, $t \rightarrow 0+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $\alpha \in \Omega_0$, учитывая теоремы 2, 3, имеем

$$\begin{aligned} \|(e^{-Tt} - I)T^{-\alpha}\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} (e^{-T(t+s)} - e^{-Ts}) ds \right\| \\ &\leq 2C_0 \int_0^{\sqrt{t}} s^{\alpha-1} H(s) ds + L_0 \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} s^{\alpha-2} H(s) ds \cdot t \\ &\leq C_0 \int_0^{\sqrt{t}} s^{\alpha-1} H(s) ds + L_0 \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} H(s) ds \cdot \sqrt{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ это утверждение следует из теоремы 5.

Утверждение 2) следует из утверждения 1) (ограниченность при $t \rightarrow 0+$) и теоремы 2 (ограниченность при $t \rightarrow +\infty$).

3) При $\alpha \in \Omega_0$

$$\begin{aligned} \|((Tt)^{-1}(I - e^{-Tt}) - I)T^{-\alpha}\| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} ((Tt)^{-1}(I - e^{-Tt}) - I)e^{-Ts} ds \right\| \\ &\leq C_1 \int_0^{\sqrt{t}} s^{\alpha-1} H(s) ds + C_2 \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} s^{\alpha-2} H(s) ds \cdot t \\ &\leq C_1 \int_0^{\sqrt{t}} s^{\alpha-1} H(s) ds + C_2 \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} H(s) ds \cdot \sqrt{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+, \end{aligned}$$

по теореме 3. При $\alpha = 1$ это утверждение следует из теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор, $\alpha \in \Omega$ и $x \in D(T^\alpha)$. Тогда

- 1) $e^{-Tt}x \rightarrow x$, $t \rightarrow 0+$;
- 2) $(Tt)^{-1}(I - e^{-Tt})x \rightarrow x$, $t \rightarrow 0+$.

§ 4. Задача Коши для дифференциального уравнения с G -секториальным операторным коэффициентом

В этом параграфе исследуются вопросы существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с G -секториальным операторным коэффициентом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $f: (0, R) \rightarrow B$, $x_0 \in B$. Решением задачи Коши

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0,$$

назовем функцию $x: [0, R) \rightarrow D(T)$, которая непрерывна на $[0, R)$, дифференцируема на $(0, R)$ и удовлетворяет уравнению и начальному условию.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $G \in \Psi$, T – G -секториальный оператор, $1 \in \Omega_0(T)$, функция $f: (0, R) \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Omega} D(T^\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, R) \quad \exists \varepsilon_t > 0 \quad \exists L_t > 0 \quad \exists \beta_t \in \Omega_0 \quad \forall s_1, s_2 \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap (0, R) \\ \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq L_t |s_1 - s_2|^{\beta_t} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\exists \beta \in \Omega_0 \quad \exists L > 0 \quad \forall s \in (0, R/2] \quad \|f(s)\| \leq Ls^{\beta-1}.$$

Тогда функция

$$F(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s) ds, \quad t \in (0, R), \quad F(0) = \bar{0},$$

является решением задачи Коши

$$F'(t) = -TF(t) + f(t), \quad t \in (0, R), \quad F(0) = \bar{0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f непрерывна на $(0, R)$ и интеграл $\int_0^p \|f(s)\| ds$ существует при каждом $p \in (0, R)$.

Покажем, что $F(t) \in D(T)$, $t > 0$. С учетом теоремы 2 и следствия 2 при каждом $t > 0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{t-\varepsilon} T e^{-T(t-s)} (f(s) - f(t)) ds \right\| \\ & \leq \int_0^{t-\varepsilon} C_1(t-s)^{-1} H(t-s) (\|f(t)\| + \|f(s)\|) ds < +\infty, \\ & \left\| \int_{t-\varepsilon}^t T e^{-T(t-s)} (f(s) - f(t)) ds \right\| \leq \int_{t-\varepsilon}^t C_1 H(t-s) L_t(t-s)^{\beta_t-1} ds < +\infty, \quad (6) \\ & \int_0^t e^{-T(t-s)} f(t) ds = T^{-1}(e^{-Tt} - I)f(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$F(t) = T^{-1}(e^{-Tt} - I)f(t) + T^{-1} \int_0^t T e^{-T(t-s)} (f(s) - f(t)) ds, \quad t > 0.$$

