Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 53–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:08:51

УДК 517.968

Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян

Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром

Работа посвящена интегральному уравнению Винера–Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad (I - K)f = g \quad (1)$$

и связанным с ним факторизационным задачам. Предполагается, что

$$K(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} d\sigma_\pm(p), \quad \sigma_\pm(p) \uparrow, \quad \mu \equiv \sum_{\pm} \int_a^b \frac{1}{p} d\sigma_\pm(p) < +\infty.$$

Доказывается возможность вольтерровой факторизации в закритическом случае (ЗКС) $\mu > 1$, если либо K – четная функция, либо символ $1 - \hat{K}(s)$ обладает вещественным нулем. Указывается на обобщение результата на общий ЗКС. Доказывается разрешимость соответствующего уравнения (1) при $g \in L_1(0, \infty)$. Получается ряд других результатов по ЗКС и по случаю $\mu = 1$. Излагаемый подход существенным образом опирается на метод специальной факторизации и на обобщенные уравнения В. А. Амбарцумяна.

Библиография: 19 названий.

Введение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad (0.1)$$

где ядро (ядерная функция) K представлено в виде суперпозиции экспонент

$$K_\pm(x) \equiv K(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} d\sigma_\pm(p), \quad x > 0, \quad [a, b] \subset [0, \infty). \quad (0.2)$$

Здесь $\sigma_\pm$ неубывающие, непрерывные слева функции на $[a, b]$, удовлетворяющие условию

$$\mu \equiv \sum_{\pm} \int_a^b \frac{1}{p} d\sigma_\pm(p) = \int_{-\infty}^\infty K(x) dx < +\infty. \quad (0.3)$$

Представление (0.2) означает, что $K_\pm$ вполне монотонные на $(0, \infty)$ функции из $L_1(-\infty, \infty)$, т.е. они бесконечно дифференцируемы и $(-1)^n K_\pm^{(n)}(x) \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$

Перепишем (0.1) в операторном виде

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K})f = g,$$

где $\mathbf{I}$ – единичный оператор, а $\mathbf{K}$ – интегральный оператор Винера–Хопфа с ядром (0.2)

$$(\mathbf{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad K \in L_1(-\infty, \infty). \quad (0.4)$$

С точки зрения разрешимости уравнения (0.1), (0.2) и свойств его решений качественно отличаются следующие три случая: диссипативный случай (ДС) $\mu < 1$, консервативный случай (КС) $\mu = 1$ и закритический случай (ЗКС) $\mu > 1$.

Пусть $E^+ \equiv E[0, \infty)$ – одно из банаховых пространств L_p^+ ($1 \leq p \leq +\infty$, $L_\infty^+ \equiv M^+$), C_u^+ , C_0^+ . Пространство C_u^+ состоит из непрерывных и ограниченных на $[0, \infty)$ функций, а $C_0^+ \subset C_u^+$ состоит из функций, стремящихся к 0 в $+\infty$. В ДС оператор $\mathbf{K}$ сжимающий и $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ обратим в E^+ . КС и ЗКС относятся к особым случаям уравнения (0.1). В КС и ЗКС $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ необратим в E^+ . Случай $\sigma_\pm = \sigma$ называется *симметрическим* (СС). Тогда K – четная функция.

Уравнения (0.1), (0.2) в СС при $\mu \leq 1$ и $\sigma \in C_\perp[a, b)$ имеют важные применения в теории переноса излучения, в кинетической теории газов. Им посвящено огромное число теоретических и прикладных исследований (см. [1]–[5]). Несимметрический случай и случай, когда $\sigma_\pm \notin C_1$ являются функциями локально ограниченной вариации, впервые изучены в работах [6], [7] (см. также [8]–[12]). Центральную роль в теории консервативных и диссипативных уравнений (0.1), (0.2) играют уравнения В. А. Амбарцумяна и его обобщения (см. [1]–[4], [6], [7], [9]–[12]).

В 1982 году была опубликована большая работа М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмольяна [12], в которой уравнение (0.1), (0.2) было изучено с применением методов комплексного анализа. Достижением этой работы являются результаты по ЗКС. Что касается случаев $\mu \leq 1$, то основные результаты [12] (за исключением одного важного интегрального представления) являются новыми доказательствами или частными случаями соответствующих результатов работ [7], [9].¹ При этом наиболее важный, КС, изучен при дополнительном ограничении конечности момента первого порядка ядра K .

Настоящая работа посвящена уравнению (0.1)–(0.3) и связанным с ним факторизационным задачам. Основное внимание уделяется ЗКС. Развиваемый подход достаточно конструктивен и примыкает как к методам работ [7], [9]–[11], так и к [12]. Наряду с новыми результатами приводятся простые доказательства ряда результатов [12] по ЗКС.

Уравнение (0.1) в ЗКС не имеет прямых физических приложений. Однако оно может играть вспомогательную роль для решения задач генерации нейтронов в плоском слое и в шаре при докритическом или критическом режимах. Ряд таких задач описывается уравнением с симметрическим ядром, отличающимся от (0.1) тем, что верхний предел интегрирования $< +\infty$.

¹Основные результаты препринта [9] содержатся в обзорной работе [10].

§ 1. Вспомогательные предложения

Пусть Ω – класс интегральных операторов Винера–Хопфа вида (0.4) с произвольным $K \in L_1(-\infty, \infty)$. Оператор $\mathbf{K} \in \Omega$ действует в E^+ , причем (см. [13]–[15])

$$\|\mathbf{K}\|_{E^+} \leq \mu \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx. \quad (1.1)$$

В случае $K \geq 0$ неравенство обращается в равенство.

Пусть $\Omega^+, \Omega^- \subset \Omega$ – алгебры нижних и верхних вольтерровых операторов: $\mathbf{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, если

$$\mathbf{V}_+ f(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t) dt, \quad \mathbf{V}_- f(x) = \int_x^{\infty} V_-(t-x)f(t) dt, \quad (1.2)$$

где $V_{\pm} \in L_1^+$. Если $\mathbf{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, то $\mathbf{V}_- \mathbf{V}_+ \in \Omega$ (см. [7]).

Резольвентные функции $\Phi_{\pm}$ операторов $\mathbf{V}_{\pm}$ определяются из следующих уравнений типа восстановления

$$\Phi_{\pm}(x) = V_{\pm}(x) + \int_0^x V_{\pm}(x-t)\Phi_{\pm}(t) dt. \quad (1.3)$$

Эти уравнения всегда однозначно разрешимы в пространстве L_1^{loc} локально интегрируемых на $[0, \infty)$ функций. Высказывание $\Phi_{\pm} \in L_1^+$ эквивалентно обратимости $\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\pm}$ в E^+ : $(\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\pm})^{-1} = \mathbf{I} + \Phi_{\pm}$, где $\Phi_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ – операторы с ядрами $\Phi_{\pm}$. Если $\Phi_+ \notin L_1^+$ или $\Phi_- \notin L_1^+$, то $\Phi_{\pm}$ имеют смысл как операторы, действующие в подходящим образом выбранных пространствах.

Пусть $1 - \widehat{K}(s)$ – символ оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \in \Omega$, где $\widehat{K}$ – преобразование Фурье от K

$$\widehat{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{isx} dx.$$

Для обратимости $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ в E^+ , хотя бы односторонней, необходимо, чтобы (см. [13], [14])

$$1 - \widehat{K}(s) \neq 0, \quad \text{Im } s = 0. \quad (1.4)$$

При выполнении (1.4) $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ будет обратим, если

$$\varkappa = \text{ind}(1 - \widehat{K}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg[1 - \widehat{K}(s)] = 0. \quad (1.5)$$

Если индекс $\varkappa < 0$, то $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ обратим только слева, а если $\varkappa > 0$ – только справа.

