Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фурсиков, Ю. С. Эмануилов, Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье–Стокса, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 103–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:12:10

УДК 517.977.1

А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов

Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье–Стокса

Пусть граница $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ состоит из двух непересекающихся замкнутых кривых Γ_0 и Γ_1 , причем Γ_0 связна, а $\Gamma_1 \neq \emptyset$. В Ω рассматривается система Навье–Стокса $\partial_t v(t, x) - \Delta v + (v, \nabla)v + \nabla p = f(t, x)$, $\operatorname{div} v = 0$ с условиями: $(v, \nu)|_{\Gamma_0} = \operatorname{rot} v|_{\Gamma_0} = 0$ и $v|_{t=0} = v_0(x)$, где $t \in (0, T)$, $x \in \Omega$, ν – нормаль к Γ_0 . Пусть $\widehat{v}(t, x)$ – заданное решение уравнений Навье–Стокса, удовлетворяющее на Γ_0 указанным условиям, и $\|\widehat{v}(0, \cdot) - v_0\|_{W_2^2(\Omega)} < \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(\widehat{v}) \ll 1$. Доказано существование такого управления $u(t, x)$ на $(0, T) \times \Gamma_1$, что решение $v(t, x)$ системы Навье–Стокса с $(v, \nu)|_{\Gamma_0} = \operatorname{rot} v|_{\Gamma_0} = 0$, $v|_{t=0} = v_0(x)$ и $v|_{\Gamma_1} = u$ при $t = T$ совпадает с $\widehat{v}(T, \cdot)$: $v(T, x) = \widehat{v}(T, x)$. В частности, при f и $\widehat{v}$, не зависящих от t , когда $\widehat{v}(x)$ – неустойчивое стационарное решение, из сформулированного результата следует, что с помощью управления α на Γ_1 можно подавить возникновение турбулентности. Аналогичный результат доказан, когда $\Gamma_0 = \partial\Omega$, а управление $\alpha(t, x)$ является распределенным, с носителем в произвольной подобласти $\omega \subset \Omega$.

Библиография: 12 названий.

Работа посвящена доказательству точной локальной управляемости двумерных уравнений Навье–Стокса, определенных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в случае, когда управление задано на всей границе $\partial\Omega$ либо на некоторой ее части, а также в случае локального распределенного управления. Точная постановка изучаемых в работе задач и формулировка основных результатов имеется в §1. Ниже мы ограничимся описанием лишь одного характерного частного случая. Пусть $(\widehat{v}(x), \nabla \widehat{p}(x))$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, стационарное решение двумерной системы Навье–Стокса:

$$-\Delta \widehat{v} + (\widehat{v}, \nabla)\widehat{v} + \nabla \widehat{p} = f(x), \quad \operatorname{div} \widehat{v} = 0.$$

Рассмотрим нестационарную систему Навье–Стокса

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) + (v, \nabla)v + \nabla p = f(x), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (1)$$

снабженную начальным условием

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № M76300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00947).

Работа второго автора поддержана также GARC-KOSEF и KOSEF (K94073).

близким к заданному стационарному решению:

$$\|v_0 - \hat{v}\|_{(W_2^2(\Omega))^2} \leq \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ достаточно мало}).$$

Требуется найти такое граничное управление

$$v(t, x)|_{\partial\Omega} = u(t, x), \quad (3)$$

чтобы решение $v(t, x)$ краевой задачи (1)–(3) в заданный момент времени T совпало с $\hat{v}$: $v(T, x) \equiv \hat{v}(x)$. Такое управление построено в работе.

Чтобы пояснить этот результат, предположим, что $\hat{v}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\hat{v}$ – неустойчивая особая точка динамической системы, порожденной уравнением (1), в фазовом пространстве соленоидальных векторных полей с условием прилипания на границе $\partial\Omega$. Пусть v_0 – начальное условие из малой окрестности $\hat{v}$, из которого выходит траектория динамической системы, не стремящаяся к $\hat{v}$ с ростом времени. Как показано в этой работе, можно выбрать такое граничное управление, что траектория, выходящая из v_0 , под действием этого управления за конечное время достигнет $\hat{v}$. Другими словами с помощью граничного управления можно подавить возникновение турбулентности. Этот результат проясняет вопрос о связях между управлением и турбулентностью (см. Ж.-Л. Лионс [1]).

Интересным в теоретическом плане и важным с точки зрения приложений является вопрос о локальной точной управляемости в случае, когда управление задано на части границы $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. В работе сделан первый шаг к решению этой проблемы. А именно, доказана локальная точная управляемость системы (1) с управлением на части границы Γ_1 , если на дополнении $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ к Γ_1 поставлены граничные условия

$$(v(x), \nu(x))|_{\Gamma_0} = 0, \quad \operatorname{rot} v(x)|_{\Gamma_0} = 0, \quad (4)$$

где ν – нормаль к $\partial\Omega$, $\operatorname{rot} v = \partial_{x_2} v_1 - \partial_{x_1} v_2$.

В работе изучена локальная управляемость системы (1), когда управлением является функция $u(t, x)$, стоящая в правой части уравнения Навье–Стокса, с носителем из заданной подобласти $\omega \subset \Omega$:

$$\operatorname{supp} u \subset (0, T) \times \omega.$$

Такое управление называется *локальным распределенным*. Случай локального распределенного управления является основным в настоящей работе: из этого случая выводятся и результаты о граничной управляемости.

Этой работе предшествовали работы А. В. Фурсикова, О. Ю. Эмануилова [2], [3], А. В. Фурсикова [4] и О. Ю. Эмануилова [11], [12], [5]. В [2] изучена локальная точная управляемость в случае уравнения Бюргерса. Случай уравнений Навье–Стокса с $\hat{v} \equiv 0$ и управлением на всей границе изучен в [3], когда размерность системы $n = 2$ и в [4] при $n = 3$. Работы [11], [12], [5] посвящена локальной точной управляемости для полулинейного параболического уравнения с управлением на части границы.

Отметим также работу Ж.-М. Корона [6], в которой установлена нелокальная управляемость двумерных уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости с управлением на части границы. Правда, результаты работ [6] стоит несколько в стороне от результатов настоящей работы и работ [2]–[5]. Дело в том, что в отличие от уравнений Навье–Стокса система Эйлера обратима по времени.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

1.1. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ рассматривается двумерная система Навье–Стокса:

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) + (v, \nabla)v + \nabla p(t, x) = f(t, x), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 = 0, \quad (1.2)$$

где $(t, x) \in Q \equiv (0, T) \times \Omega$, $v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$ – скорость жидкости, $\nabla p(t, x)$ – градиент давления, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $(v, \nabla)v = \sum_{j=1}^2 v_j \partial_{x_j} v$, Δ – оператор Лапласа, $f = (f_1, f_2)$ – плотность внешних сил. Предполагается, что

$$v(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad (1.3)$$

где $v_0(x) = (v_{01}, v_{02})$ – заданное начальное условие.

Пусть Γ_0 – открытое подмножество $\partial\Omega$,

$$\Gamma_0 \subset \partial\Omega, \quad \Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad \Sigma_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 0, 1. \quad (1.4)$$

На Σ_0 ставятся граничные условия:

$$(\operatorname{rot} v)|_{\Sigma_0} = 0, \quad (v, \nu)|_{\Sigma_0} = 0, \quad (1.5)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$, $(v, \nu) = v_1 \nu_1 + v_2 \nu_2$, $\operatorname{rot} v = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$. На части границы Σ_1 ставится условие Дирихле:

$$v|_{\Sigma_1} = u, \quad (1.6)$$

где u – граничное значение поля v , которое у нас будет являться управлением.

Для постановки задачи управляемости и формулировки результата введем функциональные пространства. Напомним, что $W_p^k(\Omega)$, $k \geq 0$ целое, $1 \leq p < \infty$, – это пространство Соболева функций с конечной нормой

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx \right)^{1/p},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Пространства Соболева $W_2^\alpha(\Omega)$, $W_2^\alpha(\partial\Omega)$, где α – любое вещественное число, также используются в работе. Их определение см. в [7]. Положим

$$H^k(\Omega) = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in (W_2^k(\Omega))^2 : \operatorname{div} v = 0\}, \quad (1.7)$$

$$W^{1,2(k)}(Q) = \{v \in L_2(0, T; W_2^{k+2}(\Omega)) : \partial_t v \in L_2(0, T; W_2^k(\Omega))\}, \quad (1.8)$$

$$H^{1,2(k)}(Q) = \{v(t, x) \in (W^{1,2(k)}(\Omega))^2 : \operatorname{div} v = 0\}. \quad (1.9)$$

Аналогично (1.8) определяются пространства $W^{1,2(k)}(\Sigma)$, $W^{1,2(k)}(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$. Для этого в (1.8) нужно Ω заменить на $\partial\Omega$, Γ_i .

Так как ∇p легко определяется из (1.1) по f и v , мы в дальнейших формулировках, говоря о решениях системы (1.1), будем вместо пары $(v, \nabla p)$ писать v .

Поставим задачу точной граничной управляемости. Пусть нам задано решение $\hat{v} \in H^{1,2(1)}(Q)$ уравнений (1.1), (1.2) и начальное условие $v_0 \in H^2(\Omega)$, связанные соотношением:

$$\|\hat{v}(0, \cdot) - v_0\|_{H^2(\Omega)}^2 < \varepsilon, \quad (1.10)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Предполагается, что для любой связной компоненты $\partial\Omega_j$ границы $\partial\Omega$ справедливы равенства

$$\int_{\partial\Omega_j} (v_0, \nu) d\sigma = 0, \quad \int_{\partial\Omega} (\hat{v}, \nu) d\sigma = 0. \quad (1.11)$$

Кроме того, начальное данное v_0 удовлетворяет условиям согласования:

$$\operatorname{rot} v_0|_{\Gamma_0} = 0, \quad (v_0, \nu)|_{\Gamma_0} = 0. \quad (1.12)$$

Требуется найти такое управление $u \in W^{1,2(1/2)}(\Sigma_1)$, заданное на части границы Σ_1 , что решение $v \in H^{1,2(1)}(Q)$ задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) удовлетворяет при $t = T$ условию

$$v(t, x)|_{t=T} = \hat{v}(T, x). \quad (1.13)$$

В этой работе будет доказана

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ — связное подмножество, причем $\Gamma_1 \equiv \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \neq \emptyset$ и $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$; $\hat{v} \in H^{1,2(1)}(\Omega)$ — заданное решение уравнений (1.1), (1.2), $v_0 \in H^2(\Omega)$ и выполнены условия (1.11), (1.12), (1.10) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое управление $u \in W^{1,2(1/2)}(\Sigma_1)$, что решение задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) существует в пространстве $H^{1,2(1)}(Q)$ и при $t = T$ удовлетворяет условию (1.13). Более того,

$$\|v(t, \cdot) - \hat{v}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c \exp\left\{\frac{-k}{T-t}\right\} \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (1.14)$$

где $c > 0$, $k > 0$ — некоторые константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Множество $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, в частности, может быть пустым, т.е. управление u из (1.6) может быть задано и на всей боковой границе Σ .

1.2. Рассмотрим теперь случай системы Навье–Стокса, которая управляется с помощью распределенного управления, сосредоточенного в некоторой фиксированной подобласти $\omega \subset \Omega$, т.е. случай локального распределенного управления.

Итак, пусть $\Gamma_0 = \partial\Omega$ и, значит, $\Sigma_0 = \Sigma$, $\Gamma_1 = \emptyset$, $\Sigma_1 = \emptyset$. Заменим (1.1) уравнением

$$\partial_t v(t, x) - \Delta v(t, x) + (v, \nabla)v + \nabla p(t, x) = f(t, x) + u(t, x), \quad (1.15)$$

где $u(t, x) = (u_1, u_2)$ – управление, сосредоточенное в подобласти $\omega \subset \Omega$:

$$u(t, x) \equiv \chi_\omega(x)u(t, x), \quad \text{где } \chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega, \\ 0, & x \notin \omega. \end{cases} \quad (1.16)$$

Пусть $\widehat{v}(t, x) \in H^{1,2(1)}(Q)$ – заданное решение уравнений (1.1), (1.2), а $v_0(x) \in H^2(\Omega)$ – начальное условие, связанное с $\widehat{v}$ соотношением (1.10).

Задача локальной точной управляемости с локальным распределенным управлением состоит в построении такого управления $u(t, x)$ вида (1.16), чтобы решение краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5) при $t = T$ удовлетворяло соотношению (1.13).

