Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мирзоян, Структурные теоремы для Рис-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 7, 47–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:02:50

УДК 514.752

В. А. Мирзоян

Структурные теоремы для Ріс-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий

В работе доказываются структурные теоремы для подмногообразий с полупараллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах при некоторых дополнительных условиях. Более подробно исследуются минимальные подмногообразия. Дается геометрическое описание одного класса нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с кратными главными векторами кривизны.

Библиография: 36 названий.

§ 0. Введение

Римановы Ріс-полусимметрические пространства характеризуются условием полупараллельности тензора Риччи R_1 ($R(X, Y)R_1 = 0$) и являются естественными обобщениями полусимметрических пространств (характеризуемых условием $R(X, Y)R = 0$, где R – тензор кривизны), римановых пространств с параллельным тензором Риччи ($\nabla R_1 = 0$) и, в частности, эйнштейновых и симметрических пространств. На протяжении последних сорока лет этот класс пространств был предметом исследований многих авторов [1]–[16]. Для них общая классификационная теорема доказана автором в [8], где были выделены полуэйнштейновы пространства. Примерами полуэйнштейновых пространств служат конусы над эйнштейновыми пространствами (подробности см. в [10], [14]). В статье [12], посвященной классификации Ріс-полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах, дано геометрическое описание полуэйнштейновой гиперповерхности, которая представляет собой конус над эйнштейновым пространством. Последнее, в свою очередь, является прямым произведением двух сфер и принадлежит гиперсфере объемлющего пространства. В [14] такой же конус уже выступает в качестве полуэйнштейнова подмногообразия коразмерности ≥ 2 . Другие полуэйнштейновы подмногообразия коразмерности ≥ 2 , не удовлетворяющие более сильным условиям $\nabla R_1 = 0$ или $R(X, Y)R = 0$, пока неизвестны. Вообще, Ріс-полусимметрические подмногообразия, за исключением некоторых их частных классов [17]–[19], мало исследованы, и их систематическая теория еще не разработана.

В настоящей работе исследуется проблема приводимости Ріс-полусимметрических подмногообразий в евклидовых пространствах и доказываются ряд структурных теорем. Дается геометрическое описание одного класса нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с кратными главными векторами кривизны.

Геометрия Ріс-полусимметрических подмногообразий интересна еще и в том отношении, что эти подмногообразия являются обобщениями подмногообразий с различными параллельными и полупараллельными тензорными полями и представляют собой Ріс-огигающие (в точках касания совпадают тензоры Риччи) семейств подмногообразий с параллельным тензором Риччи и, в частности, эйнштейновых подмногообразий и их произведений (см. [9], [11], [13], [20]).

Следует отметить, что в последнее время условия

$$R(X, Y)R = 0, \quad R(X, Y)R_1 = 0$$

и некоторые их обобщения интенсивно исследуются в полуримановой геометрии и в теории различных классов комплексных и контактных многообразий (см. [21]–[23] и цитированную в них литературу).

§ 1. Основные определения, V - и Z -разложения

Напомним вкратце основные определения и, следуя З. Сабо [24], опишем так называемые V - и Z -разложения касательного пространства риманова многообразия.

Пусть M является m -мерным гладким римановым многообразием с римановой метрикой g и римановой связностью ∇ . Тензор кривизны R связности ∇ определяется равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

где X, Y, Z – произвольные касательные к M векторные поля. Выражения $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ называются операторами кривизны связности ∇ . Они действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M . Например, если Q – тензорное поле типа $(1, 1)$, то $(R(X, Y)Q)Z = R(X, Y)Q(Z) - Q(R(X, Y)Z)$. Тензор Риччи R_1 многообразия M определяется стандартным образом: если $(e_1, \dots, e_m)$ – локальный базис ортонормальных касательных векторных полей на M , то для любого касательного векторного поля X полагаем

$$R_1(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i.$$

В каждой точке $x \in M$ тензор R_1 действует как симметрический эндоморфизм касательного пространства $T_x(M)$. Если $R_1 = 0$, то риманово многообразие называется риччи-плоским. Если $R_1 = \lambda I$, где $\lambda = \text{const}$, I – тождественное преобразование, то многообразие M называется эйнштейновым. Теории эйнштейновых многообразий посвящены монографии [25], [26].

Тензорное поле Q , определенное на римановом многообразии M , называется параллельным, если $\nabla Q = 0$ или, более подробно, $\nabla_X Q = 0$ для любого X . Если же $R(X, Y)Q = 0$ для любых X, Y , то тензорное поле Q называется полупараллельным.

Римановы многообразия с параллельным тензором кривизны называются локально симметрическими, а с полупараллельным тензором кривизны – полусимметрическими. Римановы многообразия с полупараллельным тензором

Риччи называются Ріс-полусимметрическими. В силу импликаций

$$\begin{aligned} \nabla R = 0 &\Rightarrow \nabla R_1 = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0, \\ \nabla R = 0 &\Rightarrow R(X, Y)R = 0 \Rightarrow R(X, Y)R_1 = 0 \end{aligned}$$

класс Ріс-полусимметрических многообразий содержит в качестве подклассов локально симметрические и полусимметрические многообразия, многообразия с параллельным тензором Риччи и, в частности, эйнштейновы многообразия.

Общая классификационная теорема римановых Ріс-полусимметрических многообразий гласит, что гладкое риманово многообразие M удовлетворяет условию $R(X, Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым, либо прямым произведением (локально) перечисленных классов многообразий [8].

Полуэйнштейновы многообразия определяются следующим образом. Пусть M – риманово многообразие, а $x \in M$ – произвольная точка. Подпространство $T_x^{(0)}$ касательного пространства $T_x(M)$, определенное равенством $T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X, Y) = 0 \forall Y \in T_x(M)\}$, называется пространством дефектности в точке x , а его размерность $\mu_x = \dim T_x^{(0)}$ – индексом дефектности в этой точке. Пространство $T_x^{(0)}$ было определено С. Чженем и Н. Кейпером [27]. Они доказали, что распределение $T^{(0)}$ (распределение дефектности) инволютивно и вполне геодезично, а его интегральное многообразие является локально евклидовым в индуцированной метрике.

Пространство $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора R_1 , отвечающих нулевому собственному значению. Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$ относительно метрики g называется пространством кодефектности многообразия M в точке x , а его размерность – индексом кодефектности (или просто кодефектностью) в этой точке. Пространство $T_x^{(1)}$ инвариантно относительно операторов $R(X, Y)$ и тензора R_1 . Следовательно, в каждой точке $x \in M$ тензор Риччи R_1 имеет два инвариантных подпространства $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ и справедливо разложение в прямую сумму $T_x(M) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)}$ (подробности см. в [8]).

Риманово многообразие M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется полуэйнштейновым, если его тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение.

Примерами полуэйнштейновых многообразий являются римановы многообразия кодефектности два, которые исследовались в [28], а также, как это указывалось выше, конусы над эйнштейновыми многообразиями.

В 1925 г. П. А. Широковым [29] было доказано, что риманово многообразие с параллельным тензором Риччи локально является прямым произведением эйнштейновых многообразий. Эта структурная теорема была распространена автором [30] на нормально плоские подмногообразия с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах. В связи с тем, что в теории Ріс-полусимметрических подмногообразий вопросы приводимости также играют важную роль, в § 2 мы докажем ряд структурных теорем для этого класса подмногообразий в объемлющем евклидовом пространстве при некоторых дополнительных условиях. Доказательство этих теорем основано на V - и Z -разложениях

касательного пространства риманова многообразия. В связи с этим здесь мы напомним конструкцию этих разложений и опишем некоторые их свойства.

Пусть M – риманово многообразие, и пусть $x \in M$ – фиксированная точка. В линейном пространстве кососимметрических линейных операторов

$$T_x(M) \rightarrow T_x(M)$$

рассмотрим линейное подпространство h_x , натянутое на элементы $R_x(X, Y)$, где $X, Y \in T_x(M)$, т.е. $h_x = \text{span } R_x(X, Y)$. Для произвольных двух элементов $R_x(X, Y)$ и $R_x(Z, W)$ из h_x определим коммутатор по формуле

$$[R_x(X, Y), R_x(Z, W)] = R_x(X, Y) \cdot R_x(Z, W) - R_x(Z, W) \cdot R_x(X, Y).$$

Обозначим через $\bar{h}_x$ алгебру Ли, порожденную множеством h_x относительно этой операции, и пусть P_x – связная подгруппа группы изометрий в $T_x(M)$, определенная алгеброй Ли $\bar{h}_x$. Эта группа называется примитивной группой голономии в точке x . Пусть

$$T_x(M) = V_x^{(0)} + V_x^{(1)} + \dots + V_x^{(t)} \quad (1.1)$$

является неприводимым разложением пространства $T_x(M)$ относительно P_x . Подпространства $V_x^{(\rho)}$ инвариантны относительно действия P_x и попарно вполне ортогональны. Более того, P_x действует на $V_x^{(0)}$ тривиально, а на $V_x^{(\rho)}$, $\rho > 0$, неприводимо.

Разложение (1.1) называется V -разложением пространства $T_x(M)$. Легко видеть, что в этом разложении $V_x^{(0)}$ есть не что иное, как пространство дефектности $T_x^{(0)}$ многообразия M в точке x , определенное выше.

ТЕОРЕМА 1.1 (З. Сабо [24]). *На римановом многообразии M класса C^∞ существует всюду плотное открытое множество G , на котором размерности подпространств $V_x^{(\rho)}$ постоянны, разложение (1.1) единственно с точностью до порядка прямых слагаемых, а соответствующие распределения $V^{(\rho)}$ обладают на G следующими свойствами:*

$$\begin{aligned} \nabla_{V^{(0)}} V^{(0)} &\subseteq V^{(0)}, & \nabla_{V^{(0)}} V^{(\rho)} &\subseteq V^{(\rho)}, \\ \nabla_{V^{(\rho)}} V^{(0)} &\subseteq V^{(0)} + V^{(\rho)}, & \nabla_{V^{(\rho)}} V^{(\rho)} &\subseteq V^{(0)} + V^{(\rho)}, \\ \nabla_{V^{(\rho)}} V^{(\tau)} &\subseteq V^{(\tau)}, & \rho \neq \tau, \quad \rho, \tau \neq 0, \end{aligned}$$

где запись $\nabla_{V^{(\rho)}} V^{(\tau)} \subseteq V^{(\sigma)}$ обозначает, что для любого $X \in V^{(\rho)}$ и любого $Y \in V^{(\tau)}$ вектор $(\nabla_X Y)_x$ принадлежит $V_x^{(\sigma)}$.