Пусть произведение $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_1) \cdots (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n)$, где $\mathbf{K}_m \in \Omega$, $m = \overline{1, n}$, является оператором такого же вида, т.е. справедливо равенство

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1) \cdots (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n), \quad \mathbf{K} \in \Omega, \quad (1.6)$$

тогда в (1.6) можно перейти к символам (см. [16])

$$1 - \widehat{K}(s) = (1 - \widehat{K}_1(s)) \cdots (1 - \widehat{K}_n(s)). \quad (1.7)$$

Равенства (1.6) и (1.7) эквивалентны.

Рассмотрим класс $\Omega_0 \subset \Omega$ операторов T из Ω , ядра которых допускают представление

$$T_{\pm}(x) \equiv T(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} d\rho_{\pm}(p), \quad x > 0, \quad a \geq 0. \quad (1.8)$$

Здесь $\rho_{\pm}$ – комплекснозначные функции локально ограниченной вариации на $[a, b]$, удовлетворяющие условию

$$\lambda \equiv \sum_{\pm} \int_a^b \frac{1}{p} |d\rho_{\pm}(p)| < +\infty. \quad (1.9)$$

Имеем

$$\|T\|_{E^+} \leq \|T\|_{L_1(-\infty, \infty)} \leq \lambda. \quad (1.10)$$

Введем также классы $\Omega_0^{\pm} = \Omega_0 \cap \Omega^{\pm}$.

С уравнением (0.1) с ядром $K = T$ вида (1.8) ассоциируется следующая система нелинейных функциональных уравнений, которая является обобщением известного уравнения Амбарцумяна в теории переноса излучения (см. [1]–[4], [6]–[12])

$$\varphi_{\pm}(p) = 1 + \varphi_{\pm}(p) \int_a^b \frac{\varphi_{\mp}(q)}{p+q} d\rho_{\mp}(q). \quad (1.11)$$

Пусть $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^-$ – банаховы пространства с нормами

$$\|\varphi_{\pm}\|_{\mathcal{L}^{\pm}} = \int_a^b \frac{1}{p} |\varphi_{\pm}(p)| |d\rho_{\pm}(p)|.$$

Если (1.11) обладает решением $(\varphi_+, \varphi_-) \in \mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$, то имеет место факторизация (см. [7])

$$I - T = (I - V_-)(I - V_+), \quad (1.12)$$

где $V_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}$ – операторы вида (1.2), с ядрами

$$V_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xp} \varphi_{\pm}(p) d\rho_{\pm}(p), \quad x > 0. \quad (1.13)$$

Каноническим (или главным) решением (КР) уравнения Амбарцумяна (УА) (1.11) называется предел в $\mathcal{L}^+ \times \mathcal{L}^-$ итераций $(\varphi_n^+, \varphi_n^-)$:

$$\varphi_{n+1}^{\pm}(p) = 1 + \varphi_n^{\pm}(p) \int_a^b \frac{\varphi_n^{\mp}(q)}{p+q} d\rho_{\mp}(q), \quad \varphi_0^{\pm} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

При $\lambda \leq 1$ существует КР (φ_+, φ_-) , которое обладает следующими свойствами:

$$\gamma_{\pm} \equiv \|\varphi_{\pm}\|_{\mathcal{L}^{\pm}} \leq \lambda, \quad \gamma_+ + \gamma_- \leq 2(1 - \sqrt{1 - \lambda}), \quad \|\varphi_n^{\pm} - \varphi_{\pm}\|_{\mathcal{L}^{\pm}} \leq \lambda^{n+1}. \quad (1.15)$$

Функции $\varphi_{\pm}$ непрерывны на (a, b) , $\varphi_{\pm}(+\infty) = 1$. Они голоморфно продолжаются на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом $[-b, -a]$ по формуле

$$\varphi_{\pm}(p) = \left(1 - \int_a^b \frac{\varphi_{\mp}(q)}{p+q} d\rho_{\mp}(q)\right)^{-1}. \quad (1.16)$$

Если функции $\rho_{\pm}$ вещественные, то таковыми являются и $\varphi_{\pm}$. Если $\rho_{\pm}$ неубывающие функции, т.е. меры $d\rho_{\pm}$ неотрицательны, то

$$0 \leq \varphi_{\pm}(p) \downarrow \text{ по } p \text{ на } (0, \infty) \text{ и } (1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 1 - \lambda. \quad (1.17)$$

В симметрическом случае, когда $\rho_{\pm} = \rho$ и $\mathcal{L}^{\pm} = \mathcal{L}$, имеем $\varphi_{\pm} = \varphi$, где φ является КР УА

$$\varphi(p) = 1 + \varphi(p) \int_a^b \frac{\varphi(q)}{p+q} d\rho(q). \quad (1.18)$$

В СС $\varphi_n^{\pm} = \varphi_n$,

$$\gamma \equiv \|\varphi\|_{\mathcal{L}} \leq 1 - \sqrt{1 - \lambda}, \quad \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}} \leq \min\left\{\frac{2}{n}, (1 - \sqrt{1 - \lambda})^{n+1}\right\}. \quad (1.19)$$

При $d\rho \geq 0$ первое из неравенств (1.19) обращается в равенство.

Рассмотрим моменты функций T и $V_{\pm}$. Пусть $f \in L_1^+$. Обозначим через $m_p(f)$, где $p \geq 0$, момент p -го порядка функции f

$$m_p(f) = \int_0^{\infty} x^p f(x) dx.$$

Если не будет оговорено противное, то будем считать, что этот интеграл абсолютно сходится. Если же $f \geq 0$, то рассматриваемым моментам будем приписывать также значение $+\infty$. Обозначим

$$\begin{aligned} \nu_n^{\pm} &= m_n(T_{\pm}) = n! \int_a^b \frac{1}{p^{n+1}} d\rho_{\pm}(p), \\ d_n^{\pm} &= m_n(V_{\pm}) = n! \int_a^b \frac{1}{p^{n+1}} \varphi_{\pm}(p) d\rho_{\pm}(p). \end{aligned}$$

Сформулируем некоторые факты из [9], [10] по моментам $V_{\pm}$ в КС. Пусть выполняются условия консервативности $T \geq 0$ и $\lambda = 1$. Из равенства (1.17) следует, что тогда хотя бы одно из чисел $\gamma_{\pm}$ равно 1. В СС $\gamma_{\pm} = \gamma = 1$. Что касается несимметрического случая, то справедливы следующие утверждения.

Пусть хотя бы одно из чисел $\nu_1^{\pm}$ конечно. Обозначим $\nu_1 = \nu_1^+ - \nu_1^-$, $-\infty \leq \nu_1 \leq +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{а) } \nu_1 = 0 &\iff \gamma_{\pm} = 1; \\ \text{б) } \nu_1 > 0 &\iff \gamma_+ = 1, \gamma_- < 1; \\ \text{в) } \nu_1 < 0 &\iff \gamma_+ < 1, \gamma_- = 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Рассмотрим симметрический КС. Пусть $\nu_2^{\pm} = \frac{1}{2}\nu_2$. Тогда имеет место равенство

$$\alpha_1^{\pm} = \alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\nu_2} \quad (\leq +\infty). \quad (1.21)$$

Изучим вопрос о решении уравнений (1.3) относительно резольвентных функций $\Phi_{\pm}$ в случае, когда $V_{\pm}$ задаются в (1.13), где $d\rho_{\pm} \geq 0$ и $\gamma_{\pm} \leq 1$. Согласно результатам [12] существуют неотрицательные меры $d\eta_{\pm}$ такие, что

$$\Phi_{\pm}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xp} d\eta_{\pm}(p). \quad (1.22)$$

В работах [17], [18] найден эффективный способ построения представления (1.22) и получены дополнительные свойства этих мер.