Для $\omega \subset \Omega$ положим $Q^\omega = (0, T) \times \omega$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Gamma_0 = \partial\Omega$ – связное множество и заданы решение $\widehat{v}(t, x) \in H^{1,2(1)}(Q)$ уравнений (1.1), (1.2), (1.5) и начальное условие $v_0(x) \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющие (1.12) и (1.10) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое управление $u(t, x) \in L_2(Q)$, $\text{supp } u \subset Q^\omega$, что решение $v(t, x)$ задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5) существует в пространстве $H^{1,2(1)}(Q)$ и удовлетворяет оценке (1.14), а, значит, и равенству (1.13).

§ 2. Сведение к линейной задаче управляемости

2.1. Основным в работе является случай задачи точной управляемости с локальным распределенным управлением, заданным в некоторой фиксированной подобласти ω области Ω .

Чтобы избавиться от давления, мы вместо системы уравнений Навье–Стокса рассмотрим сначала уравнение для функции тока $\psi(t, x)$, которая, как известно, связана с векторным полем скоростей $v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$ соотношением

$$\partial_{x_1}\psi = -v_2, \quad \partial_{x_2}\psi = v_1. \quad (2.1)$$

Применим к первому из уравнений (1.1) оператор ∂_{x_2} , а ко второму – оператор ∂_{x_1} , вычтем из второго уравнения первое и подставим (2.1) в полученное уравнение. В результате мы будем иметь уравнение для функции тока:

$$\partial_t(-\Delta\psi(t, x)) + \Delta^2\psi + \partial_{x_2}((\partial_{x_1}\psi)\Delta\psi) - \partial_{x_1}((\partial_{x_2}\psi)\Delta\psi) = u + g. \quad (2.2)$$

В правой части (2.2) вместо $\text{rot } f$ мы поставили $u(t, x) + g(t, x)$, где $g = \text{rot } f$, а u – управление, так как именно такой вид правой части нам понадобится в дальнейшем.

Первое из граничных условий (1.5) в силу (2.1) запишется в виде:

$$(-\Delta\psi)|_\Sigma = 0, \quad \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.3)$$

а второе из этих условий – в виде:

$$\partial_\tau\psi|_\Sigma = 0, \quad (2.4)$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ – вектор, касательный к $\partial\Omega$. В силу этого равенства

$$\psi|_{\partial\Omega} = \text{const},$$

а так как $\partial\Omega$ связно¹, и из соотношений (2.1) ψ определяется с точностью до константы, то можно считать, что

$$\psi|_{\Sigma} = 0. \quad (2.5)$$

Начальное условие (1.3) в силу (2.1), (1.5) заменяется на условие

$$\psi(t, x)|_{t=0} = \psi_0(x), \quad (2.6)$$

где ψ_0 определяется из равенств

$$\partial_{x_1}\psi_0 = -v_{02}, \quad \partial_{x_2}\psi_0 = v_{01},$$

и в соответствии с (1.12), (2.5) выполнены условия согласования:

$$\psi_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta\psi_0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.7)$$

Аналогично §1 предположим, что нам задано решение $\widehat{\psi}(t, x) \in W^{1,2(2)}(Q)$ уравнения (2.2) с $u(t, x) \equiv 0$ и правой частью $g \in L_2(Q)$, причем $\widehat{\psi}(t, x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3), (2.5) и

$$\|\widehat{\psi}(0, \cdot) - \psi_0(\cdot)\|_{W_2^3(\Omega)} < \varepsilon, \quad (2.8)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Задача локальной точной управляемости состоит в построении такого управления $u(t, x) \in L_2(Q)$, $\text{supp } u \subset Q^\omega$, что решение $\psi(t, x)$ краевой задачи (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) удовлетворяет условию

$$\psi(t, x)|_{t=T} = \widehat{\psi}(t, x)|_{t=T}. \quad (2.9)$$

Будем искать решение $\psi(t, x)$ в виде:

$$\psi(t, x) = w(t, x) + \widehat{\psi}(t, x), \quad (2.10)$$

где w – новая неизвестная функция. Подставляя (2.10) в (2.2)–(2.6), получим уравнение для w :

$$\partial_t(-\Delta w(t, x)) + \Delta^2 w + B(\widehat{\psi} + w, w) + B(w, \widehat{\psi}) = u(t, x), \quad (2.11)$$

где

$$B(\psi, \varphi) = \partial_{x_2}((\partial_{x_1}\psi)\Delta\varphi) - \partial_{x_1}((\partial_{x_2}\psi)\Delta\varphi), \quad (2.12)$$

а также краевое и начальное условия:

$$(-\Delta w)|_{\Sigma} = 0, \quad w|_{\Sigma} = 0, \quad (2.13)$$

$$w(t, x)|_{t=0} = w_0(x). \quad (2.14)$$

Здесь $w_0(x) = \psi_0(x) - \widehat{\psi}(0, x)$ и вследствие (2.10), (2.7), (2.8)

$$w_0|_{\partial\Omega} = \Delta w_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|w_0\|_{W_2^3(\Omega)}^2 < \varepsilon. \quad (2.15)$$

В §§ 2–7 будет доказана

¹Связность $\partial\Omega$ используется только здесь при выводе условия (2.5). Поэтому ниже при изучении задачи управляемости для функции тока ψ предположение о связности $\partial\Omega$ не накладывается.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Γ_0 совпадает с $\partial\Omega$ и заданы функция $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, удовлетворяющая равенствам (2.2) с $u \equiv 0$, (2.3), (2.5), и начальное условие $w_0 \in W_2^3(\Omega)$, для которого выполнены соотношения (2.15) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое управление $u \in L_2(Q)$, $\text{supp } u \subset (0, T) \times \omega$, что решение $w \in W^{1,2(2)}(Q)$ задачи (2.11)–(2.14) существует и удовлетворяет равенству

$$w(t, x)|_{t=T} = 0. \quad (2.16)$$

2.2. Для доказательства теоремы 2.1 мы используем следующую теорему о правом обратном операторе:

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X, Z – банаховы пространства и

$$A: X \rightarrow Z \quad (2.17)$$

– непрерывно дифференцируемое отображение. Предположим, что для $x_0 \in X, z_0 \in Z$ справедливо равенство

$$A(x_0) = z_0, \quad (2.18)$$

и производная

$$A'(x_0): X \rightarrow Z \quad (2.19)$$

оператора A в точке x_0 является эпиморфизмом. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ на шаре

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\|_Z < \varepsilon\}$$

определено отображение $M(z): B_\varepsilon(z_0) \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям:

$$A(M(z)) = z, \quad z \in B_\varepsilon(z_0), \quad (2.20)$$

$$\|M(z) - x_0\|_X \leq k \|A(x_0) - z\|_Z, \quad z \in B_\varepsilon(z_0), \quad (2.21)$$

где $k > 0$ – некоторое число.

Теорема 2.2 является простым следствием обобщения теоремы о неявной функции, доказанного в [8].

В нашем случае пространство X будет состоять из пар (w, u) , оператор $A(x)$ определится формулой (2.11):

$$A(x) = (-\partial_t \Delta w + \Delta^2 w + B(\widehat{\psi} + w, w) + B(w, \widehat{\psi}) - u, w|_{t=0}) \quad (2.22)$$

(условие $w|_{t=T} = 0$ и краевые условия для w будут включены в определение пространства X), а множество пар вида (2.22) определит нам пространство Z . В качестве x_0, z_0 мы возьмем нулевые элементы: $x_0 = (0, 0)$, $z_0 = (0, 0)$; тогда равенство (2.18) будет, очевидно, выполняться.

Для проверки условия эпиморфности оператора (2.19), которое является наиболее трудно проверяемым условием теоремы 2.2, выпишем уравнение

$$A'(x_0)x = z.$$

У нас это уравнение имеет вид:

$$Lw - u \equiv \partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w + B(\psi, w) + B(w, \psi) - u = f, \quad (2.23)$$

где $u = \chi_\omega u$, χ_ω — функция (1.16),

$$w|_\Sigma = \Delta w|_\Sigma = 0, \quad (2.24)$$

$$w|_{t=0} = w_0, \quad w|_{t=T} = 0. \quad (2.25)$$

Отметим, что при $x_0 = (0, 0)$, $z_0 = (0, 0)$, функция ψ из (2.23) совпадает с $\widehat{\psi}$. Однако мы докажем разрешимость задачи (2.23)–(2.25) для любой функции $\psi \in W^{1,2(1)}(Q)$. Это позволит нам в дальнейшем усилить утверждение теоремы 2.2 (см. ниже замечание 6.1).

Дадим теперь точное определение пространств X , Z , соответствующих задачам (2.11)–(2.14) и (2.23)–(2.25). Положим:

$$\eta(t, x) \equiv \eta^\lambda(t, x) = \frac{e^{\frac{4\lambda}{3}\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}} - e^{\lambda\beta(x)}}{T - t}, \quad (2.26)$$

где $\lambda > 0$ — параметр (его величина будет зафиксирована ниже в §3), а $\beta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ — функция, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla\beta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \omega', \quad (\nabla\beta(x), \nu(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (2.27)$$

$$\beta(x) \geq \ln 3 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x) > \frac{3}{4} \max_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x). \quad (2.27')$$

Здесь $\omega' \Subset \omega \Subset \Omega$, т.е. ω' — область, компактно вложенная в Ω , а $\nu(x)$, как и раньше, — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Существование функции $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей условиям (2.27), доказано в работе [5], а для справедливости (2.27') нужно β увеличить на достаточно большую константу. Пусть $\kappa(t, x) > 0$, $(t, x) \in Q$. Положим

$$L_2(Q, \kappa) = \left\{ u(t, x), (t, x) \in Q : \|u\|_{L_2(Q, \kappa)}^2 \equiv \int_Q \kappa^2(t, x) u^2(t, x) dx dt < \infty \right\}. \quad (2.28)$$

Весы, которые мы будем использовать, строятся по функции (2.26). Одним из таких весов будет функция θe^η , где

$$\theta(t, x) = \chi_\omega(x)(T - t)^{1/2} + (1 - \chi_\omega(x)), \quad (2.29)$$

а χ_ω – характеристическая функция множества ω (см. (1.16)). Введем пространство

$$\begin{aligned} Y(Q) \equiv \left\{ y(t, x) \in W^{1,2(2)}(Q) : y|_\Sigma = \Delta y|_\Sigma = 0, \right. \\ \left. \|y\|_{Y(Q)}^2 \equiv \|\partial_t(-\Delta y) + \Delta^2 y\|_{L_2(Q, \theta e^\eta)}^2 + \|y\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 \right. \\ \left. + \int_Q \left(\sum_{|\alpha| \leq 3} (T-t)^{2|\alpha|-6} |D_x^\alpha y|^2 \right) e^{2\eta} dx dt \right\}, \quad (2.30) \end{aligned}$$

где θ и η – функции (2.29), (2.26). Положим также

$$\begin{aligned} U_\omega(Q) = \left\{ u(t, x) \in L_2(Q) : \text{supp } u \subset Q^\omega, \right. \\ \left. \|u\|_{U_\omega(Q)}^2 \equiv \int_{Q^\omega} (T-t)e^{2\eta} |u|^2 dx dt < \infty \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

где, напомним, $Q^\omega = (0, T) \times \omega$.

Чтобы применить теорему 2.2 для доказательства разрешимости задачи (2.11), (2.13), (2.14), (2.16), определим пространства X, Z следующим образом:

$$\begin{aligned} X = \{ (y, u) \in Y(Q) \times U_\omega(Q) : \\ \| (y, u) \|_X^2 = \|y\|_{Y(Q)}^2 + \|u\|_{U_\omega(Q)}^2 + \|\partial_t(-\Delta y) + \Delta^2 y - u\|_{L_2(Q, e^\eta)}^2 < \infty \}, \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$Z = L_2(Q, e^\eta) \times \widehat{W}_2^3(\Omega), \quad (2.32')$$

где

$$\widehat{W}_2^3(\Omega) = \{ v(x) \in W_2^3(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = 0 \}. \quad (2.32'')$$

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Отображение (2.17) непрерывно дифференцируемо в любой точке $x_0 \in X$, если X, Z – пространства (2.32), (2.32'), а оператор $A(x)$ определяется формулой (2.22).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения (2.30)–(2.32), (2.32'), пространств X, Z следует, что оператор

$$(w, u) \rightarrow (\partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w - u, w|_{t=0}) : X \rightarrow Z$$

непрерывен, а в силу линейности и непрерывности – дифференцируем. Оператор B из (2.22), определенный формулой (2.12), является билинейным. Поэтому для доказательства предложения 2.1 достаточно установить непрерывность билинейного оператора

$$B : Y(Q) \times Y(Q) \rightarrow L_2(Q, e^\eta). \quad (2.33)$$

Учитывая (2.12), (2.29)–(2.31), с помощью простых преобразований получаем оценку

$$\begin{aligned} \|B(\varphi, \psi)\|_{L_2(Q, e^\eta)}^2 &\leq c \int_Q e^{2\eta} (|\partial_{x_1} \psi|^2 |\partial_{x_2} \Delta \varphi|^2 + |\partial_{x_2} \psi|^2 |\partial_{x_1} \Delta \varphi|^2) dx dt \\ &\leq c \|\nabla \psi\|_{C(\overline{Q})}^2 \|\nabla \Delta \varphi\|_{L_2(Q, e^\eta)}^2 \leq c \|\psi\|_{Y(Q)}^2 \|\varphi\|_{Y(Q)}^2, \end{aligned}$$

что доказывает непрерывность оператора (2.33).