Из приведенных в этой теореме включений следует, что распределения $V^{(\rho)}$, вообще говоря, не являются параллельными на M . Однако их всегда можно расширить до параллельных распределений методом З. Сабо [24], суть которого состоит в следующем. Пусть $Z_x^{(\rho)}$ – подпространство в $T_x(M)$, натянутое на векторы

$$X_1|_x, \nabla_{X_1} X_2|_x, \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3|_x, \dots, \nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_k} X_{k+1}|_x, \dots,$$

где все X_k принадлежат $V^{(\rho)}$, $\rho > 0$. По определению полагаем

$$Z_x^{(0)} = (Z_x^{(1)} + \dots + Z_x^{(t)})^\perp,$$

где $(\cdot)^\perp$ обозначает ортогональное дополнение в $T_x(M)$. Легко видеть, что $Z_x^{(0)} \subseteq V_x^{(0)}$, $V_x^{(\rho)} \subseteq Z_x^{(\rho)}$, $\rho > 0$. Из включений, фигурирующих в теореме 1.1, следует, что расширение подпространства $V_x^{(\rho)}$ до $Z_x^{(\rho)}$ происходит только за счет подпространства $V_x^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 1.2 (З. Сабо [24]). *Подпространства $Z_x^{(\rho)}$, $x \in G$, попарно вполне ортогональны, и существует всюду плотное открытое множество $\bar{G} \subset G \subset M$, на котором $Z_x^{(\rho)}$ имеют постоянные размерности, а соответствующие распределения $Z^{(\rho)}$ параллельны в римановой связности на M .*

Разложение $T_x(M) = Z_x^{(0)} + Z_x^{(1)} + \dots + Z_x^{(t)}$ называется Z -разложением пространства $T_x(M)$.

§ 2. Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий

Пусть M является m -мерным подмногообразием n -мерного евклидова пространства E_n , и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в E_n , а g – индуцированную метрику на M . Если $\tilde{\nabla}$ и ∇ – римановы связности на E_n и M , то для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ полагаем

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

где в правых частях $\nabla_X Y$ и $A_\xi(X)$ обозначают касательную, а $\alpha_2(X, Y)$ и $\nabla_X^\perp \xi$ – нормальную компоненту ковариантных производных, стоящих в левых частях. Эти формулы называются формулами Гаусса и Вейнгартена соответственно. Связность ∇ является связностью Леви-Чивита индуцированной на M метрики g , а α_2 – билинейной симметрической формой, определенной на $T(M) \times T(M)$ ($T(M)$ – касательное расслоение) со значениями в нормальном расслоении $T^\perp(M)$. Форма α_2 называется второй фундаментальной формой подмногообразия M . Выражение $A_\xi(X)$ линейно по каждому аргументу и связано с α_2 по формуле $g(A_\xi(X), Y) = \langle \alpha_2(X, Y), \xi \rangle$. Отсюда следует, что в каждой точке $x \in M$ для любого $\xi \in T_x^\perp(M)$ A_ξ является симметрическим эндоморфизмом касательного пространства $T_x(M)$. Он называется вторым фундаментальным тензором, соответствующим нормальному векторному полю ξ . В формуле Вейнгартена нормальная компонента $\nabla_X^\perp \xi$ от $\tilde{\nabla}_X \xi$ определяет в $T^\perp(M)$ некоторую метрическую связность $\nabla^\perp$, называемую нормальной связностью. Тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей $\nabla, \nabla^\perp$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ R^\perp(X, Y)\xi &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi. \end{aligned}$$

Если $R = 0$, то подмногообразие называется локально евклидовым. Если $R^\perp = 0$, то говорят о подмногообразии с плоской нормальной связностью или

просто о нормально плоском подмногообразии. Из уравнения Риччи

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = g([A_\xi, A_\eta]X, Y)$$

следует, что $R^\perp = 0$ тогда и только тогда, когда $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi = 0$ для любых нормальных векторных полей ξ, η , что равносильно также одновременной диагонализуемости всех тензоров A_ξ .

Тензор Риччи R_1 подмногообразия M определяется через тензор кривизны R так же, как и для риманова многообразия.

Если $\alpha_2 = 0$, то подмногообразие M называется вполне геодезическим. В E_n вполне геодезическое подмногообразие является плоскостью соответствующей размерности. Если $A_\xi = \lambda I$, где λ – некоторая функция, а I – тождественное преобразование, то подмногообразие M называется омбилическим относительно нормального векторного поля ξ . Вектор средней кривизны H определяется равенством $H = \text{tr } \alpha_2$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным. Омбилическое относительно H подмногообразие называется псевдо-омбилическим. Омбилическое относительно любого нормального векторного поля подмногообразия называется вполне омбилическим. В E_n вполне омбилическое подмногообразие является сферой или плоскостью (если $A_\xi = 0 \ \forall \xi$) соответствующей размерности.

Остальные сведения по геометрии подмногообразий можно найти в [31]–[34].

Изометрическое погружение $M \rightarrow E_n$ называется произведением погружений $M_\varphi \rightarrow E_{n_\varphi}$, если $M = M_1 \times \dots \times M_r$, $E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_r}$ и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ} , $\varphi \neq \psi$, вполне ортогональны в E_n . В этом случае говорят, что M является прямым произведением подмногообразий $M_1, \dots, M_r$ или просто является приводимым.

В вопросах приводимости будем опираться на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть в некоторой области U на подмногообразии M в E_n заданы попарно вполне ортогональные инволютивные распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ ($\Delta_1(x) + \dots + \Delta_r(x) = T_x(U) \ \forall x \in U$) с интегральными многообразиями $M_1, \dots, M_r$ соответственно. Для того чтобы область U была произведением подмногообразий $M_1, \dots, M_r$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ были параллельны в связности ∇ на M и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 ($\alpha_2(X, Y) = 0 \ \forall X \in \Delta_\varphi, \forall Y \in \Delta_\psi, \varphi \neq \psi$).

О необходимости условий теоремы 2.1 см. [19], достаточность этих условий является содержанием основной леммы Дж. Мура [35].

Перейдем к основной цели настоящего параграфа и докажем ряд структурных теорем для некоторых классов Ріс-полусимметрических подмногообразий.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть M является Ріс-полусимметрическим подмногообразием с нулевым индексом дефектности в евклидовом пространстве E_n . Если подпространства собственных векторов (или просто собственные подпространства) тензора Риччи R_1 в каждой точке сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 , то M локально разлагается в произведение неплоских двумерных подмногообразий и эйнштейновых подмногообразий с нулевым индексом дефектности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ являются подпространствами собственных векторов (собственными подпространствами) тензора R_1 в касательном пространстве $T_x(M)$, а $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ обозначают соответствующие распределения (собственные распределения). Известно [8], что $R(X, Y)Z \in \Delta_\varphi(x)$ для любого $Z \in \Delta_\varphi(x)$ и любых X, Y , $R(X, Y) = 0$ для любого $X \in \Delta_\varphi(x)$ и любого $Y \in \Delta_\psi(x)$, $\varphi \neq \psi$, $R(X, Y)Z = 0$ для любых $X, Y \in \Delta_\varphi(x)$ и любого $Z \in \Delta_\psi(x)$, $\varphi \neq \psi$. Последнее означает, что эндоморфизмы $R(X, Y)$, $X, Y \in \Delta_\varphi(x)$, действуют на $\Delta_\psi(x)$, $\psi \neq \varphi$, тривиальным образом.

Точно так же, как и в §1, получается линейное подпространство $h_x^{(\varphi)} = \text{span } R(X, Y)$, $X, Y \in \Delta_\varphi(x)$, в линейном пространстве всех кососимметрических эндоморфизмов $\Delta_\varphi(x) \rightarrow \Delta_\varphi(x)$. Подпространство $h_x^{(\varphi)}$ превращается в алгебру Ли относительно скобочной операции, определенной в §1, и является подалгеброй алгебры h_x . Следовательно, примитивная группа голономии P_x приводима и имеет место разложение

$$P_x = P_x^{(1)} \times P_x^{(2)} \times \dots \times P_x^{(r)},$$

где $P_x^{(\varphi)}$ – подгруппа с алгеброй Ли $h_x^{(\varphi)}$. Подгруппа $P_x^{(\varphi)}$ действует на $\Delta_\psi(x)$, $\psi \neq \varphi$, тривиально, а на $\Delta_\varphi(x)$ она, вообще говоря, может быть приводимой. Пусть $\Delta_1(x)$ является собственным подпространством тензора R_1 , отвечающим нулевому собственному значению, и пусть

$$\Delta_1(x) = V_x^{(0)} + V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}, \quad \Delta_\varphi(x) = V_x^{(\varphi,1)} + \dots + V_x^{(\varphi,s_\varphi)}, \quad \varphi > 1,$$

являются неприводимыми разложениями $\Delta_1(x)$ и $\Delta_\varphi(x)$, $\varphi > 1$, относительно подгрупп $P_x^{(1)}$ и $P_x^{(\varphi)}$, $\varphi > 1$, соответственно. Первое разложение написано на основании того, что $V_x^{(0)} \subset \Delta_1(x)$ (см. §1). Подпространства $V_x^{(\varphi,l_\varphi)}$, $l_\varphi = 1, \dots, s_\varphi$, инвариантны относительно действия $P_x^{(\varphi)}$ (а следовательно, и P_x) и попарно вполне ортогональны. Более того, $P_x^{(\varphi)}$ (а следовательно, и P_x) действует на $V_x^{(0)}$ тривиально, а на $V_x^{(\varphi,l_\varphi)}$ неприводимо. Следовательно, разложение

$$T_x(M) = V_x^{(0)} + V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)} + \dots + V_x^{(r,1)} + \dots + V_x^{(r,s_r)}$$

является V -разложением пространства $T_x(M)$. Отметим, что $\dim \Delta_\varphi(x) \geq 2$ при $\varphi \geq 2$, так как если $\dim \Delta_\varphi(x) = 1$ для некоторого φ , то $\Delta_\varphi(x) \subset V_x^{(0)}$.

