Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Шишков, Распространение возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 9, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:02:24

УДК 517.9

А. Е. Шишков

Распространение возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений

Изучается задача Коши для широкого класса квазилинейных дивергентных “дважды вырождающихся” параболических уравнений произвольного порядка, содержащего, в частности, уравнения нестационарной ньютоновской и неньютоновской фильтрации. Установлена конечность скорости изменения носителей обобщенных решений при любых начальных функциях, имеющих минимальную с точки зрения теории разрешимости локальную регулярность. Получены оценки сверху этой скорости, точные как при больших, так и при малых значениях времени.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

В работе изучаются некоторые качественные свойства обобщенных решений следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) + Au \equiv \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_x^\alpha a_\alpha(x, t, u, \dots, \nabla_x^m u) = 0; \quad (1.1)$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad n \geq 1, \quad m \geq 1, \quad q > 0;$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.2)$$

Здесь каратеодориевы функции $a_\alpha(x, t, \xi)$ удовлетворяют следующим естественным условиям коэрцитивности и роста:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi) \xi_\alpha \geq d_0 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^{p+1} \quad \forall (x, t, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (0, T) \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad (1.3)$$

$$d_0 > 0, \quad T < \infty, \quad p > q;$$

$$|a_\alpha(x, t, \xi)| \leq d_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p \quad \forall (x, t, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (0, T) \times \mathbb{R}^{N(m)}, \quad d_1 < \infty, \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № И97200) и Государственного фонда фундаментальных исследований при ГКНТ Украины (проект № 1.1.3/76).

где $N(m)$ – число различных мультииндексов длины не большей, чем m . В общей ситуации уравнение (1.1) в принятой терминологии является дважды вырождающимся дивергентным параболическим уравнением. Охватываемый выражением (1.1) класс уравнений является достаточно широким. При $m = 1$ этот класс включает в себя, в частности, уравнения нестационарной ньютоновской и неньютоновской фильтрации. Хорошо известным свойством уравнений типа (1.1) является конечность скорости изменения носителей их решений. Важным классом явных решений с ограниченными носителями в случае:

$$m = 1, \quad Au = \Delta_p u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla_x u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

является класс решений Г. И. Баренблатта:

$$U(x, t) = t^{-\frac{n\beta_1}{q}} \left(c - b \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p+1}{p}}}{t^{\frac{\beta_1(p+1)}{p}}} \right)_+^{\frac{p}{p-q}}, \quad 0 < q < p, \quad (1.5)$$

где $\forall c > 0$, $b = \beta_1^{\frac{1}{p}} \frac{(p-q)}{(p+1)}$, $\beta_1 = \frac{q}{(p+1) + n(p-q)}$, $(h)_+ \equiv \max\{0, h\}$. При различных значениях параметров $n, p > q > 0$ эти решения были найдены в работах [1], [3]. Первые общие результаты о конечности скорости изменения носителей решений уравнений типа нестационарной фильтрации были установлены в работах О. А. Олейник, А. С. Калашникова, Чжоу Юй-Линя [4], А. С. Калашникова [5], [6]. В дальнейшем многими авторами устанавливались оценки скорости распространения носителей решений различных классов уравнений типа (1.1) второго порядка (см., например, [7]–[13]). Для уравнений вида (1.1) произвольного порядка ($m > 1$) конечность скорости движения границы носителя решения и ее оценки были впервые получены Ф. Бернисом [14] на основе доказанных им весовых интерполяционных неравенств Ниренберга–Гальярдо. Другой способ, основанный на получении для решений интегральных априорных оценок типа принципа Сен-Венана в теории упругости [15] и прямом вычислении перетоков “энергии”, связанной с рассматриваемым решением, был предложен в работах [16], [17].

Отметим, что во всех упоминавшихся выше работах речь шла либо об обычных, либо об обобщенных решениях с конечной энергией, что соответствует принадлежности начальных функций соответствующих задач Коши (либо смешанных задач) пространству $L_{q+1, \text{loc}}(\Omega)$. С другой стороны, развивающийся в последние десятилетия подход к нелинейным эволюционным уравнениям, основанный на теории L_1 -полугрупп (см. [18]–[20]), позволяет говорить о пространстве $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$ как естественном пространстве начальных данных для задачи Коши (1.1), (1.2) (по крайней мере, в случае $m = 1$). В настоящей работе и изучается эволюция носителей решений задачи Коши (1.1), (1.2) с $u_0(x) \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Для всех $t > 0$ устанавливаются точные оценки сверху носителя, зависящие кроме известных параметров уравнения (1.1) лишь от L_q -нормы начальной функции.

§ 2. Формулировки основных результатов

Вначале устанавливаются некоторые оценки эволюции носителей энергетических обобщенных решений задачи (1.1), (1.2). Введем пространство функций

$$W \equiv W_{p+1}^m(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1}(\mathbb{R}^n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Энергетическим обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ называется функция

$$u(x, t) \in L_{p+1}(0, T; W),$$

удовлетворяющая равенству (1.1) в смысле распределений из $D'((0, T) \times \mathbb{R}^n)$, а также начальному условию (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как в силу условий (1.3), (1.4) $Au \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W^*)$, то в силу (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W^*).$$

Кроме того, очевидно, что $|u|^{q-1}u \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W^*)$. Из этих включений, как показано в [14], следует, что

$$u(x, t) \in C([0, T]; L_{q+1}(\mathbb{R}^n))$$

в слабом смысле. Тем самым понятен смысл удовлетворения решением $u(x, t)$ начального условия (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из включений замечания 1, как показано в [14], [21], следует справедливость следующего равенства

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u), \eta(x)u \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) [|u(x, t_2)|^{q+1} - |u(x, t_1)|^{q+1}] dx \times \frac{q}{q+1} \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T], \quad t_1 < t_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\eta(x) \geq 0$ — произвольная функция из пространства $W_\infty^m(\mathbb{R}^n)$, через $(\cdot, \cdot)$ обозначено спаривание элементов пространств W^* и W . Из (2.1), следует, в частности, что функция $h(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) |u(x, t)|^{q+1} dx$ абсолютно непрерывна и для почти всех $t \in (0, T)$

$$\frac{q}{q+1} \times \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) |u(x, t)|^{q+1} dx \right) = \left(\frac{d}{dt}(|u(x, t)|^{q-1}u(x, t)), \eta u \right). \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы не занимаемся исследованием разрешимости задачи (1.1), (1.2) и в общей ситуации она нам неизвестна. При $q = 1$ полная теория разрешимости этой задачи имеется в [22]. При $q \neq 1$ и некоторых дополнительных ограничениях на структуру оператора A из (1.1) существование энергетического обобщенного решения доказано в [21].

