Общероссийский математический портал

И. И. Аргатов, С. А. Назаров, Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:29:59

УДК 517.953

И. И. Аргатов, С. А. Назаров

Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве

Изучается задача Синьорини для уравнения Пуассона при условии, что односторонние связи накладываются на узкой (шириной $O(\varepsilon)$) кольцевой полоске Γ_ε границы. Асимптотический анализ позволяет получить результирующее вариационное неравенство на контуре Γ , к которому стягивается Γ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отыскиваются приближенные решения (различной точности) результирующего неравенства и при их участии строится и обосновывается асимптотика решения исходной задачи Синьорини.

Библиография: 34 названия.

§ 1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1.1. Область и вариационное неравенство. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная гладкой (класса C^∞) замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, а Γ — простой гладкий замкнутый контур на $\partial\Omega$ длиной l . Для упрощения формул будем считать, что Γ — экватор (сечение $\partial\Omega$ плоскостью $x_3 = 0$) и что в его окрестности $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ граница $\partial\Omega$ совпадает со связной цилиндрической поверхностью $\Gamma \times \mathbb{R}$. Сузив при необходимости множество $\mathcal{U}$, зададим в нем естественные криволинейные координаты (s, z, n) , где $z = x_3$, n — расстояние до $\partial\Omega$ вдоль внутренней нормали, а под s подразумевается длина дуги на Γ (т.е. $s \in [0, l]$ или, несколько вольно, $s \in \Gamma$). Введем в рассмотрение узкую экваториальную полоску

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \partial\Omega : s \in \Gamma, -\varepsilon h_-(s) < z < \varepsilon h_+(s)\}, \quad (1.1)$$

где ε — малый положительный параметр, $h_\pm \in C^\infty(\Gamma)$, причем $h = h_+ + h_-$ — положительная функция. Наконец, Σ — открытое подмножество $\partial\Omega$ такое, что $\text{mes}_2 \Sigma > 0$ и $\overline{\Sigma} \cap \overline{\Gamma_\varepsilon} = \emptyset$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\Sigma)$, $\varepsilon_\Sigma > 0$ (рис. 1).

Задача Синьорини состоит в нахождении функции u , удовлетворяющей следующим соотношениям:

$$-\Delta_x u(\varepsilon, x) = f(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega; \quad (1.2)$$

$$u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Sigma; \quad (1.3)$$

$$\partial_n u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus (\overline{\Sigma} \cup \overline{\Gamma_\varepsilon}); \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} u(\varepsilon, x) &\geq \varphi(\varepsilon, s), \quad \partial_n u(\varepsilon, x) \leq 0, \\ (u(\varepsilon, x) - \varphi(\varepsilon, s)) \partial_n u(\varepsilon, x) &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon; \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь $\partial_n = \partial/\partial n$, а f и φ — заданные функции, к которым по мере необходимости будут предъявляться дополнительные требования.

Фиксируем некоторое ε и допустим, что $f(\varepsilon, \cdot) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(\varepsilon, \cdot) \in L_2(\Gamma)$. Известно (см. [1]–[3] и др.), что задача (1.2)–(1.5) имеет единственное решение

$u(\varepsilon, \cdot) \in W_2^1(\Omega)$ и может быть переформулирована как задача о минимуме функционала

$$(\nabla_x u, \nabla_x u)_\Omega - 2(f, u)_\Omega$$

на выпуклом замкнутом множестве

$$K = \{u \in W_2^1(\Omega) : u = 0 \text{ п.в. на } \Sigma, u \geq \varphi \text{ п.в. на } \Gamma_\varepsilon\} \quad (1.6)$$

или как вариационное неравенство

$$(\nabla_x u, \nabla_x u - \nabla_x \zeta)_\Omega \leq (f, u - \zeta)_\Omega \quad \forall \zeta \in K. \quad (1.7)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ (векторные и скалярные пространства не различаются в обозначениях).

Рис. 1

1.2. Краткая история проблемы. Изучение асимптотических решений вариационных неравенств с различными сингулярными возмущениями проводилось в [4]–[10] и др. Именно, при помощи асимптотического анализа (в рамках методов сращиваемых или составных разложений) исходная задача с малым параметром ε разбивалась на несколько последовательно решаемых, более простых задач, не содержащих ε и называемых предельными. В случае задания односторонних связей (условий типа (1.5)) на малых множествах для части предельных задач отыскивались явные решения, зависящие от ряда свободных констант, а для всего набора N свободных констант выводилось результирующее вариационное неравенство (алгебраическое: оно ставится на выпуклом конусе в $\mathbb{R}^N$). После нахождения констант из результирующего неравенства весь произвол в выборе решений предельных задач устранялся и их удавалось “склеить” в глобальное асимптотическое приближение $U(\varepsilon, \cdot)$ к решению $u(\varepsilon, x)$ исходной сингулярно возмущенной задачи, а разность $u(\varepsilon, x) - U(\varepsilon, x)$ характеризовалась на основе какой-либо априорной оценки. В целом эта схема сохраняется для задачи (1.2)–(1.5), но имеются и существенные отличия: результирующее неравенство в качестве неизвестной содержит функцию на Γ , причем в нем фигурирует интегральный оператор на Γ и остается (большой) параметр $|\ln \varepsilon|$, а значит, оно само нуждается в асимптотической обработке.

Подобные эффекты проявляются и в линейных задачах при сингулярных возмущениях, сконцентрированных на тонких продолговатых множествах. Простейшим, но типичным, примером служит задача Дирихле для оператора Лапласа в

трехмерной области с узкой полостью (см. [11]–[14] и др., а также [15], где границе полости дозволено меняться периодически, а периоду – сравняться по порядку с малым диаметром $O(\varepsilon)$ сечения). В таких задачах в качестве результирующего возникает интегральное уравнение на “оси” Γ полости. В него входит параметр $|\ln \varepsilon|$ и в [11]–[14] предложено несколько методик построения асимптотических решений, приводящих к разложениям по обратным степеням $|\ln \varepsilon|$ или к более точным разложениям со “степенными” остатками $O(\varepsilon^p)$. К сожалению, нелинейность задачи (1.2)–(1.5) отвергает большинство подходов и оставляет единственно возможной “логарифмическую асимптотику”.

Основное отличие асимптотических построений в задачах с односторонними связями состоит в том, что вместе с асимптотикой решений требуется найти и множества, на которых реализуется то или иное краевое условие. Обычно удается оправдать только асимптотическое представление решения, а информация о структуре зоны контакта остается неизвестной – множества, на которых можно с уверенностью фиксировать тип краевого условия, не покрывают свободную поверхность (полоску Γ_ε в случае задачи (1.2)–(1.5)). Настоящая работа не является исключением и, говоря о вариации зоны контакта, мы подразумеваем лишь уточнение заведомо неполных сведений о том, где на Γ_ε осуществляется равенство $u = \varphi$, а где – равенство $\partial_n u = 0$.

Напомним также работы [16]–[18], где задачи механики двумерных трещин интерпретировались как сингулярно возмущенные, выводились вариационные неравенства, похожие на те, с которыми мы столкнулись в данной работе, и на их основе формулировались критерии разрушения.

1.3. Структура статьи. В §2 мы строим формальную асимптотику решения задачи (1.2)–(1.5). Применяется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [19]–[21], [22, §6.5] и др.) и находятся главные члены внешнего и внутреннего разложений. Задача, описывающая плоский пограничный слой вблизи Γ_ε (внутреннее разложение), решается явно. В качестве решений первой предельной задачи в Ω (внешнее разложение) берутся функции, обладающие логарифмическим ростом около Γ , т.е. вдоль контура Γ с некоторой плотностью γ распределяется δ -функция Дирака. Именно плотность γ и является неизвестной в результирующем вариационном неравенстве, возникающем как условие сращивания внешнего и внутреннего разложений.

В §3 мы сначала предлагаем простое асимптотическое решение γ_* результирующего неравенства, а затем по нему конструируем глобальное асимптотическое приближение $U(\varepsilon, x)$ к истинному решению $u(\varepsilon, x)$ задачи (1.2)–(1.5) и занимаемся оценкой разности $R = u - U$. При этом теорема, обосновывающая асимптотику $u \sim U$, формулируется так, что в центральной оценке остатка R фигурирует норма невязки γ_* в результирующем неравенстве – порядок такой нормы (относительно ε) и определяет качество асимптотического приближения. Это обстоятельство позволяет не повторять обоснование асимптотики после ее уточнения в §4, где определяется второй член асимптотики плотности и одновременно находится вариация зоны контакта.

В §5 установленные оценки остатков в асимптотических формулах для решений переформулируются как теоремы о сходимости $u(\varepsilon, \cdot)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. В частности, данные задачи (1.2)–(1.5) удается подобрать так, чтобы пределом в $L_2(\Omega)$ функции $x \mapsto u(\varepsilon, x)$ оказалось (иррегулярное) решение смешанной краевой задачи в Ω с δ -функцией, распределенной по Γ . Наконец, в §6 кратко обсуждается

случай $\Sigma = \emptyset$. Поясняется, как модифицировать нахождение асимптотического решения задачи (1.2)–(1.5) при отсутствии условий Дирихле (1.3). Оказывается, что нарушение однозначной разрешимости первой предельной задачи (при $\Sigma = \emptyset$ и $\varepsilon = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$ остаются только условия Неймана) приводит к изменению результирующей задачи.

§ 2. Главные члены внешнего и внутреннего разложений. Результирующее вариационное неравенство на Γ

2.1. Предварительное обсуждение задачи. Начнем с наиболее простого случая: функции f и φ в (1.2) и (1.5) не зависят от ε . В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ множество (1.1) стягивается к контуру Γ , соотношения (1.5) исчезают, а уравнения (1.2)–(1.4) формируют первую предельную задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_x v(x) &= f(x), & x &\in \Omega; \\ v(x) &= 0, & x &\in \Sigma; \quad \partial_n v(x) = 0, & x &\in \partial\Omega \setminus (\bar{\Sigma} \cup \Gamma). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $f \in L_p(\Omega)$, где $p > 3$. Тогда существует ограниченное решение V задачи (2.1), которое принадлежит $W_p^2(\mathcal{U} \cap \Omega)$ (отметим, что на линии $\partial\Sigma$ смены типа краевого условия $\text{grad } V$ имеет особенности, но все дальнейшие рассуждения относятся лишь к окрестности контура Γ). Кроме того, имеет место вложение W_p^2 в C^1 и потому определен след ψ функции V на контуре Γ , $\psi \in C^1(\Gamma)$. Предположим, что $\varphi \in C^1(\Gamma)$ и обсудим несколько возможных ситуаций.

1°. Если

$$\psi(s) > \varphi(s) \quad \forall s \in \Gamma, \quad (2.2)$$

то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ на Γ_ε оказывается верным неравенство $V \geq \varphi$ (т.е. первое ограничение в (1.5)). При этом благодаря условию Неймана в (2.1) соблюдаются и остальные два требования из (1.5). Следовательно, в случае $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решением задачи Синьорини (1.2)–(1.5) служит решение V линейной задачи (2.1).

2°. Пусть справедливо противоположное (2.2) неравенство

$$\psi(s) < \varphi(s) \quad \forall s \in \Gamma. \quad (2.3)$$

Тогда при малом ε первое условие в (1.5) не может выполняться для V . Далее будет пояснено (см. замечание 3.6), что в случае (2.3) решение задачи Синьорини при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ совпадает с решением линейной смешанной краевой задачи, образованной добавлением к уравнениям (1.2)–(1.4) условий Дирихле

$$u(\varepsilon, x) = \varphi(s), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \quad (2.4)$$

Процедура построения асимптотики решений задач с данными Дирихле на тонких продолговатых множествах разработана в [11]–[14] (см. также [23, гл. 4] и [24, гл. 12, 13]).

3°. В случае общего положения (ни одно из неравенств (2.2) или (2.3) не выполнено всюду на Γ) асимптотический анализ включает в себя поиск зон контакта (на них в первом условии из (1.5) реализуется знак равенства). При этом возникают разнообразные частные задачи, описывающие возникновение или исчезновение

зонконтакта, их малые вариации и пр. (здесь пригодна классификация, предложенная в [8] для двумерных задач; см. также [5], [6]). Мы ограничимся рассмотрением следующей ситуации: множества

$$\Xi^\pm = \{s \in \Gamma : \pm\psi(s) < \pm\varphi(s)\} \quad (2.5)$$

суть конечные наборы открытых дуг $\Xi_n^\pm$, $n = 1, \dots, N$; дуги, помеченные одинаковыми символами “+” или “−”, не имеют общих концов; множество $\Xi^0 = \Gamma \setminus (\Xi^+ \cup \Xi^-)$ состоит из $2N$ точек. Иными словами, разность $\psi - \varphi$ обращается в нуль лишь в изолированных точках, причем при переходе через эти точки обязательно меняет знак. Как будет показано далее, при таких ограничениях зона контакта $\Xi^+(\varepsilon)$ оказывается в некотором смысле малым возмущением дуг $\Xi_1^+, \dots, \Xi_N^+$.

2.2. Главный член внешнего разложения (дальнее поле). Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [19]–[22] и др.) и будем искать различные представления для решения $u(\varepsilon, x)$ на удалении от полосы Γ_ε и в непосредственной близости к ней. Ясно, что главный член разложения решения u , подчиненного (1.2)–(1.4), должен удовлетворять (2.1). Поступая в соответствии с [11]–[14], позволим решению v задачи (2.1) иметь логарифмические особенности на экваторе Γ , т.е. предположим, что

$$v(x) = -\pi^{-1}\gamma(s) \ln r + O(1), \quad r \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Здесь $r = (z^2 + n^2)^{1/2}$ – расстояние до Γ в $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, а γ – функция, подлежащая дальнейшему определению. Утверждение об однозначной разрешимости задачи (2.1), (2.6) с заданными f и γ можно вывести из общих результатов [22], [25], при этом γ предписываются некоторые дифференциальные свойства. Однако для наших целей удобно интерпретировать сингулярное решение v как решение задачи (2.1), в которой вдоль контура Γ распределена δ -функция Дирака с плотностью γ , и ограничиться явным интегральным представлением для v .