По условию теоремы $V_x^{(0)}$ является нулевым пространством. В этом случае система включений в теореме 1.1 сводится к следующей системе:

$$\nabla_{V^{(\rho)}} V^{(\rho)} \subseteq V^{(\rho)}, \quad \nabla_{V^{(\rho)}} V^{(\tau)} \subseteq V^{(\tau)}, \quad \rho \neq \tau.$$

Отсюда следует, что распределения $V^{(\rho)}$ параллельны. На основании этого заключаем, что распределения $V^{(\varphi,l_\varphi)}$ параллельны. Тогда каждое распределение Δ_φ , являясь суммой таких распределений, также параллельно. Так как $\Delta_\varphi(x)$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 по условию, то на основании теоремы 2.1 заключаем, что подмногообразие M является прямым произведением интегральных многообразий распределений Δ_φ . Поскольку на каждом подпространстве $\Delta_\varphi(x)$ тензор R_1 имеет только одно собственное значение, то интегральное многообразие распределения Δ_φ либо двумерно, либо эйнштейново, с нулевым индексом дефектности в каждом случае.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием с нулевым индексом дефектности в евклидовом пространстве E_n . Тогда M локально разлагается в прямое произведение нормально плоских неплоских двумерных подмногообразий и нормально плоских эйнштейновых подмногообразий с нулевым индексом дефектности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в случае плоской нормальной связности тензор Риччи R_1 и все тензоры A_ξ одновременно диагонализуются (см. [34], это фактически доказано и в § 3) и, следовательно, собственные распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ тензора R_1 будут сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 . Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 2.2 и того факта, что прямое произведение подмногообразий является нормально плоским тогда и только тогда, когда каждое подмногообразие-сомножитель является нормально плоским [6], [19].

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности. Если собственное распределение тензора Риччи R_1 , отвечающее нулевому собственному значению, является параллельным, то M разлагается в прямое произведение нормально плоских подмногообразий $M^{(1)}, \dots, M^{(r)}$, где $M^{(1)}$ – риччи-плоское с таким же индексом дефектности, что и M , а каждое $M^{(\varphi)}$, $\varphi > 1$, является либо неплоским двумерным, либо эйнштейновым (но не риччи-плоским) подмногообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_1(x)$ – собственное подпространство тензора Риччи R_1 , отвечающее нулевому собственному значению. Так как распределение Δ_1 является параллельным на M , то его ортогональное дополнение $\Delta_2 + \dots + \Delta_r$ также будет параллельным. В силу плоской нормальной связности тензор R_1 коммутирует со всеми тензорами A_ξ . Поэтому распределения $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 и, следовательно, распределения Δ_1 и $\Delta_2 + \dots + \Delta_r$ также сопряжены относительно α_2 . Отсюда следует, что M является прямым произведением их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения Δ_1 будет риччи-плоским, а для интегрального многообразия распределения $\Delta_2 + \dots + \Delta_r$ будут выполняться все условия теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности, и пусть распределение дефектности $V^{(0)}$ является омбилическим относительно любого нормального векторного поля ξ , т.е. $A_\xi(X) = \lambda_\xi X \quad \forall X \in V_x^{(0)}$. Тогда M разлагается в прямое произведение двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых нормально плоских подмногообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ являются пространствами собственных векторов тензора Риччи R_1 . Так как нормальная связность плоская, то R_1 и все тензоры A_ξ одновременно диагонализуются. Это значит, что в подпространствах $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ базисы можно выбрать так, что матрицы всех тензоров A_ξ одновременно будут иметь диагональный вид. Будем считать, что базис пространства $T_x(M)$ так и выбран и зафиксирован.

Пусть $\Delta_1(x)$ является собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному значению тензора R_1 . Так как $V_x^{(0)} \subset \Delta_1(x)$, то для $\Delta_1(x)$ и $\Delta_\varphi(x)$, $\varphi > 1$, имеют место следующие разложения:

$$\Delta_1(x) = V_x^{(0)} + V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}, \quad \Delta_\varphi(x) = V_x^{(\varphi,1)} + \dots + V_x^{(\varphi,s_\varphi)},$$

которые являются неприводимыми разложениями относительно подгрупп $P_x^{(1)}$ и $P_x^{(\varphi)}$, $\varphi > 1$, соответственно (см. доказательство теоремы 2.2). Так как на каждом $\Delta_\varphi(x)$ все тензоры A_ξ имеют диагональный вид, то все $\Delta_\varphi(x)$ являются инвариантными относительно тензоров A_ξ , т.е. если $X \in \Delta_\varphi(x)$, то $A_\xi(X) \in \Delta_\varphi(x)$. Покажем, что $\Delta_1(x)$ является прямой суммой двух инвариантных подпространств относительно всех тензоров A_ξ . Действительно, так как по условию теоремы $V_x^{(0)}$ является омбилическим относительно всех тензоров A_ξ , то оно инвариантно относительно всех A_ξ . Пусть $X \in V_x^{(0)}$, $Y \in V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}$. Так как подпространства $V_x^{(0)}$ и $V_x^{(\varphi,l_\varphi)}$ вполне ортогональны (см. [24]), то

$$g(A_\xi(Y), X) = g(Y, A_\xi(X)) = g(Y, \lambda_\xi X) = 0$$

и, следовательно,

$$A_\xi(Y) \in V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}.$$

Таким образом, $V_x^{(0)}$ и $V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}$ являются инвариантными относительно всех тензоров A_ξ . Это значит, что базисы в $V_x^{(0)}$ и $V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}$ можно выбирать независимо. Поэтому можем считать, что зафиксированный выше базис в $\Delta_1(x)$ выбран так, что все A_ξ имеют на прямой сумме $V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)}$ диагональный вид. Способом, указанным в § 1, каждое $V_x^{(\varphi,l_\varphi)}$ можем расширить до соответствующего параллельного подпространства $Z_x^{(\varphi,l_\varphi)}$. Из включений, фигурирующих в теореме 1.1, следует, что это расширение происходит только за счет подпространства $V_x^{(0)}$. Пусть $\tilde{\Delta}_\varphi(x)$ обозначает расширение $\Delta_\varphi(x)$, $\varphi > 1$. Тогда

$$\tilde{\Delta}_\varphi(x) = \Delta_\varphi(x) + W_\varphi(x),$$

где $W_\varphi(x) \subset V_x^{(0)}$. Так как на $\Delta_\varphi(x)$, $\varphi > 1$, все тензоры A_ξ имеют диагональный вид, а на $W_\varphi(x)$ каждый тензор A_ξ имеет только одно собственное значение, то при произвольном выборе базиса в $W_\varphi(x)$ все A_ξ будут иметь на $\tilde{\Delta}_\varphi(x)$ диагональный вид. В процессе расширения подпространств $\Delta_\varphi(x)$, $\varphi > 1$, за счет $V_x^{(0)}$ подпространство $\Delta_1(x)$ может только сузиться до некоторого подпространства $\tilde{\Delta}_1(x)$, которое имеет следующую структуру:

$$\tilde{\Delta}_1(x) = W_1(x) + V_x^{(1,1)} + \dots + V_x^{(1,s_1)},$$

где $W_1(x) \subset V_x^{(0)}$. Очевидно, что и на $\tilde{\Delta}_1(x)$ все тензоры A_ξ имеют диагональный вид. Тогда подпространства $\tilde{\Delta}_1(x), \dots, \tilde{\Delta}_r(x)$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 . Так как по построению распределения $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_r$ параллельны на подмногообразии M , то M разлагается в прямое

произведение их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения $\tilde{\Delta}_1$ является риччи-плоским. Если при $\varphi > 1$ $W_\varphi(x)$ является нулевым подпространством, то на $\tilde{\Delta}_\varphi(x)$ тензор R_1 имеет только одно ненулевое собственное значение. Следовательно, интегральное многообразие распределения $\tilde{\Delta}_\varphi$ является либо неплоским двумерным, либо эйнштейновым (но не риччи-плоским) подмногообразием. Если $W_\varphi(x)$ не является нулевым подпространством, то тензор R_1 имеет на $\tilde{\Delta}_\varphi(x)$, $\varphi > 1$, только два собственных значения: ненулевое собственное значение на $\Delta_\varphi(x)$ и нулевое собственное значение на $W_\varphi(x)$. Так как $\Delta_\varphi(x)$ при $\varphi > 1$ не пересекается с $V_x^{(0)}$, то $W_\varphi(x)$ фактически является пространством дефектности для интегрального многообразия распределения $\tilde{\Delta}_\varphi(x)$. Следовательно, интегральное многообразие распределения $\tilde{\Delta}_\varphi$ является полуэйнштейновым. Все интегральные многообразия будут иметь плоскую нормальную связность (см. доказательство теоремы 2.3).

На основании теоремы 2.5 можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием в E_n с ненулевым индексом дефектности, и пусть собственное распределение Δ_1 тензора Риччи R_1 , отвечающее нулевому собственному значению, является омбилическим относительно всех тензоров A_ξ , т.е. $A_\xi(X) = \lambda_\xi X \quad \forall X \in \Delta_1$. Тогда M разлагается в прямое произведение так же, как и в теореме 2.5.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что в каждой точке $x \in M$ $V_x^{(0)} \subset \Delta_1(x)$ и потому $V_x^{(0)}$ является омбилическим относительно всех тензоров A_ξ . Следовательно, выполняются условия теоремы 2.5.

Пусть α_2 является второй фундаментальной формой подмногообразия M в E_n . Индексом относительной дефектности в точке $x \in M$ называется размерность подпространства T'_x касательного пространства $T_x(M)$, определяемого равенством

$$T'_x = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}.$$

В силу $\langle \alpha_2(X, Y), \xi \rangle = g(A_\xi(X), Y)$ подпространство T'_x можем определить следующим эквивалентным способом:

$$T'_x = \{X \in T_x(M) : A_\xi(X) = 0 \quad \forall \xi \in T_x^\perp(M)\}.$$

Справедливо включение $T_x \subset T_x^{(0)}$ [27].