§ 2. Вопрос обратимости $I - K$

Рассмотрим оператор $K \in \Omega_0$ с ядром (0.2). Символ оператора $I - K$ имеет вид

$$1 - \widehat{K}(s) = 1 - \int_a^b \frac{1}{p - is} d\sigma_+(p) - \int_a^b \frac{1}{p + is} d\sigma_-(p). \quad (2.1)$$

Функция $1 - \widehat{K}$ голоморфно продолжается с вещественной оси $\text{Im } s = 0$ в $\mathbb{C}$ с двумя разрезами вдоль мнимой оси $[ia, ib]$ и $[-ib, ia]$.

Обозначим $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-)$ и $\xi = \frac{1}{2}(\sigma_+ - \sigma_-)$. Из (2.1) имеем

$$1 - \widehat{K}(s) = 1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2 + s^2} d\sigma(p) - 2is \int_a^b \frac{1}{p^2 + s^2} d\xi(p). \quad (2.2)$$

Введем функции

$$f_1(\gamma) = 1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2 + \gamma} d\sigma(p), \quad f_2(s) = 2 \int_a^b \frac{1}{p^2 + s^2} d\xi(p). \quad (2.3)$$

Имеем

$$1 - \widehat{K}(s) = f_1(s^2) - is f_2(s).$$

В СС, когда $\sigma_{\pm} = \sigma$, получаем $\xi = 0$, $f_2 = 0$.

Проверим выполнение условий (1.4), (1.5) обратимости $I - K$ в E^+ . В ДС оба условия выполняются. В КС имеем $1 - \widehat{K}(0) = 0$, т.е. нарушается условие (1.4). Покажем, что и в ЗКС нарушается одно из условий (1.4), (1.5). Функция $f_1(\gamma)$ на $[0, \infty)$ обладает следующими очевидными свойствами:

$$f_1(0) = 1 - \mu < 0, \quad f_1 \in C_u^+, \quad f_1(\gamma) \uparrow \text{ по } \gamma \text{ (строго)} \quad \text{и} \quad f_1(+\infty) = 0.$$

Из отмеченных свойств f_1 следует существование единственного корня $\gamma > 0$ на $[0, \infty)$. Пусть $\omega = \sqrt{\gamma}$. Тогда

$$f_1(\omega^2) = 0. \quad (2.4)$$

Возможны следующие случаи:

- а) $f_2(\omega) = 0$;
- б) $f_2(\omega) > 0$;
- в) $f_2(\omega) < 0$.

В первом случае имеем $1 - \widehat{K}(\pm\omega) = 0$, т.е. условие (1.4) нарушается в точках $s = \pm\omega$. Так обстоит дело, в частности, в симметрическом ЗКС. Если же $f_2(\omega) \neq 0$, то $1 - \widehat{K}$ не имеет вещественных нулей, т.е. условие (1.4) выполняется.

ЛЕММА 1.1. Если $f_2(\omega) > 0$, то $\varkappa = -1$. Если $f_2(\omega) < 0$, то $\varkappa = +1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G^\pm$ следующие подмножества компактифицированной вещественной оси $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$:

$$G^+ = \{s > \omega; s f_2(s) = 0\}, \quad G^- = \{s < \omega; s f_2(s) = 0\}.$$

Эти множества непусты, так как $\{0\} \in G^-$ и $\pm\infty \in G^+$. В силу непрерывности f_2 на $\overline{\mathbb{R}}$ и $f_2(\omega) \neq 0$ множества $G^\pm$ замкнуты. Обозначим $s_1 = \max G^- (< \omega)$ и $s_2 = \min G^+ (> \omega)$. Представим значение (1.5) индекса $\varkappa$ в виде суммы пяти слагаемых: $\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_5$, где

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= - \int_{-\infty}^{-s_2} \frac{1}{2\pi} d \arg[1 - \widehat{K}(s)], & \varkappa_2 &= - \int_{-s_2}^{-s_1} \frac{1}{2\pi} d \arg[1 - \widehat{K}(s)], \\ \varkappa_3 &= - \int_{-s_1}^{s_1} \frac{1}{2\pi} d \arg[1 - \widehat{K}(s)], & \varkappa_4 &= - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2\pi} d \arg[1 - \widehat{K}(s)], \\ \varkappa_5 &= - \int_{s_2}^{\infty} \frac{1}{2\pi} d \arg[1 - \widehat{K}(s)]. \end{aligned}$$

С учетом монотонности функции f_2 нетрудно убедиться, что $\varkappa_1 = \varkappa_3 = \varkappa_5 = 0$. При $f_2(\omega) > 0$ получаем $\varkappa_2 = \varkappa_4 = -\frac{1}{2}$, т.е. $\varkappa = -1$. Если же $f_2(\omega) < 0$, то $\varkappa_2 = \varkappa_4 = \frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Итак, в ЗКС при $f_2(\omega) = 0$ (в частности, в СС) оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ необратим ни справа, ни слева. При $f_2(\omega) < 0$, $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ обратим только справа, а при $f_2(\omega) > 0$ — только слева.

Несколько слов о комплексных корнях символа $1 - \widehat{K}$. Из (2.1) имеем (черточкой сверху отмечается переход к сопряженной комплексной величине)

$$\overline{1 - \widehat{K}(s)} = 1 - \int_a^b \frac{d\sigma_+(p)}{p + i\bar{s}} - \int_a^b \frac{d\sigma_-(p)}{p - i\bar{s}} = 1 - \widehat{K}(-\bar{s}).$$

Отсюда видно, что если число $s = s_0$ является нулем символа $1 - \widehat{K}$, то $-\bar{s}_0$ также является его нулем.

В симметрическом ДС символ может иметь два чисто мнимых нуля $\pm i\delta$, где $\delta > 0$ определяется из характеристического уравнения хорошо известного в теории переноса излучения

$$\int_a^b \frac{2p}{p^2 - \delta^2} d\sigma(p) = 1. \quad (2.5)$$

§3. Подготовительная задача факторизации

3.1. Рассмотрим оператор $\mathbf{K} \in \Omega_0$ в предположении, что $1 - \widehat{K}$ обладает вещественными нулями $\pm\omega$, т.е. $f_2(\omega) = 0$. В настоящем и следующем параграфах мы будем заниматься решением основных факторизационных задач для оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ в ЗКС. Эти задачи представляют как самостоятельный интерес, так и важны с точки зрения применения к уравнению (0.1)–(0.3).

Обозначим через $\mathbf{U}_\pm \in \Omega_0$ следующие простейшие вольтерровы операторы, где $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathbf{U}_+ f(x) = \alpha \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \quad \mathbf{U}_- f(x) = \alpha \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)} f(t) dt.$$

Поставим задачу о построении факторизации

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{T})(\mathbf{I} - \mathbf{U}_+), \quad (3.1)$$

$\mathbf{T} \in \Omega_0$ оператор с ядром вида (1.8), где $d\rho_{\pm}(p) = h(p) d\sigma_{\pm}(p)$, h – непрерывная на (a, b) функция, удовлетворяющая условию

$$\lambda \equiv 2 \int_a^b |h(p)| \frac{1}{p} d\sigma(p) < 1. \quad (3.2)$$

Мы будем стремиться, по возможности, обеспечить выполнение дополнительного условия

$$h(p) \geq 0, \quad p \in (a, b), \quad (3.3)$$

что влечет за собой неотрицательность мер $h(p) d\sigma_{\pm}(p)$.