Обозначим через $G(\cdot; s)$ обобщенную функцию Грина с особенностью в точке $s \in \Gamma$ с координатой s (в настоящем разделе придется различать символы s и $\mathbf{s}$). Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} -\Delta_x G(x; s) &= 0, \quad x \in \Omega; \\ G(x; s) &= 0, \quad x \in \Sigma; \quad \partial_n G(x; s) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus (\bar{\Sigma} \cup \mathbf{s}); \\ G(x; s) &= (2\pi|x - \mathbf{s}|)^{-1} + g(x; s), \quad |\nabla_x^k g(x; s)| \leq c_{k,\delta} |x - \mathbf{s}|^{\delta-1-k}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В (2.7) $|x - \mathbf{s}|$ – расстояние между точками $x \in \bar{\Omega}$ и $\mathbf{s} \in \Gamma$ в $\mathbb{R}^3$, $\nabla_x^k \zeta$ – совокупность всех производных порядка k функции ζ , $k = 0, 1, \dots$ и $\delta \in (0, 1)$. Искомое решение v есть сумма

$$v(x) = V(x) + \int_\Gamma \gamma(t) G(x; t) dt, \quad (2.8)$$

где V – ограниченное решение задачи (2.1).

2.3. Асимптотика сингулярного решения. Логарифмическая асимптотика (2.6) сосредоточенного на Γ потенциала (интеграл из (2.8)) известна. При помощи регуляризации интеграла можно выписать и уточненную асимптотику. В частности, если $\gamma \in W_\infty^1(\Gamma)$, то в силу, например, [11]–[15] или [17]

$$v(x) = -\pi^{-1}\gamma(s) \ln r + J\gamma(s) + \psi(s) + O(r |\ln r|), \quad r \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Пусть $\mathcal{G}$ – какая-нибудь первообразная функции $\Gamma \ni t \mapsto G(t, s)$. Так как

$$G(t, s) = (2\pi|t - s|)^{-1} + o(|t - s|^{\delta-1}), \quad t \rightarrow s,$$

то при $\mp t > \mp s$

$$\mathcal{G}(t, s) = \pm(2\pi)^{-1} \ln |t - s| \pm \mathcal{G}^\pm(t, s).$$

Явное представление для фигурирующего в (2.9) интегрального оператора (см. [14], [15], [24]) имеет вид:

$$\begin{aligned} J\gamma(s) = (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma} (\gamma(t) - \gamma(s)) |t - s|^{-1} dt + \int_{\Gamma} \gamma(t) g(s, t) dt \\ + \pi^{-1} \ln 2 - \mathcal{G}^+(s + 0, s) - \mathcal{G}^-(s - 0, s). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее, при обосновании асимптотики, понадобятся оценки остатка

$$\tilde{v}(x) = v(x) + \pi^{-1} \gamma(s) \ln r - J\gamma(s) - \psi(s) \quad (2.11)$$

в представлении (2.9). Мы приведем два утверждения, различающиеся требованиями, предъявляемыми к плотности γ . Первое, более простое, будет применяться преимущественно; его доказательство, по существу, содержится в [11]–[15], требуется лишь незначительная модификация, связанная с переходом от внутреннего контура $\Gamma \subset \Omega$ к кривой Γ на $\partial\Omega$. Второе утверждение получается конкретизацией общих результатов [22, гл. 11], [25, гл. 9], оно используется лишь однажды, в § 4 (впрочем, в этой ситуации можно было бы повторить выкладки из [11]–[15], но мы предпочитаем избавить статью от громоздких вычислений, не относящихся к сути дела).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $f \in L_p(\Omega)$ с некоторым $p > 3$.

1) Если $\gamma \in W_\infty^1(\Gamma)$, то при $x \in \Omega \cap \mathcal{U}$ верна оценка

$$r^{-1} |\tilde{v}(x)| + |\nabla_x \tilde{v}(x)| \leq c_p (1 + |\ln r|) (\|f; L_p(\Omega)\| + \|\gamma; W_\infty^1(\Gamma)\|). \quad (2.12)$$

2) Если $\gamma \in W_2^1(\Gamma)$, то при $\beta \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |\tilde{v}|_\beta &\equiv \left(\int_{\Omega \cap \mathcal{U}} r^{2\beta-2} (|\nabla_x \tilde{v}(x)|^2 + r^{-2} |\tilde{v}(x)|^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_{p,\beta} (\|f; L_p(\Omega)\| + \|\gamma; W_2^1(\Gamma)\|). \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4. Главный член внутреннего разложения (плоский пограничный слой). В криволинейных координатах (s, y) , где

$$y = (y_1, y_2), \quad y_1 = z, \quad y_2 = n, \quad (2.14)$$

лапласиан Δ_x записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \mathcal{L} \left(s, y_2, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= A(s, y)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial s} A(s, y)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y_2} A(s, y) \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) $A(s, y) = 1 + y_2 k(s)$ и $k(s)$ – кривизна контура Γ в точке s . В плоскостях, перпендикулярных Γ , перейдем от (2.14) к “быстрым” координатам

$$\eta = \varepsilon^{-1} y, \quad \eta = (\eta_1, \eta_2). \quad (2.16)$$

Раскладывая коэффициенты $\mathcal{L}$ в ряды Тейлора по переменной $n = y_2 = \varepsilon \eta_2$, получаем расщепление оператора (2.15)

$$\Delta_x \sim \varepsilon^{-2} \Delta_\eta + \varepsilon^{-1} k(s) \partial_2 + \varepsilon^0 (\partial_s^2 - \eta_2 k(s)^2 \partial_2) \quad (2.17)$$

(явный вид младших членов не понадобится). В (2.17) и далее используются краткие обозначения $\partial_s = \partial/\partial s$ и $\partial_i = \partial/\partial \eta_i$, $i = 1, 2$.

Обратимся к соотношениям (1.2)–(1.5). Заменяем в (1.2) “трехмерный” лапласиан Δ_x его расщеплением (2.17) и сохраним в последнем лишь старшее слагаемое – “двумерный” лапласиан Δ_η (“потеря” размерности вызвана тем, что переменная s осталась “медленной” и дифференцирование ∂_s несущественно при определении основного члена асимптотики в малой окрестности множества Γ_ε). Кроме того, при переходе к быстрым переменным уравнение (1.2) становится однородным: из-за множителя ε^{-2} в (2.17) следует пренебречь правой частью $f(x) = O(1)$. Ясно, что согласно (2.14), (2.16) $\partial_n = \varepsilon^{-1} \partial_2$, а потому необходимые изменения в (1.4) и (1.5) очевидны. Наконец, формула (1.1) для Γ_ε принимает вид

$$\Gamma_\varepsilon = \{(s, \eta) : \eta_1 = 0, \eta_2 \in \Upsilon(s) \equiv (-h_-(s), h_+(s)), s \in \Gamma\},$$

и после предельного перехода к $\varepsilon = 0$ множество $\mathcal{U} \cap \Omega$, записанное при помощи координат (s, η) , становится прямым произведением $\Gamma \times \mathbb{R}^2$. Все это позволяет заключить, что главный член $e(\eta; s)$ внутреннего разложения, обслуживающего малую окрестность полосы Γ_ε , обязан удовлетворять соотношениям

$$-\Delta_\eta e(\eta; s) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}_+^2 \equiv \{\eta : \eta_2 > 0\}; \quad (2.18)$$

$$\partial_2 e(\eta_1, 0; s) = 0, \quad \eta_1 \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Upsilon(s)}; \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} e(\eta_1, 0; s) &\geq \varphi(s), & \partial_2 e(\eta_1, 0; s) &\leq 0, \\ (e(\eta_1, 0; s) - \varphi(s)) \partial_2 e(\eta_1, 0; s) &= 0, & \eta_1 &\in \Upsilon(s). \end{aligned} \quad (2.20)$$

В рамках метода сращиваемых разложений следует дополнить формулы (2.18)–(2.20) некими требованиями, фиксирующими поведение решения e на бесконечности. Процедура сращивания подразумевает совпадение (формальное) главных членов асимптотик величин $v(x)$ и $e(\eta; s)$ при $r \rightarrow 0$ и $\rho \equiv |\eta| \rightarrow \infty$, соответственно. Таким образом, в соответствии с (2.9), замыкаем вторую предельную задачу (2.18)–(2.20) следующим условием

$$e(\eta; s) = -\pi^{-1} \gamma(s) \ln(\varepsilon \rho) + J\gamma(s) + \psi(s) + o(1), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Подчеркнем, что появление $\ln \varepsilon$ справа в (2.21) обусловлено заменой переменных $y \mapsto \eta$ и $r \mapsto \rho = \varepsilon^{-1} r$.

Ближайшая цель – построить явное решение задачи (2.18)–(2.21). Оказывается, что возможны только две крайние ситуации: всюду на отрезке $\Upsilon(s) = \{\eta : \eta_1 \in \Upsilon(s), \eta_2 = 0\}$ реализуются либо условия Неймана, либо условия Дирихле. В первом случае согласно (2.18), (2.19) появляется однородная задача Неймана в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$, решением которой служит постоянная, а

логарифмическая асимптотика решения невозможна (иными словами, $\gamma(s) = 0$). Во втором случае решением получившейся смешанной краевой задачи также может выступать постоянная $\varphi(s)$ (напомним, что в (2.18)–(2.20) s – произвольная, но фиксированная точка). Однако существуют решения смешанной задачи с логарифмическим ростом на бесконечности, условие (2.21) позволяет выбрать нужное решение (единственное). При этом $\gamma(s) > 0$.

Реализуем намеченное. Непосредственно проверяется, что функция

$$\eta \mapsto E(\eta; s) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{2}{h(s)} \left| \zeta + \sqrt{\zeta^2 - \left(\frac{h(s)}{2} \right)^2} \right| \right), \quad (2.22)$$

где $\zeta = i\eta_2 + \eta_1 - (h_+(s) - h_-(s))/2$, $i = \sqrt{-1}$, $h(s)$ – внешний конформный радиус отрезка $\Upsilon(s)$ (см. [26]), удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta E(\eta; s) &= 0, \quad \eta \in \mathbb{R}_+^2; \\ E(\eta_1, 0; s) &= 0, \quad \eta_1 \in \Upsilon(s); \quad \partial_2 E(\eta_1, 0; s) = 0, \quad \eta_1 \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Upsilon(s)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Кроме того, для нее справедливы соотношения

$$E(\eta; s) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\rho}{H(s)} \right) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty; \quad (2.24)$$

$$E(\eta; s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_\pm}{h(s)}} \sin \left(\frac{\theta_\pm}{2} \right) + O(\rho_\pm^{3/2}), \quad \rho_\pm \rightarrow 0; \quad (2.25)$$

$$\partial_2 E(\eta_1, 0; s) > 0, \quad \eta_1 \in \Upsilon(s); \quad E(\eta_1, 0; s) > 0, \quad \eta_1 \in \mathbb{R} \setminus \overline{\Upsilon(s)}, \quad (2.26)$$

в которых $(\rho_\pm, \theta_\pm)$ – полярные координаты с центром $(\pm h_\pm(s), 0)$; $\theta_\pm \in (0, \pi)$, $H(s) = (h(s))/4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу (2.23) функция (2.22), продолженная по четности на нижнюю полуплоскость $\{\eta : \eta_2 < 0\}$, оказывается решением однородной задачи Дирихле на плоскости с вырезанным отрезком $\Upsilon(s)$. Она носит название функции Грина с полюсом на бесконечности.

Положим

$$e(\eta; s) = -\gamma(s)E(\eta; s) + a(s), \quad (2.27)$$

где

$$a(s) = -\pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) + J\gamma(s) + \psi(s). \quad (2.28)$$

Благодаря (2.23), (2.24) и (2.28), для суммы (2.27) выполнены условия (2.18), (2.19) и (2.21). Изучим возможность сохранения ограничений (2.20).

Если $\gamma(s) > 0$, то в силу (2.26) $\partial_2 e(\eta_1, 0; s) < 0$ при $\eta_1 \in \Upsilon(s)$. Следовательно, в первом случае из (2.20) должен появиться знак равенства (иначе неверно третье соотношение). Таким образом, на отрезке $\Upsilon(s)$ поставлены условия Дирихле $e = \varphi$ и потому в силу (2.23), (2.27) и (2.28)

$$\gamma(s) > 0 \implies J\gamma(s) - \pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) = \varphi(s) - \psi(s). \quad (2.29)$$

Пусть теперь $\gamma(s) = 0$. Тогда функция (2.27) становится постоянной, т.е. всюду на $\partial\mathbb{R}_+^2$ реализуются однородные условия Неймана. Первое неравенство в (2.20)

накладывает ограничение на величину (2.28): она должна быть не меньше $\varphi(s)$. В результате получаем, что

$$\gamma(s) = 0 \implies J\gamma(s) - \pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) \geq \varphi(s) - \psi(s). \quad (2.30)$$

Наконец, при $\gamma(s) < 0$ производная $\partial_2 e$ положительна на $\Upsilon(s)$, что противоречит второй формуле в (2.20). Значит, этот случай невозможен и возникает требование

$$\gamma(s) \geq 0. \quad (2.31)$$

Соотношения (2.29)–(2.31) естественно рассматривать как задачу для определения плотности γ , фигурирующей в (2.8).