Вычислим теперь значение функционала из левой части равенства (1.1) на элементе $u(x, t)\eta(x) \in W$ для почти всех $t \in (0, T)$. В силу соотношения (2.2) получаем основное тождество:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) |u(x, t)|^{q+1} dx \right) \\ + \frac{q+1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, \dots, \nabla_x^m u) D_x^\alpha(u\eta) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

для почти всех $t \in (0, T)$. Умножим теперь равенство (2.3) на произвольную функцию $\varphi(t) \in C^1(0, T)$ и проинтегрируем его по t , в результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi(T) \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) |u(x, T)|^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} \varphi'(t) \eta(x) |u(x, t)|^{q+1} dx dt - \varphi(0) \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) |u_0(x)|^{q+1} dx + \frac{q+1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, \dots, \nabla_x^m u) D_x^\alpha(u\eta \cdot \varphi) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x, t)$ – произвольное энергетическое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n) \cap L_q(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\text{supp } u_0(x) \subset \{x : x_n \leq 0\}. \quad (2.5)$$

Предположим, что решение $u(x, t) \in L_\infty(0, T; L_q(\mathbb{R}^n))$ и для него имеет место априорная оценка:

$$\|u(x, t)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq d \|u_0\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \equiv dK \quad \forall t > 0, \quad (2.6)$$

где $d < \infty$ не зависит от t . Тогда имеет место следующая оценка носителя решения $u(x, t)$ для всех $t > 0$:

$$\begin{aligned} f(t) \equiv \sup \{x_n : \exists x = (x', x_n) \in \text{supp } u(x, t)\} \leq cK^{\omega(p-q)} t^\omega, \\ \omega = \frac{q}{mq(p+1) + n(p-q)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь постоянная $c < \infty$ зависит только от известных параметров уравнения (1.1) и не зависит от $u_0(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Точность сомножителя t^ω в оценке (2.7) при $t \rightarrow \infty$ была показана при $m = n = p = 1$ в работе [23], при $m = p = 1$ – [24], при $m = n = q = 1$ – [25], при $m > 1$ – в работе [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Исходя из определения 1 легко проверить, что для произвольного энергетического решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q-1} u(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^{q-1} u_0(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^q dx \equiv K^q \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (2.6^*)$$

Кроме того, при $m = 1$ просто проверяется, что уравнение (1.1) удовлетворяет следующему слабому принципу максимума: любое энергетическое решение задачи (1.1), (1.2) с знакоопределенной начальной функцией является знакоопределенным для всех $(t, x) \in \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}^n$. Отсюда в силу (2.6*) следует справедливость оценки (2.6) для произвольного решения рассматриваемой задачи при $m = 1$ и произвольной знакоопределенной $u_0(x) \in L_{q+1}(\mathbb{R}^n) \cap L_q(\mathbb{R}^n)$. При $m = 1, q = 1$, в случае, если функции $a_i(x, t, \xi)$ удовлетворяют естественному условию монотонности по ξ , для уравнения (1.1) справедлив обычный интегральный принцип максимума. Отсюда при помощи стандартных вычислений вытекает справедливость оценки (2.6) для указанного класса уравнений при произвольной $u_0(x) \in L_q(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$. При $m > 1$ в достаточно общих ситуациях оценка (2.6) неизвестна, но в некоторых специальных случаях она доказана (см. [14]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что задача Коши (1.1), (1.2) *сингулярна*, если

$$u_0(x) \in L_q(\mathbb{R}^n), \quad u_0(x) \notin L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Обобщенным решением сингулярной задачи Коши* для уравнения (1.1) называется функция

$$u(x, t) \in L_\infty(0, T; L_q(\mathbb{R}^n)) \cap L_p(0, T; W_p^m(\mathbb{R}^n)),$$

удовлетворяющая интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} \left[|u(x, t)|^{q-1} u(x, t) \varphi'_t(t, x) - \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, u, \dots, \nabla_x^m u) D_x^\alpha \varphi(t, x) \right] dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) |u_0(x)|^{q-1} \varphi(0, x) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

для произвольной пробной функции

$$\varphi(t, x) \in W_\infty^1(0, T; L_\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L_\infty(0, T; W_\infty^m(\mathbb{R}^n)), \quad \varphi(T, x) = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x, t)$ – обобщенное решение сингулярной задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условию (2.5). Пусть уравнение (1.1) обладает следующим свойством: если $u_0^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \dots$, – последовательность функций из пространства $L_q(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\|u_0^{(j)} - u_0\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то соответствующая им последовательность энергетических решений $u^{(j)}(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ в пространстве распределений $D'((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ и для всех этих решений $u^{(j)}(x, t)$ равномерно по j выполняется априорная оценка (2.6). Тогда для всех $t > 0$ носитель решения $u(x, t)$ изменяется с конечной скоростью и справедлива оценка (2.7) для размеров этого носителя.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В общей ситуации теорема 2 носит условный характер. Но для различных классов уравнений второго порядка ($m = 1$) в условиях применимости теории L_1 -полугрупп, эта теорема является безусловной. Такая ситуация имеет место при $q = 1$ и некоторых дополнительных условиях гладкости для функций $a_i(x, t, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, образующих уравнение (1.1) (см. [19], [20], [26], [27]). Другим важным классом уравнений, для которого решения сингулярной задачи Коши с неотрицательными начальными данными получены как предел энергетических решений, являются уравнения типа нестационарной неьютоновской фильтрации ($p = 1$) (см. [18], [28]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u(x, t)$ – обобщенное решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j,i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u^m}{\partial x_j} \right) = 0, \quad m > 1; \quad (2.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^n); \quad u_0(x) \geq 0; \quad \text{supp } u_0(x) \subset \{x : x_n \leq 0\}, \quad (2.10)$$

где $a_{i,j}(x, t) \in C^1((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям:

$$a_1|\xi|^2 \geq a_{i,j}(x, t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad a_1 < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

Тогда для $\text{supp } u(x, t)$ имеет место оценка:

$$f(t) - f(0) \leq cK^{\frac{m-1}{2+n(m-1)}} \cdot t^{\frac{1}{2+n(m-1)}} \quad \forall t > 0, \quad K = \|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.12)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $u(x, t)$ – обобщенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x, t) |\nabla_x u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad p > 1, \quad (2.13)$$

удовлетворяющее начальному условию (2.10), где функции $a_{i,j}(x, t) \in C^1((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (2.11). Тогда имеет место следующая оценка для носителя $u(x, t)$

$$f(t) - f(0) \leq cK^{\frac{p-1}{(p+1)+n(p-1)}} \cdot t^{\frac{1}{p+1+n(p-1)}} \quad \forall t > 0. \quad (2.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При $a_{i,j}(x, t) = \delta_i^j$ задачи (2.9), (2.10) и (2.13), (2.10), как показано в [26], [28], имеют единственное обобщенное решение $u(x, t)$ для произвольной $u_0(x) \in M \equiv \{v \in (C(\mathbb{R}^n))^* : v \geq 0 \text{ в смысле обобщенных функций}\}$ (M – множество σ -конечных борелевских мер на $\mathbb{R}^n$). Причем это решение может быть аппроксимировано в $D'((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ энергетическими решениями $u^{(j)}(x, t)$ соответствующих задач Коши с $u_0^{(j)}(x) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$: $u_0^{(j)}(x) \geq 0$, $\text{supp } u_0^{(j)}(x) \subset \{x : x_n \leq 0\} \forall j \in \mathbb{N}$; $\|u_0^{(j)}(x)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq 2K_1 \equiv 2\|u_0\|_{(C(\mathbb{R}^n))^*}$; $u_0^{(j)}(x) \rightarrow u_0$ при $j \rightarrow \infty$ слабо в пространстве $(C(\mathbb{R}^n))^*$.