Соответствующие выкладки проще всего выполнить, используя технику преобразования Фурье, опираясь при этом на эквивалентность равенств (1.6) и (1.7). Символами операторов $\mathbf{I} - \mathbf{U}_{\pm}$ и $\mathbf{I} - \mathbf{T}$ служат функции

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{U}_{\pm}(s) &= \frac{\beta - \alpha \mp is}{\beta \mp is}; \\ 1 - \widehat{T}(s) &= 1 - \int_a^b \frac{2ph(p)}{p^2 + s^2} d\sigma(p) - 2is \int_a^b \frac{h(p)}{p^2 + s^2} d\xi(p). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Переходя в (3.1) к символам, получаем

$$1 - \widehat{K}(s) = \frac{(\beta - \alpha)^2 + s^2}{\beta^2 + s^2} \left(1 - \int_a^b \frac{2ph(p)}{p^2 + s^2} d\sigma(p) - 2is \int_a^b \frac{h(p)}{p^2 + s^2} d\xi(p) \right). \quad (3.5)$$

Ниже мы будем заниматься построением разложения (3.5) как при $\beta > 0$, так и при $\beta = 0$. Считаем, что $\omega \geq 0$.

Используя выражение (2.2) для $1 - \widehat{K}$ и равенства $1 - \widehat{K}(\pm\omega) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{K}(s) &= \int_a^b \left(\frac{1}{p^2 + \omega^2} - \frac{1}{p^2 + s^2} \right) 2p d\sigma(p) \\ &\quad + 2is \int_a^b \left(\frac{1}{p^2 + \omega^2} - \frac{1}{p^2 + s^2} \right) d\xi(p) \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{s^2 + \beta^2} \left(\int_a^b \frac{(s^2 + \beta^2)2p}{(p^2 + s^2)(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p) \right. \\ &\quad \left. + 2is \int_a^b \frac{(s^2 + \beta^2)}{(p^2 + s^2)(p^2 + \omega^2)} d\xi(p) \right), \end{aligned}$$

откуда

$$1 - \widehat{K}(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{s^2 + \beta^2} \left(1 - \int_a^b \frac{2ph(p)}{p^2 + s^2} d\sigma(p) - 2is \int_a^b \frac{h(p)}{p^2 + s^2} d\xi(p) \right), \quad (3.6)$$

где $\beta \geq 0$ произвольное неотрицательное число, $\omega \geq 0$,

$$h(p) = \frac{p^2 - \beta^2}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.7)$$

При $\beta > 0$ из (3.5) и (3.6) приходим к разложению (3.1), где $\alpha = \beta - i\omega$, а h определяется из (3.7), т.е.

$$T_{\pm}(x) \equiv T(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} \frac{p^2 - \beta^2}{p^2 + \omega^2} d\sigma_{\pm}(p), \quad x > 0. \quad (3.8)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при $\omega > 0$ ядро T , определенное согласно (3.8), принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$ как в случае $\beta > 0$, так и в случае $\beta = 0$. Сказанное следует из неравенства $|h(p)| \leq 1 + \beta^2/\omega^2$. Поэтому $\lambda \leq (1 + \beta^2/\omega^2)\mu < +\infty$ и $\mathbf{T} \in \Omega_0$. Очевидно также, что при $\beta = 0$ ядро T является консервативным.

В КС, когда $\omega = 0$, имеем

$$\mathbf{T}_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xp} \left(1 - \frac{\beta^2}{p^2}\right) d\sigma_{\pm}(p).$$

Поэтому при $\beta > 0$ для того, чтобы $\mathbf{T} \in \Omega_0$ необходимо и достаточно, чтобы исходное ядро K обладало конечным моментом второго порядка $\nu_2^{\pm} \equiv m_2(K_{\pm}) < +\infty$. Тогда $\lambda \leq \mu + \beta^2(\nu_2^+ + \nu_2^-)$.

3.2. Рассмотрим вопрос выбора значений свободного параметра $\beta > 0$, при которых выполняется неравенство (3.3). Более того, мы будем минимизировать величину $\lambda = \lambda(\beta)$ в случае непрерывной функции σ . Начнем со случая $a > 0$. Тогда функции $K_{\pm}$ экспоненциально убывают на ∞ и $1 - \widehat{K}(s)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} s| < a$. При $\beta \leq a$ функция h неотрицательна на (a, b) и

$$\lambda(\beta) = \int_a^b (p^2 - \beta^2) \frac{2}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p) = 1 - \beta^2 \int_a^b \frac{2}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p).$$

Имеем $\lambda(0) = 1$, поэтому $\lambda(\beta) < 1$ при $0 < \beta \leq a$ и $\lambda_{\min} = \lambda(a)$ на $[0, a]$. Если точка a является точкой роста функции σ (без ограничения общности можно считать, что это так), то $\beta = a$ является наибольшим значением β , при котором меры $h(p) d\sigma_{\pm}(p)$ неотрицательны.

Пусть теперь $a = 0$, в КС $\nu_2^{\pm} < +\infty$. Покажем, что при достаточно малых значениях $\beta > 0$ выполняется неравенство (3.2). Данное неравенство принимает вид

$$\int_0^{\beta} (\beta^2 - p^2) d\sigma_1(p) + \int_{\beta}^b (p^2 - \beta^2) d\sigma_1(p) < 1, \quad (3.9)$$

где

$$d\sigma_1(p) = \frac{2}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p), \quad \sigma_1(p) = \int_0^p \frac{2}{q(q^2 + \omega^2)} d\sigma(q). \quad (3.10)$$

С учетом $\lambda(0) = 1$, (3.9) можно привести к виду

$$2\beta^2 \int_0^{\beta} d\sigma_1(p) < \beta^2 \int_0^b d\sigma_1(p) + 2 \int_0^{\beta} p^2 d\sigma_1(p).$$

Для выполнения этого неравенства достаточно, чтобы

$$\int_0^{\beta} d\sigma_1(p) < \frac{1}{2} \int_0^b d\sigma_1(p). \quad (3.11)$$

Правая часть неравенства положительна, а левая часть стремится к 0 при $\beta \rightarrow 0+$ (в силу сходимости собственного или несобственного интеграла $\int_0^b d\sigma_1(p)$). Отсюда следует (3.11) при достаточно малых значениях $\beta > 0$. Такие значения мы назовем *допустимыми значениями* β .

Рассмотрим вопрос минимизации $\lambda(\beta)$ при $a = 0$, в случае непрерывной функции σ . Пусть $\sigma \in C(0, b)$. Можно показать, что $\lambda'(\beta) = 2\beta\psi(\beta)$, где $\psi(\beta) = \int_0^\beta d\sigma_1(p) - \int_\beta^b d\sigma_1(p)$. В случае $\sigma \in C_1(0, b)$ эта формула очевидна. При $\sigma \in C(0, b)$ ее вывод связан с небольшими техническими трудностями. Из непрерывности σ и сходимости интегралов (0.3) следует непрерывность на $[0, b]$ функции σ_1 , определенной согласно (3.10). Имеем $\psi(\beta) = 2\sigma_1(\beta) - \sigma_1(b)$. Поэтому $\psi(\beta)$ – непрерывная неубывающая на $[a, b]$, $b \leq +\infty$, функция, причем $\psi(0) = -\sigma_1(b) < 0$ и $\psi(b) = \sigma_1(b) > 0$. Следовательно, существует точка $\beta = \beta_0 > 0$ (или интервал значений β), в которой $\psi(\beta_0) = 0$, т.е.

$$\int_0^{\beta_0} \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p) = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma(p). \quad (3.12)$$

Точка β_0 является точкой абсолютного минимума функции $\lambda(\beta)$.

