Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Об отдельных графах с некоторыми условиями регулярности, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 73–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:01:29

УДК 519.17

В. В. Кабанов, А. А. Махнев

Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности

В работе доказываются две теоремы. В теореме 1 описаны связанные μ -регулярные графы без 3-лап. В теореме 2 получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы связный вполне регулярный граф с $\mu > 1$ был отделим. Отделимым мы называем граф Γ , у которого для любой вершины a из Γ подграф $\Gamma_2(a)$ содержит вершины b, c на расстоянии 2 в $\Gamma_2(a)$, и μ -подграф для любой такой пары не пересекает окрестность вершины a .

Библиография: 4 названия.

§ 1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Заметим, что всюду далее, если Δ – подмножество из множества вершин графа Γ , то *подграф* Δ из Γ – это индуцированный подграф графа Γ на Δ . Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть *окрестностью вершины a* и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф на множестве $\{a\} \cup [a]$.

Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если $[a]$ содержит k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *μ -регулярным* графом с параметрами (v, k, μ) , если $|\Gamma| = v$, граф Γ регулярен валентности k и каждая пара вершин из Γ , которые находятся на расстоянии 2 в Γ , имеет μ общих смежных с ними вершин. Более того, подграф на этих μ вершинах будем называть μ -подграфом. Граф Γ на v вершинах назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он регулярен валентности k и каждое ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он μ -регулярен и реберно регулярен с соответствующими параметрами. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2.

Граф Тервиллигера – это неполный граф Γ такой, что для любых двух вершин a, b на расстоянии 2 подграф $[a] \cap [b]$ является кликой порядка μ для некоторого фиксированного $\mu \geq 0$.

Через $(m_1, \dots, m_n)$ обозначим полный многодольный граф, с долями порядка $m_1, \dots, m_n$. Граф $(m, 1)$ называется *m -лапой*, если $m \geq 2$. Граф на множестве $X_1 \times \dots \times X_n$ называется *$m_1 \times \dots \times m_n$ -графом*, если $|X_i| = m_i$, а пары $(x_1, \dots, x_n)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 93-01-01529 и № 94-01-00802-а).

и $(y_1, \dots, y_n)$ смежны тогда и только тогда, когда существует единственное i такое, что $x_i \neq y_i$. При $m_i = m$, для всех i этот граф называется *графом Хемминга* $H(n, m)$ или *n -мерным решетчатым графом*. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Антиподальный граф диаметра 3 на 12 вершинах, у которого окрестность любой вершины — пятиугольник, назовем *графом икосаэдра*.

Под α -расширением графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на полный подграф (a) , содержащий α вершин (такой подграф называется α -*кликой*), причем вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ . Для вершины a регулярного графа Γ ядро $K(a)$ — это множество $\{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$.

Пусть $\mathcal{F}$ некоторый класс графов. Граф Γ называется *локально $\mathcal{F}$ -графом*, если окрестность каждой вершины из Γ принадлежит $\mathcal{F}$. Большое число исследований было посвящено изучению свойств локально $\mathcal{F}$ -графов при различных ограничениях на класс графов $\mathcal{F}$. Обзор этих работ можно найти, например, в [4]. Известно строение локально $m \times 2$ -графов [4, теорема 9.1.3]. Очевидно, что такие графы не содержат 3-клик в окрестности любой вершины. Теорема 1 данной статьи посвящена классификации μ -регулярных локально $\mathcal{F}$ -графов, где $\mathcal{F}$ — класс графов не содержащих 3-клик. Заметим, что в этом случае сам граф не содержит 3-лап. Важным вкладом в изучение этого класса графов явилась классификация Зейделем [4, теорема 3.12.4] сильно регулярных графов без 3-лап. В работе [1] получено описание μ -регулярных графов диаметра 2 без 3-лап. Теорема 1 снимает ограничение на диаметр графа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ — связный μ -регулярный граф без 3-лап. Тогда Γ либо не содержит 3-клик, либо является α -расширением одного из следующих графов:

- (1) регулярного графа Тервиллигера с $\mu = 1$ диаметра > 2 ;
- (2) прямоугольной решетки $m \times n$ при $m \geq 3, n \geq 3$;
- (3) треугольного графа $T(m)$ при $m \geq 6$;
- (4) графа Шлефли (дополнительного к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$);
- (5) графа икосаэдра.

Примеры регулярных графов без 3-лап имеются среди графов вершин и ребер полуправильных многогранников. Граф усеченного тетраэдра (рис. 1) является μ -регулярным с $\mu = 1$, но не реберно регулярным графом. Граф кубооктаэдра (рис. 2), наоборот, реберно регулярен, но не является μ -регулярным.

Граф Γ назовем *отделимым*, если для любой вершины a из Γ подграф $\Gamma_2(a)$ содержит вершины b, c на расстоянии 2 в $\Gamma_2(a)$, и μ -подграф $[b] \cap [c]$ для любой такой пары не пересекает $[a]$.

Для любого графа Γ с 4-циклом, удовлетворяющего условиям теоремы 1, имеет место альтернатива: либо граф Γ не содержит 3-клик, либо граф Γ отделим. Результат, полученный в теореме 1, позволяет описать вполне регулярные отделимые графы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , $\mu > 1$. Граф Γ отделим тогда и только тогда, когда он является

Рис. 1. Граф усеченного тетраэдра

Рис. 2. Граф кубookтаэдра

одним из следующих графов:

- (1) *граф Хемминга* $H(n, t)$ при $t \geq 3$, $n \geq 2$;
- (2) *треугольный граф* $T(t)$ при $t \geq 6$;
- (3) *граф Шлефли*;
- (4) *граф икосаэдра*.

Некоторые свойства регулярных отделимых графов получены в §2. В §3 рассматриваются регулярные отделимые графы с 3-лапами, в которых любой μ -подграф содержит не менее двух вершин. В §4 проведена редукция μ -регулярных гра-

фов без 3-лапк графам Тервиллигера. Параграфы 5 и 6 посвящены классификации графов Тервиллигера без 3-лап.