Поэтому в силу теорем 1, 2 для носителей решений указанных задач справедливы, соответственно, оценки (2.12) и (2.14) с постоянной K_1 вместо K .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. При $q = 1$ баренблаттовское решение $U(x, t)$ из (1.5) является решением задачи Коши для уравнения (2.13) при $a_{i,j} = \delta_i^j$ с начальной функцией $u_0(x) = c_0 \delta(x)$, $0 < c_0 < \infty$. Указанное уравнение инвариантно в $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ относительно двухпараметрической группы преобразований:

$$\tilde{u}(x, t) = S^{\frac{1}{p-1}} L^{-\frac{p}{p-1}} u(Lx, St), \quad S, L > 0.$$

Поэтому, выписывая для указанного уравнения явное решение задачи Коши с

$$u_0(x) = c_0 K_1 \delta(x) \quad \forall K_1 > 0,$$

получаем следующую точную формулу для размеров носителя этого решения:

$$f(t) - f(0) = c_1 K_1^{\frac{p-1}{(p+1)+n(p-1)}} t^{\frac{1}{p+1+n(p-1)}} \quad \forall t > 0.$$

Следовательно, можно говорить о точности оценок из теорем 1, 2 как по $t > 0$, так и по $\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \equiv K$.

§ 3. Доказательство основных утверждений

Проведем некоторые предварительные построения и введем необходимые обозначения. Введем семейства неограниченных областей:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > s\} \quad \forall s < \infty, \\ K(s, \delta) &= \Omega(s) \setminus \Omega(s + \delta) \quad \forall s < \infty, \quad \forall \delta : 0 < \delta < \infty, \\ G_T(s) &= \Omega(s) \times (0, T); \quad Q_T(s, \delta) = G_T(s) \setminus G_T(s + \delta). \end{aligned}$$

Мы будем использовать интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо, имеющее в случае области $K(s, \delta)$ вид:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j v\|_{\alpha, K(s, \delta)} &\leq d_3 \delta^{-n(\frac{j}{n} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha})} \|v\|_{\gamma, K(s, \delta)} + d_2 \|\nabla_x^m v\|_{\beta, K(s, \delta)}^\theta \|v\|_{\gamma, K(s, \delta)}^{1-\theta}, \\ d_3 &< \infty, \quad d_2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $v(x)$ – произвольная функция из пространства

$$W_\beta^m(K(s, \delta)) \cap L_\gamma(K(s, \delta)), \quad \|v\|_{\alpha, B}^\alpha \equiv \int_B |v(x)|^\alpha dx,$$

$\gamma > 0, \alpha > 1, \beta > 1$; постоянная $\theta \in [j/m, 1]$ такова, что

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{j}{n} = \theta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{\gamma};$$

постоянные d_3, d_2 не зависят от $s, \delta, v(x)$. Отметим еще, что при $\delta \rightarrow \infty$ неравенство (3.1) переходит в

$$\|\nabla^j v\|_{\alpha, \Omega(s)} \leq d_2 \|\nabla_x^m v\|_{\beta, \Omega(s)}^\theta \|v\|_{\gamma, \Omega(s)}^{1-\theta} \quad \forall v(x) \in W_\beta^m(\Omega(s)) \cap L_\gamma(\Omega(s)). \quad (3.2)$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1, которое разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x, t)$ – произвольное решение задачи (1.1), (1.2) из условия теоремы 1. Тогда для произвольного $t > 0$ имеет место априорная оценка:

$$R(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{1+q} dx \leq c K^{\frac{M}{N}} t^{-\frac{n}{N}}, \quad (3.3)$$

$$M = (q+1)mq(p+1) + nq(p-q), \quad N = mq(p+1) + n(p-q).$$

Здесь и в дальнейшем через c обозначаются различные постоянные, зависящие лишь от известных параметров уравнения (1.1) (и не зависящие, в частности, от $u_0(x)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.3) при $\eta = 1$ с учетом условия коэрцитивности (1.3) получаем

$$\frac{d}{dt} R(t) + \frac{q+1}{q} d_0 \|\nabla_x^m u(x, t)\|_{L_{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1} \leq 0 \quad (3.4)$$

для почти всех $t \in (0, T)$. Интерполяционное неравенство (3.2) при $s = -\infty$, $\alpha = 1+q, \beta = p+1, \gamma = q, j = 0$ дает:

$$R(t) \leq d_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\frac{(1+q)\theta}{p+1}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right)^{\frac{(1+q)(1-\theta)}{q}},$$

$$\theta = \frac{n(p+1)}{(q+1)[mq(p+1) + n(p+1-q)]}.$$

Оценивая последний сомножитель справа в соответствии с предположением (2.6) и подставляя получившуюся оценку в неравенство (3.4), приходим к

$$\frac{d}{dt} R(t) + \frac{q+1}{q} d_0 d_2^{-\frac{p+1}{(q+1)\theta}} d^{-\frac{(p+1)(1-q)}{\theta}} K^{-\frac{(1-\theta)(p+1)}{\theta}} R(t)^{\frac{p+1}{(q+1)\theta}} \leq 0.$$

Разделим это неравенство на $R(t)^{\frac{p+1}{(q+1)\theta}}$ и проинтегрируем по t в пределах (t_1, t) . Используя тот факт, что

$$\frac{p+1}{(q+1)\theta} = 1 + p - q + \frac{mq(p+1)}{n} > 1,$$

после простых вычислений, переходя к пределу при $t_1 \rightarrow 0$, получаем оценку (3.3) с

$$c = \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \left(\frac{q+1}{q}d_0\right)^{-\frac{n}{N}} d^{\frac{M}{N}} d_2^{\frac{mq(p+1)+n(p+1-q)}{N}} < \infty.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 1 для решения $u(x, t)$ справедлива следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{1+q} dx + \int_{G_T(s+\delta)} (T^{-1}|u|^{1+q} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) dx dt \\ & \leq \tilde{c} \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} \left(\int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{1+q} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right) \quad \forall s > 0, \quad \forall \delta > 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\tilde{c} < \infty$ не зависит от s, δ, T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем C^m -гладкую срезающую функцию $\eta(x)$: $\eta(x) = 0$ при $x_n < s$, $\eta(x) = 1$ при $x_n \geq s + \delta$, причем

$$|\nabla_x^j \eta(x)| \leq d_4 \delta^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad d_4 < \infty. \quad (3.6)$$