2.5. Результирующее вариационное неравенство. Следуя общей схеме (см., например, [1]–[3]) соберем формулы (2.29)–(2.31) в единую задачу – вариационное неравенство. Умножим равенство в (2.29) и неравенство в (2.30) на произвольную неотрицательную функцию $\sigma \in C^\infty(\Gamma)$ и проинтегрируем по Γ . Имеем

$$(J\gamma, \sigma)_\Gamma - \pi^{-1}(\gamma \ln(\varepsilon H), \sigma)_\Gamma \geq (\varphi - \psi, \sigma)_\Gamma. \quad (2.32)$$

Повторим процедуру с $\sigma = \gamma$. Из (2.29) и (2.30) следует формула

$$(J\gamma, \gamma)_\Gamma - \pi^{-1}(\gamma \ln(\varepsilon H), \gamma)_\Gamma = (\varphi - \psi, \gamma)_\Gamma. \quad (2.33)$$

Вычтем (2.32) из (2.33) и получим

$$(J\gamma, \gamma - \sigma)_\Gamma - \pi^{-1}(\gamma \ln(\varepsilon H), \gamma - \sigma)_\Gamma \leq (\varphi - \psi, \gamma - \sigma)_\Gamma \quad \forall \sigma \in C^\infty(\Gamma), \sigma \geq 0. \quad (2.34)$$

Результирующее вариационное неравенство формулируется как задача об отыскании неотрицательной функции γ , удовлетворяющей соотношению (2.34) при любой гладкой неотрицательной σ .

Отметим, что любое решение γ задачи (2.34), обладающее некоторой гладкостью, подчиняется (2.29)–(2.31) (вывод этих формул из (2.34) также следует общей схеме [1]–[3]).

К сожалению, не удастся доказать каких-либо утверждений о разрешимости задачи (2.34); причины поясняются ниже после перечисления свойств оператора (2.10). Однако для построения асимптотики решения исходной задачи (1.2)–(1.5) требуется только асимптотическое решение неравенства, т.е. плотность γ_* , удовлетворяющая соотношениям (2.29)–(2.31) или (2.34) с малыми погрешностями. Это обстоятельство будет использоваться в следующих разделах.

Укажем некоторые свойства оператора J , обсуждавшиеся в [14], [17], [23], [24] и др. Ввиду симметричности ядер интегральных операторов в (2.10) J оказывается симметрическим и, кроме того, выполняется неравенство

$$-(J\gamma, \gamma)_\Gamma + c(\gamma, \gamma)_\Gamma \geq \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\gamma(s) - \gamma(t)|^2}{|s - t|} ds dt + (\gamma, \gamma)_\Gamma \right\} \quad (2.35)$$

с некоторой постоянной c . Согласно [27] выражение в фигурных скобках в (2.35) есть квадрат нормы функции γ в пространстве Хёрмандера $H_\mu(\Gamma)$ с весовой функцией $\mu(\xi) = \max\{1, |\ln|\xi||^{1/2}\}$, норма в котором “склеивается” при помощи разбиения единицы из норм

$$\|\gamma; H_\mu(\mathbb{R})\| = \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(\xi)^2 |\mathcal{F}\gamma(\xi)|^2 d\xi + \|\gamma; L_2(\mathbb{R})\|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.36)$$

$\mathcal{F}\gamma$ – преобразование Фурье функции γ (см. [28]). Кстати, весовой множитель $\mu(\xi)^2 \sim \ln |\xi|$ в интеграле из (2.36) вполне согласуется с тем, что J – псевдодифференциальный оператор с главным символом $-\pi^{-1} \ln |\xi|$ (см., например, [29]).

Названные факты обуславливают постановку вариационного неравенства (2.34) на пространстве $H_\mu(\Gamma)$: решение γ и пробные функции σ берутся из конуса $H_{\mu+}(\Gamma) = \{\tau \in H_\mu(\Gamma) : \tau \geq 0\}$, а первое скалярное произведение слева понимается как двойственность между пространствами $H_\mu(\Gamma)^*$ и $H_\mu(\Gamma)$. Вместе с тем, оценка (2.35) и неравенство

$$-\pi^{-1}(\gamma \ln(\varepsilon H), \gamma)_\Gamma \geq c |\ln \varepsilon| (\gamma, \gamma)_\Gamma$$

верное при малом $\varepsilon > 0$, означают, что оператор: $H_\mu(\Gamma) \rightarrow H_\mu(\Gamma)^*$, порожденный правой частью (2.34), оказывается суммой отрицательно и положительно определенных операторов, т.е. не имеет знака. Тем самым, применение классических результатов выпуклого анализа (см. [1], [2] и др.) невозможно, и вопрос о разрешимости задачи (2.34) остается открытым.

Поясним на одном примере, почему задача (2.34) может не иметь точного решения. В случае $\varphi - \psi > 0$ (см. п. 2.1.3°) решение уравнения

$$J\gamma(s) - \pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H) = \varphi(s) - \psi(s), \quad s \in \Gamma, \quad (2.37)$$

оказывается положительным и потому удовлетворяет вариационному неравенству (2.34). Известна (см. [14], [24] и др.) основная особенность такого уравнения: существует бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что при $\varepsilon = \varepsilon_k$ уравнение (2.37), вообще говоря, неразрешимо (число $\pi^{-1} \ln \varepsilon_k$ является собственным для оператора $J - \pi^{-1} \ln H$). Вместе с тем, ввиду наличия большого положительного параметра $-\pi^{-1} \ln \varepsilon$ весьма логично предположить, что регулярное решение вариационного неравенства (2.34) положительно, а значит, удовлетворяет (2.37).

В [11], [14] предложены приемы построения асимптотических решений γ_* , оставляющих в (2.37) невязку $O(\varepsilon^T)$ с произвольным, наперед заданным T . Однако перенесение их на случай вариационных неравенств затруднительно (дело в том, что в [11], [14] использовалась дополнительная гладкость правой части $\varphi - \psi$ и решения γ_* уравнения (2.37), но она исчезает у решения результирующего неравенства). В данной статье мы ограничиваемся конструкцией асимптотических решений задачи (2.34) с “логарифмической”, а не степенной точностью.

§ 3. Главный член асимптотики и его обоснование

3.1. Асимптотическое решение результирующего неравенства.

Пусть, как и в § 2, функции f и φ из (1.2) и (1.5) не зависят от ε . Примем еще предположение о множествах (2.5), сформулированное в п. 2.1.3°. Задача (2.34) содержит большой параметр $\Lambda = |\ln \varepsilon|$ и естественно взять в качестве основного члена асимптотики ее решения функцию

$$\gamma_* = \pi \Lambda^{-1}(\varphi - \psi)_+, \quad (3.1)$$

где $(t)_+ = (t + |t|)/2$ – положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$. В самом деле, для γ_* , во-первых, выполнено условие (2.31) и, во-вторых, после замены γ на γ_* в левых частях равенства из (2.29) или неравенства из (2.30) появляется невязка $O(\Lambda^{-1})$, меньшая по порядку, чем правые части $O(1)$ этих соотношений.

Ясно, что $\gamma_* \in W_\infty^1(\Gamma)$. Заменим во всех формулах из §2 плотность γ на γ_* . В силу предложения 2.1.1° решение (2.8) задачи (2.1) обладает асимптотикой (2.9), согласованной с асимптотикой главного члена (2.27) внутреннего разложения. Теперь, для того чтобы обосновать полученную асимптотику решения задачи (1.2)–(1.5), необходимо “склеить” внешнее и внутреннее разложения, определив глобальное асимптотическое приближение U , и оценить разность $u - U$.

Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция, равная единице в окрестности начала координат, $0 \leq \chi \leq 1$, и

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon^{-1/2}r), \quad X_\varepsilon(x) = 1 - \chi(\varepsilon^{-1/2}r), \quad (3.2)$$

причем χ_ε и X_ε продолжены с $\mathcal{U} \cap \Omega$ на Ω нулем и единицей, соответственно. Положим

$$U(\varepsilon, x) = X_\varepsilon(x)v_*(x) + \chi_\varepsilon(x)(-\gamma_*(s)E(\eta; s) + a_*(s)), \quad (3.3)$$

где координаты (s, η) определены согласно (2.14) и (2.16), функция v_* задана равенством (2.8) с заменой γ на γ_* ,

$$a_*(s) = \pi^{-1}\Lambda\gamma_*(s) + \psi(s). \quad (3.4)$$

Отметим, что по сравнению с (2.28) из правой части (3.4) исчезла сумма $-\pi^{-1}\gamma_* \ln H + J\gamma_*$, представляющая собой невязку, оставшуюся в соотношениях (2.29) и (2.30). Это обстоятельство снижает точность согласования внешнего и внутреннего разложений, но зато благодаря расположению носителей срезающих функций (3.2) становится верным неравенство

$$U(\varepsilon, x) = a_*(s) = (\varphi(s) - \psi(s))_+ + \psi(s) \geq \varphi(s) \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon.$$

Заметим, что $V \in W_2^1(\Omega)$, а интеграл из (2.8) – гладкая функция на $\text{supp } X_\varepsilon$ (она имеет сингулярности только на Γ). Кроме того, $\gamma_* \in W_2^1(\Gamma)$, а значит, и второе слагаемое из (3.3) попадает в пространство $W_2^1(\Omega)$. Наконец, $U = v_* = 0$ на Σ , т.е. функция (3.3), рассматриваемая как глобальное приближение к решению задачи (1.2)–(1.5), содержится в множестве (1.6).

3.2. Конструкция глобального асимптотического приближения в общем случае. С целью распространить оценки на ситуации, с которыми мы столкнемся в следующих параграфах, обобщим формулу (3.3).

Предположим, что справедливы представления

$$f(\varepsilon, x) = f^\circ(\Lambda, x) + \tilde{f}(\varepsilon, x), \quad \varphi(\varepsilon, s) = \varphi^\circ(\Lambda, s) + \tilde{\varphi}(\varepsilon, s) \quad (3.5)$$

с малыми остатками,

$$\|\tilde{f}(\varepsilon, \cdot); L_2(\Omega)\| = \delta_f, \quad \|\tilde{\varphi}(\varepsilon, \cdot); W_2^1(\Gamma)\| = \delta_\varphi. \quad (3.6)$$

Через $V(\Lambda, \cdot)$ обозначим ограниченное решение задачи (2.1) с правой частью $f^\circ(\Lambda, \cdot) \in L_p(\Omega)$, $p > 3$, а через $\psi(\Lambda, \cdot) \in C^1(\Gamma)$ – его след на Γ . Вид всех зависимостей от $\Lambda = |\ln \varepsilon|$ будет фиксирован позднее. Здесь для краткости не будем писать аргумент Λ у функций f° , φ° и т. д. Считаем, что $\varphi^\circ \in C^1(\Gamma)$.

Допустим, что найдена неотрицательная функция $\gamma_* \in W_2^{1+\tau}(\Gamma)$, где $\tau \in (0, \frac{1}{2})$, и справедливы высказывания

$$\begin{aligned} \gamma_*(s) > 0 &\implies J\gamma_*(s) - \pi^{-1}\gamma_*(s) \ln(\varepsilon H(s)) - Y(s) = \varphi^\circ(s) - \psi(s), \\ \gamma_*(s) = 0 &\implies J\gamma_*(s) - \pi^{-1}\gamma_*(s) \ln(\varepsilon H(s)) - Y(s) \geq \varphi^\circ(s) - \psi(s). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Величина Y играет роль невязки в соотношениях (2.29) и (2.30), ее малость выражается формулой, подобной (3.6),

$$\|Y; W_2^1(\Gamma)\| = \delta_Y. \quad (3.8)$$

Под v_* подразумевается сумма (2.8), где $\gamma = \gamma_*$. Пусть

$$a_*(s) = \pi^{-1}\Lambda\gamma_*(s) + \psi(s) + J\gamma_*(s) - \pi^{-1}\gamma_*(s) \ln H(s) - Y(s) + \tilde{\varphi}(\varepsilon, s) \quad (3.9)$$

и U – функция, заданная формулой (3.3) со всеми вышеуказанными заменами. Как следует из (3.7) и (3.9), справедливо неравенство

$$U(\varepsilon, x) \geq \varphi(\varepsilon, s), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \quad (3.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В обозначениях, принятых в п. 3.1, имеем $\tilde{\varphi} = 0$ и $\tilde{f} = 0$. Величины (3.4) и (3.9) совпадут, если положить $Y = -\pi^{-1}\gamma_* \ln H + J\gamma_*$; при этом $\delta_Y = O(\Lambda^{-1})$ и, разумеется, $\delta_\varphi = \delta_f = 0$.

Та же аргументация, что и в предыдущем разделе, позволяет заключить, что $U \in K$. Таким образом, можно подставить U вместо ζ в (1.7) и получить, что

$$(\nabla_x u, \nabla_x u - \nabla_x U)_\Omega \leq (f, u - U)_\Omega. \quad (3.11)$$

В п. 3.3 будет выведено аналогичное неравенство, в котором u и U меняются местами, а в п. 3.4 на основе этих неравенств будет оценена норма $\|u - U; W_2^1(\Omega)\|$.