§ 2. О регулярных отделимых графах

В этом параграфе Γ – связный регулярный граф. Мы предполагаем, что для любой вершины a из графа Γ подграф $\Gamma_2(a)$ содержит вершины b, c на расстоянии 2 в $\Gamma_2(a)$, и для любых двух таких вершин $[b] \cap [c]$ не пересекает $[a]$.

ЛЕММА 2.1. *Если ad – ребро из графа Γ , то подграф $[a] - [d]$ не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в $\Gamma_2(d)$. В частности, он является объединением изолированных клик.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b, c – вершины из $[a] - [d]$, находящиеся на расстоянии 2 в $\Gamma_2(d)$. По условию $[b] \cap [c]$ не пересекает $[d]$. Противоречие с тем, что $[b] \cap [c]$ содержит вершину a из $[d]$.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $d(a, b) = 2$ и $c \in [a] \cap [b]$.*

- (1) *Если e, c – смежные вершины из $[a] \cap [b]$, то $[e] - [c]$ и $[c] - [e]$ содержатся в $[a] \cup [b]$.*
- (2) *Если $w \in [c] - (a^\perp \cup b^\perp)$, то содержащая вершину c связная компонента из μ -подграфа $[a] \cap [b]$ лежит в $[w]$.*
- (3) *Подграф $([c] - [a]) \cap [b]$ является кликой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим, что $[c] - [e]$ содержит вершину d не лежащую в $[a] \cup [b]$. Тогда $\Gamma_2(d)$ содержит 2-лапу $\{e, a, b\}$. Противоречие с тем, что $[a] \cap [b]$ содержит вершину c из $[d]$.

(2) Достаточно доказать, что $[w]$ содержит любую смежную с c вершину d из $[a] \cap [b]$. Но если $d \notin [w]$, то $\{d, a, b\}$ будет 2-лапой из $\Gamma_2(w)$.

(3) По лемме 2.1 $[c] - a^\perp$ является объединением изолированных клик, в одной из которых лежит b .

ЛЕММА 2.3. *Пусть a, c – смежные вершины из Γ и $[a] \cap [c]$ содержит 3-кликку $\{d, e, f\}$. Тогда содержащая a связная компонента Λ из $[d] \cap [e] \cap [f]$ совпадает с $K(a)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Delta = \bigcap_{x \in \Lambda} [x]$. Из леммы 2.2 (2) следует, что Λ – связная компонента из μ -подграфа $[y] \cap [z]$ для любых двух вершин y, z из $\{d, e, f\}$. В частности, $[y] \cap [z]$ не пересекает Δ .

По лемме 2.2 (1) каждая вершина x из $[a] - [c]$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\{d, e, f\}$, поэтому $[a] - [c]$ и $[c] - [a]$ лежат в Λ . Покажем, что $[x]$ лежит в $\Lambda \cup \Delta$ для любой вершины x из Λ . Для этого достаточно показать, что $[a] \cap [c] \subset \Lambda \cup \Delta$. Пусть $g \in [a] \cap [c] - \Lambda$ и g не смежна с некоторой вершиной w из Λ . Выберем $a = w_0, w_1, \dots, w_n = w$ – путь в Λ и i – наименьший номер такой, что $[w_i]$ не содержит g . Как показано выше, $[w_{i-1}] - [w_i] \subset \Lambda$. Противоречие с выбором g .

Допустим, что $[c] - [a]$ содержит вершину b (ясно, что $b \in \Lambda$). Покажем, что в этом случае $\Gamma = \Lambda \cup \Delta$. Для этого достаточно доказать, что $[x] \subset \Lambda \cup \Delta$ для любой вершины x из Δ . Но если $x \in \Delta$ и g – вершина из $[x]$, не лежащая в $\Lambda \cup \Delta$, то $\Gamma_2(g)$ содержит 2-лапу $\{c, a, b\}$, причем $[a] \cap [b]$ содержит вершину x из $[g]$. Противоречие.

Итак, либо $\Lambda = K(a)$, либо $\Gamma = \Lambda \cup \Delta$. Но в последнем случае по условию $\Gamma_2(a) = \Lambda - a^\perp$ содержит 2-лапу $\{w; x, y\}$. Противоречие с тем, что $[x] \cap [y]$ содержит Δ .

ЛЕММА 2.4. Пусть $d(a, b) = 2$.

- (1) Если $c \in [a] \cap [b]$ и $[c]$ не лежит в $a^\perp \cup b^\perp$, то содержащая c связная компонента из $[a] \cap [b]$ совпадает с $K(c)$.
- (2) Если $[a] \cap [b]$ содержит ребро cd и $c \notin K(d)$, то $[c]$ и $[d]$ лежат в $a^\perp \cup b^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из леммы 2.3, а второе является следствием первого.

ЛЕММА 2.5. Верны следующие утверждения:

- (1) если bc – ребро из $\Gamma_2(a)$ и $d \in ([a] \cap [b]) - [c]$, то любая вершина из $[c] \cap [d]$ лежит в $a^\perp \cup b^\perp$;
- (2) если $aecbd$ – индуцированный пятиугольник из Γ , то любая вершина из $[c] \cap [d]$ лежит в $b^\perp$ или смежна с a и e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $[c] \cap [d]$ содержит вершину w , не лежащую в $a^\perp \cup b^\perp$. Тогда 2-лапа $\{c; b, w\}$ лежит в $\Gamma_2(a)$. Противоречие с тем, что $[b] \cap [w]$ содержит вершину d из $[a]$.

(2) Пусть $w \in ([c] \cap [d]) - b^\perp$. Из первого утверждения леммы и симметричности пятиугольника следует, что $w \in [a] \cap [e]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Если $\{a, b; c, d, e\}$ – (2, 3)-подграф из Γ , то $[y]$ не лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ и $x^\perp \cap y^\perp = K(x) \cup K(y)$ для любых $x \in \{a, b\}$, $y \in \{c, d, e\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in [a] \cap [c]$. Если f смежна с d , то f лежит в содержащей a связной компоненте Λ из $[c] \cap [d]$ и по лемме 2.4 (1) $\Lambda = K(a)$. Допустим, что f не смежна с d и e . Если $f \notin [b]$, то $\{b; d, e\}$ – 2-лапа из $\Gamma_2(f)$. Противоречие с тем, что $[d] \cap [e]$ содержит вершину a из $[f]$. Значит, $[c] \cap [a] - K(a) \subset [b]$. Если $[c]$ не лежит в $a^\perp \cup b^\perp$, то по лемме 2.4 (1) содержащая c связная компонента из $[a] \cap [b]$ совпадает с $K(c)$. В частности, в этом случае $a^\perp \cap c^\perp = K(a) \cup K(c)$.