Покажем теперь, что функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Пусть $t_1, t_2 \in (0, R)$, $t_2 > t_1$. Тогда

$$\frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} = \sum_{k=1}^6 I_k(t_1, t_2),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} f(t_1) ds, \\ I_2(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} (f(t_2) - f(t_1)) ds, \\ I_3(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} (f(s) - f(t_2)) ds; \\ I_4(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^{t_1} (e^{-T(t_2-s)} - e^{-T(t_1-s)} \\ & \quad + (t_2 - t_1) T e^{-T(t_1-s)}) f(t_1) ds, \\ I_5(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^{t_1} (e^{-T(t_2-s)} - e^{-T(t_1-s)} \\ & \quad + (t_2 - t_1) T e^{-T(t_1-s)}) (f(s) - f(t_1)) ds, \\ I_6(t_1, t_2) &= T \int_0^{t_1} e^{-T(t_1-s)} f(s) ds. \end{aligned}$$

Оценим эти интегралы:

$$I_1(t_1, t_2) = (I - e^{-T(t_2-t_1)}) T^{-1} (t_2 - t_1)^{-1} f(t_1) \rightarrow f(t_1), \quad t_2 \rightarrow t_1+,$$

согласно следствию 3;

$$\|I_2(t_1, t_2)\| \leq L_0 H(t_2 - t_1) L_{t_1} (t_2 - t_1)^{\beta_{t_1}} \rightarrow 0, \quad t_2 \rightarrow t_1+,$$

согласно замечанию 6;

$$\begin{aligned} \|I_3(t_1, t_2)\| &\leq (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} C_0 H(t_2 - s) L_{t_1} |s - t_2|^{\beta_{t_1}} ds \\ &\leq C_0 L_{t_1} \int_0^{t_2 - t_1} H(s) s^{\beta_{t_1} - 1} ds \rightarrow 0, \quad t_2 \rightarrow t_1 +, \end{aligned}$$

согласно теореме 2;

$$\begin{aligned} I_4(t_1, t_2) &= ((t_2 - t_1)^{-1} (T^{-1}(e^{-T(t_2 - t_1)} - e^{-Tt_2} - I + e^{-Tt_1})) + I - e^{-Tt_1}) f(t_1) \\ &= (t_2 - t_1)^{-1} T^{-1}(e^{-T(t_2 - t_1)} - I) f(t_1) \\ &\quad + (t_2 - t_1)^{-1} T^{-1}(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2}) f(t_1) \\ &\quad + (I - e^{-Tt_1}) f(t_1) \rightarrow \bar{0}, \quad t_2 \rightarrow t_1 +, \end{aligned}$$

согласно следствию 3;

$$\begin{aligned} \|I_5(t_1, t_2)\| &\leq (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^{t_1 - \sqrt[4]{t_2 - t_1}} M_2(t_2 - t_1)^2 (t_1 - s)^{-2} H(t_1 - s) \\ &\quad \times (\|f(s)\| + \|f(t)\|) ds \\ &\quad + (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1 - \sqrt[4]{t_2 - t_1}}^{t_1} (C_1 + L_1)(t_2 - t_1)(t_1 - s)^{-1} \\ &\quad \times H(t_1 - s) L_{t_1} (t_1 - s)^{\beta_{t_1}} ds \\ &\leq M_2 \sqrt[4]{t_2 - t_1} \int_0^{t_1 - \sqrt[4]{t_2 - t_1}} H(t_1 - s)(t_1 - s)(\|f(s)\| + \|f(t)\|) ds \\ &\quad + (C_1 + L_1) \int_{t_1 - \sqrt[4]{t_2 - t_1}}^{t_1} H(t_1 - s) L_{t_1} (t_1 - s)^{\beta_{t_1} - 1} ds \rightarrow 0, \\ &\quad t_2 \rightarrow t_1 +, \end{aligned}$$

где использованы теоремы 2, 3 и оценка $t_2 - t_1 \leq \sqrt[4]{t_2 - t_1}(t_1 - s)$ в первом интеграле;

$$I_6(t_1, t_2) = T \int_0^{t_1} e^{-T(t_1 - s)} f(s) ds = TF(t_1).$$

Поэтому

$$\frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} \rightarrow f(t_1) + TF(t_1), \quad t_2 \rightarrow t_1 +.$$

В случае $t_1 \rightarrow t_2 -$ имеем

$$\frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} = \sum_{k=1}^5 I_k(t_1, t_2),$$