3.3. Вариационное неравенство для U . В силу предположения о форме поверхности $\partial\Omega$ вблизи экватора Γ (см. п. 1.1) и в силу определения (3.2) χ_ε и X_ε функция U удовлетворяет условию Неймана (1.4). Кроме того, используя неотрицательность плотности γ_* и формулы (2.23), (2.26), заключаем, что для U выполняются соотношения (1.5). Так как $u \in K$, то теперь находим, что

$$\begin{aligned} &(\nabla_x U, \nabla_x U - \nabla_x u)_\Omega + \int_\Omega (U - u) \Delta_x U \, dx \\ &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} (U - u) \partial_n U \, ds_x = - \int_{\Gamma_\varepsilon} (\varphi - u) \partial_n U \, ds_x \leq 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразуем интеграл из левой части (3.12). С учетом (2.15) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_x U &= [\Delta_x, X_\varepsilon]v_* + X_\varepsilon \Delta_x v_* + [\Delta_x, \chi_\varepsilon](a_* - \gamma_* E) \\ &\quad + \chi_\varepsilon A^{-1} \frac{\partial}{\partial s} A^{-1} \frac{\partial}{\partial s} (a_* - \gamma_* E) - \chi_\varepsilon A^{-1} \frac{\partial A}{\partial y_2} \gamma_* \frac{\partial E}{\partial y_2} - \chi_\varepsilon \gamma_* \Delta_y E. \end{aligned}$$

Здесь $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ — коммутатор операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а функции имеют те же аргументы, что и в (3.3), (2.15). Вспоминая уравнения, которым удовлетворяют v_* и E , и обращаясь к (3.2), (3.5), продолжаем преобразования

$$\begin{aligned} -\Delta_x U &= f - \tilde{f} - \chi_\varepsilon f^\circ + [\Delta_x, \chi_\varepsilon](v_* - a_* + \gamma_* E) \\ &\quad + \chi_\varepsilon A^{-1} \frac{\partial A}{\partial y_2} \gamma_* \frac{\partial E}{\partial y_2} - \chi_\varepsilon A^{-1} \frac{\partial}{\partial s} A^{-1} \frac{\partial}{\partial s} (a_* - \gamma_* E) \\ &\equiv f + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Итак,

$$(\nabla_x U, \nabla_x U - \nabla_x u)_\Omega \leq (f, U - u)_\Omega + \sum_{m=1}^5 (F_m, U - u)_\Omega. \quad (3.14)$$

Сложим неравенства (3.11) и (3.14). Имеем

$$\|\nabla_x u - \nabla_x U; L_2(\Omega)\|^2 \leq \sum_{m=1}^5 (F_m, U - u)_\Omega. \quad (3.15)$$

Далее норму разности $\nabla_x u - \nabla_x U$ в $L_2(\Omega)$ обозначаем M .

3.4. Оценка правой части неравенства (3.15). Приступим к оценке скалярных произведений $S_m = (F_m, U - u)_\Omega$. Будем рассматривать их в порядке возрастания сложности вывода оценки.

Сначала обратимся к случаю $m = 5$. Интегрируя по частям в криволинейных координатах (s, y) , получим

$$\begin{aligned} |S_5| &= \left| \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} \chi_\varepsilon A^{-1} \frac{\partial}{\partial s} (U - u) \frac{\partial}{\partial s} (a_* - \gamma_* E) ds dy \right| \\ &\leq cM \left\{ \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} \chi_\varepsilon \left| \frac{\partial a_*}{\partial s} \right|^2 ds dy + \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}_+^2} \chi_\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial s} \gamma_* E \right|^2 ds dy \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подчеркнем, что $C > A > c > 0$ в $\mathcal{U}$ и поверхностные интегралы не возникают. Так как $\chi_\varepsilon(x) = 0$ при $r > c\varepsilon^{1/2}$, то в силу (3.9) для первого интеграла I_1 в фигурных скобках в (3.16) верно неравенство

$$|I_1| \leq c\varepsilon \left((1 + \Lambda^2) \|\gamma_*; W_2^1(\Gamma)\|^2 + \|\psi; W_2^1(\Gamma)\|^2 + \|J\gamma_*; W_2^1(\Gamma)\|^2 + \delta_Y^2 + \delta_\varphi^2 \right).$$

В начале п. 2.1 уже упоминалось, что

$$\|\psi; W_2^1(\Gamma)\| \leq c_p \|f^\circ; L_p(\Omega)\| \equiv c_p \delta_o, \quad p > 3. \quad (3.17)$$

Кроме того, ввиду свойств оператора J , перечисленных в п. 2.4,

$$\|J\gamma_*; W_2^1(\Gamma)\| \leq c_\tau \|\gamma_*; W_2^{1+\tau}(\Gamma)\| \equiv c_\tau \delta_\gamma, \quad \tau \in (0, \frac{1}{2}). \quad (3.18)$$

Следовательно, при некоторых фиксированных τ и p

$$|I_1|^{1/2} \leq c\varepsilon^{1/2} (\delta_Y + \delta_\varphi + \delta_o + (1 + \Lambda) \delta_\gamma). \quad (3.19)$$

Рассмотрим последний интеграл I_2 в (3.16). Заметим, что согласно (2.22)

$$E(\eta; t) = E\left(\frac{h(s)}{h(t)}(\eta_1 - h_+(s)) + h_+(t), \frac{h(s)}{h(t)}\eta_2; s\right) - \ln \frac{h(t)}{h(s)}.$$

Поэтому, учитывая (2.24) и (2.25), находим

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq c\varepsilon^{1/2}} |E(\varepsilon^{-1}y; s)|^2 dy &\leq c\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|^2), \\ \int_{|y| < c\varepsilon^{1/2}} |\partial_s E(\varepsilon^{-1}y; s)|^2 dy &\leq c \int_{|y| < c\varepsilon^{1/2}} (1 + \varepsilon^{-2}|y|^2) |\nabla_\eta E(\varepsilon^{-1}y; s)|^2 dy \leq c\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отсюда выводим неравенство

$$|I_2|^{1/2} \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \Lambda)\|\gamma_*; W_2^1(\Gamma)\|,$$

которое вместе с (3.19) дает искомую оценку

$$|S_5| \leq c\varepsilon^{1/2}M(\delta_Y + \delta_\varphi + \delta_o + (1 + \Lambda)\delta_\gamma). \quad (3.21)$$

Следующее утверждение вытекает, например, из принципа Рэлея.

ЛЕММА 3.2. *Для функции $R \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющей условию $R = 0$ на Σ , справедливо неравенство*

$$\|\nabla_x R; L_2(\Omega)\| \geq \lambda^{1/2}\|R; L_2(\Omega)\|,$$

где λ – первое собственное число задачи (2.1), $\lambda > 0$.

Теперь нетрудно оценить скалярное произведение, содержащее $\tilde{f}$,

$$|S_1| \leq \|\tilde{f}; L_2(\Omega)\| \cdot \|U - u; L_2(\Omega)\| \leq \lambda^{-1/2}\delta_f M. \quad (3.22)$$

ЛЕММА 3.3. *В условиях леммы 3.2 выполняется неравенство*

$$\|\nabla_x R; L_2(\Omega)\| \geq c\|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1}R; L_2(\Omega)\|. \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве $\Omega \setminus \mathcal{U}$ весовой множитель из правой части (3.23) отделен от нуля и ограничен. Кроме того, в силу леммы 3.2

$$\|\nabla_x(\chi_d R); L_2(\Omega)\| \leq c_d \|\nabla_x R; L_2(\Omega)\|,$$

здесь d малое, но фиксированное положительное число. Таким образом, достаточно оценить интеграл

$$\int_{\Omega \cap \mathcal{U}} r^{-2}(1 + |\ln r|)^{-2} |\chi_d(x)R(x)|^2 dx.$$

Это делается при помощи известного одномерного неравенства Харди

$$\int_0^{2d} r^{-1} \left| \ln \frac{r}{2d} \right|^{-2} |Z(r)|^2 dr < 4 \int_0^{2d} r \left| \frac{dZ}{dr}(r) \right|^2 dr,$$

справедливого для любой функции $Z \in C_0^\infty[0, 2d]$, которое нужно дополнительно проинтегрировать по длине дуги $s \in \Gamma$ и полярному углу $\theta \in [0, \pi)$, учесть формулу для якобиана при замене $(s, r, \theta) \mapsto (s, y) \mapsto x$ и замкнуть полученное соотношение по нормам в $W_2^1(\Omega)$.

Теперь доступны для рассмотрения второй и четвертый члены справа в (3.15). Имеем

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1}(u - U); L_2(\Omega)\| \cdot \|r(1 + |\ln r|)\chi_\varepsilon f^\circ; L_2(\Omega)\| \\ &\leq cM\varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|)\|f^\circ; L_2(\Omega)\| \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \Lambda)\delta_o M, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} |S_4| &\leq cM \left(\int_\Gamma |\gamma_*(s)|^2 \int_{|y| \leq c\varepsilon^{1/2}} r^2(1 + |\ln r|)^2 \left| \frac{\partial E}{\partial y_2} \left(\frac{y}{\varepsilon}, s \right) \right|^2 ds dy \right)^{1/2} \\ &\leq cM \|\gamma_*; L_2(\Gamma)\| \varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|) \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \Lambda)\delta_\gamma M. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В (3.24) принята во внимание узость носителя χ_ε , а в (3.25) использована подобная (3.20) оценка для интеграла, содержащего $\nabla_y E$.

Наибольшие сложности доставляет оценка выражения S_3 , поскольку неравенство (3.23) оказывается слишком грубым для него из-за логарифмического множителя. Сначала отщепим от S_3 те интегралы, для изучения которых достаточно применить неравенство (3.23). Замечая, что коэффициенты коммутатора $[\Delta_x, \chi_\varepsilon]$ аннулируются вне множества $T \times \Gamma = \{x \in \mathcal{U} \cap \Omega : c\varepsilon^{1/2} \leq r \leq C\varepsilon^{1/2}\}$ и обращаясь к формуле (2.13), получаем, что при $\gamma_* \in W_2^1(\Gamma)$

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega (U - u)[\Delta_x, \chi_\varepsilon] \tilde{v}_* dx \right| \\ &\leq cM \left(\int_{T \times \Gamma} r^2(1 + |\ln r|)^2 (\varepsilon^{-2} |\tilde{v}_*(x)|^2 + \varepsilon^{-1} |\nabla_x \tilde{v}_*(x)|^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq cM \left(\int_{T \times \Gamma} (1 + |\ln r|)^2 (r^{-2} |\tilde{v}_*(x)|^2 + |\nabla_x \tilde{v}_*(x)|^2) dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_\beta M (1 + |\ln \varepsilon|) \varepsilon^{(1-\beta)/2} |\tilde{v}_*|_\beta \leq c_{p,\beta} \varepsilon^{(1-\beta)/2} (1 + \Lambda) (\delta_o + \delta_\gamma) M. \end{aligned}$$

Здесь функция $\tilde{v}_*$ определена равенством (2.11) с обычными заменами. Далее выбираем $\beta = 1/2$ — некоторое огрубление этой оценки не скажется на окончательных результатах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если $\gamma_* \in W_\infty^1(\Gamma)$, то можно применить неравенство (2.12) из предложения 2.1.1^o

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (U - u)[\Delta_x, \chi_\varepsilon] \tilde{v}_* dx \right| &\leq cM (\|f; L_p(\Omega)\| + \|\gamma_*; W_\infty^1(\Gamma)\|) \left(\int_T (1 + |\ln r|)^4 dr \right)^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \Lambda)^2 (\delta_o + \|\gamma_*; W_\infty^1(\Gamma)\|) M. \end{aligned}$$

Точно так же из представления (2.24) выводим

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega (U - u)[\Delta_x, \chi_\varepsilon] \left(\gamma_* \left(E - \pi^{-1} \ln \left(\frac{\rho}{H} \right) \right) \right) dx \right| \\ &\leq cM \left(\int_{T \times \Gamma} r^2(1 + |\ln r|)^2 (\varepsilon^{-2} \rho^{-4} + \varepsilon^{-1} \rho^{-2}) |\gamma_*(s)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq cM \varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|) \|\gamma_*; L_2(\Gamma)\| \leq c\varepsilon^{1/2}(1 + \Lambda) \delta_\gamma M. \end{aligned}$$

Обращаясь к (2.9), (2.24) и (3.9), видим, что осталось оценить интеграл

$$I = \int_{\Omega} (U - u) [\Delta_x, \chi_{\varepsilon}] (Y - \tilde{\varphi}) dx.$$

Функции Y и $\tilde{\varphi}$ зависят от переменной s , а функция χ_{ε} — от r (т.е. от y). Поэтому в силу (2.15)

$$\begin{aligned} [\Delta_x, \chi(\varepsilon^{-1/2}r)] (Y(s) - \tilde{\varphi}(s)) &= (Y(s) - \tilde{\varphi}(s)) \left(A(s, y_2)^{-1} \Delta_y \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|) \right. \\ &\quad \left. + (1 - A(s, y_2)^{-1}) \Delta_y \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|) + A(s, y_2)^{-1} \frac{\partial A}{\partial y_2}(s, y) \frac{\partial}{\partial y_2} \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

В соответствии с разбиением (3.26) представим I как сумму $I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}$. Поскольку $A(s, y_2) = 1 + y_2 k(s)$ и $|\nabla_y^k \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|)| \leq c_k \varepsilon^{-k/2}$, то в силу (3.23)

$$\begin{aligned} |I^{(2)}| &\leq cM \left(\int_{\Gamma} |Y(s) - \tilde{\varphi}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\varepsilon^{-2} \int_T r^2 (1 + |\ln r|)^2 |y_2|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon^{1/2} (1 + \Lambda) (\delta_Y + \delta_{\varphi}) M. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} |I^{(3)}| &\leq cM \left(\int_{\Gamma} |Y(s) - \tilde{\varphi}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\varepsilon^{-1} \int_T r^2 (1 + |\ln r|)^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon^{1/2} (1 + \Lambda) (\delta_Y + \delta_{\varphi}) M. \end{aligned}$$

Наконец, в интеграле $I^{(1)}$ перейдем к криволинейным координатам (s, y) (соответствующий якобиан равен $A(s, y_2)$). Имеем

$$I^{(1)} = \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^2} (U(\varepsilon, x) - u(\varepsilon, x)) (Y(s) - \tilde{\varphi}(s)) \Delta_y \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|) ds dy. \quad (3.27)$$

Именно для этого интеграла применение оценки (3.23) влечет нежелательную погрешность.