Очевидно, равенство (2.18) выполняется для отображения (2.22) при $x_0 = (w^0, u^0) = 0, z_0 = 0$. Поэтому, чтобы применить теорему 2.2, нам осталось доказать, что образ оператора (2.19) совпадает с Z . Это сводится к доказательству разрешимости задачи (2.23)–(2.25) при любых $(f, w_0) \in Z$. Доказательству разрешимости этой задачи посвящены §§ 3–5.

§3. Вспомогательная экстремальная задача и разрешимость ее системы оптимальности

Приступим к доказательству разрешимости задачи (2.23)–(2.25). Очевидно, эта задача плохо поставлена, так как имеет недостаточное количество краевых условий на Σ и слишком много краевых условий на временной оси. Поэтому прежде всего мы сведем ее решение к решению некоторой коэрцитивной краевой задачи. Чтобы ее выписать, рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(w, u) = \frac{1}{2} \int_Q \frac{e^{2\eta}}{(T-t)^6} w^2(t, x) dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q^\omega} (T-t) e^{2\eta} u^2(t, x) dx dt \rightarrow \inf \quad (3.1)$$

при условии, что пара (w, u) удовлетворяет соотношениям (2.23)–(2.25). Система оптимальности задачи (3.1), (2.23)–(2.25) имеет вид

$$L^* p \equiv \partial_t(\Delta p(t, x)) + \Delta^2 p + B_2^*(\psi, p) + B_1^*(p, \psi) = -\frac{e^{2\eta}}{(T-t)^6} w, \quad (3.2)$$

$$p|_\Sigma = \Delta p|_\Sigma = 0, \quad (3.3)$$

$$\chi_\omega(x) p(t, x) \equiv (T-t) e^{2\eta} u(t, x), \quad (3.4)$$

где $B_1^*(\cdot, \psi)$, $B_2^*(\psi, \cdot)$ – операторы, формально сопряженные к линейным операторам $B(\cdot, \psi)$, $B(\psi, \cdot)$, соответственно. Из определения (2.12) оператора $B(\psi, \varphi)$ следует, что

$$B_1^*(h, \psi) = \partial_{x_1}(\Delta \psi \partial_{x_2} h) - \partial_{x_2}(\Delta \psi \partial_{x_1} h), \quad (3.5)$$

$$B_2^*(\psi, h) = \Delta(\partial_{x_1} h \partial_{x_2} \psi - \partial_{x_2} h \partial_{x_1} \psi). \quad (3.6)$$

Вывести (формально) систему (3.2)–(3.4) можно, например, с помощью принципа Лагранжа (см. [8]). Так как в дальнейшем нигде не используется, что (3.2)–(3.4) – это система оптимальности экстремальной задачи (3.1), (2.23)–(2.25), то мы здесь не будем давать даже ее формального вывода. Отметим лишь, что эта система формально выводится, например, как в [4].

Итак, вместо разрешимости задачи (2.23)–(2.25) мы будем исследовать разрешимость краевой задачи (2.23)–(2.25), (3.2)–(3.4). Прежде всего перейдем от (2.23)–(2.25), (3.2)–(3.4) к краевой задаче, содержащей лишь одну неизвестную функцию $p(t, x)$. Для этого выразим w из (3.2), а u из (3.4) и подставим полученные выражения в (2.23). В результате получим уравнение для функции $p(t, x)$:

$$-L((T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p) - (T-t)^{-1} e^{-2\eta} \chi_\omega(x) p = f. \quad (3.7)$$

Краевые условия (2.25) перепишем, используя (3.2):

$$-(T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p|_{t=0} = w_0, \quad -(T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p|_{t=T} = 0. \quad (3.8)$$

Покажем, что краевая задача (3.7), (3.8), (3.3) имеет единственное решение в соответствующих функциональных пространствах, если параметр λ функции $\eta \equiv \eta^\lambda$ достаточно велик. Для этого нам понадобится следующая оценка карлемановского типа.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\eta = \eta^\lambda$ — функция (2.26), а β — функция, удовлетворяющая условиям (2.27), (2.27'). Пусть для p, w справедливы соотношения (3.2), (3.3), причем коэффициент ψ из (3.2) принадлежит $W^{1,2(2)}(Q)$. Тогда существует такое $\hat{\lambda} > 0$, что для $\lambda > \hat{\lambda}$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} I_\lambda(p) &\equiv \int_Q \left((T-t)^7 |\partial_t \Delta p|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq 2} (T-t)^{3+2|\alpha|} |D_x^\alpha \Delta p|^2 + \sum_{|\alpha| \leq 4} (T-t)^{2|\alpha|} |D_x^\alpha p|^2 \right) e^{-2\eta^\lambda} dx dt \\ &\leq c \left(\int_Q (T-t)^{-6} |w|^2 e^{2\eta^\lambda} dx dt + \int_{Q^w} (T-t)^{-1} |p|^2 e^{-2\eta^\lambda} dx dt \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где c зависит лишь от λ и $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$, причем можно считать, что зависимость от второго аргумента непрерывна и монотонна.

Доказательство этой теоремы из-за его громоздкости будет приведено в конце работы, в § 7.

Для определения обобщенного решения задачи (3.7), (3.8), (3.3) введем пространство Φ_λ по формуле:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda = \left\{ p(t, x) : \|p\|_{\Phi_\lambda}^2 &\equiv I_\lambda(p) + \int_{Q^w} (T-t)^{-1} |p|^2 e^{-2\eta^\lambda} dx dt \right. \\ &\left. + \int_Q (T-t)^6 e^{-2\eta^\lambda} |L^* p|^2 dx dt < \infty, p|_\Sigma = \Delta p|_\Sigma = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $I_\lambda(p)$ — функционал, определенный в (3.9). Отметим, что в силу (3.9) из неравенства $\|p\|_{\Phi_\lambda} < \infty$ следует, что следы $p|_\Sigma, \Delta p|_\Sigma$ корректно определены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $f \in L_2(Q, e^{\eta^\lambda})$, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (3.7), (3.8), (3.3) называется такой элемент $p(t, x)$ пространства Φ_λ , что для любого $q \in \Phi_\lambda$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \int_Q (T-t)^6 e^{-2\eta^\lambda} L^* p \cdot L^* q dx dt + \int_{Q^w} (T-t)^{-1} e^{-2\eta^\lambda} p q dx dt \\ = - \int_Q f q dx dt + \int_\Omega w_0(x) \Delta q(0, x) dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где L^* — оператор, определенный в (3.2).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $w_0 \in W_2^2(\Omega)$, $f \in L_2(Q, e^{\eta^\lambda})$, где $\lambda > \widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda}$ – константа из теоремы 3.1. Тогда существует единственное обобщенное решение p задачи (3.7), (3.8), (3.3). Функция p удовлетворяет уравнению (3.7), понимаемому в смысле теории обобщенных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На пространстве Φ_λ , рассмотрим билинейную форму

$$a(p, q) = \int_Q (T-t)^6 e^{-2\eta^\lambda} L^* p \cdot L^* q \, dx \, dt + \int_{Q^\omega} (T-t)^{-1} e^{-2\eta^\lambda} p q \, dx \, dt.$$

В силу теоремы 3.1 эта форма непрерывна и коэрцитивна на Φ_λ :

$$a(p, q) \geq c \|q\|_{\Phi_\lambda}^2.$$

Функционал

$$F(q) = - \int_Q f q \, dx \, dt + \int_\Omega w_0(x) \Delta q(0, x) \, dx,$$

очевидно, непрерывен на Φ_λ . Поэтому по теореме Рисса о представлении линейного функционала на гильбертовом пространстве уравнение (3.2) имеет единственное решение $p \in \Phi_\lambda$. Взяв в (3.11) $q \in C_0^\infty(Q)$, мы получаем равенство (3.7), понимаемое в смысле теории обобщенных функций.

Мы фиксируем λ , выбранное в теореме 3.2, вплоть до конца § 6.

Пусть p – обобщенное решение, построенное в теореме 3.2. По функции p определим функцию w с помощью равенства (3.2). Наша цель – показать, что w является решением линейной задачи управляемости (2.23)–(2.25). В следующем параграфе мы покажем, что w является решением краевой задачи (2.23)–(2.25₁).

§ 4. Свойства функции w

ЛЕММА 4.1. Пусть $p(t, x)$ – обобщенное решение задачи (3.7), (3.8), (3.3), построенное в теореме 3.2, функция w определяется по p с помощью (3.2), а u – с помощью (3.4). Тогда

$$w \in L_2(Q, (T-t)^{-3} e^\eta), \quad u \in L_2(Q, (T-t)^{1/2} e^\eta), \quad \text{supp } u \subset Q^\omega,$$

и справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \int_Q (T-t)^{-6} e^{2\eta} w^2(t, x) \, dx \, dt + \int_{Q^\omega} (T-t) e^{2\eta} u^2(t, x) \, dx \, dt \\ \leq c \left(\int_Q e^{2\eta} f^2(t, x) \, dx \, dt + \int_\Omega (w_0(x))^2 \, dx \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где c зависит непрерывно и монотонно лишь от $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$. Кроме того, w , u удовлетворяют уравнению (2.23), понимаемому в смысле теории обобщенных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (3.11) $p = q$, а затем с помощью (3.2), (3.4) выразим $(L^*p)^2$ через w^2 , а p^2 через u^2 . Применяя в правой части полученного равенства неравенство Коши–Буняковского, после простых преобразований будем иметь оценку:

$$\begin{aligned} & \|(T-t)^{-3}e^\eta w\|_{L_2(Q)}^2 + \|(T-t)^{1/2}e^\eta u\|_{L_2(Q_w)}^2 \\ & \leq \varepsilon \left(\|e^{-\eta}p\|_{L_2(Q)}^2 + \int_{\Omega} (\Delta p(0, x))^2 dx \right) + \frac{c}{\varepsilon} (\|e^\eta f\|_{L_2(Q)}^2 + \|w_0\|_{L_2(\Omega)}^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Очевидно, величину $\int_{\Omega} (\Delta p(0, x))^2 dx$ можно оценить через левую часть неравенства (3.9). Поэтому, оценивая член с ε в (4.2) с помощью неравенства (3.9) и выбирая ε достаточно малым, получим (4.1). Из (3.2), (3.4) и (3.7) следует (2.23).

Будем некоторое время предполагать, что

$$\psi \in C^\infty(\overline{Q}). \quad (4.3)$$

Наша ближайшая цель – показать, что $w \in W^{1,2(2)}(Q)$ и удовлетворяет по-мимо (2.23) соотношениям (2.24), (2.25). Для этого нам сначала потребуется исследовать краевую задачу:

$$\Delta y(t, x) = z(t, x), \quad y|_{\Sigma} = 0, \quad (4.4)$$

$$-\partial_t z + \Delta z + \partial_{x_1} \psi \partial_{x_2} z - \partial_{x_2} \psi \partial_{x_1} z = g, \quad \text{где } g = f + u - B(w, \psi), \quad (4.5)$$

$$z|_{\Sigma} = 0, \quad z|_{t=0} = \Delta w_0. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $f \in L_2(Q, e^\eta)$, $\psi \in C^\infty(\overline{Q})$, $\psi|_{\Sigma} = 0$,

$$w_0 \in W_2^3(\Omega), \quad w_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta w_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.7)$$

а w и u – функции из формулировки леммы 4.1. Тогда существует единственное решение $(y, z) \in W^{1,2(1)}(Q) \times W^{1,2(-1)}(Q)$ задачи (4.4)–(4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы и определения (2.12) оператора B следует, что

$$g = f + u - B(w, \psi) \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)).$$

Поэтому для решения z параболической краевой задачи (4.5), (4.6) справедливо включение $z \in W^{1,2(-1)}(Q)$. Следовательно, решение y эллиптической краевой задачи (4.4) принадлежит $L_2(0, T; W_2^3(\Omega))$. Дифференцируя (4.4) по t , получаем, что

$$\partial_t y \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)).$$

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда

$$w \in W^{1,2(1)}(Q)$$

и удовлетворяет соотношениям (2.23), (2.24), (2.25₁).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что $w \equiv y$, где y — функция, построенная в лемме 4.2. Подставим в (4.5₁) $z = \Delta y$ и $g = f + u - B(w, \psi)$, умножим полученное равенство на функцию $q \in W^{1,2(2)}(Q) \cap \Phi_\lambda$, удовлетворяющую условию $q|_{t=T} = 0$, где Φ_λ — пространство (3.10), и проинтегрируем в этом равенстве по частям с учетом (4.4₂), (4.6). В результате получим соотношение:

$$\begin{aligned} \int_Q [y(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q)) + B_1^*(q, \psi)w] dx dt - \int_{Q^\omega} uq dx dt \\ = \int_Q fq dx dt - \int_\Omega w_0(x)\Delta q(x) dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

С другой стороны, выражая в (3.11) L^*p и p через w и u с помощью (3.2), (3.4), получим, используя (3.2):

$$\begin{aligned} - \int_Q [w(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q)) + B_1^*(q, \psi)w] dx dt + \int_{Q^\omega} uq dx dt \\ = - \int_Q fq dx dt + \int_\Omega w_0(x)\Delta q(x) dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Складывая (4.8) и (4.9), получим равенство:

$$\int_Q (y - w)(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q)) dx dt = 0. \quad (4.10)$$

Из (4.10) и леммы 4.4, доказанной ниже, следует что $y \equiv w$.