Покажем, что распределение T' интегрируемо и его интегральное многообразие представляет собой плоскость в E_n . Действительно, пусть $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти (см. [34] или §3 настоящей работы). Если $X, Y \in T'$, а Z – произвольное касательное векторное поле, то, используя уравнение Кодацци $(\bar{\nabla}_X \alpha_2)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y \alpha_2)(X, Z)$, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \alpha_2)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp \alpha_2(Y, Z) - \alpha_2(\nabla_X Y, Z) - \alpha_2(Y, \nabla_X Z) = -\alpha_2(\nabla_X Y, Z), \\ (\bar{\nabla}_Y \alpha_2)(X, Z) &= \nabla_Y^\perp \alpha_2(X, Z) - \alpha_2(\nabla_Y X, Z) - \alpha_2(X, \nabla_Y Z) = -\alpha_2(\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_2(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = 0$, и так как $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, то $[X, Y] \in T'$.

Это значит, что распределение T' интегрируемо. Далее для тех же X, Y и Z имеем

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_Z \alpha_2)(X, Y) &= \nabla_Z^\perp \alpha_2(X, Y) - \alpha_2(\nabla_Z X, Y) - \alpha_2(X, \nabla_Z Y) = 0, \\(\bar{\nabla}_X \alpha_2)(Z, Y) &= \nabla_X^\perp \alpha_2(\nabla_X Z, Y) - \alpha_2(Z, \nabla_X Y) - \alpha_2(Z, \nabla_X Y) = -\alpha_2(Z, \nabla_X Y).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\alpha_2(Z, \nabla_X Y) = 0$ и в силу произвольности $Z \nabla_X Y \in T'$. Это значит, что T' является геодезическим распределением, т.е. его интегральное многообразие вполне геодезично в M . Так как все тензоры A_ξ имеют на T' только нулевые собственные значения, то интегральное многообразие распределения T' является вполне геодезическим в E_n , т.е. плоскостью.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть M является нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием в E_n , и пусть его индекс дефектности совпадает в каждой точке с индексом относительной дефектности. Тогда M разлагается в прямое произведение так же, как и в теореме 2.5.

Доказательство следует из того, что в силу включения $T'_x \subset T_x^{(0)}$ и условия теоремы пространства T'_x и $T_x^{(0)}$ будут совпадать и все тензоры A_ξ будут иметь на $T_x^{(0)}$ только нулевые собственные значения. Следовательно, выполняются условия теоремы 2.5.

Структурная теорема для нормально плоских минимальных Ric-полусимметрических подмногообразий сформулирована в §3.

§ 3. Формализм расслоения адаптированных ортонормреперов подмногообразия и редукция некоторых условий

Пусть $O(E_n)$ обозначает главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . Отождествляя точку x с ее радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, \quad de_A = \omega_A^B e_B, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \quad A, B, \dots = 1, \dots, n.$$

Отсюда путем внешнего дифференцирования получим следующие структурные уравнения:

$$d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B.$$

Пусть M является m -мерным подмногообразием в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что

$$e_i \in T_x(M), \quad i, j, \dots = 1, \dots, m, \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M), \quad \alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n,$$

где $T_x(M)$ и $T_x^\perp(M)$ обозначают соответственно касательное и нормальное к M пространства в точке $x \in M$ (подробности см. в [33]). В силу этого по известной

схеме [9], [13], [19] получим

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (3.1)$$

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (= \bar{\nabla}_k h_{ij}^\alpha), \quad (3.2)$$

$$h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k, \quad (3.3)$$

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k,$$

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha = dh_{ijk}^\alpha + h_{ijk}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{lkj}^\alpha \omega_i^l - h_{ilk}^\alpha \omega_j^l - h_{ijl}^\alpha \omega_k^l.$$

Здесь $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти, т.е. $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ является римановой связностью на M , определяемой 1-формами ω_i^j , а $\nabla^\perp$ – нормальной связностью, определяемой 1-формами ω_β^α .

В (3.1) и (3.2) функции h_{ij}^α , h_{ijk}^α являются компонентами второй α_2 и третьей α_3 фундаментальных форм соответственно. Их действие определяется следующим образом: если $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$, то

$$\alpha_2(X, Y) = h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha, \quad \alpha_3(X, Y, Z) = h_{ijk}^\alpha X^i Y^j Z^k e_\alpha.$$

В (3.3) 2-формы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$$

являются формами кривизны связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно, а коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta$$

представляют собой компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ этих связностей.

Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 определяются по формуле

$$R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha), \quad (3.4)$$

где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = \sum_l h_{ll}^\alpha$ – компоненты вектора средней кривизны H .

Пусть T – некоторое тензорное поле на подмногообразии M в E_n , а T_{ij}^α – его компоненты в выбранном выше репере. Такое строение компонент не будет умалять общность рассуждений. Первые и вторые ковариантные производные $T_{ij,k}^\alpha$, $T_{ij,kl}^\alpha$ тензора T_{ij}^α определяются равенствами

$$\bar{\nabla} T_{ij}^\alpha = dT_{ij}^\alpha + T_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj}^\alpha \omega_i^k - T_{ik}^\alpha \omega_j^k = T_{ij,k}^\alpha \omega^k,$$

$$\bar{\nabla} T_{ij,k}^\alpha = dT_{ij,k}^\alpha + T_{ij,k}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{lj,k}^\alpha \omega_i^l - T_{il,k}^\alpha \omega_j^l - T_{ij,l}^\alpha \omega_k^l = T_{ij,kl}^\alpha \omega^l.$$

Дифференцируя внешним образом первое из этих равенств и учитывая второе, получаем

$$T_{ij,kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = T_{pj}^\alpha \Omega_i^p + T_{ip}^\alpha \Omega_j^p - T_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha. \quad (3.5)$$

Условие $\bar{\nabla} T_{ij}^\alpha = 0$, что равносильно $T_{ij,k} = 0$, является условием параллельности тензорного поля T , а условие $T_{ij,kl}^\alpha = T_{ij,lk}$ – условием его полупараллельности. Из (3.5) следует что условие полупараллельности тензорного поля T равносильно следующему условию:

$$T_{pj}^\alpha \Omega_i^p + T_{ip}^\alpha \Omega_j^p - T_{ij}^\beta \Omega_\alpha^\beta = 0.$$

Условие параллельности T коротко записывается в виде $\nabla T = 0$. Так как $T_{ij,kl}^\alpha = \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k T_{ij}^\alpha$, то условие полупараллельности T можем записать следующим образом: $\bar{R}(X, Y) \cdot T = 0$, где X, Y – произвольные касательные к M векторные поля, а $\bar{R}(X, Y)$ – соответствующие операторы кривизны связности $\bar{\nabla}$.

На основании вышеизложенного условия полупараллельности второй фундаментальной формы α_2 , тензора кривизны R , тензора Риччи R_1 можем представить в следующем виде:

$$h_{kj}^\alpha \Omega_i^k + h_{ik}^\alpha \Omega_j^k - h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0, \quad (3.6)$$

$$R_{pj}^l \Omega_i^p + R_{ip}^l \Omega_j^p + R_{ijp}^l \Omega_k^p - R_{ijk}^p \Omega_p^l = 0, \quad (3.7)$$

$$R_{kj} \Omega_i^k + R_{ik} \Omega_j^k = 0. \quad (3.8)$$

Путем прямого вычисления легко убедиться в справедливости импликаций (3.6) $\Rightarrow$ (3.7) $\Rightarrow$ (3.8), т.е.

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}(X, Y) \cdot R = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}(X, Y) \cdot R_1 = 0.$$

Так как матрица $\|R_{jk}\|$ является симметрической, то в некотором ортонормальном базисе она может быть приведена к диагональному виду $\|\rho_j \delta_{jk}\|$ с вещественными диагональными элементами ρ_j . Тогда из (3.8) получаем

$$(\rho_j - \rho_k) \Omega_k^j = 0, \quad (3.9)$$

где нет суммирования по j . Это равенство также является условием полупараллельности тензора Риччи.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$ или $\Omega_\beta^\alpha = 0$. Тогда

$$\sum_k h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta = \sum_k h_{ik}^\beta h_{kj}^\alpha$$

и, следовательно, все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой. В силу этого в некотором ортонормальном базисе они одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда из (3.6) и (3.4) получаем

$$(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha) \Omega_j^i = 0, \quad (3.10)$$

$$R_{ik} = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha] \delta_{ik}, \quad (3.11)$$

где в (3.10) нет суммирования по i . Из (3.11) следует, что матрица $\|R_{ik}\|$ имеет диагональный вид с диагональными элементами

$$\rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]. \quad (3.12)$$

Так как $\Omega_k^j = -\sum_{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_k^{\alpha} \omega^k \wedge \omega^j$, то условия (3.9) и (3.10) окончательно принимают следующий вид:

$$(\rho_j - \rho_k) \sum_{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_k^{\alpha} = 0, \quad (3.13)$$

$$(\lambda_j^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha}) \sum_{\beta} \lambda_j^{\beta} \lambda_k^{\beta} = 0, \quad (3.14)$$

где второй сомножитель в левых частях есть секционная кривизна $k(e_j \wedge e_k)$.

Таким образом, в случае плоской нормальной связности необходимые и достаточные условия полупараллельности тензора Риччи и второй фундаментальной формы подмногообразия приводятся соответственно к виду (3.13) и (3.14).

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^{\alpha} e_{\alpha}$ называются главными векторами кривизны нормально плоского подмногообразия в E_n . Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E_n . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (\lambda_j^{\alpha})^2 &= \langle n_j, n_j \rangle = |n_j|^2, & \sum_{\alpha} H^{\alpha} \lambda_j^{\alpha} &= \langle H, n_j \rangle, & \sum_{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_k^{\alpha} &= \langle n_j, n_k \rangle, \\ \rho_j &= |n_j|^2 - \langle H, n_j \rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $|n_j|$ – модуль вектора n_j .