Обозначим $\varphi_T(t) = \exp(-t/T)$, теперь указанные функции $\varphi_T(t)$ и $\eta(x)$ подставим в интегральное тождество (2.4). После стандартных вычислений, использующих предположения (1.3), (1.4), оценку (3.6), интерполяционные неравенства (3.1), (3.2) при $0 < j < m$, $\alpha = \beta = \gamma = p + 1$ и неравенство Юнга с “ ε ”, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{1+q} \eta dx + \int_{G_T(s)} (T^{-1}|u|^{1+q} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) \eta dx dt \\ & < \varepsilon \int_{Q_T(s, \delta)} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx dt + c(\varepsilon) \delta^{-m(p+1)} \int_{Q_T(s, \delta)} |u|^{p+1} dx dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\forall \varepsilon > 0; \quad c(\varepsilon) < \infty.$

Используя интерполяционное неравенство (3.1), можем записать

$$\begin{aligned} & \int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{p+1} dx \leq d_2^{p+1} \left(\int_{K(s, \delta)} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx \right)^{\theta_1} \\ & \times \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{1+q} dx \right)^{\frac{(1-\theta_1)(p+1)}{q+1}} + d_3^{p+1} \delta^{-\frac{n(p-q)}{(q+1)}} \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{1+q} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\theta_1 = \frac{n(p-q)}{(q+1)m(p+1) + n(p-q)} = \frac{nq(p-q)}{M}.$$

Умножим неравенство (3.8) на $\delta^{-m(p+1)}$ и проинтегрируем по t , применяя неравенства Гёльдера и Юнга, получим

$$\begin{aligned}
& \delta^{-m(p+1)} \int_{Q_T(s, \delta)} |u(x, t)|^{p+1} dx dt \\
& \leq d_2^{p+1} \left(\int_{Q_T(s, \delta)} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx dt \right)^{\theta_1} \\
& \quad \times \left(\delta^{-\frac{m(p+1)}{1-\theta_1}} \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{1+q} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{1-\theta_1} \\
& \quad + d_3^{p+1} \delta^{-[m(p+1) + \frac{n(p-q)}{q+1}]} \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{1+q} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \\
& \leq \varepsilon_1 \int_{Q_T(s, \delta)} |\nabla_x^m u(x, t)|^{p+1} dx dt \\
& \quad + (d_3^{p+1} + c(\varepsilon_1)) \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \quad \forall \varepsilon_1 > 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставляя оценку (3.9) в (3.7), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{1+q} \eta dx + \int_{G_T(s)} (T^{-1}|u|^{1+q} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) \eta dx dt \\
& \leq (\varepsilon + c(\varepsilon)\varepsilon_1) \int_{Q_T(s, \delta)} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx dt \\
& \quad + c(\varepsilon)(d_3^{p+1} + c(\varepsilon_1)) \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} (u(x, t))^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt.
\end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_2 > 0$ и положим

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{2} \left(c \left(\frac{\varepsilon_2}{2} \right) \right)^{-1}.$$

Тогда из последнего неравенства вытекает:

$$\begin{aligned}
& \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{G_T(s+\delta)} (T^{-1}|u|^{q+1} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) dx dt \\
& \leq \varepsilon_2 \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{Q_T(s, \delta)} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx dt + c_1(\varepsilon_2) \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \quad \forall \varepsilon_2 > 0.
\end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо для любых $s > 0$, $\delta > 0$, то из него легко следует:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \left(\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{G_T(s+\delta)} (T^{-1}|u|^{q+1} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) dx dt \\
& \leq \varepsilon_2 \left(\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{Q_T(s+\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} |\nabla_x^m u|^{p+1} dx dt + c_1(\varepsilon_2) \int_0^T \left(\int_{K(s+\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \\
& \quad \forall \varepsilon_2 > 0, \quad \forall s > 0; \quad \forall \delta > 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь вводя функции:

$$A(\delta) = \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx, \quad B(\delta) = T^{-1} \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{G_T(s+\delta)} |u|^{q+1} dx dt,$$

$$I(\delta) = \delta^{\frac{M}{q(q+1)}} \int_{G_T(s+\delta)} |\nabla_x^m|^{p+1} dx dt, \quad H(\delta) = \int_0^T \left(\int_{K(s+\delta, \delta)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt,$$

перепишем неравенство (3.10) в виде:

$$A(\delta) + B(\delta) + I(\delta) \leq \varepsilon_2 2^{\frac{M}{q(q+1)}} I\left(\frac{\delta}{2}\right) + 2^{\frac{M}{q(q+1)}} c_1(\varepsilon_2) H\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Зафиксируем теперь $\varepsilon_2 = 2^{-1-\frac{M}{q(q+1)}}$ и проитерлируем последнее неравенство j раз. В результате получим:

$$A(\delta) + B(\delta) + I(\delta) \leq 2^{-j} I\left(\frac{\delta}{2^j}\right) + 2^{\frac{M}{q(q+1)}} c_1(2^{-1-\frac{M}{q(q+1)}}) \sum_{i=1}^j 2^{-i+1} H\left(\frac{\delta}{2^i}\right).$$

Так как

$$H(\delta/2^i) \leq \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

то переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получаем

$$A(\delta) + B(\delta) + I(\delta) \leq 2^{1+\frac{M}{q(q+1)}} c_1(2^{-1-\frac{M}{q(q+1)}}) \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt,$$

что соответствует требуемой оценке (3.5) с

$$\tilde{c} = 2^{1+\frac{M}{q(q+1)}} c_1(2^{-1-\frac{M}{q(q+1)}}).$$

Тем самым лемма 2 доказана.

Введем новую “энергетическую” функцию, связанную с рассматриваемым решением $u(x, t)$:

$$J_T(s) = \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt.$$

В силу очевидного неравенства

$$\left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} \leq \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} - \left(\int_{\Omega(s+\delta)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}}$$

доказанная в лемме 2 априорная оценка (3.5) порождает также оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx + \int_{G_T(s+\delta)} (T^{-1}|u|^{q+1} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) dx dt \\ \leq c \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} (J_T(s) - J_T(s+\delta)). \end{aligned} \quad (3.5^*)$$

ЛЕММА 3. В условиях теоремы 1 для функции $f(t)$ из (2.7), характеризующей движение границы носителя решения $u(x, t)$, справедливо следующее соотношение:

$$f(T) - f(0) \leq c_1 T^{\frac{q(q+1)(q+1)}{(p+1)M}} J_T(s)^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}} + s \quad \forall s \geq 0, \quad \forall T > 0, \quad (3.11)$$

где $c_1 < \infty$ не зависит от T и s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $h > 0$ определим функцию

$$\xi^{(h)}(t) = \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, \tau)|^{q+1} \eta(x) dx \right)^h \varphi_T(\tau) d\tau,$$

где $\eta(x)$ и $\varphi_T(t)$ — функции из леммы 2. Легко заметить, что

$$\int_{G_T(s)} |u(x, t)|^{q+1} \eta(x) \frac{d}{dt} (\xi^{(h)}(t)) dx dt = \xi^{(h+1)}(T).$$