ЛЕММА 4.4. Для любого $h \in L_2(Q)$ существует единственное решение $q \in W^{1,2(2)}(Q)$ задачи

$$\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q) = h, \quad q|_\Sigma = \Delta q|_\Sigma = 0, \quad q|_{t=T} = 0. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего устанавливается однозначная разрешимость задачи

$$\partial_t \Delta q + \Delta^2 q = f, \quad q|_\Sigma = \Delta q|_\Sigma = 0, \quad q|_{t=T} = 0. \quad (4.12)$$

Для этого достаточно представить (4.12) в виде суперпозиции двух задач

$$\begin{aligned} \Delta q = \varphi, \quad q|_\Sigma = 0; \\ \partial_t \varphi + \Delta \varphi = f, \quad \varphi|_\Sigma = 0, \quad \varphi|_{t=T} = \Delta q|_{t=T} = 0, \end{aligned}$$

и воспользоваться классическими результатами об их разрешимости. Отметим, что разрешающий оператор R задачи (4.12), сопоставляющий правой части f решение q : $Rf = q$, действует непрерывно из $L_2(Q)$ в $W^{1,2(2)}(Q)$. Будем искать решение q задачи (4.11) в виде $q = Rf$. Подставляя эти равенства в (4.11), получим уравнение в $L_2(Q)$ относительно f :

$$f + B_2^*(\psi, Rf) = h. \quad (4.13)$$

В силу (3.6) оператор $B_2^*(\psi, \cdot): W^{1,2(2)}(Q) \rightarrow W^{1,2(-1)}(Q)$ непрерывен, и вследствие компактности вложения $W^{1,2(-1)}(Q) \Subset L_2(Q)$ (см. [10]) оператор $B_2^* \circ R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ вполне непрерывен. Применяя к (4.13) альтернативу Фредгольма и учитывая, что индекс оператора $I + B_2^* \circ R: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ равен нулю, приходим к выводу, что для доказательства однозначной разрешимости задачи (4.11) достаточно доказать единственность ее решения.

Умножая (4.11) с $h = 0$ на q скалярно в $L_2(\Omega)$ и учитывая (3.6), получим после простых преобразований оценку:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla q(t, x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta q|^2 dx \\
& = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 ((\partial_{x_j} \partial_{x_1} q) \partial_{x_2} \psi - (\partial_{x_j} \partial_{x_2} q) \partial_{x_1} \psi \\
& \quad + \partial_{x_1} q (\partial_{x_j} \partial_{x_2} \psi) - \partial_{x_2} q (\partial_{x_j} \partial_{x_1} \psi) \partial_{x_j} q) dx \\
& \leq c \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i} \partial_{x_j} q|^2 \right)^{1/2} |\nabla q| + |\nabla q|^2 \right] dx dt \\
& \leq c \left(\varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i} \partial_{x_j} q|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla q|^2 dx \right). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Так как $q|_{\Sigma} = 0$, то справедлива оценка решения задачи Дирихле для оператора Лапласа:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} |\partial_{x_i} \partial_{x_j} q(x, t)|^2 dx \leq c_1 \int_{\Omega} |\Delta q(x, t)|^2 dx. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в правую часть (4.14) и выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым, перенесем член с Δq из правой части полученного неравенства в левую часть. Тогда, проинтегрировав полученное неравенство по t , будем иметь:

$$\int_{\Omega} |\nabla q(t, x)|^2 dx \leq c \int_t^T \int_{\Omega} |\nabla q(\tau, x)|^2 dx d\tau. \tag{4.16}$$

Применяя к (4.16) лемму Гронвулла, получим, что $q \equiv 0$.

ЛЕММА 4.5. Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда $w \in W^{1,2(2)}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.3 $w \in W^{1,2(1)}(Q)$, и поэтому для g из (4.5) справедливо включение $g \in L_2(Q)$. Следовательно, решения z и y задач (4.5), (4.6) и (4.4) удовлетворяют условиям $z \in W^{1,2(0)}(Q)$, $y \in W^{1,2(2)}(Q)$. В лемме 4.3 доказано, что $y = w$. Поэтому $w \in W^{1,2(2)}(Q)$.

Избавимся теперь от условия (4.3).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in L_2(Q, e^\eta)$, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, $q|_\Sigma = 0$, а w_0 удовлетворяет (4.7). Тогда для функций (w, u) из леммы 4.1 при любом $t \in (0, T)$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\nabla w(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\Delta w(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \\ \leq c(\|\nabla w_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|f\|_{L_2(Q)}^2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\|w\|_{W^{1,2(1)}(Q)}^2 \leq c(\|f\|_{L_2(Q)}^2 + \|w_0\|_{W_2^3(\Omega)}^2), \quad (4.18)$$

где c зависит лишь от $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$. Кроме того, $w \in W^{1,2(2)}(Q)$ и удовлетворяет соотношениям (2.23), (2.24), (2.25₁).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала оценку (4.17) в случае $\psi \in C^\infty(\overline{Q})$. В этом случае справедливо утверждение леммы 4.3. Умножая равенство (2.23) скалярно в $L_2(Q)$ на w и интегрируя по частям с учетом (2.24), (2.25₁) и (2.12), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla w(t, \cdot)\|^2 + \int_0^t \|\Delta w(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \\ \leq \frac{1}{2} \|\nabla w_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|u + f\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\nabla w\| d\tau + \int_0^t \int_\Omega B(\psi, w) w dx d\tau, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(Q)}$. Учитывая (2.12), интегрируя по частям и используя неравенства Коши–Буняковского и Соболева, мы получим:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_\Omega B(\psi, w) w dx dt \right| \\ = \left| \int_0^t \int_\Omega (\partial_{x_1} w \partial_{x_2} \psi - \partial_{x_1} \psi \partial_{x_2} w) \Delta w dx dt \right| \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta w\|^2 dt + \int_0^t \int_\Omega (|\partial_{x_1} w \partial_{x_2} \psi|^2 + |\partial_{x_1} \psi \partial_{x_2} w|^2) dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta w\|^2 dt + \int_0^t \|\nabla \psi\|_{C(\overline{\Omega})}^2 \|\nabla w\|^2 dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta w\|^2 dt + c \int_0^t \|\psi(t)\|_{W_2^4(\Omega)}^2 \|\nabla w\|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в (4.19), получим после простых преобразований неравенство

$$\begin{aligned} \|\nabla w(t, \cdot)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta w(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \\ \leq \|\nabla w_0\|^2 + \int_0^t (\|u(\tau, \cdot)\|^2 + \|f(\tau, \cdot)\|^2) d\tau \\ + c_1 \int_0^t (1 + \|\psi(\tau, \cdot)\|_{W_2^4(\Omega)}^2) \|\nabla w(\tau, \cdot)\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из (4.21) с помощью леммы Гронуолла следует (4.17).

Пусть теперь $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$. Рассмотрим последовательность таких $\psi_k \in C^\infty(\overline{Q})$, что $\psi_k \rightarrow \psi$ в $W^{1,2(2)}(Q)$. Обозначим через p_k обобщенное решение с коэффициентом $\psi = \psi_k$ в определении (2.23) оператора L , а через w_k , u_k — функции, построенные по p_k с помощью (3.2), (3.4). Через p , w , u обозначим аналогичные функции, соответствующие коэффициенту ψ . В силу (4.1) для w_k и u_k справедливо неравенство:

$$\|(T-t)^{-3}e^\eta w_k\|_{L_2(Q)}^2 + \|(T-t)^{1/2}e^\eta u_k\|_{L_2(Q^w)}^2 \leq c, \quad (4.22)$$

где c не зависит от k . Вследствие неравенства (3.9), записанного для p_k , w_k , и (4.22)

$$\|p_k\|_{\Phi_\lambda} \leq c, \quad (4.23)$$

где Φ_λ — пространство (3.10). Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$p_k \rightharpoonup \hat{p} \text{ слабо в } \Phi_\lambda. \quad (4.24)$$

В силу (4.24) в равенстве (3.11) с $p = p_k$, $\psi = \psi_k$ можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ и в результате получить равенство (3.11) для $(\hat{p}, \psi)$. Из единственности обобщенного решения следует, что $\hat{p} = p$. Таким образом:

$$\begin{aligned} p_k \rightharpoonup p \text{ в } \Phi_\lambda, \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L_2(Q, (T-t)^{-3}e^\eta), \\ u_k \rightharpoonup u \text{ в } L_2(Q^w, (T-t)^{1/2}e^\eta). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Но из (4.25), (4.17) следует, что

$$w_k \rightharpoonup w \text{ в } L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \quad \text{и} \quad w|_\Sigma \equiv 0. \quad (4.26)$$

Так как $w \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, то $\partial_{x_j} w \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, $\partial_{x_j} \Delta \psi \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Поэтому из (2.12) выводится, что $B(w, \psi) \in L_2(0, T; W_2^{-\delta}(\Omega))$ при любом $\delta > 0$, и, значит, правая часть g из (4.5) принадлежит $L_2(0, T; W_2^{-\delta}(\Omega))$. Следовательно, решение (y, z) задачи (4.4)–(4.6) принадлежит пространству $W^{1,2(2-\delta)}(Q) \times W^{1,2(-\delta)}(Q)$. Повторяя с очевидным модификациями доказательство леммы 4.3, получим, что $w = y \in W^{1,2(2-\delta)}(Q)$. Возвращаясь к правой части из (4.5) получим, что $g \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, и, значит, $w = y \in W^{1,2(2)}(Q)$ и w удовлетворяет соотношениям (2.23), (2.24), (2.25₁). Приведенные выше рассуждения вместе с оценками решений эллиптической и параболической краевых задач приводят к оценке (4.18).

§ 5. Разрешимость линейной задачи управляемости и оценки решения

Утверждение о разрешимости линейной задачи управляемости (2.23)–(2.25) является простым следствием теоремы 4.1 и леммы 4.1. Действительно, в силу теоремы 4.1 пара (w, u) удовлетворяет (2.23), (2.24), (2.25₁), и мы должны лишь установить справедливость (2.25₂).

Согласно теореме 4.1 и лемме 4.1 $w \in W^{1,2(2)}(Q) \subset C(0, T; L_2(\Omega))$, $w \in L_2(Q, (T-t)^{-3}e^\eta)$, следовательно,

$$\|(T-t)^{-3}e^{\eta(t, \cdot)}w(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c(T-t)^{-1},$$

где $c > 0$ – некоторая константа, откуда легко выводится, что

$$\|w(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c e^{-k/(T-t)} \quad (5.1)$$

с некоторыми положительными $k > 0$, $c > 0$. Из (5.1), очевидно, следует (2.25₂).

Цель этого параграфа – доказать включение $w \in Y(Q)$, где $Y(Q)$ – пространство (2.30). Во всех утверждениях этого параграфа предполагается, что выполнены условия теоремы 4.1, а (w, u) – функции из леммы 4.1.