Пусть подмногообразие M является минимальным, т.е. $H = 0$. Тогда $\rho_j = |n_j|^2$ и если, например, $n_1, \dots, n_{\nu} = 0$, $n_{\nu+1} \neq 0, \dots, n_m \neq 0$, то индекс относительной дефектности равен ν , т.е. $\dim T'_x = \nu$. Тогда $\rho_{\nu+1} \neq 0, \dots, \rho_m \neq 0$ и индекс дефектности подмногообразия M также равен ν , т.е. $\mu = \nu$. В силу включения $T'_x \subset T_x^{(0)}$ пространства T'_x и $T_x^{(0)}$ совпадают.

Таким образом, справедлива следующая

ЛЕММА 3.1. *Индекс дефектности нормально плоского минимального подмногообразия M в евклидовом пространстве E_n в каждой точке равен индексу относительной дефектности.*

На основании леммы 3.1 и теорем 2.7 и 2.5 можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть M является нормально плоским минимальным Ріс-полусимметрическим подмногообразием в евклидовом пространстве E_n . Тогда M разлагается в прямое произведение нормально плоских минимальных подмногообразий $M^{(1)}, \dots, M^{(r)}$, где каждое $M^{(\varphi)}$ является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полужейнштейновым.*

В этой теореме минимальность каждого $M^{(\varphi)}$ следует из того, что прямое произведение подмногообразий является минимальным тогда и только тогда, когда каждое подмногообразие-сомножитель является минимальным (см., например, [6]).

Условие (3.13) можем представить в следующих двух эквивалентных формах:

$$(|n_j|^2 - |n_k|^2 + \langle H, n_k - n_j \rangle) \langle n_j, n_k \rangle = 0, \quad (3.16)$$

$$\langle n_j - n_k, n_j + n_k - H \rangle \cdot \langle n_j, n_k \rangle = 0 \quad (3.17)$$

для любых значений индексов j, k .

Условие (3.14) принимает следующий вид:

$$(n_j - n_k) \cdot \langle n_j, n_k \rangle = 0 \quad (3.18)$$

для любых j, k . Импликация (3.18) $\Rightarrow$ (3.16) (или (3.18) $\Rightarrow$ (3.17)) очевидна.

Таким образом, каждое из условий (3.16) и (3.17) является условием полупараллельности тензора Риччи, а (3.18) – условием полупараллельности второй фундаментальной формы нормально плоского подмногообразия.

ЛЕММА 3.2. *Для того чтобы нормально плоское подмногообразие M в E_n имело полупараллельный тензор Риччи, необходимо и достаточно, чтобы его главные векторы кривизны n_j и вектор средней кривизны H удовлетворяли условию (3.16) (или (3.17)).*

Если M является нормально плоским и минимальным, т.е. $H = 0$, то из (3.16) следует, что $(|n_j| - |n_k|) \cdot \langle n_j, n_k \rangle = 0$ для любых j, k . Итак, справедлива следующая

ЛЕММА 3.3. *Нормально плоское минимальное подмногообразие M в E_n имеет полупараллельный тензор Риччи тогда и только тогда, когда любые его два главных вектора кривизны либо равны по модулю, либо ортогональны.*

Из этой леммы следует, что ненулевые главные векторы кривизны нормально плоского минимального подмногообразия с полупараллельным тензором Риччи разбиваются на группы, которые обладают следующими свойствами:

- (а) любые два вектора, принадлежащие одной группе, имеют равные модули;
- (б) любые два вектора, принадлежащие разным группам, взаимно ортогональны;
- (в) сумма всех векторов, принадлежащих одной и той же группе, равна нулевому вектору.

Из свойства (в) следует, что каждая группа содержит не менее двух векторов.

Справедлива следующая

ЛЕММА 3.4. *Нормально плоское минимальное подмногообразие M в E_n является эйнштейновым тогда и только тогда, когда все его главные векторы кривизны имеют равные постоянные модули, т.е.*

$$|n_1| = \dots = |n_m| = \rho = \text{const.}$$

Эта лемма следует непосредственно из формулы (3.15), а также из того общеизвестного факта, что если $\dim M \geq 3$ и $R_1 = \rho I$, то $\rho = \text{const}$ (см., например, [32]).

§ 4. Схемы главных векторов кривизны нормально плоского минимального полуэйнштейнова подмногообразия

Пусть M является m -мерным нормально плоским полуэйнштейновым подмногообразием в E_n . Тогда тензор Риччи R_1 имеет на $T_x^{(0)}$ нулевое собственное значение, а на его ортогональном дополнении $T_x^{(1)}$ – только одно ненулевое собственное значение. Пусть $\dim T_x^{(0)} = \mu$, $\dim T_x^{(1)} = m - \mu$, и пусть адаптированный к M ортонормрепер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что

$$e_a \in T_x^{(1)}, \quad e_r \in T_x^{(0)}, \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M),$$

где $a = 1, \dots, m - \mu$, $r = m - \mu + 1, \dots, m$, $\alpha = m + 1, \dots, n$. Тогда $\rho_a = \rho$ ($\neq 0$), $\rho_r = 0$, а из (3.15) следует, что $|n_r|(|n_r| - |H| \cdot \cos \varphi_r) = 0$, где φ_r – угол между n_r и H . Следовательно, либо $n_r = 0$, либо $|n_r| = |H| \cdot \cos \varphi_r$. Если $n_{m-\mu+1} = 0, \dots, n_{m-\mu+\nu} = 0$, $n_{m-\mu+\nu+1} \neq 0, \dots, n_m \neq 0$, то индекс относительной дефектности подмногообразия M равен ν .

В дальнейшем будут рассматриваться только нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия, однако здесь мы отметим, что исследование нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий, удовлетворяющих условиям $\nu = 0$, $\mu \geq 1$, представляет особый интерес, так как такие подмногообразия не содержат прямых (см. § 2).

Итак, пусть M является нормально плоским минимальным полуэйнштейновым подмногообразием в E_n с индексом дефектности $\mu \geq 1$. Тогда из (3.15) при $H = 0$ имеем $\rho_a = |n_a|^2 = \rho$ ($\neq 0$), $\rho_r = 0$ и, следовательно, $n_r = 0$. Таким образом, нормальные векторы $n_1, \dots, n_{m-\mu}$ являются ненулевыми, имеют равные модули и их сумма равна нулевому вектору. Если откладывать векторы $n_1, \dots, n_{m-\mu}$ от точки $x \in M$, то их концы будут принадлежать некоторой гиперболе $S \subset T_x^\perp(M)$ (возможно, сфере меньшей размерности) радиуса $|n_r| = \sqrt{\rho}$ с центром в точке x . Условие минимальности подмногообразия ($n_1 + \dots + n_{m-\mu} = 0$) налагает определенные ограничения на взаимное расположение векторов $n_1, \dots, n_{m-\mu}$. Каждое возможное расположение этих векторов будем называть схемой главных векторов кривизны. Например, если M является гиперповерхностью, то возможна только схема 1.

СХЕМА 1

На этой схеме запись $n^{(p)}$ означает, что главный вектор кривизны n имеет кратность p . В этом случае имеется только два ненулевых главных вектора кривизны n и $-n$ одинаковой кратности $p \geq 1$, образующих между собой угол в 180° . Если коразмерность подмногообразия M равна двум, то возможна как схема 1, так и, например, схема 2.

СХЕМА 2

В этом случае имеется только три ненулевых главных вектора кривизны одинаковой кратности p , образующие между собой углы в 120° . Однако такое

СХЕМА 3

вектора n_5 . Изменяясь непрерывно, углы между векторами достигают значения $\arccos(-1/4)$ и становятся равными. Получается очередная схема. На каждом шаге векторы направлены по образующим конуса соответствующей размерности с вершиной в точке x , а вновь построенный вектор направлен по оси конуса в сторону, противоположную направлению проекций предыдущих векторов на эту ось. По построению такая схема единственна с точностью до выбора вершины конуса и вращения схемы около вершины.

Продолжая описанную процедуру, получаем, что если коразмерность подмногообразия равна $n - m$, то в схемах главных векторов кривизны, в которых углы между всеми векторами попарно равны, максимальное число главных векторов кривизны может быть $n - m + 1$.

В следующем параграфе мы даем геометрическое описание одного класса нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий со схемой главных векторов кривизны указанного вида.

§ 5. Полуэйнштейновы подмногообразия с кратными главными векторами кривизны

Пусть M является m -мерным нормально плоским минимальным полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности $\mu \geq 1$ в n -мерном евклидовом пространстве E_n , $n - m \geq 2$. Пусть в каждой точке $x \in M$ имеются $q \geq 3$ различных ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ кратностей $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно, $p_1 + \dots + p_q = m - \mu$. Как мы знаем,

$$p_1 n_1 + \dots + p_q n_q = 0, \quad (5.1)$$

$$|n_1|^2 = \dots = |n_q|^2 = \rho. \quad (5.2)$$

В дальнейшем будем считать, что обозначения §§ 3, 4 сохраняются, адаптированный к подмногообразию M ортонормрепер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так же, как и в начале § 4, а индексы принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} i, j, k, \dots &= 1, \dots, m, & a, b, c, \dots &= 1, \dots, p_1 + \dots + p_q, \\ r, s, t, \dots &= p_1 + \dots + p_q + 1, \dots, m, & \varphi, \psi, \chi, \dots &= 1, \dots, q, \\ i_\varphi, j_\varphi, k_\varphi, \dots &= p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + p_\varphi, \\ \alpha, \beta, \gamma, \dots &= m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то в некотором адаптированном ортонормированном базисе все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда условие $n_{i_\varphi} = n_{j_\varphi}$ влечет $\lambda_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{j_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Следовательно, $n_\varphi = n_{i_\varphi} = n_{j_\varphi} = \lambda_{(\varphi)}^\alpha e_\alpha$ и условия (5.1), (5.2) принимают соответственно следующий вид:

$$\sum_{\varphi} p_{\varphi} \lambda_{(\varphi)}^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 = \rho \quad \forall \varphi. \quad (5.3)$$

Из второго равенства в (5.3) получаем

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \frac{1}{2} d\rho. \quad (5.4)$$

Каждая из матриц $\|h_{ij}^\alpha\|$ принимает следующий вид:

$$\|h_{ij}^\alpha\| = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^\alpha & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_{(1)}^\alpha & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda_{(q)}^\alpha & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_{(q)}^\alpha & \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ имеет кратность $p_\varphi \geq 2$ для любого значения φ , а 0 – кратность $\mu \geq 1$.