Предположим, что $[c] \subset a^\perp \cup b^\perp$. По условию $\Gamma_2(c)$ содержит 2-лапу $\{z; u, w\}$. Без ограничения общности, $u \in [a] - [b]$, $w \in [b] - [a]$. Если $z \in [a] - [b]$, то мы получим индуцированный пятиугольник $acbwz$. По лемме 2.5 (2) вершина d из $[a] \cap [b]$ смежна с w и z . Противоречие с тем, что $([a] \cap [d]) - K(a)$ содержится в $[b]$. Итак, $z \in [a] \cap [b]$.

Если z не смежна с вершиной x из $\{e, d\}$, то $\{c, x, z\}$ является 3-кокликой из $[a] \cap [b]$. Повторяя рассуждения из начала доказательства леммы, убедимся, что $([z] \cap [a]) - K(a)$ лежит в $[a] \cap [b]$. Если же $z \in [e] \cap [d]$, то $z \in K(a)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

§3. Отделимые реберно регулярные графы, содержащие 3-лапы

В этом параграфе мы докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Γ – связный отделимый реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором для любых двух вершин a, b на расстоянии 2 в Γ подграф $[a] \cap [b]$ содержит не менее двух вершин. Если Γ содержит 3-лапу, то Γ – граф Хемминга $H(n, t)$, $n \geq 3$, $t \geq 3$.

Пусть Γ удовлетворяет условиям предложения 1.

ЛЕММА 3.1. *Если $[a]$ содержит 3-клик, то $[a]$ является объединением изолированных клик порядка $\lambda + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{c, d, e\}$ – 3-клик из $a^\perp$. По лемме 2.4 (1) связная компонента из μ -подграфа $[c] \cap [d]$, содержащая a , совпадает с $K(a)$. Из реберной регулярности графа Γ следует, что $K(a) = \{a\}$. Отсюда c, d лежат в изолированных кликах из $[a]$ порядка $\lambda + 1$. Далее, любая вершина из $[a]$ лежит в некоторой 3-кликке из $[a]$.

ЛЕММА 3.2. *Если $[a]$ содержит 3-клик, то окрестность каждой вершины из Γ содержит 3-клик. Более того, для любых двух вершин на расстоянии 2 в Γ подграф $[x] \cap [y]$ является 2-кликкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду связности графа Γ достаточно убедиться, что произвольная вершина c из $a^\perp$ смежна с некоторой 3-кликкой. Пусть $c^\perp$ не содержит 3-клик. Тогда $[c] - a^\perp$ является кликой, так как $[c] \cap a^\perp$ – изолированная $\lambda + 1$ -клика из $[c]$. Противоречие с тем, что $k - (\lambda + 1) \geq 2(\lambda + 1)$.

Пусть теперь $b \in \Gamma_2(a)$ и $[a] \cap [b]$ содержит две различные вершины c, d . По лемме 2.4 (1) каждая из вершин в $[a] \cap [b]$ изолирована в $[a] \cap [b]$. Значит, $[a] \cap [b]$ – клика. Если $[a] \cap [b]$ содержит более двух вершин, то по лемме 2.6 $a^\perp \cap c^\perp = K(a) \cup K(c)$. Поэтому $\lambda = 0$. Таким образом, Γ не содержит треугольников. Если fg – ребро из $\Gamma_2(a)$, то $[a] \cap [f] \cap [g]$ пусто. Для $x \in [a] \cap [f]$, $y \in [a] \cap [g]$ мы получим пятиугольник $axfgy$. Противоречие с леммой 2.5 (2). Лемма доказана.

В работе [2] Х. Еномото доказал следующее.

Если Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , $\mu > 1$, и Γ не содержит индуцированных пятиугольников и полных подграфов на четырех вершинах с одним удаленным ребром, то $n = k/(\lambda + 1)$ – целое число,

$$|\Gamma_i(a)| \leq \frac{n! (\lambda + 1)^i}{i! (n - i)!} = C_n^i (\lambda + 1)^i$$

для любой вершины a графа Γ и $i \geq 0$. Более того, Γ имеет диаметр $d \leq n$ и число вершин $v \leq (\lambda + 2)^n$.

Если $v = (\lambda + 2)^n$, то $\mu = 2$ и Γ является графом Хемминга $H(n, \lambda + 2)$.

Чтобы завершить доказательство предложения 1 нам потребуется частичное обращение последнего утверждения в случае, когда $\mu = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть Γ является вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и Γ не содержит индуцированных пятиугольников. Если все μ -подграфы из графа Γ являются 2-кликками, то Γ – граф Хемминга $H(n, t)$, $n = k/(\lambda + 1)$, $t = \lambda + 2$.*

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 2. Так как все μ -подграфы из Γ являются 2-кликками, то окрестность любой вершины в Γ – объединение n изолированных клик порядка $\lambda + 1$. Пусть $a, b \in \Gamma$ и $d(a, b) = i$.

ЛЕММА 3.3. *Подграф $\Gamma_i(a) \cap [b]$ является i -кликкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершина c принадлежит $\Gamma_{i-1}(a) \cap [b]$. По индукции, $\Gamma_{i-2}(a) \cap [c] = \{w_1, \dots, w_{i-1}\}$ является $(i-1)$ -кликкой.