Проведем вспомогательные построения. Положим $R(s, y) = U(\varepsilon, x) - u(\varepsilon, x)$ и

$$\overline{R}(s) = (\text{mes}_2 T)^{-1} \int_T R(s, y) dy, \quad \tilde{R}(s, y) = R(s, y) - \overline{R}(s).$$

По неравенству Пуанкаре

$$\int_{\Gamma} \left(\int_T |\nabla_y \tilde{R}(s, y)|^2 dy \right) ds \geq c\varepsilon^{-1} \int_{\Gamma} \left(\int_T |\tilde{R}(s, y)|^2 dy \right) ds, \quad (3.28)$$

здесь множитель $\varepsilon^{-1} = (\varepsilon^{1/2})^{-2}$ учитывает зависимость константы от размеров области $T = \{y \in \mathbb{R}^2 : C\varepsilon^{1/2} \geq |y| \geq c\varepsilon^{1/2}, y_2 > 0\}$.

Согласно определению срезающей функции (см. п. 3.1)

$$\int_T \Delta_y \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|) dy = 0, \quad \text{supp } \Delta_y \chi_{\varepsilon} = T.$$

Следовательно, в (3.27) разность $U - u$ можно заменить на $\tilde{R}$. Тогда в силу (3.28)

$$|I^{(1)}| \leq c \left(\int_{\Gamma} \int_T |\nabla_y \tilde{R}(s, y)|^2 ds dy \right)^{1/2} \times \left(\int_{\Gamma} |Y(s) - \tilde{\varphi}(s)|^2 ds \int_T \varepsilon |\Delta_y \chi(\varepsilon^{-1/2}|y|)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Осталось обратить внимание на очевидное равенство $\nabla_y \tilde{R} = \nabla_y U - \nabla_y u$ и получить

$$|I^{(1)}| \leq c(\delta_Y + \delta_{\varphi})M.$$

Итак, оценен последний фрагмент выражения S_3 . Используя полученные неравенства и учитывая малость параметра $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$|S_3| \leq c(\delta_Y + \delta_{\varphi} + \varepsilon^{1/4}(1 + \Lambda)(\delta_o + \delta_{\gamma}))M. \quad (3.29)$$

Теперь, учитывая формулы (3.21), (3.22), (3.24), (3.25), (3.29), находим мажоранту для правой части (3.15).

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть выполнены требования, перечисленные в п. 3.2. Тогда решение и задачи (1.2)–(1.5) и функция (3.3), определенная по плотности γ_* из (3.7), связаны соотношением*

$$\|\nabla_x u - \nabla_x U; L_2(\Omega)\| \leq c(\delta_f + \delta_{\varphi} + \delta_Y + \varepsilon^{1/4}(1 + |\ln \varepsilon|)(\delta_o + \delta_{\gamma})), \quad (3.30)$$

в котором δ -константы взяты из (3.6), (3.8), (3.17), (3.18).

3.5. Обоснование главного члена асимптотики. Согласно замечанию 3.1 в ситуации, рассмотренной в §2 и в п. 3.1, имеем $\delta_f = \delta_{\varphi} = 0$ и $\delta_Y = O(\Lambda^{-1})$. Кроме того, $\delta_o = O(1)$ и $\delta_{\gamma} = O(\Lambda^{-1})$ в соответствии с (3.17), (3.18) и (3.1). Теперь можно конкретизировать теорему 3.5.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть справедливы предположения, сформулированные в п. 2.1 и в п. 3.1. Пусть еще U – глобальное асимптотическое приближение (3.3) к решению и задачи (1.2)–(1.5), причем γ_* – плотность (3.1), v_* – решение (2.8) задачи (2.1) при $\gamma = \gamma_*$, E – функция (2.22), a_* – величина (3.4), а X_{ε} и χ_{ε} – срезающие функции (3.2). Тогда справедливо неравенство*

$$\|\nabla_x u - \nabla_x U; L_2(\Omega)\| \leq c |\ln \varepsilon|^{-1}, \quad (3.31)$$

в котором постоянная c не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

Приведем несколько комментариев к теореме 3.6.

В (3.31) содержится только оценка для нормы градиента, но, разумеется, леммы 3.2 и 3.3 дают оценки и самой разности $u - U$. Сказанное в равной мере относится и к неравенству (3.30).

Нетрудно проверить соотношения

$$\begin{aligned} \|X_{\varepsilon}V + \chi_{\varepsilon}\psi; W_2^1(\Omega)\| &= O(1), \\ \|X_{\varepsilon}(v_* - V); W_2^1(\Omega)\| &= O(1), \\ \|\chi_{\varepsilon}(a_* - \gamma_*E - \psi); W_2^1(\Omega)\| &= O(1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Таким образом, из (3.31) вытекает, в частности, что каждое из слагаемых, указанных в (3.32), включено в глобальное асимптотическое приближение $U(\varepsilon, x)$ обосновано. Это обстоятельство, конечно же, оправдывает асимптотические построения, проведенные в § 2.

В п. 2.1.3° к функциям ψ и φ предъявлены завышенные требования. Просматривая доказательство теоремы 3.5, убеждаемся в том, что теорема 3.5 сохраняет силу, если $(\varphi - \psi)_+ \in W_2^{1+\tau}(\Gamma)$ при каком-нибудь $\tau \in (0, \frac{1}{2})$. Тем не менее, условие $\varphi, \psi \in C^1(\Gamma)$ позволяет использовать более простое утверждение 1) предложения 2.1 (см. замечание 3.4).

Несмотря на то, что найдена асимптотика решения u , достоверная информация о зоне контакта неизвестна. Конечно, весьма правдоподобен тот факт, что эта зона мало отличается от $\{x \in \Gamma_\varepsilon : \gamma_*(s) > 0\}$, однако обосновать его не удастся. Дело в том, что утверждение теоремы 3.6 недостаточно для оценки (поточечной) следа разности $u - U$ на Γ_ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. В случае $\psi < \varphi$ (т.е. $\gamma_* > 0$; ср. с п. 2.1.2°) имеется подход, позволяющий установить, что экваториальная полоска (1.1) занята областью контакта целиком. Он был реализован в работе [9], посвященной задаче Синьорини с препятствиями на множествах с малыми диаметрами. Центральным моментом — проверка совпадения решений нелинейной задачи (1.2)–(1.5) и линейной задачи (1.2)–(1.4), (2.6). Соответствующее доказательство использует асимптотически точные весовые оценки решений краевых задач в областях с сингулярно возмущенной границей (см. [30], [24] и др.). Оно весьма громоздко и в настоящей статье, как и в [4]–[8], мы ограничиваемся формальными рассуждениями о структуре зоны контакта. Подчеркнем, что в наиболее интересном случае (разность $\varphi - \psi$ меняет знак) упомянутый подход все равно не годится из-за полного отсутствия сведений о строении зоны контакта вблизи точек множества Ξ^0 (см. п. 2.1.3°).

§ 4. Второй член асимптотики решения. Вариация зоны контакта

4.1. Двучленная асимптотика решения результирующего неравенства (попытка первая). Пусть функции f и φ из (1.2) и (1.5) допускают представления

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, x) &= f_0(x) + \Lambda^{-1}f_1(x) + \tilde{f}(\varepsilon, x), \\ \varphi(\varepsilon, s) &= \varphi_0(s) + \Lambda^{-1}\varphi_1(s) + \tilde{\varphi}(\varepsilon, s), \end{aligned} \quad (4.1)$$

причем $f_i \in L_p(\Omega)$ при $p > 3$, $\varphi_i \in C^1(\Gamma)$ и в соответствии с (3.6)

$$\delta_f = O(\Lambda^{-2}), \quad \delta_\varphi = O(\Lambda^{-2}). \quad (4.2)$$

Для $i = 0, 1$ найдем ограниченные решения V_i задачи (2.1) с правыми частями f_i ; через $\psi_i \in C^1(\Gamma)$ обозначим следы V_i на Γ . Плотность $\hat{\gamma}$ и сингулярное решение $\hat{v}$ задачи (2.1) с правой частью $f^\circ = f_0 + \Lambda^{-1}f_1$ попробуем искать в виде

$$\hat{\gamma}(s) = \Lambda^{-1}\gamma_0(s) + \Lambda^{-2}\gamma_1(s), \quad (4.3)$$

$$\hat{v}(x) = V_0(x) + \Lambda^{-1}V_1(x) + \int_\Gamma \hat{\gamma}(t)G(x; t) dt. \quad (4.4)$$

Заметим, что из формул (4.3) и (4.4) можно отбросить слагаемые с нижними индексами 1 и сохранить утверждение теоремы 3.6 (при выводе оценки (3.31) из (3.30) в мажоранте появится дополнительная величина

$$c(\|f - f_0; L_2(\Omega)\| + \|\varphi - \varphi_0; W_2^1(\Gamma)\|),$$

которая согласно (4.1) и (4.2) есть $O(|\ln \varepsilon|^{-1})$. Таким образом, нам известно первое слагаемое справа в (4.3)

$$\gamma_0(s) = \pi(\varphi_0(s) - \psi_0(s))_+ \quad (4.5)$$

(см. (3.1)). Попытаемся построить асимптотическую поправку $\Lambda^{-2}\gamma_1$. Если бы вместо вариационного неравенства

$$(J\gamma, \gamma - \sigma)_\Gamma - \pi^{-1}(\gamma \ln(\varepsilon H), \gamma - \sigma)_\Gamma \leq (\varphi_0 - \psi_0 + \Lambda^{-1}(\varphi_1 - \psi_1), \gamma - \sigma)_\Gamma \\ \forall \sigma \in C^\infty(\Gamma), \quad \sigma \geq 0, \quad (4.6)$$

(ср. с (2.34)) мы решали уравнение

$$J\gamma(s) - \pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) = \varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s)), \quad s \in \Gamma \quad (4.7)$$

(ср. с (2.37)), то, подставляя (4.3) в (4.7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях Λ , мы пришли бы к формуле

$$\gamma_1(s) = \gamma_0(s) \ln H(s) - \pi J\gamma_0(s) + \pi(\varphi_1(s) - \psi_1(s)). \quad (4.8)$$

Однако необходимо учесть условие (2.31) неотрицательности плотности. Явно недостаточно в качестве γ_1 взять положительную часть выражения (4.8): оно может оказаться меньше нуля в тех точках s , для которых $\gamma_0(s) > 0$ и отрицательные значения $\gamma_1(s)$ допустимы при большом $\Lambda = |\ln \varepsilon|$. Итак, простые представления (4.3) и (4.4) для асимптотического решения непригодны.

4.2. Вариация зоны контакта. Как уже говорилось в конце §3, в рамках формального асимптотического анализа множество $\Gamma_\varepsilon^+ = \{x \in \Gamma_\varepsilon : s \in \Xi^+\}$ выступает как главное приближение к зоне контакта $\Xi^+(\varepsilon)$ (обозначения см. в п. 2.1; при этом φ, ψ заменяются на φ_0, ψ_0). Для тех $s \in \Xi^+$, для которых $\gamma_0(s) \equiv \varphi_0(s) - \psi_0(s) > c_0 > 0$, величина $\hat{\gamma}(s)$ вычисляется по формуле (4.3), тогда условие (2.31) не нарушается (при достаточно малом ε), а из уравнения (4.7) будет устранена невязка $O(\Lambda^{-1})$. Если же $s \in \Xi^-$ и $\varphi_0(s) - \psi_0(s) < -c_0 < 0$, то положим $\gamma_1(s) = 0$ и $\hat{\gamma}(s) = 0$: в таких точках неравенство

$$J\gamma(s) - \pi^{-1}\gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) > \varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) \quad (4.9)$$

(ср. с (2.30)) для $\hat{\gamma}$, по-прежнему, выполнено. Таким образом, представление для $\hat{\gamma}$ не выяснено только в малой окрестности множества Ξ^0 , где, как будет видно из дальнейшего, происходит возмущение множества Γ_ε^+ , описывающего зону контакта.

Пусть $\mathcal{V}_q \subset \Gamma$ — малая окрестность точки $s_q \in \Xi^0$ и, для определенности, $\{s \in \mathcal{V}_q : \pm s > \pm s_q\} \subset \Xi^\pm$ (см. предположения из п. 2.1.3°). Оставаясь на позициях формального анализа, возьмем множество

$$\{x \in \Gamma_\varepsilon : s \in \mathcal{V}_q, s \geq s_q + d_q \Lambda^{-1}\} \quad (4.10)$$

в качестве приближения повышенной точности к множеству $\{x \in \Xi^+(\varepsilon) : s \in \mathcal{V}_q\}$. Вычислим величину d_q в (4.10).