ЛЕММА 5.1. *Для функции w при любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $t \in (0, T)$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w(t, x)|^2 e^{2\eta(t, x)}}{(T-t)^4} dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \Delta w(t, x)|^2 e^{2\eta(t, x)} dx + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\Omega} \frac{|w|^2}{(T-t)^6} e^{2\eta(t, x)} dx, \\ \int_{\Omega} \frac{|\Delta w(t, x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta(t, x)} dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \Delta w(t, x)|^2 e^{2\eta(t, x)} dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \frac{|w|^2}{(T-t)^6} e^{2\eta(t, x)} dx, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где c не зависит от ε , t , w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получим в силу (2.26) и неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w(t, x)|^2}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx &= - \int_{\Omega} \frac{w(2(\nabla w, \nabla \eta) + \Delta w)}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{(\nabla w^2, \nabla \eta) + w \Delta w}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{w^2(2|\nabla \eta|^2 + \Delta \eta) - w \Delta w}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_1 |\Delta w|^2}{(T-t)^2} + \frac{c|w|^2}{\delta_1 (T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

С помощью аналогичных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|\Delta w(t, x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx &= - \int_{\Omega} \frac{(\nabla \Delta w, \nabla w) + 2\Delta w(\nabla w, \nabla \eta)}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_2}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \frac{|\Delta w|^2}{2(T-t)^2} + \frac{c_1 |\nabla w|^2}{2\delta_2 (T-t)^4} \right) e^{2\eta} dx. \end{aligned}$$

Переносим в левую часть неравенства член с Δw , получим:

$$\int_{\Omega} \frac{|\Delta w(t, x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx \leq \int_{\Omega} \left(\delta_2 |\nabla \Delta w|^2 + \frac{c_1 |\nabla w|^2}{\delta_2 (T-t)^4} \right) e^{2\eta} dx. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в правую часть (5.5) и перенося из левой части полученного неравенства в правую часть член с $|\Delta w|^2$, будем иметь оценку:

$$\int_{\Omega} \frac{|\Delta w(t, x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_2 |\nabla \Delta w|^2}{1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2}} + \frac{c_1 c |w|^2}{\delta_1 \delta_2 (1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2}) (T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \quad (5.6)$$

Взяв в (5.6) $\delta_1 = \delta_2 / (2c_1)$ и затем введя обозначение $\varepsilon = 2\delta_2$, мы получим (5.3).

Подставляя (5.5) в правую часть (5.4) и перенося из правой части полученного неравенства в левую часть член с $|\nabla w|^2$, получим:

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla w(t, x)|^2}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\delta_1 \delta_2}{1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2}} |\nabla \Delta w|^2 + \frac{c |w|^2}{\delta_1 (1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2}) (T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \quad (5.7)$$

Взяв в (5.7) $\delta_2 = 2\delta_1 c_1$, а затем введя обозначение $\varepsilon = 4c_1 \delta_1^2$, получим (5.2).

ЛЕММА 5.2. Для функции w справедливы оценки:

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha w(t, x)|^2 e^{2\eta(t, x)} dx \leq c \int_{\Omega} e^{2\eta(t, x)} \left(|\Delta w(t, x)|^2 + \frac{|w(t, x)|^2}{(T-t)^4} \right) dx, \quad (5.8)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha w(t, x)|^2 e^{2\eta(t, x)} dx \leq c \int_{\Omega} e^{2\eta(t, x)} \left(|\nabla \Delta w(t, x)|^2 + \frac{|w(t, x)|^2}{(T-t)^6} \right) dx, \quad (5.9)$$

где c не зависит от t, w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v = e^\eta w$. В силу (2.24)

$$\Delta v = g, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.10)$$

где

$$g = e^\eta (\Delta w + 2(\nabla \eta, \nabla w) + (|\eta|^2 + \Delta \eta)w). \quad (5.11)$$

Вследствие известных оценок решений эллиптических краевых задач, примененных к (5.10), а также (5.11), (2.26) и неравенства (5.4) с $\delta_1 = 1$, умноженного на $(T-t)^2$, получим:

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha v(t, x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |g|^2 dx \leq c_1 \int_{\Omega} \left(|\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) e^{2\eta} dx. \quad (5.12)$$

В силу формулы Лейбница дифференцирования произведения, (2.26) и (5.4) с $\delta = 1$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha v(t, x)|^2 dx \\ & \geq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} e^{2\eta} |D_x^\alpha w(t, x)|^2 dx - c \int_{\Omega} e^{2\eta} \left(\frac{|\nabla w|^2}{(T-t)^2} + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} e^{2\eta} |D_x^\alpha w(t, x)|^2 dx - c_1 \int_{\Omega} e^{2\eta} \left(|\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из (5.12), (5.13) следует (5.8). Применяя известную оценку к решению v задачи (5.10), аналогично (5.12) выводим:

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha v(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} |D_x^\alpha g|^2 dx \leq c_1 \int_{\Omega} \left(|\nabla \Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx.$$

Аналогично (5.13) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha v(t, x)|^2 dx \\ & \geq \int_{\Omega} e^{2\eta} \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha w(t, x)|^2 dx - c \int_{\Omega} e^{2\eta} \left(|\nabla \Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6} \right) dx. \end{aligned}$$

Из последних двух неравенств следует (5.9).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f \in L_2(Q, e^\eta)$, где $\eta = \eta^\lambda$ и λ — константа из теоремы 3.2, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, w_0 удовлетворяет (4.7). Пусть p — обобщенное решение задачи (3.7), (3.8), (3.3), а w и u определяются по p с помощью соотношений (3.2), (3.4). Тогда $(w, u) \in Y(Q) \times U_\omega(Q)$ являются решением задачи (2.23)–(2.25) и удовлетворяют неравенству:

$$\|w\|_{Y(Q)}^2 + \|u\|_{U_\omega(Q)}^2 \leq c \left(\int_Q e^{2\eta} |f(t, x)|^2 dx dt + \|w_0\|_{W_2^3(\Omega)}^2 \right), \quad (5.14)$$

где $Y(Q)$, $U_\omega(Q)$ — пространства (2.30), (2.31), а c не зависит от w , u , f , w_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (2.23) на $-e^{2\eta} \Delta w$, интегрируя по $Q_\tau = (0, \tau) \times \Omega$, $\tau \in (0, T)$, и проводя простые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau} e^{2\eta} \left(\frac{1}{2} \partial_t (\Delta w)^2 + |\nabla \Delta w|^2 - 2\Delta w (\nabla \Delta w, \nabla \eta) \right) dx dt \\ & = \int_{Q_\tau} (f + u - B(\psi, w) - B(w, \psi)) e^{2\eta} \Delta w dx dt. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Равенство (5.15) преобразуется с учетом (2.26) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau} e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2\eta(\tau, x)} |\Delta w(\tau, x)|^2 dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2\eta(0, x)} |\Delta w_0(x)|^2 dx + \int_{Q_\tau} \left(\frac{c|\Delta w|^2}{(T-t)^2} + \frac{1}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \varepsilon(T-t)^2 \right. \\ & \quad \times (|f|^2 + |u|^2 + |B(\psi, w)|^2 + |B(w, \psi)|^2) + \frac{c_1 |\Delta w|^2}{\varepsilon(T-t)^2} \Big) e^{2\eta} dx dt. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Отбросим второй член из левой части (5.16) и перейдем в полученном неравенстве к пределу при $\tau \rightarrow T$. Переносим член с $|\nabla \Delta w|$ из правой в левую часть полученного неравенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt \leq c \|\Delta w_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_Q \left(\left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon} \right) \frac{|\Delta w|^2}{(T-t)^2} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon(T-t)^2 (|f|^2 + |u|^2 + |B(\psi, w)|^2 + |B(w, \psi)|^2) \right) e^{2\eta} dx dt. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Оценим теперь члены, содержащие оператор B . Учитывая (2.12) и непрерывность вложения $W^{1,2(2)}(Q) \subset C(\overline{Q})$, получим:

$$\begin{aligned} T^2 \varepsilon \int_Q e^{2\eta} |B(\psi, w)|^2 dx dt & \leq \varepsilon \|\nabla \psi\|_{C(\overline{Q})}^2 T^2 \int_Q e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon c T^2 \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 \int_Q e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

В силу (2.12) и теорем вложения имеем также:

$$\begin{aligned} & T^2 \varepsilon \int_Q e^{2\eta} |B(w, \psi)|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon T^2 \int_0^T \int_{\Omega} \|e^\eta \nabla w(t, \cdot)\|_{C(\overline{\Omega})}^2 |\nabla \Delta \psi(t, x)|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon T^2 \|\nabla \Delta \psi\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 \int_Q \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha (e^\eta \nabla w(t, x))|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon T^2 c \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 \\ & \quad \times \int_Q e^{2\eta} \left(\sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha w|^2 + \frac{1}{(T-t)^2} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha w|^2 + \frac{1}{(T-t)^4} |\nabla w|^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Применяя к правой части (5.19) неравенство (5.8), умноженное на $(T-t)^{-2}$, и оценки (5.9), (5.3), получим:

$$\begin{aligned} & T^2 \varepsilon \int_Q e^{2\eta} |B(w, \psi)|^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon T^2 c_1 \|\psi\|_{W^{1,2(1)}(Q)}^2 \int_Q e^{2\eta} \left(|\nabla \Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6} \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Выберем $\varepsilon \in (0, 1)$ столь малым, чтобы коэффициенты в правых частях (5.18), (5.20) удовлетворяли условиям:

$$\varepsilon c T^2 \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 < \frac{1}{8}, \quad \varepsilon T^2 c_1 \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 < \frac{1}{8}. \quad (5.21)$$

Подставляя (5.18), (5.20) в правую часть (5.17), получим, учитывая (5.21), (5.3), (4.1) следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt \\ & \leq c \|\Delta w_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_Q e^{2\eta} \left(\frac{1}{2} |\nabla \Delta w|^2 + |f|^2 + (T-t)|u|^2 \right) dx dt + c \|w_0\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

откуда в силу (4.1) выводится оценка:

$$\int_Q e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx dt \leq c \left(\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \int_Q e^{2\eta} |f|^2 dx dt \right). \quad (5.22)$$

Из (5.9), (5.8), умноженного на $(T-t)^{-2}$, (5.2), (5.3), (5.22) и (4.1) следует неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{2\eta} \left(\sum_{k=0}^3 (T-t)^{2k-6} \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha w|^2 \right) dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q e^{2\eta} |f|^2 dx dt + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

В силу (5.18), (5.20), (5.22), (4.1) из уравнения (2.23) вытекает неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{2\eta} (\partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w - u)^2 dx dt \\ & \leq c \int_Q e^{2\eta} (|f|^2 + |B(\psi, w)|^2 + |B(w, \psi)|^2) dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q e^{2\eta} |f|^2 dx dt + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из (5.23), (5.24), (4.18), (4.1) следует (5.14).

§6. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Сведение задачи (2.11)–(2.14), (2.16) к уравнению $A(x) = z$ из теоремы 2.2 (см. (2.20)) подробно описано ниже формулировки теоремы 2.2. При этом условие (2.18) тривиально выполняется при $x_0 = (0, 0)$, $z_0 = (0, 0)$, непрерывная дифференцируемость отображения (2.17) проверена в предложении 2.1, а совпадение образа отображения (2.19) с пространством Z доказано в теореме 5.1.

Следовательно, все предположения теоремы 2.2 проверены и согласно этой теореме существует решение $(w, u) \in X$ задачи (2.11)–(2.14), (2.16), где X – пространство, определенное в (2.30)–(2.32). Так как в силу (2.30), (2.31) $W^{1,2(2)}(Q) \times \{u \in L_2(Q) : \text{supp } u \subset Q^\omega\} \supset X$, то теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из принадлежности компоненты w решения задачи (2.11)–(2.14), (2.16) пространству (2.30) вытекает следующая оценка для w :

$$\|w(t, \cdot)\|_{W_2^3(\Omega)} \leq c \exp\left\{-\frac{k}{(T-t)}\right\} \quad \text{при } t \rightarrow T. \quad (6.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Помимо разрешимости локальной задачи управляемости, установленной в теореме 2.1, справедливо утверждение о сходимости итераций к решению задачи управляемости со скоростью, характерной для классического метода Ньютона.

Более точно, пусть $(w^1, u^1) \in Y(Q) \times U_\omega(Q)$ – решение линейной задачи (2.23)–(2.25) с $\psi = \widehat{\psi}$, $f \equiv 0$, построенное в теореме 5.1, а $(n+1)$ -приближение (w^{n+1}, u^{n+1}) строится по n -му приближению (w^n, u^n) по формуле $w^{n+1} = w^n + y^n$, где (y^n, u^{n+1}) является решением линейной задачи управляемости:

$$\begin{aligned} L(\widehat{\psi} + w^n)y^n &\equiv \partial_t(-\Delta y^n) + \Delta^2 y^n + B(\widehat{\psi} + w^n, y^n) + B(y^n, \widehat{\psi} + w^n) = u^{n+1} - f^n, \\ y^n|_\Sigma &= \Delta y^n|_\Sigma = 0, \quad y^n|_{t=0} = y^n|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $u^{n+1} = \chi_\omega u^{n+1}$ (χ_ω – функция (1.16)), а f^n определяется по формуле

$$f^n = \partial_t(-\Delta w^n) + \Delta^2 w^n + B(\widehat{\psi} + w^n, w^n) + B(w^n, \widehat{\psi} + w^n).$$

Отметим, что решение (y^n, u^{n+1}) должно строиться методом, описанным в §§ 3–5.