Объединяя результаты настоящего параграфа мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняется одно из следующих условий:

- а) в ЗКС, $\mu > 1$, либо K – четная функция, либо символ $1 - \hat{K}(s)$ обладает вещественным нулем $\omega > 0$;
- б) в КС, $\mu = 1$, ядро K обладает конечным моментом второго порядка.

Тогда существует факторизация (3.1), (3.2), где $\beta > 0$ удовлетворяет условию (3.11); в случае $\sigma \in C(0, b)$ число $\beta > 0$ может быть определено из условия минимума $\lambda(\beta)$ (3.12); если $a > 0$, то при $\beta \leq a$ выполняются условия (3.3) и (3.2) и функции $T_\pm$ вполне монотонны на $(0, \infty)$. Число $\alpha = \beta - i\omega$, где $\omega = 0$ в КС, а в ЗКС $\omega > 0$, является единственным положительным нулем символа $1 - \hat{K}$.

§ 4. Основные задачи факторизации

4.1. Дальнейшие результаты по факторизации оператора $I - K$ опираются на применение уравнения Амбарцумяна (1.11). В силу неравенства (3.2) оператор $I - T$, участвующий в разложении (3.1), допускает факторизацию (1.12). Ядра $V_\pm$ вольтеровых факторов $V_\pm$ выражаются через функции Амбарцумяна $\varphi_\pm$ по формулам (1.13). Пусть $\varphi_\pm(p) = \varphi_\pm(p, \beta)$, $\beta \geq 0$, является КР УА (1.11), соответствующего мерам $d\rho_\pm$ вида

$$d\rho_\pm(p) = h(p) d\sigma_\pm(p) = \frac{p^2 - \beta^2}{p^2 + \omega^2} d\sigma_\pm(p). \quad (4.1)$$

Ниже мы установим некоторые дополнительные свойства функций $\varphi_\pm(p)$. Сначала приведем одно простое и полезное свойство этих функций, которое раньше

не было отмечено. Из (1.16) и неравенств (1.15) непосредственно следует, что в случае вещественных мер $d\rho_{\pm}$ имеют место неравенства

$$\varphi_{\pm}(p) > 0, \quad p \in (0, \infty). \quad (4.2)$$

Положительность $\varphi_{\pm}$ независимо от знакопеременности мер $d\rho_{\pm}$ играет важную роль в ряде теоретических и прикладных вопросов, в том числе – в вопросе построения резольвентных функций $\Phi_{\pm}$ из (1.3) в виде суперпозиций экспонент типа (1.22).

ЛЕММА 4.1. КР (φ_+, φ_-) УА (1.11), (4.1) при $\mu > 1$ и $\beta > 0$ обладает свойством

$$\int_a^b \frac{\varphi_{\pm}(p, \beta)(p + \beta)}{p^2 + \omega^2} d\sigma_{\pm}(p) = 1. \quad (4.3)$$

Это свойство означает, что символы $1 - \widehat{V}_+$ и $1 - \widehat{V}_-$ операторов $I - V_{\pm}$ обращаются в 0 в точках $-i\beta$ и $i\beta$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в выражении (3.4) для $1 - \widehat{T}(s)$ $s = \pm i\beta$, с учетом (3.7) и $1 - \widehat{K}(\omega) = 0$ получаем

$$1 - \widehat{T}(\pm i\beta) = 1 - \int_a^b \frac{2p}{p^2 + \omega^2} d\sigma(p) \pm 2\beta \int_a^b \frac{1}{p^2 + \omega^2} d\xi(p) = 0. \quad (4.4)$$

Из (1.12) согласно формуле (1.7) имеем

$$1 - \widehat{T}(s) = (1 - \widehat{V}_-(s))(1 - \widehat{V}_+(s)), \quad (4.5)$$

где

$$\widehat{V}_{\pm}(s) = \int_a^b \frac{\varphi_{\pm}(p, \beta)(p^2 - \beta^2)}{(p \mp is)(p^2 + \omega^2)} d\sigma_{\pm}(p). \quad (4.6)$$

Из неравенств (1.15) следует, что $1 - \widehat{V}_-$ и $1 - \widehat{V}_+$ при $\lambda < 1$ не обращаются в 0 в “своих” (нижней и верхней) замкнутых полуплоскостях $\overline{\mathbb{C}}^-$ и $\overline{\mathbb{C}}^+$, соответственно. Поэтому из (4.4) и (4.5) следует $1 - \widehat{V}_{\mp}(\pm i\beta) = 0$. Лемма доказана.

Нами доказана

ТЕОРЕМА 4.1. В условиях теоремы 3.1 имеет место факторизация

$$I - K = (I - U_-)(I - V_-)(I - V_+)(I - U_+), \quad (4.7)$$

где $U_{\pm}$ определяются, как в п. 3.1; $V_{\pm} \in \Omega_0^{\pm}$ – операторы вида (1.2) с ядрами (1.13), причем $\varphi_{\pm}(p) = \varphi_{\pm}(p, \beta)$ является КР УА (1.11), (4.1) и обладает свойствами (1.15), (4.2), (4.3). В СС имеем $\varphi_{\pm} = \varphi$ и $V_{\pm} = V$.

4.2. Используем (4.7) для построения других разложений оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$.

Так как классы Ω^+ и Ω^- вольтеровых операторов являются коммутативными алгебрами, то разложение (4.7) можно переписать в виде

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})(\mathbf{I} - \mathbf{V}_+), \quad (4.8)$$

где $\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{U}_+)$. Простые вычисления приводят нас к следующему выражению для оператора $\mathbf{\Lambda}$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}f(x) &= c_0 \int_0^\infty e^{-\beta|x-t|} f(t) dt, \\ c_0 &= \frac{\omega^2 + \beta^2}{2\beta}, \quad \mu_0 = \int_{-\infty}^\infty \mathbf{\Lambda}(x) dx = \frac{2c_0}{\beta} > 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

т.е. $\mathbf{\Lambda} \in \Omega_0$ является оператором с ядром Лалеско $\mathbf{\Lambda}(x) = c_0 e^{-\beta|x|}$.

Нами доказана

ТЕОРЕМА 4.2. *Если в ЗКС, $\mu > 1$, ядро K – четная функция или символ $1 - \widehat{K}$ обладает вещественным нулем $\omega > 0$, то оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ с ядром (0.2) допускает вещественное разложение (4.8), где $\mathbf{V}_\pm$ определяются, как в теореме 4.1, а $\mathbf{\Lambda} \in \Omega_0$ оператор с ядром Лалеско, вида (4.9).*

4.3. Рассмотрим теперь вопрос о построении двухфакторного разложения оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ в КС и ЗКС. Из (4.7) имеем

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{W}_+), \quad (4.10)$$

где

$$\mathbf{I} - \mathbf{W}_\pm = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_\pm)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_\pm). \quad (4.11)$$

Ниже мы будем заниматься построением ядер $W_\pm$ операторов $\mathbf{W}_\pm$. Из (4.11) получаем $\mathbf{W}_\pm = \mathbf{U}_\pm + \mathbf{V}_\pm - \mathbf{U}_\pm \mathbf{V}_\pm$, откуда

$$W_\pm(x) = \alpha e^{-\beta x} + V_\pm(x) - \alpha \int_0^x e^{-\beta(x-t)} V_\pm(t) dt, \quad x > 0.$$

Используя (1.12), (4.1) и (3.7), будем иметь

$$\begin{aligned} W_\pm(x) &= \alpha e^{-\beta x} \left(1 - \int_a^b \frac{p + \beta}{p^2 + \omega^2} \varphi_\pm(p, \beta) d\sigma_\pm(p) \right) \\ &\quad + \int_a^b e^{-xp} \varphi_\pm(p, \beta) \frac{p + \beta}{p \pm i\omega} d\sigma_\pm(p). \end{aligned}$$