Поэтому, подставляя в интегральное тождество (2.4) указанную функцию $\eta(x)$ и в качестве $\varphi(t)$ — функцию $\xi^{(h)}(t)$, получим

$$\begin{aligned} \xi^{(h+1)}(T) &= \xi^{(h)}(T) \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx \\ &\quad + \frac{q+1}{q} \int_{G_T(s)} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \dots, \nabla_x^m u) D_x^\alpha(u\eta) \xi^{(h)}(t) dx dt \\ &\leq \xi^{(h)}(T) \left\{ \int_{\Omega(s)} |u(x, T)|^{q+1} \eta dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{q+1}{q} \int_{G_T(s)} \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x, \dots, \nabla_x^m u)| |D^\alpha(u\eta)| dx dt \right\}. \end{aligned}$$

Используя теперь для оценки сверху слагаемых в правой части этого неравенства условие (1.4), интерполяционное неравенство (3.1), оценки (3.5*), (3.6), (3.9), просто получаем

$$\xi^{(h+1)}(T) \leq c \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} \xi^{(h)}(T) (J_T(s - \delta) - J_T(s)).$$

Итерируя это неравенство по h и применяя неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$\xi^{(h)}(T) \leq c \xi^{(l)}(T) \left(\frac{J_T(s - \delta) - J_T(s)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{h-l} \quad \forall h > l > 0.$$

Отсюда при $h = (p+1)/(q+1)$, $l = 1$ с использованием неравенства (3.5*) для оценки $\xi^{(1)}(T)$ сверху получаем

$$J_T(s + \delta) \leq c T \left(\frac{J_T(s - \delta) - J_T(s)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}}.$$

Наконец, используя произвольность выбора $s > 0$ и $\delta > 0$, из последнего соотношения выводим:

$$J_T(s + \delta) \leq c_0 T \left(\frac{J_T(s) - J_T(s + \delta)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}} \quad \forall s > 0, \delta > 0. \quad (3.12)$$

Фиксируя теперь для произвольного $s > 0$

$$\delta = \delta_1(s) \equiv c_0^{\frac{q(q+1)^2}{M(p+1)}} T^{\frac{q(q+1)^2}{(p+1)M}} J_T(s)^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}},$$

просто выводим из (3.12) соотношение

$$J_T(s + \delta_1(s)) \leq 2^{-1} J_T(s) \quad \forall s > 0.$$

Из этого соотношения в силу леммы 4 из §4 вытекает справедливость оценки (3.11) с

$$c_1 = \frac{2^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}}}{2^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}} - 1} c_0^{\frac{q(q+1)(q+1)}{(p+1)M}}.$$

Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 теперь состоит в получении точной оценки сверху для функции $J_T(s)$ и в выборе для любого момента $T > 0$ оптимального значения параметра s в оценке (3.11) из леммы 3. Для реализации этой программы установим для “энергетической” функции $J_T(s)$ некоторый неоднородный аналог соотношения (3.12). Для этого введем в рассмотрение некоторую монотонную возрастающую на $(0, \infty)$ непрерывную функцию $h(s)$ (уточним выбор ниже) такую, что $h(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. И пусть

$$\varphi_{h(s)}(t) = \exp(-h(s)^{-1}t).$$

Подставим в интегральное тождество (2.4) в качестве $\varphi(t)$ функцию $\varphi_{h(s)}(t)$, а в качестве $\eta(x)$ — срезающую функцию из (3.6). Повторяя с очевидными изменениями вычисления из леммы 2, приходим к первому важному соотношению

$$\begin{aligned} & \varphi_{h(s)}(T) \int_{\Omega(s+\delta)} |u(x, T)|^{q+1} dx \\ & + \int_{G_T(s+\delta)} (h(s)^{-1} |u(x, t)|^{q+1} + |\nabla_x^m u|^{p+1}) \varphi_{h(s)}(t) dx dt \\ & \leq c \delta^{-\frac{M}{q(q+1)}} \int_0^T \left(\int_{K(s, \delta)} |u(x, t)|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} \varphi_{h(s)}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

По аналогии с леммой 3 введем функцию

$$\xi_{h(s)}^{(l)}(t) = \int_0^t \left(\int_{\Omega(s)} |u(x, \tau)|^{q+1} \eta(x) dx \right)^l \varphi_{h(s)}(\tau) d\tau$$

и подставим в интегральное тождество (2.4) $\eta(x)$ из леммы 2 и $\varphi(t) = \xi_{h(s)}^{(l)}(t)$. Действуя по аналогии с леммой 3 легко получаем с учетом оценки (3.13) соотношение

$$\begin{aligned} \xi_{h(s)}^{(\frac{p+1}{q+1})}(T) &\leq c \xi_{h(s)}^{(1)}(T) \left(\frac{J_T(s-\delta) - J_T(s)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p-q}{q+1}} \\ &\leq c_1 h(s) \left(\frac{J_T(s-\delta) - J_T(s)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь оценим $\xi_{h(s)}^{(\frac{p+1}{q+1})}(T)$ снизу:

$$\begin{aligned} \xi_{h(s)}^{(\frac{p+1}{q+1})}(T) &= e^{-1} \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \\ &\quad - \int_0^T dt \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} (e^{-1} - \varphi_{h(s)}(t)) \\ &\geq e^{-1} \int_0^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \\ &\quad - \int_{h(s)}^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} \eta dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \cdot e^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (3.14), получаем

$$J_T(s+\delta) \leq c_2 h(s) \left(\frac{J_T(s-\delta) - J_T(s)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}} + c_3 \int_{h(s)}^T \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt.$$

Снова, пользуясь возможностью выбора $s > 0$, $\delta > 0$ произвольным образом, выводим из последнего неравенства соотношение:

$$\begin{aligned} J_T(s+\delta) &\leq c_2 h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{J_T(s) - J_T(s+\delta)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}} \\ &\quad + c_3 \int_{h(s+\frac{\delta}{2})}^T \left(\int_{\Omega(s+\frac{\delta}{2})} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt. \end{aligned} \quad (3.12^*)$$

Второе слагаемое справа оценим сверху, используя полученную в лемме 1 оценку (3.3):

$$\int_{\Omega(s+\frac{\delta}{2})} |u|^{q+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^{q+1} dx \leq c K^{\frac{M}{N}} t^{-\frac{n}{N}}.$$

Следовательно,

$$H(s) \equiv \int_{h(s+\frac{\delta}{2})}^T \left(\int_{\Omega(s+\frac{\delta}{2})} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \leq c_4 K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \int_{h(s+\frac{\delta}{2})}^T t^{-\frac{n(p+1)}{N(q+1)}} dt.$$

Из вида последнего выражения следует, что нужно различать три случая соотношения параметров.