Так же, как и в [2], рассмотрим подграф

$$V = \bigcup_{j=1}^{i-1} [w_j] \cap [b].$$

По лемме 2.2 из работы [2] подграф V содержит i -кликку. Поскольку любой μ -подграф $[w_j] \cap [b]$ является 2-кликкой и содержит вершину c , то V не может содержать более, чем i вершин. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Для любой вершины b из $\Gamma_i(a)$ $|[b] \cap \Gamma_{i+1}(a)| = (n-i)(\lambda+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \Gamma_i(a) \cap [b] = \{w_1, \dots, w_i\}$. Подграф W является i -кликкой по лемме 3.3, а подграфы $[w_j] \cap [b]$, $1 \leq j \leq i$, являются λ -кликками. Так как, $[b] \cap \Gamma_{i+1}(a)$ совпадает с $[b] - \bigcup_{j=1}^i w_j^\perp$, то $|[b] \cap \Gamma_{i+1}(a)| = k - i(\lambda+1) = (n-i)(\lambda+1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Справедливо равенство $v = (\lambda+2)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $|\Gamma_i(a)| = C_n^i (\lambda+1)^i$, для чего подсчитаем число ребер между $\Gamma_i(a)$ и $\Gamma_{i+1}(a)$. По леммам 3.3 и 3.4 мы имеем следующее равенство $|\Gamma_{i+1}(a)|i = |\Gamma_i(a)|(n-i)(\lambda+1)$. Значит, по индукции,

$$|\Gamma_{i+1}(a)| = \frac{n! (\lambda+1)^{i+1}}{(i+1)! (n-i-1)!} = C_n^{i+1} (\lambda+1)^{i+1}.$$

Но $\Gamma_i(a)$ не пересекаются для различных i и, следовательно, мы получили биномиальное разложение для числа вершин графа Γ . Лемма доказана.

Теперь предложение 2 следует из теоремы Х. Еномото.

Из лемм 2.5 (2) и 3.1 следует, что граф Γ , удовлетворяющий условиям предложения 1, не содержит пятиугольников. Предложение 1 вытекает из леммы 3.2 и предложения 2.

§ 4. Редукция μ -регулярных графов без 3-лап

В этом параграфе мы докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В связном μ -регулярном графе Γ без 3-лап либо все μ -подграфы являются кликами, либо диаметр Γ равен 2.

Графы диаметра 2, удовлетворяющие условиям предложения 3, описаны в работе [1].

ЛЕММА 4.1. Если a, b — смежные вершины в графе Γ без 3-лап, то $[a] - b^\perp$ и $[b] - a^\perp$ являются кликами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[a] - b^\perp$ содержит две несмежные вершины c, d . Тогда b, c, d — 3-кликка из $[a]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Пусть Γ удовлетворяет условиям предложения 3 и не удовлетворяет его заключению. Вершину x из Γ назовем *плохой*, если $\Gamma_3(x)$ не пусто, в противном случае – *хорошей*. Поскольку Γ не удовлетворяет заключению предложения, то Γ содержит плохие вершины. Вершину x из Γ назовем *сильной*, если $[x] \cap [y]$ содержит несмежные вершины для некоторого $y \in \Gamma_2(x)$, а пару x, y – *сильной парой*.

ЛЕММА 4.2. Если a, b – сильная пара вершин, а c, d – несмежные вершины из $[a] \cap [b]$, то $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$, и любая вершина из $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ образует сильную пару с некоторой вершиной из $[a] \cap [b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[a]$ и $[b]$ не содержат 3-клик, то $[a] \cup [b] \subset c^\perp \cup d^\perp$ и, значит, $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$. Отсюда $[b] - [a] \subset \Gamma_2(a)$.

Пусть $w \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ и $[x] \cap [w]$ – клика для любого $x \in \{a, b, c, d\}$. Положим $\Delta = ([a] \cup [b]) \cap [w]$. Тогда $|\Delta| = 2\mu$.

Допустим сначала, что $[a] \cap \Delta \neq [c] \cap \Delta$. Пусть $[c]$ содержит α вершин из $[a] \cap \Delta$ и $\mu - \alpha$ вершин из $[b] \cap \Delta$ и $[d] \cap \Delta = \Delta - [c]$. Без ограничения общности можно считать $\alpha \geq \mu/2$.

Пусть $x \in [a] \cap [d] \cap \Delta$, $y \in [b] \cap [c] \cap \Delta$. Если вершины x, y не смежны, то $[x] \cap [y]$ содержит w и 2α вершин из Δ . Противоречие. Значит, вершина x смежна с μ вершинами из $[b] \cap \Delta$. Противоречие с тем, что $[b] \cap [x]$ содержит еще вершину d .

Пусть теперь $[a] \cap \Delta = [c] \cap \Delta$. Выберем вершину x из $[a] \cap [w]$. Тогда $[x]$ содержит μ вершин из $[b]$, причем $[x] - a^\perp$ лежит в $w^\perp$. Далее, $[x]$ не содержит вершину d из $[a] \cap [b]$, поэтому $[x]$ содержит некоторую вершину из $[b] \cap [w]$.

Пусть $[x]$ содержит α вершин из $[a] \cap [b]$. Тогда $[x]$ содержит $\mu - \alpha$ вершин из $[b] \cap [w]$. Заметим, что $x^\perp \cap a^\perp = x^\perp \cap c^\perp$, иначе $[x]$ содержит 3-клику. Выберем вершину y из $([b] \cap [w]) - [x]$ и пусть $[y]$ содержит β вершин из $[a] \cap [b]$. Тогда $[x] \cap [y]$ содержит w , $\mu - \alpha$ вершин из $[b] \cap [w]$ и $\mu - \beta$ вершин из $[a] \cap [w]$. Отсюда $(\mu - \alpha) + (\mu - \beta) < \mu$ и $\mu < \alpha + \beta$. Таким образом, $[x] \cap [y]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$, и w, z – сильная пара.

ЛЕММА 4.3. Любая сильная вершина является хорошей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение для вершины a . Пусть $e \in \Gamma_3(a)$ и $afge$ – 3-путь. Если $g \in [b]$, то μ -подграф $[a] \cap [g]$ лежит в $[b]$, иначе $[g]$ содержит b, e и вершину из $([a] \cap [g]) - [b]$, которые образуют 3-клику, что противоречит условиям предложения 3. По лемме 4.2 $[g] - [a] \subset \Gamma_2(a)$. Противоречие. Значит, $[g]$ не содержит вершин, образующих сильную пару с вершиной a .