Функции φ_i и ψ_i считаем гладкими. Вблизи s_q имеем

$$\varphi_0(s) - \psi_0(s) = b_q(s - s_q) + O(|s - s_q|^2); \quad (4.11)$$

предположим, что $b_q = \partial_s \varphi_q(s_q) - \partial_s \psi_0(s_q) > 0$. Найдем асимптотику функции γ_1 из (4.8) при $s \rightarrow s_q$. Могут возникнуть проблемы только со слагаемым $J\gamma_0$, однако благодаря равенству (2.10)

$$J\gamma_0(s) = J\gamma_0(s_q) + O(|s - s_q|^\beta) \quad (4.12)$$

при любом $\beta \in (0, 1)$. Следовательно,

$$\gamma_1(s) = B_q + O(|s - s_q|^\beta), \quad B_q = \pi(\varphi_1(s_q) - \psi_1(s_q) - J\gamma_0(s_q)). \quad (4.13)$$

Распространим определение $\gamma_0 = \pi(\varphi_0 - \psi_0)$ с $\{x \in \Gamma_\varepsilon^+ : s \in \mathcal{V}_q\}$ на множестве (4.10). Справедливо соотношение

$$\pi(\varphi_0(s) + \psi_0(s)) + \Lambda^{-1}\gamma_1(s) = \pi b_q(s - s_q) + \Lambda^{-1}B_q + \dots,$$

где под многоточием подразумеваются младшие, несущественные члены. Сумма $\pi b_q(s - s_q) + \Lambda^{-1}B_q$ неотрицательна на множестве (4.10), если

$$d_q = -(\pi b_q)^{-1}B_q. \quad (4.14)$$

Все формулы и заключения сохраняются и тогда, когда $b_q < 0$. Случай $b_q = 0$ не рассматривается.

Соотношения (4.10), (4.14) описывают формально главный член вариации множества Γ_ε^+ вблизи точки s_q (оно рассматривается как приближение к зоне контакта $\Xi^+(\varepsilon)$). Точно так же исследуются другие точки из Ξ^0 . Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, дополнительно требуется невырожденность коэффициента b_q в разложении (4.11) около каждой из точек в Ξ^0 . Во-вторых, из-за расширения (или сужения — это зависит от знака числа d_q (4.14)) области действия формулы $\gamma_0 = \pi(\varphi_0 - \psi_0)$ по сравнению с (4.5) изменилось значение слагаемого $-\pi J\gamma_0$ в (4.8), однако приращения длин дуг составляют $O(\Lambda^{-1})$ и потому названным изменением можно пренебречь при определении γ_1 . Именно благодаря последнему факту можно изучать каждую точку из Ξ^0 по отдельности, взаимное влияние вариаций множества Γ_ε^+ не сказывается на первых двух членах асимптотики плотности.

4.3. Двучленная асимптотика решения результирующего неравенства (попытка вторая). Основываясь на формальном анализе, проведенном в предыдущем разделе, положим

$$\tilde{\gamma}(s) = \Lambda^{-1}(\pi(\varphi_0(s) - \psi_0(s)) + \Lambda^{-1}\gamma_1(s))_+, \quad (4.15)$$

где γ_1 — величина (4.8), причем γ_0 определена формулой (4.5). Найдем невязку, определяемую плотностью (4.15) в вариационном неравенстве (4.6).

Если $\tilde{\gamma}(s) > 0$, то

$$J\tilde{\gamma}(s) - \pi^{-1}\tilde{\gamma}(s) \ln(\varepsilon H(s)) + \tilde{Y}(s) = \varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) \quad (4.16)$$

(ср. с (2.29) и (4.7)); здесь

$$\tilde{Y}(s) = \pi^{-1}(\tilde{\gamma}(s) - \Lambda^{-1}\gamma_0(s)) \ln H(s) + \Lambda^{-1}J\gamma_0(s) - J\tilde{\gamma}(s). \quad (4.17)$$

В случае $\tilde{\gamma}(s) = 0$, т.е. при $\pi(\varphi_0(s) - \psi_0(s)) + \Lambda^{-1}\gamma_1(s) \leq 0$, выполнено неравенство

$$J\tilde{\gamma}(s) - \pi^{-1}\tilde{\gamma}(s) \ln(\varepsilon H(s)) + \tilde{Y}(s) \geq \varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) \quad (4.18)$$

(ср. с (2.30) и (4.9)). Именно такие соотношения и требовались в (3.7) при определении понятия невязки.

Для использования теоремы 3.5 нужно оценить величину (3.8), т.е. норму функции (4.17) в пространстве $W_2^1(\Gamma)$. Из-за присутствия в (4.17) оператора J , для которого неравенство

$$\|J(\tilde{\gamma} - \Lambda^{-1}\gamma_0); W_2^1(\Gamma)\| \leq c_\tau \|\tilde{\gamma} - \Lambda^{-1}\gamma_0; W_2^{1+\tau}(\Gamma)\| \quad (4.19)$$

перестает выполняться в случае $\tau = 0$, получить такую оценку авторам не удалось несмотря на явную малость разности $\tilde{\gamma} - \Lambda^{-1}\gamma_0$. Даже само включение $\tilde{\gamma} \in W_2^{1+\tau}(\Gamma)$ проблематично: операция $\sigma \mapsto (\sigma)_+$ не является непрерывной на $W_2^{1+\tau}(\Gamma)$, $\tau > 0$.

4.4. Двучленная асимптотика решения вариационного неравенства (попытка третья, последняя и успешная). Предъявим дополнительные требования к данным задачи

$$\varphi_0 \in C^2(\Gamma), \quad \psi_0 \in C^2(\Gamma). \quad (4.20)$$

Для того чтобы обеспечить включение (4.20) для следа ψ_0 на Γ решения V_0 достаточно предположить, что правая часть f_0 принадлежит классу Гёльдера $C^{0,\varkappa}(\Omega)$ при каком-нибудь $\varkappa > 0$, тогда $V_0 \in C^{2,\varkappa}(\Omega \cap \mathcal{U}) \subset C^2(\Omega \cap \mathcal{U})$ (см. [31]). Пусть еще, как и ранее, выполнены требования из п. 2.1.3°, причем

$$\partial_s \varphi_0(s) - \partial_s \psi_0(s) \neq 0 \quad \forall s \in \Xi^0. \quad (4.21)$$

Для f_1 и φ_1 справедливы следующие условия: $f_1 \in L_p(\Omega)$, $p > 3$, $\varphi_1 \in C^1(\Gamma)$.

Воспользуемся конструкцией, вытекающей из формальных выкладок п. 4.2. Выберем разбиение единицы $\{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{2N}\}$ такое, что $\text{supp } \zeta_0 \cap \Xi^0 = \emptyset$ и $\text{supp } \zeta_q$ содержится в окрестности $\mathcal{V}_q$ точки $s_q \in \Xi^0$. Для определения асимптотического решения γ_* нужно указать, как выглядят произведения $\zeta_0 \gamma_*, \dots, \zeta_{2N} \gamma_*$.

Согласно сказанному в начале п. 4.2 при $q = 0$ имеем

$$\zeta_0(s) \gamma_*(s) = \begin{cases} \Lambda^{-1} \zeta_0(s) \gamma_0(s) + \Lambda^{-2} \zeta_0(s) \gamma_1(s), & s \in \Xi^+; \\ 0, & s \in \Xi^-, \end{cases} \quad (4.22)$$

где γ_0 и γ_1 — функции (4.5) и (4.8). Следуя формальной схеме построения асимптотики зоны контакта, положим

$$\begin{aligned} \zeta_q(s) \gamma_*(s) &= \chi(\Lambda^\alpha(s - s_q)) (\Lambda^{-1} \pi(s - s_q) b_q + \Lambda^{-2} B_q)_+ \\ &+ \begin{cases} (1 - \chi(\Lambda^\alpha(s - s_q))) (\Lambda^{-1} \zeta_q(s) \gamma_0(s) + \Lambda^{-2} \zeta_q(s) \gamma_1(s)), & s \in \Xi^+; \\ 0, & s \in \Xi^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.23)$$

здесь χ — срезающая функция, введенная перед формулой (3.2), α — некоторое число из интервала $(0, 1)$, b_q и B_q — числа из представлений (4.11) и (4.13).

ЛЕММА 4.1. Если заменить $\tilde{\gamma}$ на γ_* и $\tilde{Y}$ на Y_* , где

$$Y_*(s) = \pi^{-1}(\gamma_*(s) - \Lambda^{-1}\gamma_0(s)) \ln H(s) - J\gamma_*(s) + \Lambda^{-1}J\gamma_0(s) + \sum_{q=1}^{2N} \chi(\Lambda^\alpha(s - s_q))(\varphi_0(s) - \psi(s) - (s - s_q)b_q + \Lambda^{-1}\pi^{-1}(\gamma_1(s) - B_q)), \quad (4.24)$$

то соотношения (4.16) и (4.18) останутся верными, соответственно, при тех же условиях $\gamma_*(s) > 0$ и $\gamma_*(s) = 0$, что и прежде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (4.16) проверяется прямой подстановкой формул (4.22)–(4.24) и (4.13). Более трудоемко установить (4.18), поскольку нужно рассмотреть несколько вариантов положения точки s .

Пусть сначала $s \in \mathcal{V}_q$ и $\chi_q(s) \equiv \chi(\Lambda^\alpha(s - s_q)) = 1$. Тогда

$$0 = \gamma_*(s) = \pi(\Lambda^{-1}(s - s_q)b_q + \Lambda^{-2}\pi^{-1}B_q)_+,$$

т.е. $(s - s_q)b_q + \Lambda^{-1}\pi^{-1}B_q \leq 0$. После преобразований оказывается, что левая часть (4.18) равна

$$\varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) - ((s - s_q)b_q + \Lambda^{-1}\pi^{-1}B_q),$$

видно, что она не меньше правой части.

Пусть теперь точка s выбрана так, что $\chi_q(s) = 0$ при всех q . Будем пользоваться вытекающими отсюда неравенствами $|s - s_q| > c\Lambda^{-\alpha}$ и требованием (4.21). Если $s \in \Xi^+$, то $\gamma_0(s) > C_0\Lambda^{-\alpha}$ и поэтому

$$\gamma_*(s) = \Lambda^{-1}\gamma_0(s) + \Lambda^{-2}\gamma_1(s) > C_0\Lambda^{-1-\alpha} - C_1\Lambda^{-2}.$$

Значит, включение $s \in \Xi^+$ невозможно, т.е. $s \in \Xi^-$. Слева в (4.18) появляется выражение $\Lambda^{-1}J\gamma_0(s)$. Так как

$$\varphi_0(s) - \psi_0(s) < -C_0\Lambda^{-\alpha} \quad (4.25)$$

и $\alpha \in (0, 1)$, то при малом ε (большом Λ) соотношение (4.18) выполнено.

Пусть, наконец, $s \in \mathcal{V}_q$ и $0 < \chi_q(s) < 1$. По-прежнему, $|s - s_q| > c\Lambda^{-\alpha}$. Функция γ_* определена формулой (4.23). Таким образом, $s \in \Xi^-$ и

$$(s - s_q)b_q + \Lambda^{-1}\pi^{-1}B_q \leq 0. \quad (4.26)$$

Применяя (4.8) и (4.24), заключаем, что (4.18) эквивалентно следующему неравенству

$$\begin{aligned} (1 - \chi_q(s))\Lambda^{-1}J\gamma_0(s) - \chi_q(s)((s - s_q)b_q + \Lambda^{-1}\pi^{-1}B_q) \\ \geq (1 - \chi_q(s))(\varphi_0(s) - \psi_0(s) + \Lambda^{-1}(\varphi_1(s) - \psi_1(s))). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что последняя формула верна благодаря (4.25) и (4.26).

Итак, γ_* – асимптотическое решение результирующего вариационного неравенства (4.6), причем его невязка имеет вид (4.24). Необходимо оценить величину δ_Y ,

т.е. норму Y_* в пространстве $W_2^1(\Gamma)$. Так как $J: W_2^{1+\varkappa}(\Gamma) \rightarrow W_2^1(\Gamma)$ — непрерывное отображение при любом $\varkappa > 0$, то достаточно изучить выражения

$$\delta_* = \|\gamma_* - \Lambda^{-1}\gamma_0; W_2^{1+\varkappa}(\Gamma)\|, \quad \delta_q = \|Z_q; W_2^1(\Gamma)\|, \quad (4.27)$$

где Z_q — члены суммы по $q = 1, \dots, 2N$ из (4.24).