Применяя к указанным итерациям классические оценки абстрактного метода Ньютона (см., например, [9]), с учетом, конечно, оценок, полученных в §5, можно доказать существование такой константы c , зависящей от $\|\widehat{\psi}\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$, что при достаточно малых ε из (2.15) справедливы неравенства:

$$c(\|w - w^1\|_{Y(Q)} + \|u - u^1\|_{U_\omega(Q)}) < 1$$

и

$$\|w - w^{n+1}\|_{Y(Q)} + \|u - u^{n+1}\|_{U_\omega(Q)} \leq c^{-1}(c(\|w - w^1\|_{Y(Q)} + \|u - u^1\|_{U_\omega(Q)}))^{2^n},$$

где (w, u) – решение нелинейной задачи управляемости (2.11)–(2.14).

Для доказательства теорем 1.1 и 1.2 нам понадобится

ЛЕММА 6.1. Пусть для $\widehat{v} \in H^{1,2(1)}(Q)$, $v_0 \in H^2(\Omega)$ выполнены условия (1.11). Тогда существуют функции $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, $\psi_0 \in W_2^3(\Omega)$, связанные, соответственно, с $\widehat{v}$, v_0 соотношениями (2.1). При этом если для $\widehat{v}$, v_0 выполнены условия (1.5), (1.10) и множество Σ_0 связно, то $\widehat{\psi}$, ψ_0 удовлетворяют (2.8) и

$$\widehat{\psi}|_{\Sigma_0} = \Delta \widehat{\psi}|_{\Sigma_0} = 0, \quad \psi_0|_{\Gamma_0} = \Delta \psi_0|_{\Gamma_0} = 0. \quad (6.2)$$

Утверждение леммы легко выводится из известных результатов (см., например, приложение 1 из [10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пусть $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, $\psi_0 \in W_2^3(\Omega)$ – функции, построенные по $\widehat{v}$, v_0 в лемме 6.1 и поэтому удовлетворяющие (2.3), (2.5), (2.7), (2.8) (так как $\Gamma_0 = \partial\Omega$). Выше, из уравнений (1.1), (1.2) для $\widehat{v}$ было выведено уравнение (2.2) для $\widehat{\psi}$ с $u \equiv 0$ и $g = \operatorname{rot} f$. Поэтому для $\widehat{\psi}$ и $w_0 = \widehat{\psi}(0, \cdot) - \psi_0$ выполнены условия теоремы 2.1.

Пусть w – решение задачи (2.11)–(2.14), (2.16), построенное в этой теореме, а ψ определено в (2.10). Очевидно, ψ является решением задачи (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), (2.9). Поэтому $v = (v_1, v_2)$, построенное по ψ в (2.1), является решением задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5), (1.13). При этом неравенство (1.14) следует из (6.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. В силу (1.11) можно построить функции тогда $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, $\psi_0 \in W_2^3(\Omega)$ векторных полей $\widehat{v} \in H^{1,2(1)}(Q)$, $v_0 \in H^2(\Omega)$, причем вследствие (1.5), (1.12) и связности Γ_0 справедливы соотношения (6.2), а ввиду (1.10) справедлива оценка (2.8) для $\psi_0, \widehat{\psi}$.

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условиям

$$\Omega \subset G, \quad \partial G \in C^\infty, \quad \Gamma_0 \subset \partial G, \quad \Gamma_1 \cap \partial G = \emptyset$$

(для построения G нужно расширить Ω через часть границы Γ_1 , оставив Γ_0 частью границы ∂G). Если $\Theta = (0, T) \times G$, $S = (0, T) \times \partial G$, то $\Sigma_0 \subset S$. Очевидно, функции $\psi_0 \in W_2^3(\Omega)$, $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, удовлетворяющие (6.2), могут быть продолжены до функций $\psi_{0,1} \in W_2^3(G)$, $\widehat{\psi}_1 \in W^{1,2(2)}(\Theta)$, для которых

$$\psi_{0,1}|_{\partial G} = \Delta \psi_{0,1}|_{\partial G} = 0, \quad \widehat{\psi}_1|_S = \Delta \widehat{\psi}_1|_S = 0,$$

причем в силу (2.8)

$$\|\psi_{0,1} - \psi_1(0, \cdot)\|_{W^3(G)} < c\varepsilon,$$

где c не зависит от константы ε из (2.8). Подействуем на $\widehat{\psi}_1$ оператором из левой части равенства (2.2) и полученную в результате функцию обозначим через g_1 . Очевидно, $g_1 \in L_2(\Theta)$ и g_1 является продолжением с G на Θ функции g , которая получается при подстановке в левую часть (2.2) функции $\widehat{\psi}$.

Отметим, что функции $\widehat{\psi}_1$ и $w_{0,1} = \psi_{0,1} - \widehat{\psi}(0, \cdot)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1, в которой Ω заменено на G . Выберем $\omega \subset G \setminus \Omega$. Тогда из теоремы 2.1, как указано выше, следует справедливость теоремы 1.2. При этом решение задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5), построенное в теореме 1.2, после сужения $v(t, x)$ с Θ на Q будет удовлетворять всем утверждениям теоремы 1.1, а граничное управление u получается из v с помощью (1.6).

§ 7. Карлемановские оценки

7.1. Цель этого параграфа – доказать теорему 3.1. Для этого сначала выведем карлемановские оценки для уравнений более простых, чем (3.2). Начнем с обратного параболического уравнения

$$\partial_t z(t, x) + \Delta z(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad z|_{\Sigma} = 0, \quad (7.1)$$

где $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$. Пусть $\gamma(t) \in C^\infty(0, T)$ – функция, удовлетворяющая условиям:

$$0 < \gamma(t) \leq 1, \quad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, T_0), \\ T - t, & t \in (T - T_0, T), \end{cases} \quad T_0 = \min\left(\frac{T}{3}, \frac{1}{2}\right). \quad (7.2)$$

Пусть ω – подобласть, компактно вложенная в Ω : $\omega \Subset \Omega$, и ω' – подобласть ω , обладающая свойством: $\omega' \Subset \omega$. В [5] доказана

ЛЕММА 7.1. *Существует функция $\beta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, не имеющая критических точек в $\overline{\Omega} \setminus \omega'$, такая, что*

$$(\nabla\beta(x), \nu(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (7.3)$$

где $\nu(x)$ – векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Так как $\beta(x)$, $x \in \overline{\Omega} \setminus \omega'$, не имеет критических точек, то

$$\min_{x \in \overline{\Omega} \setminus \omega'} |\nabla\beta(x)| > 0. \quad (7.4)$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\beta(x) \geq \ln 3, \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x) > \frac{3}{4} \max_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x). \quad (7.5)$$

Если к функции $\beta(x)$, построенной в лемме 7.1, прибавить достаточно большую константу, то новая функция будет удовлетворять как условиям (7.3), (7.4), так и (7.5).

Введем функции

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)}, \quad \alpha = \alpha^\lambda(t, x) = \frac{e^{\frac{4\lambda}{3}\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}} - e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)}, \quad (7.6)$$

где $\beta(x)$ – функция, удовлетворяющая (7.3)–(7.5), γ – функция (7.2), $\lambda > 0$ – параметр. Справедлива

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть z и f удовлетворяют соотношениям (7.1) и $s \geq -3$.² Тогда при $\lambda > \hat{\lambda}$, где $\hat{\lambda} \geq 1$ достаточно велико, справедлива карлемановская оценка:*

$$\begin{aligned} & \int_Q \varphi^{2s-1} \left[\left(\lambda^{-1} |\partial_t z|^2 + \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i x_j}^2 z|^2 \right) + \lambda \varphi^2 |\nabla z|^2 + \lambda^4 \varphi^4 |z|^2 \right] e^{-2\alpha^\lambda} dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} |f(t, x)|^2 e^{-2\alpha^\lambda(t, x)} dx dt + \int_{Q\omega'} \lambda^4 \varphi^{2s+3} |z(t, x)|^2 e^{-2\alpha^\lambda} dx dt \right), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $Q\omega' = (0, T) \times \omega'$, γ , α^λ – функции (7.2), (7.6), а константа $c > 0$ не зависит от f , z и $\lambda > \hat{\lambda}$.

² Именно такие s нам понадобятся в дальнейшем. Это условие, конечно, можно ослабить, изменив (7.5₁).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в (7.1) замену неизвестной функции:

$$z(t, x) = \varphi^{-s} e^{\alpha} w, \quad (7.8)$$

получим равенства:

$$L_1 w + L_2 w = f_\lambda(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad w|_{\Sigma} = 0, \quad (7.9)$$

где

$$L_1 w = \Delta w + \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 w + (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) w, \quad (7.10)$$

$$L_2 w = \partial_t w - 2\lambda(\varphi + s)(\nabla \beta, \nabla w), \quad (7.11)$$

$$f_\lambda = \varphi^s e^{-\alpha} f + \lambda(\varphi + s)\Delta \beta + (\lambda^2 \varphi(1 - 2s) - s^2 \lambda^2) |\nabla \beta|^2. \quad (7.12)$$

Из (7.8) в силу свойств функции α следуют соотношения:

$$w|_{t=0} = w|_{t=T} = 0. \quad (7.13)$$

Из (7.9) вытекает, что:

$$\|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + 2(L_1 w, L_2 w)_{L_2(Q)} = \|f_\lambda\|_{L_2(Q)}^2. \quad (7.14)$$

В силу (7.10), (7.11) получаем:

$$(L_1 w, L_2 w)_{L_2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3, \quad (7.15)$$

где

$$I_1 = \int_Q (\Delta w + \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 w + (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) w) \partial_t w \, dx \, dt, \quad (7.16)$$

$$I_2 = -2 \int_Q (\lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 + (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma)) w \lambda(\varphi + s)(\nabla \beta, \nabla w) \, dx \, dt, \quad (7.17)$$

$$I_3 = - \int_Q (\Delta w) 2\lambda(\varphi + s)(\nabla \beta, \nabla w) \, dx \, dt. \quad (7.18)$$

Преобразуем интегралы I_1 , I_2 , I_3 . Интегрирование по частям в (7.16) с учетом (7.13), (7.9₂) приводит к равенству:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q \left[-\frac{1}{2} \partial_t |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} \left(\lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 + (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) \right) \partial_t w^2 \right] dx \, dt \\ &= - \int_Q \left(\lambda^2 \varphi \partial_t \varphi |\nabla \beta|^2 + \frac{1}{2} \partial_t ((s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma)) \right) |w|^2 \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Интегрируя по частям по x в (7.17) с учетом (7.6) получим:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_Q (\lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 + (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma)) \lambda(\varphi + s) (\nabla \beta, \nabla w^2) dx dt \\ &= \int_Q \left\{ (3\lambda^4 \varphi^3 + 2\lambda^3 s \varphi^2) |\nabla \beta|^4 + \lambda^3 \varphi^2 (\varphi + s) [(\nabla \beta, \nabla |\nabla \beta|^2) + |\nabla \beta|^2 \Delta \beta] \right. \\ &\quad \left. + (\partial_t \ln \gamma) [\lambda^2 \varphi (\varphi + s) |\nabla \beta|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \varphi (s - \alpha) |\nabla \beta|^2 + \lambda (s - \alpha) (\varphi + s) \Delta \beta] \right\} |w|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Наконец, преобразуем с помощью интегрирования по частям член (7.18):

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_Q (\nabla w, \nabla (2\lambda(\varphi + s) (\nabla \beta, \nabla w))) dx dt + I_{31} \\ &= \int_Q \left[(\nabla w, \nabla \beta)^2 2\lambda^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left[\partial_{x_i x_j}^2 \beta \partial_{x_i} w \partial_{x_j} w + \frac{1}{2} (\nabla \beta, \nabla |\nabla w|^2) \right] 2\lambda(\varphi + s) \right] dx dt + I_{31} \\ &= \int_Q \left[(\nabla w, \nabla \beta)^2 2\lambda^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left[\partial_{x_i x_j}^2 \beta \partial_{x_i} w \partial_{x_j} w - \frac{\Delta \beta}{2} |\nabla w|^2 \right] 2\lambda(\varphi + s) \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 \varphi \right] dx dt + I_{31} + I_{32}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где

$$\begin{aligned} I_{31} &= - \int_{\Sigma} (\nabla w, \nu) 2\lambda(\varphi + s) (\nabla w, \nabla \beta) d\sigma dt \\ I_{32} &= \int_{\Sigma} \lambda(\varphi + s) |\nabla w|^2 (\nabla \beta, \nu) d\sigma dt, \end{aligned}$$

(здесь и ниже предполагается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Так как $w|_{\Sigma} = 0$, а вектор градиента функции совпадает с направлением ее наискорейшего роста, то справедливы равенства:

$$\partial_{x_j} w = \partial_{\nu} w \nu_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