Случай I).

$$\frac{n(p+1)}{N(q+1)} < 1 \iff n < \frac{mq(p+1)(q+1)}{1-q(p-q-1)} \quad (1-q(p-q-1) > 0).$$

В этом случае, очевидно, имеем оценку

$$H(s) \leq c_4 K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \left(1 - \frac{n(p+1)}{N(q+1)}\right)^{-1} T^{1-\frac{n(p+1)}{N(q+1)}},$$

что естественным образом приводит к

$$J_T(s) \leq J_T(-\infty) \leq cK^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} T^{1-\frac{n(p+1)}{N(q+1)}} \quad \forall s < \infty. \quad (3.15)$$

Запишем теперь оценку (3.11), установленную в лемме 3, при $s = 0$, причем для $J_T(0)$ используем оценку (3.15). В результате получаем следующую оценку носителя решения $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} f(T) - f(0) &\leq c_1 T^{\frac{q(q+1)(q+1)}{(p+1)M}} J_T(0)^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}} \\ &= c_5 K^{\frac{q(p-q)}{N}} T^{\frac{q(q+1)(q+1)}{(p+1)M} + (1-\frac{n(p+1)}{N(q+1)})\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)M}} \\ &= c_5 K^{\frac{q(p-q)}{N}} T^{\frac{q}{N}}. \end{aligned}$$

Тем самым утверждение теоремы 1 в случае I) доказано.

Случай II).

$$\frac{n(p+1)}{N(q+1)} > 1 \iff n > \frac{mq(p+1)(q+1)}{1-q(p-q-1)}.$$

В этом случае имеем следующую оценку для $H(s)$:

$$H(s) \leq c_4 K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \left(\frac{n(p+1)}{N(q+1)} - 1\right)^{-1} \left[h\left(s + \frac{\delta}{2}\right)^{-(\frac{n(p+1)}{N(q+1)}-1)} - T^{-(\frac{n(p+1)}{N(q+1)}-1)}\right].$$

Следовательно, с учетом неравенства (3.12*) имеем

$$\begin{aligned} J_T(s + \delta) &\leq c_2 h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{J_T(s) - J_T(s + \delta)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}}\right)^{\frac{p+1}{q+1}} \\ &\quad + c_6 \cdot K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} h\left(s + \frac{\delta}{2}\right)^{-(\frac{n(p+1)}{N(q+1)}-1)} \quad \forall s > 0. \quad (3.16) \end{aligned}$$

К функции $J_T(s)$, удовлетворяющей соотношению (3.16), применим лемму 5 из § 4 при

$$\lambda = \frac{p-q}{q+1}, \quad \alpha = \frac{M(p+1)}{N(q+1)}, \quad \mu = \frac{n(p+1)}{N(q+1)} - 1, \quad \beta = \frac{M}{q(q+1)}.$$

В результате простых вычислений приходим к оценке:

$$J_T(s) \leqslant CK^{q+1}s^{-\frac{n(p+1)-N(q+1)}{q(q+1)}} \quad \forall s > 0. \quad (3.17)$$

Подставим теперь оценку (3.17) в неравенство (3.11), в результате получим:

$$f(T) - f(0) \leqslant s + C_1 T^{\alpha_1} K^{\alpha_2} s^{-\alpha_3} \quad \forall s > 0, \quad (3.18)$$

$$\alpha_1 = \frac{q(q+1)^2}{(p+1)M}, \quad \alpha_2 = \frac{q(p-q)(q+1)^2}{(p+1)M}, \quad \alpha_3 = \frac{(n(p+1) - N(q+1))(p-q)}{(p+1)M}.$$

Стандартно находя оптимальное значение $s = s_{on}$, при котором правая часть последнего неравенства принимает наименьшее значение, получаем, что

$$s_{on} = C_1^{\frac{1}{1+\alpha_3}} K^{\frac{\alpha_2}{1+\alpha_3}} T^{\frac{\alpha_1}{1+\alpha_3}}.$$

Вычисляя правую часть оценки (3.18) при $s = s_{on}$, приходим к

$$f(T) - f(0) \leqslant 2C_1^{\frac{1}{1+\alpha_3}} K^{\frac{\alpha_2}{1+\alpha_3}} T^{\frac{\alpha_1}{1+\alpha_3}} = 2C_1^{\frac{1}{1+\alpha_3}} K^{\frac{q(p-q)}{N}} T^{\frac{q}{N}},$$

что и требовалось установить.

Случай III).

$$\frac{n(p+1)}{N(q+1)} = 1 \iff n = \frac{mq(p+1)(q+1)}{1 - q(p-q-1)}.$$

В этом случае оценка для $H(s)$ такова:

$$H(s) \leqslant c_4 K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \left(\ln T - \ln h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \right),$$

и, значит, основное соотношение для $J_T(s)$ имеет вид:

$$J_T(s + \delta) \leqslant c_2 h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{J_T(s) - J_T(s + \delta)}{\delta^{\frac{M}{q(q+1)}}} \right)^{\frac{p+1}{q+1}} + c_7 \cdot K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \left(\ln T - \ln h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \right). \quad (3.19)$$

Теперь к функции $J_T(s)$, удовлетворяющей соотношению (3.19), применим лемму 6 из § 4 при

$$\lambda = \frac{p-q}{q+1}, \quad \beta = \frac{M}{q(q+1)}, \quad \alpha = \frac{M(p+1)}{N(q+1)}.$$

Получим справедливость следующей априорной оценки:

$$\begin{aligned} J_T(s) &\leqslant c_8 \left[\ln T + \frac{M(p+1)(p-q)}{N(q+1)(q+1)} \ln K - \ln \varepsilon - \frac{M(p+1)}{q(q+1)(q+1)} \ln s \right] K^{\frac{M(p+1)}{N(q+1)}} \\ &\quad \forall s: 0 < s \leqslant \tilde{s} = \Lambda T^{\frac{q(q+1)(q+1)}{M(p+1)}} K^{\frac{q(p-q)}{N}}, \\ \Lambda &= [\varepsilon \exp(c_9 + \varepsilon c_{10})]^{\frac{-q(q+1)(q+1)}{M(p+1)}} \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставив оценку (3.20) для $J_T(s)$ при $s = \tilde{s}$ в формулу (3.11) из леммы 1, в результате тривиальных вычислений получим

$$f(T) - f(0) \leq \left[\Lambda + c_1 c_8^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)^M}} \left(-\ln \varepsilon - \frac{M(p+1)}{q(q+1)(q+1)} \ln \Lambda \right)^{\frac{q(p-q)(q+1)}{(p+1)^M}} \right] \times T^{\frac{q(q+1)(q+1)}{M(p+1)}} K^{\frac{q(p-q)}{N}} \quad \forall T > 0.$$

Легко проверить, что в силу случая III),

$$\frac{q(q+1)(q+1)}{M(p+1)} = \frac{q}{N},$$

поэтому полученная оценка для $f(T)$ снова совпадает с требуемой оценкой (2.7). Тем самым теорема 1 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Выберем последовательность $u_0^{(j)}(x) \in L_q(\mathbb{R}^n) \cap L_{q+1}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$, такую, что $\|u_0^{(j)}(x) - u_0(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$,

$$\text{supp } u_0^{(j)}(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 0\}, \quad \|u_0^{(j)}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq 2K \equiv 2\|u_0\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $u^{(j)}(x, t)$ – последовательность соответствующих $u_0^{(j)}(x)$ энергетических решений задачи (1.1), (1.2). В силу теоремы 1 существует постоянная $c_1 < \infty$ такая, что

$$f_j(t) = \sup\{x_n : \exists x = (x', x_n) \in \text{supp } u^{(j)}(x, t)\} \leq c_1 K^{\omega(p-q)} t^{\omega} \quad \forall t > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем произвольно $t_1 > 0$ и пусть $\varphi(t, x)$ – произвольная функция из $D((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\text{supp } \varphi \subset (t_1, T) \times \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > c_1 K^{\omega(p-q)} t_1^{\omega}\}.$$

Очевидно, имеют место равенства

$$(u, \varphi) = (u - u^{(j)}, \varphi) + (u^{(j)}, \varphi) = (u - u^{(j)}, \varphi) = \varepsilon_j \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

где $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ в силу условия теоремы 2. Отсюда ввиду произвольности $t_1 > 0$ следует заключение теоремы 2.