Так как $n_\varphi \neq 0$, то $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$ при некотором значении индекса α . Более того, так как $n_\varphi \neq n_\psi$ при $\varphi \neq \psi$, то $\lambda_{(\varphi)}^\beta \neq \lambda_{(\psi)}^\beta$ при некотором значении индекса β .

Обратно, пусть в некотором поле адаптированного ортонормированного базиса к m -мерному подмногообразию M евклидова пространства E_n матрицы второй фундаментальной формы одновременно приводятся к виду (5.5), где $q \geq 2$, а диагональные элементы обладают вышеуказанными свойствами и выполняются условия (5.3). Тогда M является нормально плоским минимальным полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности $\mu \geq 1$ с q различными ненулевыми главными векторами кривизны $n_1, \dots, n_q$ кратностей $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно.

Пусть $T_x^{(0)}$ – пространство дефектности подмногообразия M в точке x , и пусть $T_x^{(1,\varphi)}$ обозначает подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет собственное значение $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ кратности p_φ . Именно в этом смысле мы будем в дальнейшем говорить, что $T_x^{(1,\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим главному вектору кривизны n_φ , а $T^{(1,\varphi)}$ – собственным распределением, соответствующим этому вектору. Тогда $\dim T_x^{(0)} = \mu$, $\dim T_x^{(1,\varphi)} = p_\varphi$ и справедливо разложение в прямую сумму:

$$T_x(M) = T_x^{(1)} + T_x^{(0)} = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + T_x^{(0)}.$$

Основная цель настоящего параграфа – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть в евклидовом пространстве E_n m -мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке q ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно, $3 \leq q \leq n - m + 1$. Если соответствующие этим векторам собственные распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны на M друг относительно друга (но не относительно распределения $T^{(0)}$), то

- (1) векторы $n_1, \dots, n_q$ образуют попарно равные углы и $p_1 = \dots = p_q (= p)$,
- (2) M локально представляет собой прямое произведение $\widetilde{M} \times \widetilde{P}$, где $\widetilde{M}$ – $(\mu-1)$ -мерная плоскость, а подмногообразие $\widetilde{P}$ несет $(q+1)$ -компонентную ортогональную сопряженную систему, состоящую из q одинаковых сфер $S_1^p(R), \dots, S_q^p(R)$, $p \geq 2$, и прямой L , и представляет собой конус (с образующей L в каждой точке) над прямым произведением $S_1^p(R) \times \dots \times S_q^p(R)$, которое
 - (а) является $(pq+1)$ -мерным эйнштейновым подмногообразием евклидова пространства $E_{n-\mu+1}$,
 - (б) принадлежит гипертфере $S^{n-\mu}(\overline{R})$ пространства $E_{n-\mu+1}$ и является минимальным в этой гипертфере; радиусы R и $\overline{R}$ связаны условием $\overline{R}^2 = q \cdot R^2$ и являются линейными (не постоянными) функциями на L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что ортонормрепер

$$\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$$

выбран так, что в каждой точке $x \in M$ для каждого значения φ векторы e_{i_φ} принадлежат пространству $T_x^{(1,\varphi)}$, а векторы e_r – пространству $T_x^{(0)}$. Через $T^{(1,\varphi)}, T^{(0)}$ будем обозначать соответствующие распределения.

Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении, что равносильно $\omega_\beta^\alpha = 0$ (см. [34; гл. 4, §1, предложение 1.1]). В дальнейшем будем предполагать, что e_α так и выбраны.

Рассмотрим уравнения (3.1) и (3.2), которые в настоящем случае принимают следующий вид:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad (5.6)$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (5.7)$$

где в левой части уравнения (5.7) нет суммирования по i . С учетом принятых обозначений имеем $\lambda_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha$, $\lambda_r^\alpha = 0$. Отсюда и из (5.6) следует, что $\omega_r^\alpha = 0$.

Пусть в (5.7) $i = i_\varphi$, $j = j_\varphi$, $i_\varphi \neq j_\varphi$. Тогда левая часть равна нулю и, следовательно,

$$h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0, \quad i_\varphi \neq j_\varphi. \quad (5.8)$$

Если в (5.7) $i = i_\varphi$, $j = j_\psi$, $\varphi \neq \psi$, то

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = h_{i_\varphi j_\psi k}^\alpha \omega^k.$$

В силу условия теоремы распределения $T^{(1,\varphi)}$ и $T^{(1,\psi)}$ параллельны при $\varphi \neq \psi$. Это равносильно условию $\omega_{j\psi}^{i\varphi} = 0$, $\varphi \neq \psi$, что в свою очередь влечет $h_{i\varphi j\psi k}^\alpha = 0$. Таким образом,

$$h_{i\varphi j\psi k}^\alpha = 0, \quad \omega_{j\psi}^{i\varphi} = 0, \quad \varphi \neq \psi. \quad (5.9)$$

Пусть теперь в (5.7) $i = i_\varphi$, $j = i_\varphi$. Тогда с учетом предыдущих равенств будем иметь $d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r$, где в первом слагаемом правой части нет суммирования по i_φ . Если в (5.7) $i = i_\varphi$, $j = j_\varphi$, причем $i_\varphi \neq j_\varphi$, то $d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha \omega^r$, где в первом слагаемом правой части нет суммирования по j_φ . Сравнивая эти равенства и учитывая независимость форм ω^i , получаем $h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0$, $h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha$, $i_\varphi \neq j_\varphi$. Таким образом,

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r. \quad (5.10)$$

Умножая обе части этого равенства на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , будем иметь

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r.$$

Отсюда с учетом (5.4) следует, что

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r = \frac{1}{2} d\rho \quad (5.11)$$

для любого φ и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r = \sum_{\alpha} \lambda_{(\psi)}^\alpha h_{i_\psi i_\psi r}^\alpha \omega^r \quad (5.12)$$

для любых φ, ψ , $\varphi \neq \psi$.

Если в (5.7) $i = r$, $j = s$, то левая часть равна нулю и, следовательно, $h_{rsk}^\alpha = 0$.

Если же в (5.7) $i = r$, $j = j_\varphi$, то с учетом предыдущих равенств получаем

$$\lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega_{j_\varphi}^r = h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi}, \quad (5.13)$$

где в правой части нет суммирования по j_φ . Умножая это равенство на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , будем иметь

$$\left(\sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 \right) \omega_{j_\varphi}^r = \left(\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha \right) \omega^{j_\varphi}, \quad (5.14)$$

где в правой части нет суммирования по j_φ . Отсюда, учитывая (5.3) и (5.12), получаем

$$\omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}, \quad (5.15)$$

где F_r равно отношению коэффициента правой части равенства (5.14) к коэффициенту левой части, который равен квадрату модуля вектора n_φ и отличен от нуля.

Если в (5.13) $\lambda_{(\varphi)}^\alpha = 0$ при некотором значении индекса α , то $h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha = 0$. Если же $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$ при некотором значении α , то из (5.13) находим

$$\omega_{j_\varphi}^r = \frac{h_{rj_\varphi j_\varphi}}{\lambda_{(\varphi)}^\alpha} \omega^{j_\varphi},$$

где в правой части нет суммирования по j_φ . Сравнивая это равенство с (5.15), получаем

$$F_r = \frac{h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha}{\lambda_{(\varphi)}^\alpha}.$$

Используя это равенство, легко преобразовать уравнение (5.10) к следующему виду:

$$d \ln |\lambda_{(\varphi)}^\alpha| = F_r \omega^r. \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что собственные значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ при всевозможных значениях индексов α и φ различаются на постоянные множители. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\lambda_{(1)}^{m+1} \neq 0$, и рассматривать из системы (5.16) только первое уравнение (где $\alpha = m+1$, $\varphi = 1$).

Таким образом, имеем следующую систему:

$$d \ln |\lambda_{(1)}^{m+1}| = F_r \omega^r, \quad \omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}, \quad \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0, \quad \varphi \neq \psi. \quad (5.17)$$

Покажем, что распределения $T^{(1,\varphi)}$ и $T^{(0)}$ вполне интегрируемы, и выясним, что представляют собой их интегральные многообразия.

Распределение $T^{(1,\varphi)}$ задается следующей пфафовой системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^{i_\psi} = 0, \quad \psi \neq \varphi, \quad \omega^r = 0. \quad (5.18)$$

Так как в этом случае (см. (5.17))

$$\lambda_{(1)}^{m+1} = \text{const}, \quad \omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}, \quad \omega_{j_\psi}^r = 0, \quad \psi \neq \varphi, \quad \omega_{j_\chi}^{i_\psi} = 0,$$

то, учитывая, что $\omega_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}$, получаем

$$d\omega^\alpha = 0, \quad d\omega^{i_\psi} = 0, \quad \psi \neq \varphi, \quad d\omega^r = 0.$$

Следовательно, система (5.18) вполне интегрируема, а из

$$\omega_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}, \quad \omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}, \quad \omega_{i_\varphi}^{j_\psi} = 0, \quad \psi \neq \varphi,$$

следует, что ее интегральное многообразие максимальной размерности является вполне омбилическим в E_n (но не вполне геодезическим, так как $\lambda_\varphi^\alpha \neq 0$ при некотором значении индекса α), т.е. локально является p_φ -мерной сферой, которую обозначим через $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$. Так как вектор средней кривизны H_φ этой сферы определяется равенством

$$H_\varphi = \lambda_{(\varphi)}^\alpha e_\alpha + \sum_r F_r e_r,$$

то для радиуса R_φ получаем следующую формулу:

$$R_\varphi^2 = \frac{1}{|H_\varphi|^2} = \left(\sum_\alpha (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 + \sum_r F_r^2 \right)^{-1}.$$

Отсюда и из (5.3) следует, что все сферы имеют один и тот же радиус, т.е. $R_1 = \dots = R_q = R$.

Распределение $T^{(0)}$ задается пфаффовой системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^{i_\varphi} = 0$, которая, как легко проверяется, вполне интегрируема. В силу соотношений $\omega_r^\alpha = 0$, $\omega_r^{i_\varphi} = 0$ (см. (5.17)) интегральное многообразие $M^{(0)}$ этой системы является вполне геодезическим в E_n , т.е. μ -мерной плоскостью.