где, напомним, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Поэтому

$$I_{31} + I_{32} = - \int_{\Sigma} (\partial_{\nu} w)^2 (\partial_{\nu} \beta) \lambda(\varphi + s) dx dt \geq 0, \quad (7.22)$$

причем неравенство следует из определения φ из (7.6) и условий (7.5) и $s \geq -3$. Подстановка (7.19)–(7.21) в (7.15) и затем подстановка полученного равенства в (7.14) приводит к соотношению:

$$\begin{aligned} & \|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 \\ & + 2 \int_Q (3\lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 - \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 + 2(\nabla w, \nabla \beta)^2 \lambda^2 \varphi) dx dt + I_{31} + I_{32} \\ & = \|f_\lambda\|_{L_2(Q)}^2 + X_1, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 = 2 \int_Q & \left[\left(\lambda^2 \varphi \partial_t \varphi |\nabla \beta|^2 + \frac{1}{2} \partial_t ((s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma)) - 2\lambda^3 s \varphi^2 |\nabla \beta|^4 \right. \right. \\ & - \lambda^3 \varphi^2 (\varphi + s)(\nabla \beta, \nabla |\nabla \beta|^2) - \lambda^3 \varphi^2 (\varphi + s) |\nabla \beta|^2 \Delta \beta \\ & - \lambda^2 \varphi (\varphi + s)(\partial_t \ln \gamma) |\nabla \beta|^2 - \lambda^2 \varphi (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) |\nabla \beta|^2 \\ & - \lambda(s - \alpha)(\varphi + s)(\partial_t \ln \gamma) \Delta \beta \Big) |w|^2 \\ & \left. + \lambda(\varphi + s)(\Delta \beta |\nabla w|^2 - 2(\partial_{x_i x_j}^2 \beta)(\partial_{x_i} w)(\partial_{x_j} w)) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Оценивая (7.12), получим:

$$\|f_\lambda\|_{L_2(Q)}^2 \leq 3 \int_Q \{ \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 + c(\lambda^2 \varphi^2 |\Delta \beta|^2 + \lambda^4 \varphi^2 |\nabla \beta|^4) |w|^2 \} dx dt. \quad (7.25)$$

Из определений (7.6) функций φ и α и (7.5) следуют неравенства:

$$|\partial_t \varphi| \leq c\varphi^2, \quad |(s + \alpha)(\partial_t \ln \gamma^{-1})| \leq c\varphi^2, \quad |\partial_t ((s - \alpha)\partial_t \ln \gamma)| \leq c\varphi^3, \quad (7.26)$$

где $c > 0$ не зависит от $(t, x) \in \overline{Q}$ и $\lambda > 1$. Оценивая (7.24) с помощью (7.26), будем иметь:

$$|X_1| \leq c \int_Q ((1 + \lambda^3) \varphi^3 |w|^2 + (1 + \lambda \varphi) |\nabla w|^2) dx dt. \quad (7.27)$$

Умножая (7.9) скалярно в $L_2(Q)$ на $\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 w$ и учитывая (7.10), получим с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_Q f_\lambda \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 w dx dt &= \int_Q (L_2 w) w \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 dx dt \\ &+ \int_Q \left[\lambda^4 \varphi^2 \varphi |\nabla \beta|^4 w^2 + \lambda^2 \varphi (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) |\nabla \beta|^2 w^2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} \Delta (\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2) w^2 \right] dx dt. \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде:

$$\int_Q \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 dx dt = \int_Q \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 w^2 dx dt - X_2, \quad (7.28)$$

где

$$X_2 = \int_Q \left[f_\lambda \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 w - (L_2 w) w \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 - \lambda^4 s \varphi^2 |\nabla \beta|^4 w^2 \right. \\ \left. - \lambda^2 \varphi (s - \alpha) (\partial_t \ln \gamma^{-1}) |\nabla \beta|^2 w^2 - \frac{1}{2} (\lambda^2 \varphi (\Delta |\nabla \beta|^2)) w^2 \right. \\ \left. - \frac{\lambda^2}{2} \varphi w^2 (2\lambda (\nabla \beta, \nabla |\nabla \beta|^2) + \lambda^2 |\nabla \beta|^4 + \lambda |\nabla \beta|^2 \Delta \beta) \right] dx dt.$$

Оценим X_2 , учитывая (7.25), (7.26):

$$|X_2| \leq \frac{1}{6} \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + c \int_Q (\varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 + (\lambda^4 \varphi^2 + \lambda^2 \varphi^3 + \lambda^2 (1 + \lambda^2) \varphi) |w|^2) dx dt. \quad (7.29)$$

Проводя оценку в (7.23) с помощью (7.22), (7.25), (7.27), получим:

$$\|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q (6\lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 - 2\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2) dx dt \\ \leq \int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + c \int_Q ((1 + \lambda^4) \varphi^2 + (1 + \lambda^3) \varphi^3) |w|^2 dx dt \\ + \int_Q c_0 (1 + \lambda) \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 dx dt + \int_{Q_{\omega'}} c (1 + \lambda) \varphi |\nabla w|^2 dx dt. \quad (7.30)$$

При этом в предпоследний член правой части неравенства (7.30) мы включили $|\nabla \beta|^2$, что допустимо в силу (7.4). Мы выразим член с $c_0 (1 + \lambda) \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2$ в (7.30) с помощью (7.28) и к полученному неравенству применим (7.29). В результате будем иметь:

$$\|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \left(4 - \frac{c_0 (1 + \lambda)}{\lambda^2} \right) \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 dx dt \\ \leq \left(2 + \frac{c_0 (1 + \lambda)}{\lambda^2} \right) \frac{1}{6} \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \left\{ \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 \left(1 + \left(2 + \frac{c_0 (1 + \lambda)}{\lambda^2} \right) \right) \right. \\ \left. + \left(1 + \left(2 + \frac{c_0 (1 + \lambda)}{\lambda^2} \right) \right) ((1 + \lambda^4) \varphi^2 + (1 + \lambda^3) \varphi^3 + \lambda^2 (1 + \lambda^2) \varphi) \right\} |w|^2 dx dt \\ + c \int_{Q_{\omega'}} c (1 + \lambda) \varphi |\nabla w|^2 dx dt. \quad (7.31)$$

Выберем λ столь большим, чтобы $c_0 (1 + \lambda) / \lambda^2 < 1$. Учитывая, что φ зависит от λ экспоненциально, получим, еще увеличив λ в случае необходимости, что из (7.31) следует неравенство:

$$\|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 dx dt \\ \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q_{\omega'}} (\lambda \varphi |\nabla w|^2 + \lambda^3 \varphi^3 |w|^2) dx dt \right). \quad (7.32)$$

Умножая (7.9) скалярно в $L_2(Q)$ на $\lambda\varphi w$ и проводя выкладки, аналогичные (7.28)–(7.30), получим оценку:

$$\int_Q \lambda\varphi |\nabla w|^2 dx dt \leq \frac{1}{2c} \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + 3 \int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + c_1 \int_Q \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx dt, \quad (7.33)$$

где c_1 – константа из (7.32). В силу (7.4) справедливо равенство:

$$\int_Q \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx dt \leq c_1 \int_Q \lambda^3 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx dt. \quad (7.34)$$

Подставим (7.34) в правую часть (7.33), а полученное неравенство – в правую часть (7.32). В результате, увеличивая в случае необходимости λ , получим:

$$\begin{aligned} \|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 dx dt \\ \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Из (7.35), (7.4) следует оценка:

$$\begin{aligned} \|L_1 w\|_{L_2(Q)}^2 + \|L_2 w\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \\ \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Оценивая правую часть (7.33) с помощью (7.36) будем иметь:

$$\int_Q \lambda\varphi |\nabla w|^2 dx dt \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \quad (7.37)$$

Умножая (7.10) на $(\sqrt{\varphi})^{-1}$ и оценивая с помощью (7.36), получим неравенство:

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi^{-1} |\Delta w|^2 dx dt \leq c \int_Q (\varphi^{-1} |L_1 w|^2 + (\lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 + c\varphi^3) |w|)^2 dx dt \\ \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Аналогично, умножая (7.11) на $(\sqrt{\lambda\varphi})^{-1}$ и оценивая с помощью (7.37), будем иметь:

$$\int_Q (\lambda\varphi)^{-1} |\partial_t w|^2 dx dt \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \quad (7.39)$$

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi^{-1/2} w) = \varphi^{-1/2} \left(\Delta w - \lambda(\nabla \beta, \nabla w) + \left(\frac{\lambda^2}{4} (\nabla \beta)^2 - \frac{\lambda}{2} \Delta \beta \right) w \right), \\ (\varphi^{-1/2} w)|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Применяя к решению $\varphi^{-1/2}w$ эллиптической краевой задачи (7.40) известные оценки, а к правой части полученного неравенства – оценки (7.36)–(7.38), выведем неравенство:

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i x_j}^2 (\varphi^{-1/2}w)|^2 dx dt \leq c \left(\int_Q \gamma^{2s} e^{-2\alpha} f^2 dx dt + \int_{Q_{\omega'}} \lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx dt \right). \quad (7.41)$$

Подставляя в оценки (7.36)–(7.39), (7.41) $w = e^{-\alpha} \varphi^s z$, получим (7.7).

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\Delta p(t, x) = z(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad p|_{\Sigma} = 0. \quad (7.42)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 7.2. *Существует $\hat{\lambda} > 1$ такое, что при любом $\lambda > \hat{\lambda}$ и $s \geq -3$ решение p задачи (7.42) удовлетворяет карлемановской оценке:*

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\varphi^{2s-1} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i x_j}^2 p|^2 + \lambda \varphi^{2s+1} |\nabla p|^2 + \lambda^4 \varphi^{2s+3} |p|^2 \right) e^{-2\alpha^\lambda(t,x)} dx dt \\ & \leq c \left(\int_Q \varphi^{2s} e^{-2\alpha^\lambda} |z(t, x)|^2 dx dt + \int_{Q_{\omega'}} \lambda^4 \varphi^{2s+3} |p(t, x)|^2 e^{-2\alpha^\lambda} dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав в (7.42) замену $p = \varphi^{-s} e^{\alpha} w$, получим равенство (7.9) с

$$L_1 w = \Delta w + \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \beta|^2 w, \quad L_2 w = -2\lambda(\varphi + s)(\nabla \beta, \nabla w) \quad (7.44)$$

и f_λ , определенным в (7.12). Все члены операторов (7.44) являются также членами соответствующих операторов (7.10), (7.11). Поэтому если для членов из (7.44) провести оценки в точности так же, как они проведены для этих членов в доказательстве теоремы 7.1, то мы получим оценку (7.43).

7.2. Рассмотрим теперь в $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, задачу (3.2), (3.3):

$$\partial_t \Delta p(t, x) + \Delta^2 p(t, x) = g - B_2^*(\psi, p) - B_1^*(p, \psi), \quad (7.45)$$

$$p|_{\Sigma} = \Delta p|_{\Sigma} = 0, \quad (7.46)$$

где $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$ – заданная функция, а B_2^* , B_1^* определены равенствами (3.5), (3.6). Основным утверждением этого параграфа является

ТЕОРЕМА 7.3. *Существует $\hat{\lambda} > 0$ такое, что при любом $\lambda > \hat{\lambda}$ для функций p , f , удовлетворяющих (7.45), (7.46), справедлива оценка:*

$$\begin{aligned} J(p) & \equiv \int_Q \left(\varphi^{-7} \left(|\partial_t \Delta p|^2 + \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i x_j}^2 \Delta p|^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \varphi^{-5} |\nabla \Delta p|^2 + \varphi^{-3} |\Delta p|^2 + \sum_{k=0}^4 \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha p|^2 \varphi^{-2k} \right) e^{-2\alpha^\lambda} dx dt \\ & \leq c \int_Q \varphi^{-6} |g|^2 e^{-2\alpha^\lambda} dx dt + \int_{Q_{\omega'}} (1 + \lambda^{13}) \varphi p^2 e^{-2\alpha^\lambda} dx dt. \end{aligned} \quad (7.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим:

$$\Delta p(t, x) = z(t, x), \quad f = g - B_2^*(\psi, p) - B_1^*(p, \psi). \quad (7.48)$$