Подчеркнем, что $\gamma_0 \in W_2^{1+\tau}(\Gamma)$ при $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ (производная $\partial_s \gamma_0$ — кусочно-гладкая функция с конечным набором точек разрыва первого рода). Согласно (4.8) то же самое верно и для γ_1 (оператор $J: W_2^{1+\tau_1}(\Gamma) \rightarrow W_2^{1+\tau_2}(\Gamma)$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \frac{1}{2}$, непрерывен). Рассмотрим вторую норму в (4.27). Ввиду условия (4.20)

$$|\varphi_0(s) - \psi_0(s) - (s - s_q)b_q| \leq c|s - s_q|^2, \quad |\partial_s \varphi_0(s) - \partial_s \psi_0(s) - b_q| \leq c|s - s_q|.$$

Следовательно, оценивая подынтегральные выражения по максимуму модуля, находим

$$\|\chi_q(\varphi_0 - \psi_0 - (s - s_q)b_q); W_2^1(\Gamma)\| \leq c\Lambda^{-3\alpha/2}. \quad (4.28)$$

В силу (4.13)

$$\|(\varphi_1 - \psi_1 - B_q)\partial_s \chi_q; L_2(\Gamma)\| \leq c\Lambda^{-\alpha(\beta-1/2)}, \quad (4.29)$$

где $\beta \in (0, 1)$. Принимая во внимание одномерное дробное неравенство Харди

$$\|\partial_s \gamma_1; W_2^\tau(\Gamma)\| \geq c\|s - s_q|^{-\tau} \partial_s \gamma_1; L_2(\Gamma)\|$$

(см. [32]), выводим

$$\begin{aligned} \|\chi_q \partial_s \gamma_1; L_2(\Gamma)\| &\leq \|\partial_s \gamma_1; L_2(\text{supp } \chi_q)\| \\ &\leq c\Lambda^{-\tau\alpha} \|(s - s_q)^{-\tau} \partial_s \gamma_1; L_2(\text{supp } \chi_q)\| \\ &\leq c\Lambda^{-\tau\alpha} \|\gamma_1; W_2^{1+\tau}(\Gamma)\|. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Формулы (4.29) и (4.30) вместе с одномерным неравенством Фридрихса (произведение $\chi_q(\varphi_1 - \psi_1 - B_q)$ имеет малый носитель) дают оценку для нормы $\|\chi_q(\varphi_1 - \psi_1 - B_q); W_2^1(\Gamma)\|$. Считая $\beta = \tau + 1/2 \in (0, 1)$ в (4.29) и используя (4.28), получаем окончательно, что

$$\|Z_q; W_2^1(\Gamma)\| \leq c(\Lambda^{-3\alpha/2} + \Lambda^{-1-\tau\alpha}). \quad (4.31)$$

Теперь рассмотрим первую величину в (4.27), т.е. оценим нормы функций

$$z_q = \zeta_q \gamma_* - \Lambda^{-1} \zeta_q \gamma_0, \quad q = 0, 1, \dots, 2N,$$

в пространстве $W_2^{1+\varkappa}(\Gamma)$. В силу формулы (4.22) и сказанного ранее о γ_1 ,

$$\|z_0; W_2^{1+\varkappa}(\Gamma)\| = \Lambda^{-2} \|\zeta_0 \gamma_1; W_2^{1+\varkappa}(\Gamma)\| \leq c\Lambda^{-2}. \quad (4.32)$$

Пусть $q = 1, \dots, 2N$. Согласно (4.23) и (4.5) производная $\partial_s z_q$ равна нулю вне объединения множеств (4.10) и Γ_ε^+ , а на нем есть сумма следующих слагаемых:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= (1 - \chi_q(s))\Lambda^{-2} \partial_s (\zeta_q(s) \gamma_1(s)), \\ I_2(s) &= \chi_q(s) \Lambda^{-1} (\pi b_q \Theta(s - s_q) - \partial_s \gamma_0(s)), \\ I_3(s) &= \Lambda^{-1} \pi b_q (\Theta(s - s_q - \Lambda^{-1} d_q) - \Theta(s - s_q)), \\ I_4(s) &= \partial_s \chi_q(s) (\Lambda^{-1} \pi ((s - s_q)b_q - \varphi_0(s) - \psi_0(s)) + \Lambda^{-2} (B_q - \gamma_1(s))), \end{aligned}$$

здесь Θ – функция Хевисайда, а d_q – число (4.14). Отметим, что $\partial_t(t)_+ = \Theta(t)$, а множитель $\chi_q(s)$ в выражении для I_3 опущен, так как он равен единице на $\text{supp } I_3$.

Проще всего оценить норму I_4 . Аналогично (4.28) и (4.30) имеем

$$\|I_4; W_2^\kappa(\Gamma)\| \leq c \|I_1; W_2^1(\Gamma)\| \leq c \Lambda^\alpha (\Lambda^{-1-3\alpha/2} + \Lambda^{-2-\tau\alpha}).$$

Нормы в $L_2(\Gamma)$ слагаемых I_1 , I_2 и I_3 суть $O(\Lambda^{-2})$, $O(\Lambda^{-1-3\alpha/2})$ и $O(\Lambda^{-3/2})$: в первом случае соответствующее неравенство очевидно, во втором – нужно учесть, что длина $\text{supp } I_2$ есть $O(\Lambda^{-\alpha})$ и что ввиду (4.5), (4.11) и (4.20)

$$|\pi b_q \Theta(s - s_q) - \partial_s \gamma_0(s)| \leq c |s - s_q|, \quad (4.33)$$

а в третьем – достаточно заметить, что I_3 – “ступенька” длиной $O(\Lambda^{-\alpha})$ и высотой $O(\Lambda^{-1})$. Таким образом, осталось оценить полунормы

$$\|I_i\| = \left(\int_\Gamma \int_\Gamma |s - t|^{-1-2\kappa} |I_i(s) - I_i(t)|^2 ds dt \right)^{1/2}. \quad (4.34)$$

Пользуясь тем, что $|\chi_q(s) - \chi_q(t)| \leq c \Lambda^{\alpha\nu} |s - t|^\nu$ для $\nu = 2\kappa \in (0, 1)$ при $i = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|I_1\|^2 &\leq \Lambda^{-4} \int_\Gamma \int_\Gamma |s - t|^{-1-2\kappa} |\chi_q(s) - \chi_q(t)|^2 |\partial_s(\zeta_q(s)\gamma_1(s))|^2 ds dt \\ &\quad + \Lambda^{-4} \int_\Gamma \int_\Gamma |s - t|^{-1-2\kappa} |1 - \chi_q(t)|^2 |\partial_s(\zeta_q(s)\gamma_1(s)) - \partial_t(\zeta_q(t)\gamma_1(t))|^2 ds dt \\ &\leq c \Lambda^{-4} (\Lambda^{4\alpha\kappa} \|\partial_t \zeta_q \gamma_1; L_2(\Gamma)\|^2 + \|\partial_s \zeta_q \gamma_1; W_2^\kappa(\Gamma)\|) \leq C \Lambda^{4\alpha\kappa-4}. \end{aligned}$$

Для функции $s \mapsto F(s) = \pi b_q \Theta(s - s_q) - \partial_s \gamma_0(s)$ кроме (4.33) верно неравенство $|F(s) - F(t)| \leq C |s - t|$. Поэтому в случае $i = 2$

$$\begin{aligned} \|I_2\|^2 &\leq \Lambda^{-2} \int_\Gamma \int_\Gamma |s - t|^{-1-2\kappa} |\chi_q(s) - \chi_q(t)|^2 |F(s)|^2 ds dt \\ &\quad + \Lambda^{-2} \int_\Gamma \int_\Gamma |s - t|^{-1-2\kappa} |\chi_q(t)|^2 |F(s) - F(t)|^2 ds dt \\ &\leq c \Lambda^{-2} \left(\Lambda^{4\alpha\kappa} \int_{L_q} \int_\Gamma |s - t|^{-1+2\kappa} |t|^2 ds dt \right. \\ &\quad \left. + \Lambda^{4\alpha\kappa} \int_\Gamma \int_{L_q} |s - t|^{-1+2\kappa} |t|^2 ds dt + \int_{L_q} \int_\Gamma |s - t|^{1-2\kappa} ds dt \right) \\ &\leq c \Lambda^{-2} (\Lambda^{\alpha(4\kappa-1)} + \Lambda^{\alpha(4\kappa-3)} + \Lambda^{-\alpha}) \leq c \Lambda^{-2-\alpha(1-4\kappa)}, \end{aligned}$$

здесь $L_q = \text{supp } \chi_q = (s_q - c\Lambda^{-\alpha}, s_q + c\Lambda^{-\alpha})$.

Наконец, выражение $\|I_3\|$ вычисляется непосредственно. Пусть, например, $d_q > 0$. Положим $\Delta = (s_q, s_q + \Lambda^{-1}d_q)$, $\overline{\Delta} = \text{supp } I_3$. Подынтегральное выражение в (4.34), $i = 3$, является кусочно-постоянной функцией, носителем которой служит объединение множеств $\overline{\Delta} \times (\Gamma \setminus \Delta)$ и $(\Gamma \setminus \Delta) \times \overline{\Delta}$. Сводя двойной интеграл к повторному, после несложного интегрирования, получаем

$$\|I_3\| \leq c \Lambda^{-2} |d_q \Lambda^{-1}|^{1-2\kappa} = C \Lambda^{-3+2\kappa}.$$

Итак, собирая все проверенные соотношения для I_m и ссылаясь на неравенство Фридрихса при рассмотрении $\|z_q; L_2(\Gamma)\|$, приходим к формулам

$$\begin{aligned} \|z_q; W_2^{1+\kappa}(\Gamma)\| &\leq c (\Lambda^{-1-\alpha/2} + \Lambda^{-2-\alpha(1-\tau)} + \Lambda^{-2+2\alpha\kappa} \\ &\quad + \Lambda^{-1+\alpha(2\kappa-1/2)} + \Lambda^{2\kappa-3/2}), \quad q = 1, \dots, 2N, \end{aligned} \quad (4.35)$$

которые и требовались для оценки δ_* в (4.27).

4.5. Обоснование двучленной асимптотики. Нетрудно увидеть, что при любом $\rho > 0$ можно выбрать числа α , τ и $\varkappa$ столь близко к $1 - 0$, $1/2 - 0$ и $+0$, соответственно, что правые части неравенств (4.31) и (3.35) можно заменить на $c\Lambda^{\rho-3/2}$. Из этих неравенств и из (4.32) вытекает, что величины (4.27) имеют мажоранты того же вида. Таким образом,

$$\delta_Y = \|Y_*; W_2^1(\Gamma)\| \leq c\Lambda^{\rho-3/2}.$$

Заметим, что $\delta_o = O(1)$ согласно (3.17) и (4.1). Наконец, полученная оценка для $\|\gamma_* - \Lambda^{-1}\gamma_0; W_2^{1+\tau}(\Gamma)\|$ (нет ограничений на $\varkappa = \tau$) и очевидная формула $\|\Lambda^{-1}\gamma_0; W_2^{1+\tau}(\Gamma)\| = O(\Lambda^{-1})$ приводят к соотношению $\delta_\gamma = O(\Lambda^{-1})$ (см. (3.18)).

Теперь можно применить теорему 3.5 и сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены сформулированные в п. 2.1.3° ограничения, а также соотношения (4.1), (4.2), (4.20), (4.21). Пусть еще U_* — глобальное асимптотическое приближение (3.3) к решению и задачи (1.2)–(1.5), причем плотность γ_* определена равенствами (4.22) и (4.23), v_* — решение (2.8) задачи (2.1) при $\gamma = \gamma_*$ и $V = V_0 + \Lambda^{-1}V_1$, V_i — ограниченные решения задачи (2.1) с правыми частями f_i из (4.1), E — функция (2.22), a_* — величина (3.9) при $Y = Y_*$ (см. (4.24)), а X_ε и χ_ε — срезающие функции (3.2). Тогда при любом $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$\|\nabla_x u - \nabla_x U_*; L_2(\Omega)\| \leq c_\rho |\ln \varepsilon|^{\rho-3/2}, \quad (4.36)$$

в котором постоянная c_ρ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

Рассуждения, подобные тем, которые сопутствовали формулам (3.33), позволяют заключить, что оценка (4.36) оправдывает присутствие в глобальном асимптотическом приближении слагаемых V_0 , $\Lambda^{-1}V_1$ и сингулярного решения, порожденного плотностью γ_* из (4.22), (4.23). То же касается и главного члена пограничного слоя, который уже был построен в §2, однако поправка, определяемая найденной в данном параграфе разностью $\gamma_* - \Lambda^{-1}\gamma_0$, выходит за пределы точности, гарантируемой теоремой 4.2. Тем не менее, построение двучленной асимптотики плотности γ_* обязательно — без нее нельзя указать сингулярное решение v_* . Вероятно, потеря неравенством (4.36) предполагавшейся точности происходит вследствие возникновения трехмерного пограничного слоя, сконцентрированного вблизи множества $\Xi^0 \subset \Gamma$, однако никаких конкретных результатов в этом направлении нет.

§5. Теоремы о сходимости

5.1. Ограниченное решение $V(x)$ как предел решения $u(\varepsilon, x)$. Пусть выполнены условия теоремы 3.6. Заметим, что согласно сказанному в начале п. 2.1

$$\|\chi_\varepsilon(V - \psi); W_2^1(\Omega)\| = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Преобразуем формулу (3.3) для $U(\varepsilon, x)$ к виду

$$\begin{aligned} U &= V + \chi_\varepsilon(V - \psi) + X_\varepsilon(v_* - V + \chi\gamma_*\pi^{-1}\ln r) \\ &\quad + \chi X_\varepsilon\gamma_*\pi^{-1}(\ln(\varepsilon + r) - \ln r) \\ &\quad + \chi\gamma_*\pi^{-1}\ln(\varepsilon + r) + \chi_\varepsilon\gamma_*(\pi^{-1}\ln(1 + \rho) - E) \end{aligned} \quad (5.2)$$

(воспользовались (3.4), (3.2), а под χ понимаем не зависящую от ε срезающую функцию $x \mapsto \chi(r)$ с носителем в $\mathcal{U}$; $\chi(r) = 1$ вблизи $r = 0$). Так как $\gamma_*(s) = O(\Lambda^{-1})$ (см. (3.1)), то в силу равенства (2.8) и предложения 2.1

$$\|X_\varepsilon(v_* - V + \gamma_* \pi^{-1} \ln r); W_2^1(\Omega)\| = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые Σ_4, Σ_5 и Σ_6 справа в (5.2). Непосредственные вычисления с учетом (3.1) приводят к соотношениям

$$\|\Sigma_p; W_2^1(\Omega)\| = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

для $p = 4$ и $p = 5$. Обращаясь к (2.22)–(2.25), видим, что $|E(\eta; s) - \pi^{-1} \ln(1 + \rho)| \leq c$,

$$\begin{aligned} & |\nabla_\eta E(\eta; s) - \pi^{-1} \nabla_\eta \ln(1 + \rho)| \\ & \leq c(1 + \rho)^{-1} \max\{1, ((\eta_1 + h_-(s))^2 + \eta_2^2)^{-1/4}, ((\eta_1 - h_+(s))^2 + \eta_2^2)^{-1/4}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, повторяя рассуждения, предшествующие (3.20), получаем соотношение (5.4) и в случае $p = 6$. Следовательно, в силу (5.1)–(5.4) функции $U(\varepsilon, \cdot)$ сходятся по норме $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ к решению $V \in W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1). Вместе с теоремой 3.6 этот факт доказывает следующую теорему о сходимости.