Если $g \in \Gamma_2(b)$, то по лемме 4.2 g образует сильную пару с некоторой вершиной $x \in [a] \cap [b]$. Пусть y, z – несмежные вершины из $[x] \cap [g]$. Тогда e смежна с одной из этих вершин, например с y . Тогда $g \in \Gamma_2(a) \cap [b]$. Заменив g на вершину y , а f на вершину из $[a] \cap [y]$ в 3-пути $afge$, получим противоречие с утверждением предыдущего абзаца. Значит, $g \notin b^\perp \cup \Gamma_2(b)$.

По лемме 4.2 $f \in [c] \cup [d]$. Пусть для определенности fc – ребро. Тогда мы получим путь $bcfg$ и $g \in \Gamma_3(b)$. Противоречие с тем, что $[f]$ содержит вершину a , которая образует сильную пару с b .

Таким образом, $\Gamma_3(a)$ пусто и каждая сильная вершина является хорошей. В частности, $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Лемма доказана.

Пусть Δ – множество плохих вершин, a, b – фиксированная сильная пара. Если Δ содержит плохую вершину e из $[a] \cap [b]$, то $\Gamma_3(e) \subset \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$. Противоречие с

тем, что $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ состоит из хороших вершин. Значит, $\Delta \subset ([a] - [b]) \cup ([b] - [a])$. Таким образом, если e — плохая вершина, то она смежна с единственной вершиной из $\{a, b\}$ для любой сильной пары a, b .

Выберем плохую вершину e из $[a] - [b]$. Пусть $\Lambda = \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$, c, d — несмежные вершины из $[a] \cap [b]$. Для любых двух вершин x, y на расстоянии 2 в Γ через $\Lambda(x, y)$ обозначим подграф $\Gamma - (x^\perp \cup y^\perp)$. Фиксируем плохую вершину e из $[a] - [b]$ и вершину f из $\Gamma_3(e)$. Заметим, что ввиду леммы 4.2 любой μ -подграф для вершины из пути длины 3 является кликой.

ЛЕММА 4.4. *Вершина f принадлежит $[b] - [a]$, и Λ содержится в $[e] \cup [f]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку e — плохая вершина, то $f \in [b] - [a]$. Далее, $e \in [c] \cup [d]$. Пусть e не смежна с вершиной y из Λ . По лемме 4.2 y образует сильную пару с некоторой вершиной x из $[a] \cap [b]$. Так как $e \notin [y]$, то e смежна с x . Отсюда $f \notin [x]$, поэтому f смежна с y . Лемма доказана.

Заметим, что e, f принадлежат $c^\perp \cup d^\perp$. Пусть, для определенности, $e \in c^\perp$. Тогда $f \in d^\perp$.

ЛЕММА 4.5. *Пусть x, y — вершины из графа Γ такие, что $d(x, y) = 2$. Если $u \in [x] - [y]$, а w — смежная с u вершина из $[y] - [x]$, то $[u] \cap \Lambda(x, y) = [w] \cap \Lambda(x, y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $[u] - x^\perp$ является кликой, содержащей w , то $[u] \cap \Lambda(x, y) \subset [w]$. Аналогично, $[w] \cap \Lambda(x, y)$ содержится в $[u]$.

ЛЕММА 4.6. *Если $d(x, y) = 2$, то $\Lambda(x, y)$ — клика из $k - 2\mu + 1$ вершин, совпадающая с $\Gamma_2(x) \cap \Gamma_2(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $[e]$ содержит вершину g из $[b] - [a]$, иначе $[e] \cap [b] \subset [a]$ и e — хорошая вершина. Ясно, что $[f] \cap [g]$ — клика из $b^\perp - [a]$, так как $a \in \Lambda(f, g)$ и по лемме 4.5 $[e] \cap \Lambda = [g] \cap \Lambda$. Теперь $[b] \subset f^\perp \cup g^\perp$, поэтому $\Lambda(f, g)$ содержится в $a^\perp$ и состоит из $k - 2\mu + 1$ вершин.

Если $y \in \Lambda$, то $[y]$ содержит не более 2μ вершин из $f^\perp \cup g^\perp$. Отсюда $y \in \Gamma_2(f) \cap \Gamma_2(g)$ и $[y]$ содержит $k - 2\mu$ вершин из $\Lambda(f, g)$. Таким образом, $\Lambda(f, g)$ — клика. Так как $|\Lambda(x, y)| = k - 2\mu + 1$ для любых двух вершин на расстоянии 2, то последнее рассуждение можно повторить для любой такой пары вершин x, y .

ЛЕММА 4.7. *Справедливы соотношения $\Gamma = e^\perp \cup f^\perp$, $|\Gamma| = 6\mu$, $|k| = 3\mu - 1$ и $|\Lambda| = \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.6 $|\Gamma| = 3(k - \mu + 1)$. С другой стороны, если $x \in \Gamma - (e^\perp \cup f^\perp)$, то $|\Gamma| \geq 2(k + 1) + k - 2\mu + 1$. Но тогда $\mu = 0$, противоречие. Значит, $|\Gamma| = 2(k + 1)$ и $k = 3\mu - 1$. Лемма доказана.

Вершину x назовем 0-точкой для Λ , если $|[x] \cap \Lambda| = 0$.

ЛЕММА 4.8. *Вершины e и f не могут быть 0-точками для подграфа Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e — 0-точка для Λ . Тогда $\Lambda(e, b) = \Lambda$ и $e^\perp$ содержит $[a] - [b]$. В этом случае $[f]$ не содержит вершин из $[a] - [b]$ и $[a] \cap [f] = [a] \cap [b]$, противоречие с леммой 4.3. Лемма доказана.

Зафиксируем вершины $u \in [e] \cap \Lambda$, $w \in [f] \cap \Lambda$.