Тогда в силу (7.45), (7.46) функции z и f удовлетворяют (7.1), и согласно теореме 7.1 справедливо неравенство (7.7) с $s = -3$. Так как p и z удовлетворяют (7.48), (7.46), то вследствие теоремы 7.2 справедлива оценка (7.43) с $s = -3/2$. Из (7.7) с $s = -3$ и (7.43) с $s = -3/2$ следует неравенство:

$$\begin{aligned} J_0(p) &\equiv \int_Q e^{-2\alpha} \left(\varphi^{-7} \left(\lambda^{-1} |\partial_t \Delta p|^2 + \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i x_j}^2 \Delta p|^2 \right) + \lambda \varphi^{-5} |\nabla \Delta p|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda^4 \varphi^{-3} |\Delta p|^2 + \varphi^{-4} \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{x_i x_j}^2 \Delta p|^2 + \lambda \varphi^{-2} |\nabla p|^2 + \lambda^4 |p|^2 \right) dx dt \\ &\leq c \left(\int_Q e^{-2\alpha} (|f|^2 \varphi^{-6} + |\Delta p|^2 \varphi^{-3}) dx dt + \int_{Q^{\omega'}} e^{-2\alpha} (\lambda^4 |p|^2 + \lambda^4 \varphi^{-3} |\Delta p|^2) dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Пусть $\rho(x) \in C_0^\infty(\omega)$, $\rho(x) \equiv 1$ при $x \in \omega'$. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^{-3} |\Delta p|^2 e^{-2\alpha} dx dt \\ &\leq \int_{Q^\omega} \rho \lambda^4 \varphi^{-3} e^{-2\alpha} |\Delta p|^2 dx dt = \int_{Q^\omega} \lambda^4 p \Delta (\rho \varphi^{-3} e^{-2\alpha} \Delta p) dx dt \\ &\leq c \int_{Q^\omega} (\lambda^6 \varphi^{-1} |p \Delta p| + \lambda^5 |p| |\nabla \Delta p| \varphi^{-2} + |p \Delta^2 p| \lambda^4 \varphi^{-3}) e^{-2\alpha} dx dt \\ &\leq c \int_{Q^\omega} e^{-2\alpha} \left[\varepsilon (\lambda^4 \varphi^{-3} |\Delta p|^2 + \lambda \varphi^{-5} |\nabla \Delta p|^2 + \varphi^{-7} |\Delta^2 p|^2) + \frac{1}{\varepsilon} (\lambda^8 + \lambda^9) \varphi p^2 \right] dx dt. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Подставляя (7.50) в правую часть неравенства (7.49), выбирая в полученном неравенстве достаточно малое ε и увеличивая в случае необходимости λ , выведем следующую оценку:

$$J_0(p) \leq c \left(\int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} |f|^2 dx dt + \int_{Q^\omega} e^{-2\alpha} \varphi \lambda^9 p^2 dx dt \right), \quad (7.51)$$

где величина J_0 определена в (7.49).

Для оценки членов последней суммы из левой части неравенства (7.47) запишем тождества:

$$\Delta(\varphi^{-3} e^{-\alpha} p) = f_1, \quad (\varphi^{-3} e^{-\alpha} p)|_\Sigma = 0, \quad (7.52)$$

где

$$f_1 = \varphi^{-3} e^{-\alpha} \Delta p + 2(\nabla(\varphi^{-3} e^{-\alpha}), \nabla p) + \Delta(\varphi^{-3} e^{-\alpha}) p. \quad (7.53)$$

Применяя к решению задачи Дирихле (7.52) соответствующую оценку, получим, учитывая (7.53):

$$\int_Q \sum_{|\alpha|=3} |D_x^\alpha (\varphi^{-3} e^{-\alpha} p)|^2 dx dt \leq c \|f_1\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}^2 \leq c \lambda J_0(p). \quad (7.54)$$

После применения к левой части (7.54) правила Лейбница дифференцирования произведения функций и простых оценок, из (7.54) выводится неравенство:

$$\int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} \sum_{|\alpha|=3} |D_x^\alpha p|^2 dx dt \leq c \lambda^2 J_0(p). \quad (7.55)$$

Точно так же, подставляя в (7.52) φ^{-4} вместо φ^{-3} , а в (7.54) суммируя по $|\alpha| = 4$ вместо $|\alpha| = 3$, получим оценку:

$$\int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-8} \sum_{|\alpha|=4} |D_x^\alpha p|^2 dx dt \leq c \lambda^4 J_0(p). \quad (7.56)$$

Из оценок (7.51), (7.55), (7.56) для функционала $J_0(p)$, определенного в (7.49), следует неравенство:

$$J(p) \leq c \left(\int_Q e^{-2\alpha} (1 + \lambda^4) \varphi^{-6} |f|^2 dx dt + \int_{Q^\omega} e^{-2\alpha} (1 + \lambda^{13}) \varphi p^2 dx dt \right), \quad (7.57)$$

где c зависит от λ .

Оценим теперь член $B_2^* + B_1^*$, входящий в определение f из (7.48). Дифференцируя произведение в (3.5), (3.6) и приводя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} B_1^*(p, \psi) + B_2^*(\psi, p) &= (\partial_{x_1} \Delta p) \partial_{x_2} \psi - (\partial_{x_2} \Delta p) \partial_{x_1} \psi \\ &\quad + 2((\nabla \partial_{x_1} p)(\nabla \partial_{x_2} \psi) - (\nabla \partial_{x_2} p)(\nabla \partial_{x_1} \psi)). \end{aligned} \quad (7.58)$$

В силу теорем вложения

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} (1 + \lambda^4) |\nabla \Delta p|^2 |\nabla \psi|^2 dx dt \\ &\leq c \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)} \int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} (1 + \lambda^4) |\nabla \Delta p|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Опять используя теоремы вложения, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} (1 + \lambda^4) |\partial_{x_i x_j}^2 p|^2 |\partial_{x_i x_k}^2 \psi|^2 dx dt \\ &\leq (1 + \lambda^4) \int_0^T \|e^{-\alpha} \varphi^{-3} \partial_{x_i x_j}^2 p\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\partial_{x_i x_k}^2 \psi\|_{L_4(\Omega)}^2 dt \\ &\leq c(1 + \lambda^4) \|\psi\|_{L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))}^2 \int_0^T \|e^{-\alpha} \varphi^{-3} \partial_{x_i x_j}^2 p\|_{W_2^1(\Omega)} \|e^{-\alpha} \varphi^{-3} \partial_{x_i x_j}^2 p\|_{L_2(\Omega)} dt \\ &\leq c(1 + \lambda^4) \|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}^2 \left(\varepsilon \lambda \int_Q e^{-2\alpha} \sum_{k=2}^3 \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha p|^2 \varphi^{-2k} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q e^{-2\alpha} \varphi^{-6} |\partial_{x_i x_j}^2 p|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (7.60)$$

Подставляя в правую часть (7.57) выражение из (7.48) для f и затем, используя (7.58) и оценки (7.59), (7.60), получим неравенство:

$$J(p) \leq c \left(\int_Q e^{-2\alpha}(1 + \lambda^4) \left(\varphi^{-6} |g|^2 + c_1 \varepsilon \lambda \sum_{k=2}^3 \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha p|^2 \varphi^{-2k} + \frac{c_1}{\varepsilon} \varphi^{-6} \sum_{|\alpha|=2} |D_x^\alpha p|^2 \right) dx dt + \int_{Q^\omega} e^{-2\alpha}(1 + \lambda^{13}) \varphi p^2 dx dt \right). \quad (7.61)$$

Взяв в (7.61) ε достаточно малым, получим, учитывая определение (7.47) функционала J :

$$J(p) \leq c_2 \left(\int_Q e^{-2\alpha}(1 + \lambda^4) \left(\varphi^{-6} |g|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon} \varphi^{-6} \sum_{|\alpha|=2} |D_x^\alpha p|^2 \right) dx dt + \int_{Q^\omega} e^{-2\alpha}(1 + \lambda^{13}) \varphi p^2 dx dt \right). \quad (7.62)$$

Учитывая (7.47) и определение (7.6) функции φ и увеличивая, если нужно, λ в (7.62), выведем из (7.62) неравенство (7.47).

Для задачи (7.45), (7.46) поставим начальное условие при $t_0 \in (0, T)$:

$$p|_{t=t_0} = p_0, \quad (7.63)$$

где $p_0 \in W_2^3(\Omega)$ удовлетворяет условиям согласования

$$p_0|_{\partial\Omega} = \Delta p_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.64)$$

и рассмотрим задачу (7.45), (7.46), (7.63) при $(t, x) \in (0, t_0) \times \Omega$.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, $g \in L_2(Q)$, $p_0 \in W_2^3(\Omega)$ и удовлетворяет (7.64). Тогда задача (7.45), (7.46), (7.63) имеет единственное решение $p \in W^{1,2(2)}((0, t_0) \times \Omega)$. При этом справедлива оценка:

$$\|p\|_{W^{1,2(2)}((0, t_0) \times \Omega)}^2 \leq c (\|p_0\|_{W_2^3(\Omega)}^2 + \|g\|_{L_2((0, t_0) \times \Omega)}^2), \quad (7.65)$$

где константа c не зависит от p_0 и g .

Лемма 7.2 доказывается аналогично лемме 4.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Обозначим через $R(p)e^{-2\eta^\lambda}$ подынтегральное выражение в левой части неравенства (3.9):

$$I_\lambda(p) \equiv \int_Q R(p)(t, x) e^{-2\eta^\lambda(t, x)} dt dx, \quad (7.66)$$

где $I_\lambda(p)$ определено в (3.9). Пусть T_0 – число, заданное в (7.2). При $t \in (0, T - T_0)$ функции $(T - t)$ и η^λ из (2.26) ограничены сверху и снизу положительными константами, зависящими лишь от λ . Поэтому в силу (3.2), (3.3) и оценки (7.65)

$$\begin{aligned} I_\lambda(p) &\leq c_1 \left(\int_{T-T_0}^T \int_\Omega R(p)(t, x) e^{-2\eta^\lambda(t, x)} dt dx + \|p\|_{W^{1,2(2)}((0, T-T_0) \times \Omega)}^2 \right) \\ &\leq c_1 \int_{T-T_0}^T \int_\Omega R(p)(t, x) e^{-2\eta^\lambda(t, x)} dt dx \\ &\quad + c(\|p(T - T_0, \cdot)\|_{W_2^3(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_2((0, T-T_0) \times \Omega)}^2). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Обозначим подынтегральное выражение в левой части неравенства (7.47) через $R_1(p)e^{-2\alpha^\lambda}$:

$$J(p) = \int_Q R_1(p)(t, x) e^{-2\alpha^\lambda(t, x)} dx dt, \quad (7.68)$$

где $J(p)$ определено в (7.47). Из (7.64) и оценок решений задачи Дирихле для оператора Лапласа следует неравенство:

$$\|p_0\|_{W_2^3(\Omega)}^2 \leq c \|\Delta p_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2.$$

Из этой оценки, теоремы о следах и определения (7.68) функции R_1 имеем:

$$\begin{aligned} \|p(T - T_0, \cdot)\|_{W_2^3(\Omega)}^2 &\leq c_1 \|p\|_{W^{1,2(2)}((T-T_0-\varepsilon, T-T_0) \times \Omega)}^2 \\ &\leq c_2 \int_0^{T-T_0} \int_\Omega R_1(p)(t, x) e^{-2\alpha^\lambda(t, x)} dx dt. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Из (7.67), (7.69), сравнивая определения (2.26), (7.6) функций η и α , а также определения (7.66), (7.68) функций $R(p)$ и $R_1(p)$, получаем:

$$I_\lambda(p) \leq c(J(p) + \|w\|_{L_2((0, T-T_0) \times \Omega)}^2). \quad (7.70)$$

Применяя к правой части (7.70) оценку (7.47), в которой в силу (7.45), (3.2) g заменено на $-e^{2\eta^\lambda(t, x)} w / (T - t)^6$, получим оценку (3.9).

Список литературы

1. *Lions J.-L.* Are there connections between turbulence and controllability? // 9^e Conférence internationale de l'INRIA. Antibes. 12–15 juin 1990.
2. *Fursikov A. V., Ivanov O. Yu.* On controllability of certain systems simulating a fluid flow // Flow Control. IMA Vol. Math. Appl. / ed. M.D. Gunzburger. V. 68. New-York: Springer-Verlag, 1995. P. 149–184.
3. *Fursikov A. V., Ivanov O. Yu.* On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier–Stokes equations // Acta Appl. Math. 1994. V. 37. P. 67–76.
4. *Fursikov A. V.* Exact boundary zero controllability of three dimensional Navier–Stokes equations // J. Dynam. Control Syst. 1995. V. 1. №3. P. 325–350.
5. *Эмануилов О. Ю.* Граничная управляемость параболических уравнений // Матем. сб. 1995. Т. 186. №6. С. 109–132.
6. *Coron J.-M.* Contrôlabilité exacte frontiere de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1993. V. 317. P. 271–276.
7. *Лионс Ж.-Л., Маженес Э.* Неоднородные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
8. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
9. *Батталов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
10. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
11. *Эмануилов О. Ю.* Точная управляемость полулинейными параболическими уравнениями // Вестник Российского Ун-та Дружбы Народов. Сер. матем. 1994. №1. С. 109–116.
12. *Эмануилов О. Ю.* Граничная управляемость параболическими уравнениями // УМН. 1993. Т. 48. №3. С. 211–212.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.03.1996