§ 4. Дополнение

ЛЕММА 4 [17]. Пусть некоторая непрерывная неотрицательная функция $R(s)$ удовлетворяет следующему функциональному соотношению:

$$R(s + kR(s)^\alpha) \leq \theta R(s) \quad \forall s \geq 0; \quad 0 < k < \infty, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тогда для любого $s_0 \geq 0$ $R(s) \equiv 0 \quad \forall s \geq s_0 + (1 - \theta^\alpha)^{-1} k R(s_0)^\alpha$.

ЛЕММА 5. Пусть некоторое семейство непрерывных неотрицательных неубывающих функций $P_k(s)$, $k > 0$, $s \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяют следующему функциональному соотношению:

$$P_k(s + \delta) \leq c_1 h\left(s + \frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{P_k(s) - P_k(s + \delta)}{\delta^\beta}\right)^{1+\lambda} + k^\alpha h\left(s + \frac{\delta}{2}\right)^{-\mu} \quad (4.1)$$

$$\forall s \geq 0, \forall \delta > 0,$$

где в качестве $h(x)$ может быть взята произвольная неотрицательная неубывающая непрерывная на $(0, \infty)$ функция, параметры $c_1, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ — произвольные фиксированные числа из интервала $(0, \infty)$, удовлетворяющие единственному соотношению:

$$\lambda\mu < 1.$$

Тогда для всего семейства справедлива следующая равномерная априорная оценка:

$$P_k(s) \leq C k^{\frac{\alpha}{1-\lambda\mu}} s^{-\frac{\mu(1+\lambda)\beta}{1-\lambda\mu}} \quad \forall s > 0, \quad (4.2)$$

здесь $C < \infty$ зависит только от известных параметров соотношения (4.1) и не зависит, в частности, от s, δ, k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$ (выбор которого уточним в дальнейшем), и определим функцию

$$h_0(s) = \varepsilon^{\frac{1}{1-\lambda\mu}} k^{\frac{-\alpha\mu}{1-\lambda\mu}} s^{\frac{(1+\lambda)\beta}{1-\lambda\mu}}.$$

Зафиксируем теперь число ξ : $0 < \xi < \infty$ и положим

$$\delta = \xi s.$$

В силу условия (4.1) для функции $P_k(s)$ справедливо соотношение

$$P_k((1 + \xi)s) \leq c_1 h_0\left(\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)s\right) \left(\frac{P_k(s) - P_k((1 + \xi)s)}{\xi^\beta s^\beta}\right)^{1+\lambda} + k^\alpha h_0\left(\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)s\right)^{-\mu} \quad (4.3)$$

$$\forall s > 0.$$

Заметим теперь, что доказываемая нами априорная оценка (4.2) в новых обозначениях имеет вид

$$P_k(s) \leq C k^\alpha h_0(s)^{-\mu} \quad \forall s > 0. \quad (4.2^*)$$

В силу ограниченности (конечно, не равномерной) всех функций $P_k(s)$ и того, что $h_0(s)^{-\mu} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, следует существование $s_0 = s_0(k, C) > 0$ такого, что соотношение (4.2*) имеет место для всех $s < s_0$, т.е.

$$P_k(s) \leq C k^\alpha h_0(s)^{-\mu} \quad \forall s \leq s_0 = s_0(k, C).$$

В силу этого из соотношения (4.3) вытекает:

$$\begin{aligned} P_k((1+\xi)s_0) &\leq \frac{c_1 h_0(s_0(1+\xi/2)) C^{1+\lambda} k^{\alpha(1+\lambda)}}{\xi^{\beta(1+\lambda)} s_0^{\beta(1+\lambda)} h_0(s)^{\mu(1+\lambda)}} + k^{\alpha} h_0\left(s_0\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\right)^{-\mu} \\ &= C k^{\alpha} h_0(s_0(1+\xi))^{-\mu} \left[\frac{\varepsilon \cdot C^{\lambda} \cdot c_1 (1+\xi)^{\frac{(1+\lambda)\beta}{1-\lambda\mu}}}{\xi^{\beta(1+\lambda)}} + \left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right)^{\frac{(1+\lambda)\beta\mu}{1-\lambda\mu}} C^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Определяем теперь конкретные значения пока еще свободных параметров C и ε :

$$C = 2 \left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2} \right)^{\frac{(1+\lambda)\beta\mu}{1-\lambda\mu}} \equiv C_0, \quad \varepsilon = \frac{\xi^{\beta(1+\lambda)}}{2C_0^{\lambda} c_1 (1+\xi)^{\frac{(1+\lambda)\beta}{1-\lambda\mu}}}. \quad (4.5)$$

При этом из соотношения (4.4) следует

$$P_k((1+\xi)s_0) \leq C_0 k^{\alpha} h_0(s_0(1+\xi))^{-\mu}.$$

Продельываем теперь новый цикл, стартуя с последней оценки и соотношения (4.3), получим, снова используя определение (4.5), соотношение

$$P_k((1+\xi)^2 s_0) \leq C_0 k^{\alpha} h_0(s_0(1+\xi)^2)^{-\mu}.$$

Продельывая описанную процедуру j раз, получаем

$$P_k((1+\xi)^j s_0) \leq C_0 k^{\alpha} h_0(s_0(1+\xi)^j)^{-\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, очевидно, вытекает справедливость оценки (4.2), что и доказывает лемму 5.