ЛЕММА 4.9. *Подграф $\Lambda(u, b)$ содержит все вершины из $([a] - [b]) \cap [f]$ и лежит в $[d] \cap a^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 4.6 $\Lambda(u, b)$ содержится в $a^\perp - [b]$. Если h — вершина из $([a] - [b]) \cap [f]$, смежная с u , то $[h]$ содержит 3-кликку $\{a, f, u\}$, что противоречит условию теоремы 1. $\Lambda(u, b) \cap [f]$ содержится в $[d]$, так как $[a] \cap [f]$ — клика из $d^\perp$. Пусть $\Lambda(u, b) - [f]$ содержит вершину x , не смежную с d . Тогда $x \in [c] - [d]$. Если $y \in [f] \cap ([a] - [b])$, то xy — ребро, так как $\Lambda(u, b)$ — клика. С другой стороны, $[c] \cap [f]$ — клика из $b^\perp$, поэтому $y \in [d] - [c]$. По лемме 4.5, примененной к $\Lambda = \Lambda(c, d)$ и к $\Lambda(u, b)$, $[x] \cap \Lambda = [y] \cap \Lambda$ и $[f] \cap \Lambda(u, b) = [w] \cap \Lambda(u, b)$, поэтому $w \in [x]$. Противоречие с выбором x . Лемма доказана.

Из симметричности следует, что подграф $\Lambda(w, c)$ содержит все вершины из $([d] - [c]) \cap [e]$ и лежит в $[a] \cap d^\perp$. Аналогично, подграф $\Lambda(u, d)$ содержит все вершины из $([c] - [d]) \cap [f]$ и лежит в $[b] \cap c^\perp$. Подграф $\Lambda(w, a)$ содержит все вершины из $([b] - [a]) \cap [e]$ и лежит в $[c] \cap b^\perp$.

ЛЕММА 4.10. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) $\Lambda(u, b) \cup \Lambda(w, c) = ([a] \cap [f]) \cup ([d] \cap [e]);$
- (2) $\Lambda(u, d) \cup \Lambda(w, a) = ([b] \cap [e]) \cup ([c] \cap [f]).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первое равенство. Заметим, что включение слева направо следует из леммы 4.9. Покажем, что $\Lambda(u, b)$ не пересекает $\Lambda(w, c)$. По лемме 4.5 $[f] \cap \Lambda(u, b) = [w] \cap \Lambda(u, b)$, поэтому $[f] \cap \Lambda(u, b)$ не пересекает $\Lambda(w, c)$. Аналогично, $[e] \cap \Lambda(w, c) = [u] \cap \Lambda(w, c)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь подграф Σ , где

$$\Sigma = \bigcup_{(x, y) \in A} \Lambda(x, y), \quad A = \{(u, b), (u, d), (w, a), (w, c)\}.$$

ЛЕММА 4.11. *Подграф Σ состоит из 4μ вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по лемме 4.7 $\Lambda(u, b)$ содержит μ вершин. Поскольку все четыре подграфа, которые составляют Σ , симметрично расположены в графе Γ , то для доказательства леммы достаточно показать, что подграф $\Lambda(u, b)$ не пересекает остальные подграфы $\Lambda(x, y)$. Но $\Lambda(u, b)$ не пересекает $\Lambda(u, d)$ по лемме 4.9, а $\Lambda(w, c)$ по лемме 4.10. Далее, $\Lambda(u, b) \cap [f]$ содержится в $[w]$, так как $[b] - f^\perp$ клика из $[w]$. Аналогично, $\Lambda(w, a) \cap [e]$ содержится в $[u]$, поэтому $\Lambda(u, b)$ не пересекает $\Lambda(w, a)$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство предложения 3. Для этого выберем вершину x из множества $\{e, f\}$ так, что $|[x] \cap \Sigma| \geq 2\mu$. Пусть для определенности $x = f$. Покажем, что μ -подграф $[u] \cap [f]$ не пересекает Σ . Напомним, что $[u] \cap [f]$ — клика, содержащая $\Lambda \cap [f]$, поэтому подграф $[u] \cap [f]$ не пересекает $\Lambda(w, a)$ и $\Lambda(w, c)$. Далее, $[u] \cap [f]$ не пересекает $\Lambda(u, b)$ и $\Lambda(u, d)$, по определению. Итак, μ -подграф $[u] \cap [f]$ не пересекает Σ . Однако по леммам 4.7 и 4.11 подграф $[f] - \Sigma$ содержит не более $\mu - 1$ вершин. Противоречие. Предложение 3 доказано.

§ 5. Вполне регулярные графы Тервиллигера без 3-лап

Пусть Γ – связный вполне регулярный граф Тервиллигера с параметрами (v, k, λ, μ) , $\mu > 1$. Подграф Δ из графа Γ называется *сингулярной прямой*, если для любых различных a, b из Δ верно равенство $\Delta = \{x \in \Gamma \mid x^\perp \supset a^\perp \cap b^\perp\}$.

По теореме Тервиллигера [3] (см. также [4, теорема 1.16.3]) для любой вершины a графа Γ редуцированный граф для $[a]$ является сильно регулярным графом Тервиллигера с параметрами

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{k}{s}, \quad \bar{k} = \frac{\lambda - s + 1}{s}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu - 1}{s}, \\ \bar{\lambda} &= \frac{(\lambda - s + 1)(\lambda - 2s + 1) - (\mu - 1)(k - \lambda - 1)}{s(\lambda - s + 1)}, \end{aligned}$$

где s – число вершин в классе эквивалентности для отношения $\equiv$, где $x \equiv y$, если $x^\perp = y^\perp$ (редуцированный граф – это фактор-граф по отношению эквивалентности $\equiv$). Далее, каждая сингулярная прямая имеет $s + 1$ вершину, и каждая вершина лежит в k/s сингулярных прямых. В частности, число s делит наибольший общий делитель для чисел $k, \lambda + 1, \mu - 1$, а число $\lambda - s + 1$ делит $(\mu - 1)(k - s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф без 3-лап с параметрами (v, k, λ) , в котором все μ -подграфы являются кликами. Тогда Γ – вполне регулярный граф Тервиллигера и либо $\mu = 1$, либо Γ – граф икосаэдра с параметрами $(12, 5, 2, 2)$.

Заметим, что попытка получения μ -регулярности в произвольном реберно регулярном графе без 3-лап наталкивается на контрпример (см. рис. 2 во введении).

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 4.