С учетом (4.3) приходим к следующему выражению для $W_\pm$

$$W_\pm(x) = \int_a^b e^{-xp} \varphi_\pm(p, \beta) (p + \beta) \frac{p \mp i\omega}{p^2 + \omega^2} d\sigma_\pm(p). \quad (4.12)$$

Покажем, что произведения $(p + \beta)\varphi_\pm(p, \beta)$ не зависят от $\beta \geq 0$. Тогда $W_\pm$ не зависят от β . Для этого выпишем УА для $\varphi_\pm(p, 0)$

$$\varphi_\pm(p, 0) = 1 + \varphi_\pm(p, 0) \int_a^b \frac{\varphi_\mp(q, 0)}{p + q} \cdot \frac{q^2}{q^2 + \omega^2} d\sigma_\mp(q). \quad (4.13)$$

Это уравнение соответствует ядру $T = T_0$ вида (3.8) при $\beta = 0$. В §3 было отмечено, что это ядро консервативное. Оно также обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$m_2(T_0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 T_0(x) dx < +\infty, \quad \nu_1^0 = \int_{-\infty}^{\infty} x T_0(x) dx = 0. \quad (4.14)$$

Первое свойство следует из неравенства

$$m_2(T_0) = 2 \sum_{\pm} \int_a^b \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma_{\pm}(p) \leq \frac{2}{\omega^2} \mu.$$

Второе из свойств (4.14) является прямым следствием равенства $f_2(\omega) = 0$ (см. (2.3)). Из утверждения (1.20а)) и (4.14) следует, что

$$\int_a^b \frac{\varphi_{\pm}(p, 0)}{p(p^2 + \omega^2)} d\sigma_{\pm}(p) = 1. \quad (4.15)$$

Из конечности второго момента консервативного ядра T_0 следует (см. [9], [10]) конечность первого момента соответствующих вольтерровых ядер (1.13), т.е.

$$\int_a^b \frac{\varphi_{\pm}(p, 0)p^2}{p^2(p^2 + \omega^2)} d\sigma_{\pm}(p) < +\infty. \quad (4.16)$$

Перепишем (4.13) в виде

$$\varphi_{\pm}(p, 0) \left(1 - \int_a^b \frac{\varphi_{\mp}(q, 0)}{p+q} \cdot \frac{q^2}{q^2 + \omega^2} d\sigma_{\mp}(q) \right) = 1.$$

Используя равенства (4.15), получаем

$$\varphi_{\pm}(p, 0) \int_a^b \frac{p}{q(p+q)} \cdot \frac{q^2 \varphi_{\mp}(q, 0)}{q^2 + \omega^2} d\sigma_{\mp}(q) = 1. \quad (4.17)$$

Введем функции

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) = \frac{p}{p+\beta} \varphi_{\pm}(p, 0). \quad (4.18)$$

Из (4.17) имеем

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) \int_a^b \frac{p+\beta}{p+q} \cdot \frac{q}{q^2 + \omega^2} \varphi_{\mp}(q, 0) d\sigma_{\mp}(q) = 1.$$

Заменяя $p+\beta$ на $p+q-(q-\beta)$, имеем

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) \left(1 - \int_a^b \frac{q(q-\beta)}{q^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{p+q} \varphi_{\mp}(q, 0) d\sigma_{\mp}(q) \right) = 1,$$

откуда

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) \left(1 - \int_a^b \frac{1}{p+q} \varphi_{\mp}^*(q, \beta) \frac{q^2 - \beta^2}{q^2 + \omega^2} d\sigma_{\mp}(q) \right) = 1.$$

Полученное уравнение относительно $\varphi_{\pm}^*(p, \beta)$ совпадает с УА (1.11), (4.1) относительно $\varphi_{\pm}(p, \beta)$. Из (4.15) и (4.18) следует, что

$$\int_a^b \frac{1}{p} |\varphi_{\pm}^*(p, \beta)| d\rho_{\pm}(p) = \int_a^b \frac{1}{p} \varphi_{\pm}^*(p, \beta) \frac{p^2 - \beta^2}{p^2 + \omega^2} d\sigma_{\pm}(p) < 1. \quad (4.19)$$

В [9], [10] показано, что КР УА (1.11) (при $\lambda < 1$) является единственным его решением, удовлетворяющим условию (4.19), поэтому $\varphi_{\pm}^*(p, \beta) = \varphi_{\pm}(p, \beta)$, т.е.

$$(p + \beta)\varphi_{\pm}(p, \beta) = p\varphi_{\pm}(p, 0). \quad (4.20)$$

Нами доказана основная теорема настоящей работы.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть в ЗКС, $\mu > 1$, ядро K – симметричное или символ $1 - \hat{K}$ обладает вещественным нулем ω , $\omega > 0$. Тогда существует факторизация (4.10), где $\mathbf{W}_{\pm} \in \Omega_0^+$. Их ядра $W_{\pm}$ имеют вид (4.12). Они не зависят от выбора допустимого значения β . Имеет место равенство (4.20), поэтому

$$W_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xp} \varphi_{\pm}(p, 0) \frac{1}{p \pm i\omega} d\sigma_{\pm}(p). \quad (4.21)$$

Заметим, что из (4.21) следует, что вещественные части ядер $W_{\pm}$ являются консервативными, имеем

$$\operatorname{Re} W_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xp} \varphi_{\pm}(p, 0) \frac{p}{p^2 + \omega^2} d\sigma_{\pm}(p),$$

поэтому $\operatorname{Re} W_{\pm} \geq 0$, $\int_0^{\infty} \operatorname{Re} W_{\pm}(x) dx = 1$ (см. (4.15)).

Отметим, что преобразование, аналогичное преобразованию (4.20), применяется в теории переноса излучения в рамках метода сдвига Альбеда (см. [19]).

4.4. Результаты настоящего параграфа по факторизации оператора в КС и ЗКС имеют разные сферы применений. Теоремы 4.1–4.3 в ЗКС представляют самостоятельный теоретический интерес как первые результаты по факторизации в ЗКС. На основе построенных факторизаций можно создать достаточно полную конструктивную теорию однородного и неоднородного уравнений (0.1), (0.2) в ЗКС (если символ обладает вещественным нулем). Часть результатов такого характера будет изложена в §5. Если однородное уравнение (0.1), (0.2) в ЗКС достаточно подробно исследовано в [12], то результаты по неоднородному уравнению (и подходящие методы) вовсе отсутствовали. Что касается консервативного случая, то построенные в настоящей работе факторизации при $\mu = 1$ в основном имеют прикладное значение (в духе метода сдвига Альбеда), способствующие эффективному решению уравнения (0.1), (0.2) в КС, в случае конечности второго момента ядра K . Они мало что добавляют к теории консервативных интегральных уравнений Винера–Хопфа, развитой в [9]–[11]. Тем не менее, ниже мы приведем один новый факт по УА в КС, доказываемый с помощью конструкций настоящей работы.