где

$$\begin{aligned}
I_1(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} f(t_2) ds, \\
I_2(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} (f(s) - f(t_2)) ds, \\
I_3(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^{t_1} (e^{-T(t_2-s)} - e^{-T(t_1-s)} + (t_2 - t_1)Te^{-T(t_2-s)}) f(t_1) ds, \\
I_4(t_1, t_2) &= (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^{t_1} (e^{-T(t_2-s)} - e^{-T(t_1-s)} + (t_2 - t_1)Te^{-T(t_2-s)}) \\
&\quad \times (f(s) - f(t_1)) ds, \\
I_5(t_1, t_2) &= T \int_0^{t_1} e^{-T(t_2-s)} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Оценки выполняются аналогично случаю $t_2 \rightarrow t_1+$, за исключением того, что при оценке I_4 интеграл

$$(t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1 - \sqrt[4]{t_2 - t_1}}^{t_1} (e^{-T(t_2-s)} - e^{-T(t_1-s)} + T(t_2 - t_1)e^{-T(t_2-s)})(f(s) - f(t_1)) ds$$

оценивается не с помощью теоремы 4, а с помощью леммы 6 для функций $f(z) = t^{-2}(e^{-zt} - 1 + zte^{-zt})$, $K(s) = Cs^2$, где $t = t_2 - t_1$, $C > 0$ – некоторая постоянная; кроме того,

$$I_5(t_1, t_2) = T \int_0^{t_1} e^{-T(t_2-s)} f(s) ds \rightarrow TF(t_2), \quad t_1 \rightarrow t_2-,$$

вследствие формулы (6) при $t = t_2$ и $\varepsilon = t_2 - t_1$.

Докажем непрерывность функции F в нуле. Имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s) ds \right\| &\leq \int_0^t C_1 H(t-s) L s^{\beta-1} ds \\
&= C_1 L \int_0^{t/2} \frac{1}{t-s} G\left(\frac{1}{t-s}\right) s^{\beta-1} ds + C_1 \int_0^{t/2} H(s) L (t-s)^{\beta-1} ds \\
&\leq C_1 \frac{2}{t} G\left(\frac{1}{t}\right) L \int_0^{t/2} s^{\beta-1} ds + C_1 L \int_0^{t/2} H(s) s^{\beta-1} ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+,
\end{aligned}$$

где использована теорема 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При $1 \notin \Omega_0$, т.е. при $\Omega_0 = (1, +\infty)$, условию (5) удовлетворяют только постоянные функции f . Можно убедиться непосредственно, что в этом случае утверждение теоремы также остается верным.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполняются условия теоремы 8. Тогда для каждого $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Omega} D(T^\alpha)$ существует единственное решение задачи Коши

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0,$$

причем

$$x(t) = e^{-Tt} x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s) ds. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (7) является решением задачи Коши, поскольку с учетом теорем 4, 8 и следствия 3

$$x'(t) = -Te^{-Tt}x_0 - T \int_0^t e^{-T(t-s)}f(s)ds + f(t) = -Tx(t) + f(t), \quad t > 0, \\ x(t) \rightarrow x_0, \quad t \rightarrow 0+.$$

Докажем единственность решения. Пусть x – решение однородной задачи Коши

$$x'(t) + Tx(t) = \bar{0}, \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0.$$

Рассмотрим функцию $u(t, s) = e^{-T(t-s)}T^{-1}x(s)$, $0 \leq s \leq t < R$. Тогда функция u дифференцируема по $s \in (0, t)$ согласно теореме 4 и непрерывна по $s \in [0, t]$ согласно теореме 5 и следствию 3. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = e^{-T(t-s)}T^{-1}x'(s) + e^{-T(t-s)}x(s) = \bar{0},$$

поэтому

$$u(t, s) = u(t, 0), \quad s \in [0, t],$$

в частности, $u(t, 0) = u(t, t)$, т.е. $e^{-Tt}T^{-1}x(0) = T^{-1}x(t)$, откуда

$$x(t) = e^{-Tt}x_0, \quad t > 0.$$

Список литературы

- [1] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [2] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [3] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [4] Э. Хилле, Р. С. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [5] М. Ф. Городний, Н. М. Куцик, А. В. Чайковский, “Про одне узагальнення поняття секторіального оператора”, *Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки*, 2004, № 1, 80–86.
- [6] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.
- [7] Ю. Т. Сильченко, П. Е. Соболевский, “Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотным заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью”, *Сиб. матем. журн.*, **27:4** (1986), 93–104.
- [8] Ю. Т. Сильченко, “Об одном классе полугрупп”, *Функц. анализ и его прилож.*, **33:4** (1999), 90–93.

М. Ф. Городний (M. F. Gorodniĭ)
Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко, Украина
E-mail: gorodnii@yandex.ru

Поступила в редакцию
23.11.2004 и 17.03.2006

А. В. Чайковский (A. V. Chaikovskii)
Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко, Украина
E-mail: ChaikovskiyAV@ukr.net