ЛЕММА 5.1. Граф Γ – вполне регулярен с $\mu = 2\lambda + 3 - k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d(a, b) = 2$, $c \in [a] \cap [b]$ и $\mu = |[a] \cap [b]|$. Тогда по лемме 4.1 $[c]$ содержится в $a^\perp \cup b^\perp$, поэтому $k = 2(\lambda + 1) - (\mu - 1)$. Итак, $\mu = 2\lambda + 3 - k$ и, следовательно, не зависит от выбора вершин a, b . Лемма доказана.

Пусть далее $\mu > 1$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $d(a, b) = 2$, $c \in [a] \cap [b]$. Тогда сингулярная прямая, которая проходит через вершины $\{a, c\}$, пересекает μ -подграф $[a] \cap [b]$ в единственной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть различные вершины c, d лежат на сингулярной прямой из $a^\perp$. Тогда $c^\perp \cap d^\perp$ содержит $a^\perp \cap c^\perp$ и вершину b . Противоречие с реберной регулярностью графа.

ЛЕММА 5.3. Пусть ac – ребро, $b \in [c] - [a]$. Тогда для любой отличной от b вершины e из $[c] - [a]$ μ -подграф $[a] \cap [e]$ содержит единственную вершину s из $[a] \cap [b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подграф $[a] \cap [b] \cap [e]$ содержит $\alpha + 1$ вершину, $\alpha > 0$. Пусть f отлична от s вершина из этого подграфа. Тогда f не смежна с некоторой вершиной g из $([a] \cap [c]) - ([b] \cup [e])$, и μ -подграф $[f] \cap [g]$ содержит $2(\mu - \alpha - 1)$ вершин из μ -подграфов $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [e]$, две вершины a, s и $(\alpha + 1)(s - 1)$

вершин из сингулярных прямых, проходящих через a и вершину из $[a] \cap [b] \cap [e]$. Отсюда $\mu + \alpha(s - 3) + s - 1 \leq 0$. Но тогда $s = 1$. Поскольку любой отличный от пятиугольника граф Мура содержит 3-лапу [4, теорема 6.7.1], то Γ – локально пятиугольный граф. Очевидно, что в этом случае заключение леммы выполняется.

ЛЕММА 5.4. *Параметр s равен $\lambda - 2\mu + 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b, e – вершины из графа $\Gamma_2(a)$. По предыдущей лемме μ -подграфы $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [e]$ пересекаются не более чем по одной вершине. Пусть $c \in [a] \cap [b]$. Если $[a] \cap [b] = [a] \cap [e]$ для любой вершины e из $[c] - a^\perp$, то весь μ -подграф $[a] \cap [b]$ лежит в $K(a)$, что противоречит реберной регулярности графа Γ . Значит, $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [e]$ пересекаются в точности по вершине c . Ввиду леммы 4.1 $([a] \cap [c]) - [b]$ и $([a] \cap [c]) - [e]$ клики, поэтому все вершины из $([a] \cap [c]) - ([e] \cup [b])$ лежат на сингулярной прямой, проходящей через $\{a, c\}$. Значит, $s = \lambda - 2\mu + 3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. *Граф Γ с $s = \lambda - 2\mu + 3$ является графом икосаэдра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.1 $k = 2\lambda - \mu + 3$. По теореме Тервиллигера и из равенств $\mu = s\bar{\mu} + 1$, $\lambda = s + 2s\bar{\mu} - 1$ и $k = 2s + 3s\bar{\mu}$ мы имеем $\bar{k} = 2\bar{\mu}$, $\bar{\lambda} = \frac{3}{2}(\bar{\mu} - 1)$. Если параметры редуцированного графа для $[a]$ не удовлетворяют половинному случаю, то число $(\bar{\lambda} - \bar{\mu})^2 + 4(\bar{k} - \bar{\mu})$ является квадратом, поскольку этот граф сильно регулярен. Подставляя $\bar{k}$ и $\bar{\lambda}$ в это выражение, мы получим $\frac{1}{4}(\bar{\mu}^2 + 10\bar{\mu} + 9)$. Однако, $\bar{\mu}^2 + 10\bar{\mu} + 9$ меньше, чем $(\bar{\mu} + 5)^2$ и больше, чем $(\bar{\mu} + 3)^2$. Значит, $\bar{\mu}^2 + 10\bar{\mu} + 9 = (\bar{\mu} + 4)^2$. Противоречие с тем, что это уравнение не имеет целых корней. Если параметры редуцированного графа для $[a]$ удовлетворяют половинному случаю, то $\bar{\mu} = 1$ и редуцированный граф для $[a]$ является пятиугольником. В этом случае $\mu = s + 1$, $\lambda = 3s - 1$ и $k = 5s$. Однако, по μ -подграфу $[a] \cap [b]$ строится клика Σ порядка $2\mu s - \mu$ следующим образом: для любой вершины c из $[a] \cap [b]$ в Σ включаем сингулярные прямые, проходящие через a, c и b, c . Если теперь s, d различные вершины из $[a] \cap [b]$, то $c^\perp \cap d^\perp$ содержит $\Sigma \cup \{a, b\}$. Отсюда $\lambda \geq 2\mu s - \mu$. Значит, $3s - 1 \geq 2s^2 + s - 1$, $s = 1$, и снова Γ – локально пятиугольный граф. По предложению 1.1.4 из [4] связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра. Лемма и предложение 4 доказаны.

Объединяя результаты §§ 3, 4 и 5, получаем теорему 2.

§ 6. Редукция регулярных графов Тервиллигера без 3-лап

В этом параграфе мы докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Связный регулярный граф Тервиллигера без 3-лап является α -расширением графа с $\mu = 1$ или графа икосаэдра.*

Граф усеченного тетраэдра (рис. 1 во введении) показывает, что регулярный граф Тервиллигера с $\mu = 1$ не обязательно реберно регулярен.

Следующее утверждение справедливо для произвольных графов Тервиллигера.

ЛЕММА 6.1. *Пусть Γ – связный регулярный граф Тервиллигера, a – вершина из Γ . Тогда для любого ребра bc из $[a] - K(a)$ найдется вершина d , принадлежащая $a^\perp$ и несмежная с b и c .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспроизведем рассуждения из пункта (2) доказательства леммы 3.4 работы [3]. Пусть $a^\perp$ содержится в $b^\perp \cup c^\perp$. По выбору b и c разность $[b] - c^\perp$ содержит вершину x из $[a]$, $[c] - b^\perp$ содержит y из $[a]$. Заметим, что вершины x и y не смежны, иначе $[x] \cap [c]$ содержит несмежные вершины b и y .