ЛЕММА 4.2. Пусть в УА (1.11) меры $d\rho_{\pm}$ неотрицательны, удовлетворяют условию консервативности $\lambda = 1$ и существует конечный второй момент ядра T . Тогда КР является единственным решением (1.11), удовлетворяющим условию

$$\|\varphi_{\pm}\|_{\mathcal{L}^{\pm}} \equiv \int_a^b \frac{1}{p} |\varphi_{\pm}(p)| d\rho_{\pm}(p) \leq 1. \quad (4.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (φ_+, φ_-) удовлетворяет (1.11) и условию (4.22). Применим преобразование типа (4.18), т.е. введем функции

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) = \frac{p}{p + \beta} \varphi_{\pm}(p).$$

Пара $(\varphi_+^*, \varphi_-^*)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{\pm}^*(p, \beta) = 1 + \varphi_{\pm}^*(p, \beta) \int_a^b \frac{\varphi_{\mp}^*(q, \beta)}{p + q} \left(1 - \frac{\beta^2}{q^2}\right) d\rho_{\mp}(q). \quad (4.23)$$

В силу конечности $m_2(T)$ при достаточно малых положительных значениях β выполняется условие (см. п. 3.2)

$$\lambda^* \equiv \sum_{\pm} \int_a^b \frac{1}{q} d\rho_{\pm}^*(q) < 1, \quad d\rho_{\pm}^*(q) = \left|1 - \frac{\beta^2}{q^2}\right| d\rho_{\pm}(q).$$

Из оценки (1.15) следует, что

$$\int_a^b \frac{1}{p} |\varphi_{\pm}^*(p, \beta)| d\rho_{\pm}^*(p) < 1 \quad \text{при} \quad \lambda^* < 1.$$

Согласно результатам [9], [10] $(\varphi_+^*, \varphi_-^*)$ является единственным решением (4.23), удовлетворяющим этому неравенству. Поэтому

$$\varphi_{\pm}(p) = \frac{p + \beta}{p} \varphi_{\pm}^*(p, \beta)$$

единственное решение УА (1.11), удовлетворяющее условию (4.22). Лемма доказана.

§ 5. Решение однородного и неоднородного уравнений (0.1), (0.2) в ЗКС

5.1. Настоящий параграф посвящен применению факторизации (4.8) (или (4.7)) к решению однородного и неоднородного уравнений (0.1), (0.2) в случае, когда символ $1 - \hat{K}$ обладает вещественным нулем. Как уже было отмечено, однородное уравнение достаточно полно исследовано в [12], причем в общем закритическом случае. Поэтому результатам настоящего параграфа по однородному уравнению мы приписываем в основном методическое значение. Результаты же по неоднородному уравнению мы считаем новыми и конструктивными.

Операторы $\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\pm}$, участвующие в факторизации (4.8), обратимы в пространствах E^+ и в ряде других пространств, в которых мы будем искать решение рассматриваемых уравнений. Поэтому задача в основном сводится к решению однородного и неоднородного уравнений с (симметрическим) закрытическим ядром Лалеско

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})S_1 = 0, \quad (5.1)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})F_1 = g_1, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ определяется согласно (4.9).

Начнем с изучения (5.1). Имеем

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U}_-)S_2 = 0, \quad (5.3)$$

где

$$S_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_+)S_1. \quad (5.4)$$

Общее решение (5.3) имеет вид

$$S_2(x) = ce^{i\omega x}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (5.5)$$

поэтому из (5.4) получаем

$$S_1(x) = ce^{i\omega x} + \alpha c \int_0^x e^{-i\omega(x-t)} e^{i\omega t} dt. \quad (5.6)$$

Итак, однородное уравнение (5.1) имеет вещественное решение

$$S_1(x) = c_0(\omega \cos \omega x + \beta \sin \omega x) \equiv A \cos \omega(x - x_0). \quad (5.7)$$

Рассмотрим теперь (5.2). Предположим, что g_1 — вещественная функция из L_1^+ . Пусть комплекснозначная функция F_1 удовлетворяет уравнению (5.2). Тогда ее вещественная часть $\operatorname{Re} F_1$ также будет решением (5.2), а мнимая часть $\operatorname{Im} F_1$ будет (тривиальным или нетривиальным) решением однородного уравнения (5.1). Обозначим

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U}_+)F_1 = F_2. \quad (5.8)$$

Имеем

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U}_-)F_2 = g_1. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) обладает решением вида

$$F_2(x) = g_1(x) + g_2(x) \equiv g_1(x) + \alpha \int_x^\infty e^{-i\omega(t-x)} g_1(t) dt. \quad (5.10)$$

Согласно (5.10) функция F_2 является суммой двух слагаемых, причем первое слагаемое g_1 из L_1^+ , а второе слагаемое $g_2 \in C_0^+$. Из (5.8) имеем

$$F_1(x) = F_2(x) + \alpha \int_0^x e^{-i\omega(x-t)} F_2(t) dt, \quad (5.11)$$

откуда и из (5.10) после некоторых выкладок получаем

$$F_1(x) = F_3(x) + i \left(c_1 + \frac{\beta}{\omega} c_2 \right) (\omega \cos \omega x + \beta \sin \omega x), \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\infty g_1(t) \cos \omega t dt, \quad c_2 = \int_0^\infty g_1(t) \sin \omega t dt, \\ F_3(x) &= g_1(x) - \frac{\beta^2 + \omega^2}{2\omega} \int_0^\infty \sin \omega |x - t| g_1(t) dt \\ &+ \left(\frac{\beta^2 - \omega^2}{2\omega} c_2 + \beta c_1 \right) \cos \omega x + \left(\frac{\beta^2 - \omega^2}{2\omega} c_1 + \beta c_2 \right) \sin \omega x. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Нами построено вещественное решение F_3 уравнения (5.2) в виде суммы $g_1 + g_3$, где $g_1 \in L_1^+$, $g_3 \in C_u^+$.

5.2. Рассмотрим однородное уравнение (0.1), (0.2) при $\mu > 1$, т.е.

$$S(x) = \int_0^\infty K(x - t) S(t) dt. \quad (5.14)$$

Используя факторизацию (4.8), получаем

$$(\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})(\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)S = 0. \quad (5.15)$$

Из $\gamma_- \equiv \|V_-\|_{L_1^+} < 1$ следует, что уравнение $(\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)S_2 = 0$ имеет только тривиальное решение не только в пространствах E^+ , но и в классах локально интегрируемых на $[0, \infty)$ функций медленного (полиномиального) роста. Поэтому в указанных классах (5.15) эквивалентно уравнению (5.1), где

$$S_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)S. \quad (5.16)$$

Из (5.16) и (5.7) имеем

$$S(x) = A \cos \omega(x - x_0) + A \int_0^x \Phi_+(x - t) \cos \omega(t - x_0) dt, \quad (5.17)$$

где $\Phi_+ \in L_1^+$ резольвентная функция оператора $\mathbf{V}_+$, определяемая из (1.3). Поэтому однородное уравнение (5.1) имеет абсолютно непрерывное ограниченное решение (5.17). Этот результат согласуется с результатом [12] по решению однородного уравнения (5.14).

Имеются следующие возможности применения к формуле (5.17) представления вида (1.22) для $\Phi_\pm$. Если $a > 0$ и $\beta \leq a$, то меры $d\rho_\pm$ неотрицательные и представления (1.22) имеют место. Если $a = 0$, то можно использовать разложение (3.5) при $\beta = 0$. Такой путь близок к подходу работы [12] и имеет тот недостаток, что тогда построение факторизации (1.12) для оператора $\mathbf{I} - \mathbf{T}$ существенно усложняется. Имеется также другая, нереализованная в настоящей работе, возможность построения представления вида (1.22) в случае знакопеременной меры $\varphi_\pm(p)h(p)d\sigma_\pm(p)$. При этом существенную упрощающую роль сможет играть положительность функций $\varphi_\pm$. Сделанное замечание о представлениях (1.22) относится также к решению неоднородного уравнения (0.1).