Пусть в (5.17) $\lambda_{(1)}^{m+1} = \text{const}$ (тогда все $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ постоянны). В этом случае

$$F_r = 0, \quad \omega_{j_\varphi}^r = 0, \quad \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0, \quad \varphi \neq \psi,$$

и распределения $T^{(1,\varphi)}$ и $T^{(0)}$ параллельны на подмногообразии M . Так как они сопряжены относительно второй фундаментальной формы (все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеют диагональный вид), то M локально является прямым произведением сфер $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$ и плоскости $M^{(0)}$ (теорема 2.1). Такое произведение не может быть минимальным, поскольку вектор n_φ является вектором средней кривизны (с учетом того, что $F_r = 0$) сферы $S^{p_\varphi}(R_\varphi)$ и отличен от нуля по условию.

В дальнейшем будем считать, что $\lambda_{(1)}^{m+1}$ не является постоянной функцией.

Рассмотрим пфаффову систему

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^r = 0,$$

которая задает распределение $K = T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)}$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ прямую сумму $K_x = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)}$. В силу формул (5.6) и (5.17) имеем

$$d\omega^\alpha = \sum_\varphi \sum_{i_\varphi} \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi} \wedge \omega^{i_\varphi} = 0, \quad d\omega^r = F_r \sum_\varphi \sum_{i_\varphi} \omega^{i_\varphi} \wedge \omega^{i_\varphi} = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая пфаффова система вполне интегрируема. Ее интегральное многообразие максимальной размерности будем обозначать через $\tilde{K}$. Очевидно, что $\dim \tilde{K} = p_1 + \dots + p_q$. Из формул (5.17) следует, что $\tilde{K}$ является омбилическим относительно направлений e_r . Так как $\omega_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega^{i_\varphi}$, то в направлениях e_α матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $\tilde{K}$ также имеют диагональный вид. Следовательно, распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы и в силу $\omega_{j_\psi}^{i_\varphi} = 0$, $\varphi \neq \psi$, они параллельны на $\tilde{K}$. Тогда $\tilde{K}$ локально является прямым произведением сфер $S^{p_1}(R_1), \dots, S^{p_q}(R_q)$.

Так как все матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $\tilde{K}$ одновременно приведены к диагональному виду, то его нормальная связность является плоской. Из условия $\omega_r^\alpha = 0$ следует, что $T^{(0)}$ как подрасслоение нормального расслоения для $\tilde{K}$ является параллельным и, следовательно, в нем индуцируется плоская связность. Это значит, что нормальные к $\tilde{K}$ векторные поля e_r в $T^{(0)}$ можно выбрать так, что они будут параллельными в нормальном

расслоении. При таком выборе векторных полей e_r будем иметь $\omega_r^S = 0$ (при $\omega^r = 0$). Но поскольку в общем случае $\omega_r^S = \Gamma_{rk}^s \omega^k$, то $\Gamma_{ri\varphi}^s = 0$ для любого значения φ и, следовательно, $\omega_r^S = \Gamma_{rt}^s \omega^t$.

Дифференцируя внешним образом уравнения системы (5.17) и применяя лемму Картана, получаем

$$\begin{aligned} dF_r - F_s \omega_r^s &= P_{rs} \omega^s, \quad P_{rs} = P_{sr}, \\ dF_r - F_s \omega_r^s - F_r F_s \omega^s &= Q_r \omega^{j\varphi}, \\ \sum_r (F_r)^2 + \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения в силу независимости форм $\omega^{j\varphi}$ имеем $Q_r = 0$. Тогда $P_{rs} = F_r F_s$ и, учитывая формулу, полученную для форм ω_r^s , преобразуем последнюю систему к следующему виду:

$$\begin{aligned} dF_r &= (F_s \Gamma_{rt}^s + F_r F_t) \omega^t, \\ \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha &= - \sum_r (F_r)^2, \quad \varphi \neq \psi. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь второе уравнение имеет следующий геометрический смысл: если подмногообразие $\tilde{K}$ мы рассматриваем с точки зрения объемлющего пространства E_n , то секционные кривизны между сферами $S^{p_1}(R_1), \dots, S^{p_q}(R_q)$ равны нулю. Если же $\tilde{K}$ мы рассматриваем как подмногообразие в M , то на M секционные кривизны между этими сферами равны между собой и все отрицательны. Это значит, что скалярные произведения главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ отрицательны и равны между собой. Так как модули этих векторов равны, то равны и отрицательны косинусы углов между этими векторами. Следовательно, все эти углы равны некоторому углу φ , $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$. На основании леммы 4.2 заключаем, что $p_1 = p_2 = \dots = p_q = p$, а $\cos \varphi$ определяется по формуле (4.4). Таким образом, кратности всех ненулевых главных векторов кривизны равны между собой. Следовательно, сферы $S^{p_1}(R_1), \dots, S^{p_q}(R_q)$ имеют одинаковые размерности и радиусы.

Поскольку

$$\sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha = \langle n_\varphi, n_\psi \rangle = \rho \cos \varphi = -\frac{\rho}{q-1},$$

то систему (5.19) можем преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} dF_r &= (F_s \Gamma_{rt}^s + F_r F_t) \omega^i, \\ \sum_r (F_r)^2 &= \frac{\rho}{q-1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Продолжим изучение подмногообразия $\tilde{K}$. Из (5.17) и (5.20) следует, что $\lambda_{(1)}^{m+1}$ и F_r постоянны на $\tilde{K}$. Так как на $\tilde{K}$ имеют место равенства $\omega_r^\alpha = 0$, $\omega_r^S = 0$, то нормальное к $\tilde{K}$ векторное поле

$$\xi = \sum_r F_r e_r$$

параллельно в нормальном расслоении подмногообразия $\tilde{K}$. Выбирая параллельное нормальное к $\tilde{K}$ векторное поле e_m так, что $\xi = \eta e_m$, $\eta > 0$, получаем $F_r = 0$, $r = q \cdot p + 1, \dots, m - 1$, $F_m = \eta$. Отождествляя точку $x \in \tilde{K}$ с радиус-вектором, будем иметь

$$d(x + \eta^{-1}e_m) = \omega^a e_a + \eta^{-1}\omega_m^a e_a = \omega^a e_a + \eta^{-1}(-\eta\omega^a e_a) = 0.$$

Следовательно, $x + \eta^{-1}e_m = \text{const}$ и подмногообразие $\tilde{K}$ принадлежит некоторой гипертсфере $S^{n-1}(\bar{R})$ пространства E_n , для которой вектор e_m является нормальным. Поскольку $\bar{R}^2 = 1/\eta^2$, $R_1^2 = \dots = R_q^2 = R^2 = (\rho + \eta^2)^{-1}$, причем $\rho = (q-1)\eta^2$ (см. второе равенство в (5.20)), то $R_1^2 + \dots + R_q^2 = \bar{R}^2$ или $\bar{R}^2 = qR^2$.

Так как подмногообразие M является минимальным и $F_r = 0$ при $r \neq m$, то нормальный к $\tilde{K}$ вектор ηe_m является вектором средней кривизны для $\tilde{K}$. Однако поскольку вектор e_m ортогонален к гипертсфере $S^{n-1}(\bar{R})$, то $\tilde{K}$ является минимальным в этой гипертсфере, но не минимальным в E_n . Подмногообразие $\tilde{K}$, являясь прямым произведением q одинаковых сфер, т.е. q эйнштейновых подмногообразий с одинаковыми эйнштейновыми константами, также является эйнштейновым с такой же эйнштейновой константой (см., например, [26; гл. 1, предложение 1.99]).

Продолжим изучение систем (5.17) и (5.20). Учитывая, что $F_m = \eta > 0$, $F_r = 0$ при $r \neq m$, из (5.20) получим $\Gamma_{rt}^m = 0$. Это позволяет преобразовать системы (5.17) и (5.20) к следующему виду:

$$\begin{aligned} d \ln |\lambda_{(1)}^{m+1}| &= \eta \omega^m, & \omega_{j_\varphi}^m &= \eta \omega^{j_\varphi}, \\ \omega_{j_\varphi}^r &= 0, \quad r \neq m, & \omega_{j_\psi}^{i_\varphi} &= 0, \quad \varphi \neq \psi, \\ d\eta &= \eta^2 \omega^m, & \eta^2 &= \frac{\rho}{q-1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Поскольку $\Gamma_{rt}^m = 0$, то $\omega_r^m = 0$ и распределение $\bar{T}$, сопоставляющее каждой точке подмногообразия M линейную оболочку векторов $e_{pq+1}, \dots, e_{m-1}$, является параллельным на M и, следовательно, вполне интегрируемым. Интегральное многообразие $\tilde{M}$ этого распределения является $(\mu-1)$ -мерной плоскостью. Ортогональное дополнение P_x к $\bar{T}_x$ в касательном пространстве $T_x(M)$ имеет вид $T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + L_x$, где L_x — прямая с направляющим вектором e_m . Соответствующее распределение P также параллельно и вполне интегрируемо. В силу сопряженности распределений $\bar{T}$ и $P = T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)} + L$ относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M заключаем, что M локально является прямым произведением их интегральных многообразий $\tilde{M}$ и $\tilde{P}$ соответственно. Здесь $\tilde{P}$ является $(pq+1)$ -мерным полуэйнштейновым подмногообразием в $(n-\mu+1)$ -мерном евклидовом пространстве $E_{n-\mu+1}$. Подмногообразие $\tilde{P}$ несет $(q+1)$ -компонентную сопряженную систему, состоящую из q одинаковых сфер и прямой. Прямое произведение этих сфер является эйнштейновым подмногообразием в $E_{n-\mu+1}$ и принадлежит гипертсфере этого пространства.

Поскольку $\tilde{M}$ является евклидовым пространством размерности $\mu-1$, то в качестве локальных координат на $\tilde{M}$ можно взять прямоугольные декартовы координаты. Тогда $\omega_s^r = 0$ для любых $r, s = pq+1, \dots, m-1$. Следовательно, $\Gamma_{st}^r = 0$ для любых $r, s, t = pq+1, \dots, m$.