Теперь разность $([x] \cap [y]) - K(a)$ содержится в $[b] \cap [c]$. В самом деле, если z — несмежная с b вершина из $[x] \cap [y]$, то z смежна с c по предположению, и $[b] \cap [z]$ содержит несмежные вершины x и c . Теперь $[y] \cap [b]$ содержит весь μ -граф $[x] \cap [y]$ и вершину c . Противоречие. Лемма доказана.

Пусть теперь Γ — контрпример к предложению 5 и параметры Γ равны (v, k, μ) .

ЛЕММА 6.2. Если a, b — несмежные вершины из $[c]$, $\lambda_1 = |[a] \cap [c]|$, $\lambda_2 = |[b] \cap [c]|$, то $\lambda_1 + \lambda_2 = k + \mu - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку граф Γ не содержит 3-лап, то $[c] \subset a^\perp \cup b^\perp$. Поэтому $k = (\lambda_1 + \lambda_2) - (\mu - 1) + 2$.

ЛЕММА 6.3. Если ac — ребро из Γ , $a \notin K(c)$, $|[a] \cap [c]| = \frac{1}{2}(k + \mu - 3)$, то для любого ребра xu , $x \notin K(y)$, верно равенство $|[x] \cap [y]| = \frac{1}{2}(k + \mu - 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду связности графа Γ достаточно доказать требуемое равенство для ребра cb . Если $b \notin a^\perp$, то требуемое равенство следует из леммы 6.2. Если $b \in a^\perp$, то по лемме 6.1 $[c]$ содержит вершину d , несмежную с a и b . Теперь можно применить предыдущее рассуждение к парам a, d и b, d . Лемма доказана.

По выбору графа Γ найдутся такие вершины a, b на расстоянии 2 в Γ , что μ -граф $[a] \cap [b] \neq K(c)$ для некоторой вершины c из $[a] \cap [b]$. Положим $\lambda = \frac{1}{2}(k + \mu - 3)$.

ЛЕММА 6.4. Для любой вершины x из $c^\perp - K(c)$ верно равенство $|[x] \cap [c]| = \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_1 = |[a] \cap [c]|$, $\lambda_2 = |[b] \cap [c]|$ и выберем d из $([a] \cap [b]) - K(c)$. По лемме 6.2 $\lambda_1 + \lambda_2 = k + \mu - 3$. По лемме 6.1 $[c]$ содержит вершину x , несмежную с a и d . Тогда $|[x] \cap [c]| = \lambda_2$ и, следовательно, $|[c] \cap [d]| = \lambda_1$.

Симметрично, $[c]$ содержит вершину y , несмежную с b и d . Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим $|[c] \cap [d]| = \lambda_2$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 6.3. Лемма доказана.

Положим $\Lambda = c^\perp - K(c)$ и $\alpha = |K(c)|$.

ЛЕММА 6.5. Все классы эквивалентности $\bar{x}$ в графе Λ имеют одинаковую мощность s , редуцированный граф $\bar{\Lambda}$ является пятиугольником. Более того, $\alpha = 2\mu - k$, $4s = k - \mu + 1$ и $\lambda = 2s + \alpha - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6.4 и предложению 1.16.2 из [4] все классы эквивалентности $\bar{x}$ для $x \in \Lambda$ имеют одинаковую мощность s и редуцированный граф $\bar{\Lambda}$ является сильно регулярным графом Тервиллигера с параметрами $(\bar{v}, \bar{k}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, где

$$\bar{v} = \frac{k - \alpha + 1}{s}, \quad \bar{k} = \frac{\lambda + 2 - \alpha - s}{s}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu - \alpha}{s},$$

и $\bar{\lambda}$ вычисляется из прямоугольного соотношения. Ввиду предложения 4 параметр $\bar{\mu}$ равен 1. Следовательно, окрестность любой вершины в Λ расщепляется двумя кликами порядка $\bar{\lambda} + 1$. Легко видеть, что в этом случае $\bar{\lambda} = 0$ (см., например, [4, теорема 1.2.3]). Теперь граф $\bar{\Lambda}$ является пятиугольником и $\mu = \alpha + s$, $\lambda = 2s + \alpha - 2$, $k = 5s + \alpha - 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. Ядро $K(x)$ состоит из α вершин для любой вершины x из графа Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|K(x)| < \mu$, то к графу $x^\perp - K(x)$ применяем лемму 6.5 и получаем $|K(x)| = \alpha$.

Пусть теперь $|K(x)| = \mu$. Выберем путь $s = w_0, w_1, \dots, w_n = x$ и пусть i — наименьший номер такой, что $|K(w_i)| = \mu$. Тогда $w_{i-1}^\perp \cap w_i^\perp$ является кликой порядка $\lambda + 2$ из $w_i^\perp$. По лемме 6.5, примененной к $w_{i-1}^\perp - K(w_{i-1})$, получаем $\lambda + 2 = s + \alpha = 2s + \alpha$. Противоречие. Лемма доказана.

По леммам 6.5 и 6.6 редуцированный граф $\bar{\Gamma}$ является вполне регулярным графом, и предложение 5 следует из предложения 4. Теперь теорема 1 вытекает из предложений 3, 5 и работы [1].

Список литературы

1. Кабанов В. В., Махнев А. А. Кореберно регулярные графы, в которых антиокрестности вершин кореберно регулярны // III Международная конференция по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993. С. 139; Кореберно регулярные графы без 3-лап. Т. 60. № 4, 1996. С. 495–503.
2. Enomoto H. Characterization of families of finite permutation groups by subdegrees. II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1973. V. 20. P. 1–11.
3. Terwilliger P. Distance-regular graphs with girth 3 or 4, I // J. Combin. Theory Ser. B. 1985. V. 39. P. 265–281.
4. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag, 1989.

Уральский государственный
технический университет;
Институт математики и механики УрО РАН

Поступила в редакцию
10.10.1994 и 20.09.1995