ЛЕММА 6. Пусть некоторое семейство непрерывных неотрицательных неубывающих функций $P_k(s)$, $k > 0$, $s \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяет следующему функциональному соотношению:

$$\begin{aligned} P_k(s+\delta) &\leq c_1 h\left(s+\frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{P_k(s)-P_k(s+\delta)}{\delta^{\beta}} \right)^{1+\lambda} + k^{\alpha} \ln\left(\frac{T}{h(s+\frac{\delta}{2})}\right) \\ &\quad \forall s > 0, \forall \delta > 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где в качестве $h(s)$ допускается произвольная неотрицательная неубывающая непрерывная на $(0, \infty)$ функция: $0 < h(s) < T$; $c_1, \alpha, \lambda, \beta$ — произвольные фиксированные числа из интервала $(0, \infty)$. Тогда для всего семейства $P_k(s)$ справедлива априорная оценка:

$$P_k(s) \leq c_2 k^{\alpha} \ln\left(\frac{T k^{\alpha\lambda}}{\varepsilon s^{\beta(1+\lambda)}}\right) \quad \forall s: 0 < s < \tilde{s} = \Lambda T^{\frac{1}{\beta(1+\lambda)}} k^{\frac{\alpha\lambda}{\beta(1+\lambda)}} \quad (4.7)$$

с произвольными постоянными $c_2 > 1$, $0 < \varepsilon < \infty$. Причем постоянная $\Lambda = \Lambda(c_2, \varepsilon) < \infty$ не зависит от s, δ, k, T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и введем функцию

$$h_0(s) = \varepsilon \cdot s^{\beta(1+\lambda)} k^{-\alpha\lambda}.$$

Зафиксируем $\xi > 0$ и положим $\delta = \xi s$, зафиксируем также $c_2 > 1$ и определим

$$\Lambda_1 = \frac{\beta(1+\lambda)}{c_2-1} \ln\left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right) + \frac{\varepsilon c_1}{c_2-1} \left[\frac{c_2(1+\xi/2)^\beta \beta(1+\lambda) \ln(1+\xi)}{\xi^\beta} \right]^{1+\lambda}.$$

Будем доказывать, что в качестве постоянной Λ в оценке (4.7) может быть взята

$$\Lambda \equiv (\varepsilon \exp \Lambda_1)^{-\frac{1}{\beta(1+\lambda)}}.$$

Как и при доказательстве леммы 5, можем считать, что доказываемая нами оценка (4.7) верна для достаточно малых s , т.е.

$$P_k(s) \leq c_2 k^\alpha \ln\left(\frac{T}{h_0(s)}\right) \quad \forall s: 0 < s \leq s_0. \quad (4.8)$$

Очевидно, что для доказательства справедливости леммы 6 теперь достаточно доказать оценку (4.7) для $s = (1+\xi)s_0$ в случае, если

$$(1+\xi)s_0 \leq \tilde{s} = \Lambda T^{\frac{1}{\beta(1+\lambda)}} k^{\frac{\alpha\lambda}{\beta(1+\lambda)}}. \quad (4.9)$$

Предположим противное, т.е.

$$P_k((1+\xi)s_0) > c_2 k^\alpha \ln\left(\frac{T k^{\alpha\lambda}}{\varepsilon s^{\beta(1+\lambda)}}\right), \quad s = (1+\xi)s_0, \quad (4.10)$$

и выполнено неравенство (4.9). В силу оценки (4.8) и предположения (4.10) теперь имеем:

$$P_k(s_0) - P_k((1+\xi)s_0) < c_2 k^\alpha \beta(1+\lambda) \ln(1+\xi).$$

Поэтому из условия (4.6) леммы 6 вытекает:

$$\begin{aligned} P_k((1+\xi)s_0) &\leq c_2 k^\alpha \ln\left(\frac{T}{h_0(s_0(1+\xi))}\right) - k^\alpha \left\{ (c_2-1) \ln \frac{T}{h_0(s_0(1+\xi))} \right. \\ &\quad \left. - \beta(1+\lambda) \ln\left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right) - \frac{c_1 c_2^{1+\lambda} (1+\xi/2)^{\beta(1+\lambda)} [\beta(1+\lambda) \ln(1+\xi)]^{1+\lambda} k^{\alpha\lambda} h_0(s_0)}{\xi^{\beta(1+\lambda)} s_0^{\beta(1+\lambda)}} \right\} \\ &= c_2 k^\alpha \ln\left(\frac{T}{h_0(s_0(1+\xi))}\right) - (c_2-1) k^\alpha \left[\ln\left(\frac{T}{h_0(s_0(1+\xi))}\right) - \Lambda_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из определения функции $h_0(s)$ и постоянных Λ_1 и Λ следует, что неравенство (4.9) эквивалентно

$$\ln \frac{T}{h_0(s_0(1+\xi))} - \Lambda_1 \geq 0.$$

Поэтому из (4.11) следует справедливость противоположного к (4.10) неравенства. Это значит, что сделанное допущение (4.10) неверно и лемма 6 доказана.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех. 1952. Т. 16. №1. С. 67–78.
2. Баренблатт Г. И. О автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // Прикл. матем. и мех. 1952. Т. 16. №6. С. 679–698.
3. Bamberger A. Etude d'une equation doublement non lineaire // Ropport Interne du Centre de Mathematiques Appliquees de l'Ecole Polytechnique 1975. V. 4. P. 1–34.
4. Олейник О. А., Калашиников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. Ан СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. С. 667–704.
5. Калашиников А. С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. №2. С. 440–443.
6. Калашиников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1972. №6. С. 45–49.
7. Peletier L. A. A necessary and sufficient condition for the existence of an interface in flow through porous media // Arch. Rational Mech. Anal. 1974. V. 56. P. 183–190.
8. Brezis H., Friedman A. Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities // Illinois J. Math. 1976. V. 20. №1. P. 82–97.
9. Diaz J. I. Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems // Nonlinear Anal. 1979. V. 3. P. 837–847.
10. Калашиников А. С. О нелинейных уравнениях возникающих в теории нестационарной фильтрации // Труды сем. им. И. Г. Петровского. 1978. №4. С. 137–146.
11. Diaz J. I., Herrero M. A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. №89. P. 249–258.
12. Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. №2. P. 787–814.
13. Антонцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН СССР. 1981. Т. 260. №6. С. 1289–1293.
14. Bernis F. Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Houston J. Math. 1988. V. 14. №3. P. 319–352.
15. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // УМН. 1976. Т. 31. №6. С. 142–166.
16. Шишков А. Е. Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнениях произвольного порядка // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. №10. С. 1451–1456.
17. Шишков А. Е. Динамика геометрии носителя обобщенного решения квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №3. С. 537–547.
18. Benilan Ph., Crandall M. G. The continuous dependence on φ of the solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. P. 161–177.
19. Veron L. Effects regularisants de semi-groupes non lineares dans des espaces de Banach // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1979. №1. P. 171–200.
20. Herrero M. A., Vazquez J. L. Asymptotic behaviour of solutions of a strongly nonlinear parabolic problem // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1981. №3. P. 113–127.
21. Bernis F. Existence results for “doubly” nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 1988. V. 279. P. 373–394.
22. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
23. Knerr B. F. The porous medium equation in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 234. P. 381–415.
24. Friedman A., Kamin S. The asymptotic behaviour of a gas in an n -dimensional porous medium // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 262. P. 551–563.

25. *Herrero M. A., Vazquez J. L.* On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation // *Comm. Partial Differential Equations*. 1982. V. 7. P. 1381–1402.
26. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1989. V. 314. № 1. P. 187–224.
27. *Di Benedetto E.* On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1986. V. 13. № 3. P. 487–535.
28. *Benilan Ph., Crandall M. G., Pierre M.* Solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^n$ under optimal conditions on initial values // *Indiana Univ. Math. J.* 1984. V. 33. P. 51–87.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк

Поступила в редакцию
04.12.1995