На подмногообразии $\tilde{P}$ интегральное многообразие распределения L есть прямая с единичным вектором e_m . Обозначим через x^m координату на этой прямой. Так как $d\omega^m = 0$ (что легко проверяется), то можем считать, что $\omega^m = dx^m$. Подставляя в (5.21) и интегрируя, находим

$$\eta = \frac{1}{C - x^m}, \quad \rho = \frac{q - 1}{(C - x^m)^2}, \quad \lambda_{(1)}^{m+1} = \frac{C_1^{m+1}}{C - x^m},$$

где C и C_1^{m+1} – постоянные интегрирования, причем $C_1^{m+1} \neq 0$. Так как в (5.21) в первом уравнении индекс $m + 1$ можно заменить произвольным значением индекса α , то все ненулевые $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ определяются по такой же формуле, т.е.

$$\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \frac{C_\varphi^\alpha}{C - x^m}.$$

Из последнего уравнения системы (5.21) в силу того, что

$$\rho = |n_\varphi|^2 = \sum_\alpha (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 = \frac{1}{(C - x^m)^2} \sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2,$$

следует, что C_φ^α должны удовлетворять условию

$$\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 = q - 1 \quad (5.22)$$

для любого значения индекса φ . Кроме того, C_φ^α должны удовлетворять также условию

$$\sum_\varphi C_\varphi^\alpha = 0, \quad (5.23)$$

которое получается из первого равенства системы (5.3) после подстановки значений $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и учета того, что $p_\varphi = p$. Далее, так как

$$\sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha = -\frac{\rho}{q - 1},$$

то, подставляя сюда значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$, $\lambda_{(\psi)}^\alpha$ и ρ , получаем, что C_φ^α должны удовлетворять также условию

$$\sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\psi^\alpha = -1, \quad \varphi \neq \psi. \quad (5.24)$$

Покажем, что постоянные C_φ^α , удовлетворяющие условиям (5.22)–(5.24), существуют. Действительно, пусть $N_1 = (C_1^\alpha), \dots, N_q = (C_q^\alpha)$ – система векторов $(q - 1)$ -мерного евклидова пространства, координаты которых определены в некотором ортонормированном базисе. Предположим, что все векторы исходят из одной точки, имеют одинаковые модули, равные $\sqrt{q - 1}$, и попарно образуют между собой угол φ такой, что $\cos \varphi = -1/(q - 1)$ (см. § 4). Тогда $|N_\varphi|^2 = q - 1$ (что равносильно (5.22)), $N_1 + \dots + N_q = 0$ (что равносильно (5.23)), $\langle N_\varphi, N_\psi \rangle = |N_\varphi| \cdot |N_\psi| \cdot \cos \varphi = -1$ (что равносильно (5.24)). Таким образом, координаты векторов $N_1, \dots, N_q$ удовлетворяют условиям (5.22)–(5.24).

Теперь покажем, что подмногообразие $\tilde{P}$ является конусом с одномерной плоской образующей над эйнштейновым подмногообразием $\tilde{K}$. Действительно, так как

$$de_m = -\eta \sum_{\varphi} \omega^{i_{\varphi}} e_{i_{\varphi}},$$

то $e_m = \text{const}$ при $\omega^{i_{\varphi}} = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{P}$ является либо конусом (с исключенной точечной вершиной, ибо в ней теряется регулярность), либо цилиндром над $\tilde{K}$ с одномерной образующей L . Поскольку $\eta \neq 0$, то $\tilde{P}$ может быть только конусом.

Если $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} = 0$ при некотором α и любом значении индекса φ , то $de_{\alpha} = 0$. Тогда подмногообразие M содержится в некотором евклидовом пространстве E_{n-1} . Следовательно, в общем случае M содержится в некотором евклидовом пространстве $E_{n'}$, где $m+1 \leq n' \leq n$. Если для любого значения α существует такое значение φ , что $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \neq 0$, то M содержится в E_n и не содержится в ни в каком его собственном подпространстве.

Для завершения доказательства теоремы предположим, что η , ρ и $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}$ определены как и выше и выполняются условия (5.22)–(5.24). Тогда

$$\sum_{\varphi} \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^{\alpha})^2 = \eta^2(q-1), \quad \sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \lambda_{(\psi)}^{\alpha} = -\eta^2.$$

Рассмотрим в E_n следующую дифференциальную систему:

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha} &= 0, & \omega_{\beta}^{\alpha} &= 0, & \omega_r^{\alpha} &= 0, & \omega_s^r &= 0, & \omega_{j_{\psi}}^{i_{\varphi}} &= 0, & \varphi &\neq \psi, \\ \omega_{i_{\varphi}}^{\alpha} - \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \omega^{i_{\varphi}} &= 0, & d \ln |\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}| - \eta \omega^m &= 0, & d\eta - \eta^2 \omega^m &= 0, \\ \omega_{j_{\varphi}}^m - \eta \omega^{j_{\varphi}} &= 0, & \omega_{j_{\varphi}}^r &= 0, & r &\neq m. \end{aligned}$$

Путем непосредственного вычисления внешних дифференциалов левых частей уравнений этой системы легко убедиться в том, что все они обращаются в нуль в силу уравнений самой системы. Это значит, что данная система вполне интегрируема. Она фактически и задает описанное выше нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие $M = \tilde{M} \times \tilde{P}$. Теорема 5.1 полностью доказана.

Отметим, что случай $q = 2$ теоремы 5.1 фактически рассмотрен автором в [12] и [14]. В этом случае параллельность распределений $T^{(1,\varphi)}$ получается как следствие.

Список литературы

- [1] S. Tanno, “Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor”, *Tôhoku Math. J.* (2), **21**:2 (1969), 297–303.
- [2] K. Sekigawa, “On some hypersurfaces satisfying $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ ”, *Hokkaido Math. J.*, **1**:1 (1972), 102–109.
- [3] K. Sekigawa, H. Takagi, “On conformally flat spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor”, *Tôhoku Math. J.* (2), **23**:1 (1971), 1–11.
- [4] H. Nakagawa, R. Takagi, “Kaehler submanifolds with $RS = 0$ in a complex projective space”, *Hokkaido Math. J.*, **5**:1 (1976), 67–70.

- [5] Y. Matsuyama, "Complete hypersurfaces with $RS = 0$ in E^{n+1} ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88** (1983), 119–123.
- [6] В. А. Мирзоян, "Ric-полусимметрические подмногообразия", *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **23**, ВИНТИ, М., 1991, 29–66.
- [7] В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с полупараллельным тензором Риччи", *Ученые записки Тартуск. ун-та*, 1991, №930, 113–128.
- [8] В. А. Мирзоян, "Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств", *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1992, №6, 80–89.
- [9] В. А. Мирзоян, "Обобщения теоремы Ю. Лумисте о полупараллельных подмногообразиях", *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **33**:1 (1998), 53–64.
- [10] В. А. Мирзоян, "Конусы над эйнштейновыми пространствами", *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **33**:5 (1998), 46–54.
- [11] В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с параллельными и полупараллельными структурами", *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **34**:5 (1999), 63–66.
- [12] В. А. Мирзоян, "Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах", *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 65–80.
- [13] В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с полупараллельными тензорными полями как огибающие", *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 99–112.
- [14] В. А. Мирзоян, "Скращенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 107–124.
- [15] F. Defever, "Ricci-semisymmetric hypersurfaces", *Balkan J. Geom. Appl.*, **5**:1 (2000), 81–91.
- [16] Ü. Lumiste, "Semiparallelity, semisymmetry and Ric- semisymmetry for normally flat submanifolds in Euclidean space", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, **51**:2 (2002), 67–85.
- [17] D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", *Math. Ann.*, **247**:1 (1980), 81–93.
- [18] F. Dillen, S. Nölker, "Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property", *J. Reine Angew. Math.*, **435** (1993), 33–63.
- [19] Ü. Lumiste, "Submanifolds with parallel fundamental form", *Handbook of differential geometry*, vol. 1, eds. F. Dillen, L. Verstraelen, North-Holland, Amsterdam, 2000, 779–864.
- [20] В. А. Мирзоян, " s -полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огибающие s -параллельных подмногообразий", *Изв. НАН Армении. Матем.*, **31**:5 (1996), 44–56.
- [21] R. Deszcz, L. Verstraelen, S. Yaprak, "Pseudosymmetric hypersurfaces in 4-dimensional spaces of constant curvature", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **22**:2 (1994), 167–179.
- [22] F. Defever, R. Deszcz, L. Verstraelen, "On pseudosymmetric para-Kähler manifolds", *Colloq. Math.*, **74**:2 (1997), 253–260.
- [23] K. Arslan, Y. Çelik, R. Deszcz, R. Ezentas, "On the equivalence of Ricci-semisymmetry and semisymmetry", *Colloq. Math.*, **76**:2 (1998), 279–294.
- [24] Z. I. Szabó, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. I. The local version", *J. Differential Geom.*, **17**:4 (1982), 531–582.
- [25] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961.
- [26] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990.
- [27] S. S. Chern, N. Kuiper, "Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space", *Ann. of Math. (2)*, **56**:3 (1952), 422–430.
- [28] E. Boeckx, O. Kowalski, L. Vanhecke, *Riemannian manifolds of conullity two*, World Sci., Singapore, 1996.

- [29] П. А. Широков, “Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах”, *Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском ун-те. Сер. 2*, **25** (1925), 86–114.
- [30] В. А. Мирзоян, “Подмногообразие с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1993, №9, 22–27.
- [31] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, Физматлит, М., 1986.
- [32] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр VI. Риманова геометрия*, Факториал, М., 1998.
- [33] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, Физматлит, М., 1981.
- [34] B.-Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure Math. Appl., **22**, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [35] J. D. Moore, “Isometric immersions of Riemannian products”, *J. Differential Geom.*, **5** (1971), 159–168.
- [36] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, Физматлит, М., 1969.

В. А. Мирзоян (V. A. Mirzoyan)

Государственный инженерный университет Армении,
Европейская региональная академия на Кавказе, г. Ереван
E-mail: mirzoyan_vanya@front.ru

Поступила в редакцию
23.05.2005