5.3. Рассмотрим неоднородное уравнение (0.1), (0.2) в ЗКС, $\mu > 1$, при $g \in L_1^+$. Введем обозначения

$$g_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_-)^{-1}g \in L_1^+, \quad F_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_+)f. \quad (5.18)$$

В силу факторизации (4.8) F_1 удовлетворяет уравнению (5.2). Нами уже построено решение (5.13) этого уравнения. Поэтому (0.1) обладает решением

$$f(x) = F_1(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)F_1(t)dt. \quad (5.19)$$

Нами доказана

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть в уравнении (0.1), (0.2) $g \in L_1^+$, $\mu > 1$ и символ $1 - \widehat{K}$ обладает вещественным нулем $\omega > 0$. Тогда это уравнение имеет решение вида (5.19), где F_1 определяется из (5.18), а $g_1 \in L_1^+$ определяется равенством

$$g_1(x) = g(x) + \int_x^\infty \Phi_-(t-x)g(t)dt. \quad (5.20)$$

Функция f является суммой функций $(\mathbf{I} + \Phi_+)g_1 \in L_1^+$ и $(\mathbf{I} + \Phi_+)g_3 \in C_u^+$.

§ 6. Случай комплексных нулей символа

6.1. В настоящем параграфе мы вкратце рассмотрим вопрос о построении разложений типа (3.1) и (4.7) в случае, когда символ (или его аналитическое продолжение) $1 - \widehat{K}$ обладает комплексными нулями.

Пусть число $s_1 = \omega + i\xi$ является нулем $1 - \widehat{K}$. Тогда согласно §2 число $s_2 = -\omega + i\xi$ также является его нулем

$$1 - \widehat{K}(s_m) = 0, \quad m = 1, 2, \quad s_{1,2} = \pm\omega + i\xi, \quad \omega \geq 0. \quad (6.1)$$

В случае, когда s_1 чисто мнимый, т.е. $\omega = 0$, $s_{1,2} = i\xi$. Будем считать, что $s = i\xi$ является нулем второго порядка символа, т.е.

$$(s - i\xi)^{-2}(1 - \widehat{K}(s)) \in C_0(-\infty, \infty). \quad (6.2)$$

Пусть β – произвольное вещественное число. Из (2.2) и (6.1) получаем

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{K}(s) &= \sum_{\pm} \int_a^b \left(\frac{1}{p \mp is_1} - \frac{1}{p \mp is} \right) d\sigma_{\pm}(p) \\ &= \frac{is_1 - is}{\beta - is} \left(1 - \sum_{\pm} \int_a^b \frac{(p \mp \beta)}{(p \mp is)(p \mp is_1)} d\sigma_{\pm}(p) \right), \end{aligned}$$

откуда

$$1 - \widehat{K}(s) = \frac{is_1 - is}{\beta - is} (1 - \widehat{G}(s)), \quad (6.3)$$

где

$$G_{\pm}(x) \equiv G(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} \frac{p \mp \beta}{p \mp is_1} d\sigma_{\pm}(p).$$

В силу сделанных предположений о нулях $1 - \widehat{K}$ имеем $1 - \widehat{G}(s_2) = 0$. Поэтому $1 - \widehat{G}$ можно разложить аналогично (6.3). При этом число β будет заменено на $-\beta$, а s_1 на s_2 . В результате мы приходим к следующему разложению:

$$1 - \widehat{K}(s) = \frac{(is_1 - is)(-is_2 + is)}{(\beta - is)(\beta + is)} \left(1 - \sum_{\pm} \int_a^b \frac{(p^2 - \beta^2)}{(p \mp is)(p \mp is_1)(p \mp is_2)} d\sigma_{\pm}(p) \right). \quad (6.4)$$

Будем считать, что $\beta > 0$. Обозначим

$$T_{\pm}(x) \equiv T(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} \frac{p^2 - \beta^2}{(p \pm \xi)^2 + \omega^2} d\sigma_{\pm}(p). \quad (6.5)$$

Справедливость $T_{\pm} \in L_1^+$ при $\omega \neq 0$ не вызывает сомнения. При $\omega = 0$ это следует из (6.2). Из (6.4) и (6.5) имеем

$$1 - \widehat{K}(s) = (1 - \widehat{U}_-(s))(1 - \widehat{T}(s))(1 - \widehat{U}_+(s)), \quad (6.6)$$

где $1 - \widehat{U}_{\pm}$ суть символы операторов $\mathbf{I} - \mathbf{U}_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_+ f(x) &= (\beta - is_1) \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t) dt, \\ \mathbf{U}_- f(x) &= (\beta + is_2) \int_x^{\infty} e^{-\beta(t-x)} f(t) dt. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Мы пришли к следующей лемме.

ЛЕММА 6.1. *При выполнении условий (6.1), (6.2) имеет место (6.6) и факторизация*

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_-)(\mathbf{I} - \mathbf{T})(\mathbf{I} - \mathbf{U}_+), \quad (6.8)$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}_{\pm}$ определяются, соответственно, из (6.5) и (6.7).

Аналогично случаю вещественных корней символа, можно показать, что ядро T консервативное в случае $\beta = 0$ и выполняется неравенство $\|T\|_{L_1(-\infty, \infty)} < 1$ при достаточно малых значениях $\beta > 0$. Используя эти факты, из (6.8) можно получить разложения типа (4.7), (4.8) и (4.10) в условиях леммы 6.1.

6.2. Сочетая факторизацию (6.8) с теоремой 2.4 об исключительном нуле (см. [12]), можно получить общие результаты по однородному и неоднородному уравнениям (0.1), (0.2) в ЗКС. Мы не излагаем здесь эти факты, поскольку считаем необходимым более подробно исследовать свойства комплексных нулей символа $1 - \widehat{K}$ и надеемся найти эффективный алгоритм построения таких нулей.

В работе было построено следующее разложение символа в ЗКС

$$1 - \widehat{K}(s) = \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s^2} (1 - \widehat{T}(s)) \quad (6.9)$$

(явный вид T не был найден). Используя это разложение, которое соответствует (6.4) при $\beta = 0$, авторами [12] построено решение однородного уравнения (0.1), (0.2) в ЗКС. Разложение (6.9) в [12] не приобрело форму факторизации оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ в винеровской алгебре. Вероятно по этой причине неоднородное уравнение (0.1), (0.2) при $\mu > 1$ в [12] не было рассмотрено.

Список литературы

1. Амбарцумян В. А. Научные труды. Т. I. Ереван, 1960.
2. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953.
3. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии. М.: Гостехиздат, 1956.
4. Busbridge I. W. The mathematics of the radiative transfer. Oxford, 1960.
5. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
6. Енгибарян Н. Б. Об интегральных уравнениях на полупрямой с разностными ядрами // Докл. АН Арм. ССР. 1972. Т. 54. №3. С. 129–133.
7. Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностным ядром и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97. №1. С. 35–58.
8. Крейн М. Г. О нелинейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера–Хопфа // Матем. исследования. Т. 42. №1. Кишинев: Штиница, 1976. С. 47–90.
9. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера–Хопфа // Препринт ЕГУ. Ереван: НИИ ФКС, 79-1, 1979.
10. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–244.
11. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. Интегральные уравнения Винера–Хопфа со вполне монотонными ядрами // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1990. Т. 25. №2. С. 135–155.
12. Крейн М. Г., Шмудьян Ю. Л. Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1982. Т. 17. №4. С. 307–327; №5. С. 335–375.
13. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1972.
14. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. №5. С. 3–120.
15. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
16. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. Некоторые задачи факторизации для интегральных операторов типа свертки // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №8.
17. Енгибарян Н. Б., Мелконян Э. А. О методе дискретных ординат // ДАН СССР. 1987. Т. 292. №2. С. 322–326.
18. Енгибарян Н. Б., Погосян А. А. Об одном классе интегральных уравнений восстановления // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №6. С. 23–30.
19. Ivanov V. V., Rybicki G. B., Kasarov A. M. Albedo Shifting // Preprint Series № 3478. Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 1992.

Центр математической физики Бюраканской;
Астрофизической обсерватории НАН РА

Поступила в редакцию
08.08.1995