ТЕОРЕМА 5.1. *В предположениях из п. 2.1 и п. 3.1 решение $u(\varepsilon, \cdot)$ задачи (1.2)–(1.5) и ограниченное решение V задачи (2.1) связаны соотношением*

$$\|u(\varepsilon, \cdot) - V; W_2^1(\Omega)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

т.е. первое стремится ко второму в энергетической метрике.

Итак, в ситуации из §2 вариационное неравенство (1.7) “не замечает” в пределе препятствия на Γ_ε и его решение “превращается” в решение линейной задачи. Это согласуется с результатами [33], поскольку емкость Γ_ε исчезает при $\varepsilon \rightarrow +0$.

5.2. Сингулярное решение $v(x)$ как предел решения $u(\varepsilon, x)$. Попытаемся так изменить данные задачи (1.2)–(1.5), чтобы пределом $u(\varepsilon, \cdot)$ служило решение v задачи (2.1) с δ -функцией, распределенной вдоль Γ . Функция v принадлежит $L_2(\Omega)$, но не попадает в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому рассчитывать на сходимость в пространстве $W_2^1(\Omega)$ не приходится.

Пусть

$$f(\varepsilon, x) = F(x), \quad \varphi(\varepsilon, s) = \Lambda \Phi(s). \quad (5.5)$$

Так как неравенство (1.7) допускает умножение на положительную постоянную (т.е. $\Lambda^{-1}u$ – решение задачи с данными $\Lambda^{-1}f$ и $\Lambda^{-1}\varphi$), то условия (5.5) можно привести к виду (4.1), при этом

$$f_1 = F, \quad f_0 = \tilde{f} = 0, \quad \varphi_0 = \Phi, \quad \varphi_1 = \tilde{\varphi} = 0.$$

Предположим, что $F \in L_p(\Omega)$, $p > 3$, и $\Phi \in C^2(\Gamma)$. Поскольку $V_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$, условие (4.20) выполнено. Пусть еще функция Φ имеет нули в конечном числе точек, и в каждой из них производная $\partial_s \Phi$ не вырождается (выполнены требования из п. 2.1.3° и неравенства (4.21)). Теперь можно воспользоваться результатами §4: построить плотность γ_* , сингулярное решение v_* и глобальное приближение U_* так, чтобы

$$\|\Lambda^{-1}u - U_*; W_2^1(\Omega)\| = o(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5.6)$$

Пусть $\gamma_0 = \pi(\Phi)_+$, $V_1 \in W_2^1(\Omega)$ – решение задачи (2.1) с правой частью F и

$$v(x) = V_1(x) + \pi \int_{\Gamma} G(x; s) (\Phi(s))_+ ds. \quad (5.7)$$

Заметим, что $G(\cdot; s) \in L_2(\Omega)$ (см. (2.7)) и зависимость величины $\|G(\cdot; s); L_2(\Omega)\|$ от s непрерывная. Кроме того, в п. 4.4 при рассмотрении δ_* из (4.26) было установлено, что $\|\gamma_* - \Lambda^{-1}\gamma_0; L_2(\Gamma)\| = o(\Lambda^{-1})$. Таким образом,

$$\|v_* - \Lambda^{-1}v; L_2(\Omega)\| = o(\Lambda^{-1}). \quad (5.8)$$

Наконец, те же аргументы, что и в п. 5.1, позволяют получить соотношение

$$\|U_* - v_*; L_2(\Omega)\| = o(\Lambda^{-1}). \quad (5.9)$$

Используя (5.6), (5.8), (5.9), заключаем, что

$$\|u - v; L_2(\Omega)\| = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5.10)$$

ТЕОРЕМА 5.2. *При сделанных выше предположениях решение $u(\varepsilon, \cdot)$ задачи (1.2)–(1.5) и решение (5.7) задачи (2.1) связаны формулой (5.10), т.е. первое сходится ко второму в метрике пространства $L_2(\Omega)$.*

Вероятнее всего, утверждение теоремы 5.2 верно и при более слабых ограничениях на функции F и Φ из (5.5), однако наши возможности ограничены априорной оценкой решения вариационного неравенства (см. п. 3.4 и, в частности, леммы 3.2 и 3.3). Недостаток используемой оценки в том, что она не учитывает зону контакта, на которой реализовались условия Дирихле, но пути ее улучшения не прослеживаются. По тем же причинам не удастся обосновать асимптотическую конструкцию, предлагаемую в следующем параграфе.

§ 6. Формальная асимптотика решения задачи Дирихле в случае отсутствия условий Дирихле ($\Sigma = \emptyset$)

6.1. Обсуждение проблемы. Известно (см., например, [2]), что решение задачи Синьорини (1.2), (1.4)–(1.5), в которой $\Sigma = \emptyset$, существует не всегда. Необходимое условие существования $(f, 1)_{\Omega} \leq 0$ легко выводится из формулы Грина. Мы введем более сильное ограничение на правую часть уравнения (1.2)

$$(f, 1)_{\Omega} < 0, \quad (6.1)$$

обеспечивающее вдобавок и единственность решения (см. [2]).

Наиболее интересной оказывается ситуация, в которой зависимость от ε конкретизируется следующим образом

$$\varphi(\varepsilon, s) = \Lambda \varphi_0(s), \quad \Lambda = |\ln \varepsilon|, \quad (6.2)$$

здесь $\varphi_0 \in C^1(\Gamma)$. Пусть, к тому же, $f \in L_p(\Omega)$, $p > 3$, не зависит от ε .

Условие $\Sigma = \emptyset$ несколько усложняет (по сравнению с §2) алгоритм построения асимптотики. К примеру, первая предельная задача (2.1) оказывается задачей Неймана и уже не имеет решения в классе $W_2^1(\Omega)$ ввиду предположения (6.1). Это препятствие преодолимо, если, как и ранее, в качестве решений допустить функции с логарифмическими особенностями на Γ , а плотность γ из (2.6) подчинить равенству

$$(\gamma, 1)_{\Gamma} = -(f, 1)_{\Omega}, \quad (6.3)$$

гарантирующему возможность построить решение (2.6) задачи (2.1). Все остальные элементы асимптотических конструкций такие же, как и в §2. Посему избираем конспективный стиль изложения и будем в основном фиксировать отличия.

6.2. Главный член внешнего разложения. Под $G(\cdot; s)$ подразумеваем обобщенную функцию Грина с особенностью в точке $\mathbf{s} \in \Gamma$ с координатой s , удовлетворяющую (см. [34]) соотношениям

$$\begin{aligned}\Delta_x G(x; s) &= (\text{mes}_3 \Omega)^{-1}, \quad x \in \Omega; \\ \partial_n G(x; s) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathbf{s}; \\ G(x; s) &= (2\pi|x - \mathbf{s}|)^{-1} + o(|x - \mathbf{s}|^{\delta-1}), \quad x \rightarrow \mathbf{s}, \quad \delta \in (0, 1); \\ (G(\cdot; s), 1)_\Omega &= 0.\end{aligned}$$

Пусть v_0 – ограниченное решение задачи (2.1) с новой правой частью $f - (\text{mes}_3 \Omega)^{-1}(f, 1)_\Omega$, причем $(v_0, 1)_\Omega = 0$.

Формулу (2.8) для главного члена внешнего разложения заменим следующей

$$v(x) = A |\ln \varepsilon| + v_0(x) + \int_\Gamma \gamma(t) G(x; t) dt, \quad (6.4)$$

здесь A – постоянная, подлежащая определению. Так как константа удовлетворяет однородным уравнениям (2.1) (напоминаем еще раз, что $\Sigma = \emptyset$ и условия Дирихле отсутствуют), то сумма (6.4) оказывается решением задачи (2.1), (2.6), благодаря (6.3) члены, содержащие $\text{mes}_3 \Omega$, взаимно сокращаются.

Справедливо аналогичное (2.9) асимптотическое представление

$$v(x) = -\pi^{-1} \gamma(s) \ln r + J\gamma(s) + A |\ln \varepsilon| + v_0(s) + O(r |\ln r|), \quad r \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

а оператор J строится по обобщенной функции Грина в соответствии с (2.10).

6.3. Плоский пограничный слой. Процедура вывода второй предельной задачи (2.18)–(2.20) и ее исследование не претерпевают каких-либо изменений, однако итоговые формулы модифицируются. Так, согласно (6.5) вместо (2.21) возникает асимптотическое условие

$$e(\eta; s) = -\pi^{-1} \gamma(s) \ln(\varepsilon \rho) + J\gamma(s) + A |\ln \varepsilon| + v_0(s) + o(1), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

и, соответственно, равенства (2.27), (2.28) заменяются следующим

$$e(\eta; s) = -\gamma(s) E(\eta; s) - \pi^{-1} \gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) + J\gamma(s) + A |\ln \varepsilon| + v_0(s). \quad (6.6)$$

Наконец, сравнивая (6.6) и (6.2) с учетом (2.20), приходим к совокупности соотношений

$$\begin{aligned}\gamma(s) &\geq 0, \\ \gamma(s) > 0 &\implies J\gamma(s) + v_0(s) - \pi^{-1} \gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) = \Lambda(\varphi_0(s) - A), \\ \gamma(s) = 0 &\implies J\gamma(s) + v_0(s) - \pi^{-1} \gamma(s) \ln(\varepsilon H(s)) \geq \Lambda(\varphi_0(s) - A),\end{aligned} \quad (6.7)$$

которые вместе с (6.3) формируют результирующую задачу для определения неизвестных плотности γ и постоянной A в (6.4).

6.4. Асимптотическое решение результирующей задачи. Соотношения (6.7) и (6.3), разумеется, можно переписать как вариационное неравенство, однако мы ограничимся указанием главного (относительно Λ) члена $\{\gamma_*, A_*\}$ асимптотического решения.

Поступая так же, как в начале п. 3.1, положим

$$\gamma_* = \pi(\varphi_0 - A_*)_+. \quad (6.8)$$

Осталось обеспечить условие (6.3), которое согласно (6.8) принимает вид

$$\pi \int_{\Gamma} (\varphi_0(s) - A_*)_+ ds = - \int_{\Omega} f(x) dx \quad (6.9)$$

и служит для вычисления A_* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. При выполнении (6.1) уравнение (6.9) имеет единственное решение A_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая включение $\varphi_0 \in C^1(\Gamma)$, находим

$$\frac{d}{dA} \int_{\Gamma} (\varphi_0(s) - A)_+ ds = - \text{mes}_1 \{s \in \Gamma : \varphi_0(s) \geq A\}.$$

Таким образом, непрерывная функция

$$(-\infty, \max\{\varphi_0(s) : s \in \Gamma\}) \ni A \mapsto \int_{\Gamma} (\varphi_0(s) - A)_+ ds$$

строго монотонно убывает, а ее область значений совпадает с $(0, +\infty)$. Этих фактов достаточно для нужного вывода.

Итак, определяя A_* и γ_* из (6.9) и (6.8), по формулам (6.4) и (6.6) восстанавливаем главные члены v_* и e_* внешнего и внутреннего разложений.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
4. Назаров С. А. Асимптотическое решение вариационных неравенств для линейного оператора с малым параметром при старших производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 54. № 4. С. 754–773.
5. Назаров С. А. Асимптотическое решение вариационного неравенства, моделирующего трение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 990–1020.
6. Назаров С. А. О возмущении решений задачи Синьорини // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
7. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи Синьорини без трения или с малым трением // Проблемы матем. анализа. Вып. 12. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. С. 82–109.
8. Назаров С. А. Эллиптические неравенства для тонких упругих областей при малом коэффициенте трения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 667–687.
9. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с малыми участками свободной границы // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 2. С. 258–277.
10. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // Прикладная матем. и мех. 1994. Т. 58. № 2. С. 110–118.

11. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Труды сем. им. С. Л. Соболева. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1980. № 1. С. 113–131.
12. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 167–186.
13. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 1. С. 37–39.
14. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 2. С. 187–217.
15. Назаров С. А. Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Труды ММО. 1990. Т. 53. С. 98–129.
16. Назаров С. А. Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Механика твердого тела. 1989. № 2. С. 152–160.
17. Назаров С. А., Полякова О. Р. Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // Прикладная матем. и мех. 1991. Т. 55. № 1. С. 165–173.
18. Назаров С. А., Полякова О. Р. Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Механика твердого тела. 1992. № 2. С. 101–113.
19. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
20. Leguillon D., Sanches-Palencia E. Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. Paris: Masson, 1987.
21. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
22. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
23. Назаров С. А., Пакушко М. В. Дискретные модели и осреднения в теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
24. Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenevski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestorten Gebieten. V. 1, 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1990, 1991.
25. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
26. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
27. Начель Ю. Об эквивалентных нормировках в функциональных пространствах // Вестник ЛГУ. 1974. № 7. С. 41–47.
28. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
29. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
30. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы матем. анализа. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. С. 72–153.
31. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. № 4. P. 623–723.
32. Солонников В. А. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды МИАН. 1964. Т. 70. С. 133–212.
33. Levy H., Stampacchia G. On the regularity of the solution of a variational inequality // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 22. P. 153–188.
34. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Санкт-Петербургский государственный университет;
Государственная Морская Академия им. адмирала С. О. Макарова

Поступила в редакцию
10.02.1995