Общероссийский математический портал

С. А. Кужель, Абстрактная схема рассеяния Лакса–Филлипса в пространствах
Понтрягина, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 87–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 07:41:15

УДК 517.432

С. А. Кужель

Абстрактная схема рассеяния Лакса–Филлипса в пространствах Понтрягина

Абстрактная схема рассеяния Лакса–Филлипса обобщается на случай пространств Понтрягина. Изучается структура приходящего и уходящего подпространств, устанавливается связь между поведением матрицы рассеяния и свойствами некоторого π -сжимающего оператора (когенератора ассоциированной полугруппы), а также его характеристической функции.

Библиография: 14 названий.

Одним из важных направлений в теории рассеяния является абстрактная схема Лакса–Филлипса, разработанная в начале 60-х годов [1]. В основу этой теории положена идея приходящих и уходящих подпространств, что позволяет естественным образом получать информацию об аналитических свойствах матрицы рассеяния непосредственно по свойствам рассматриваемой унитарной группы. При этом в случае приложений абстрактной схемы Лакса–Филлипса к изучению конкретных систем необходимым условием является положительная определенность соответствующей энергетической формы. В случае же индефинитной энергетической формы первоначальная теория требует существенной модификации, что и было проделано в [2]–[4] для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений второго порядка с учетом их специфики.

В настоящей работе проводится непосредственное обобщение абстрактной схемы Лакса–Филлипса на случай пространств с индефинитной метрикой (пространств Понтрягина), основанное на последовательном использовании идей и методов теории таких пространств. Отметим, что изложенная ниже “индефинитная” схема содержит как частный случай результаты, полученные П. Лаксом и Р. Филлипсом [4, §3], и существенно развивает их. В частности, выясняется, что аналогично “дефинитному” случаю, генератор ассоциированной полугруппы определяет спектральные и аналитические свойства матрицы рассеяния.

§1. Предварительные сведения

Для полноты изложения напомним некоторые известные факты из теории пространств Понтрягина, доказательства и подробные обсуждения которых можно найти, например, в [5], [6].

В дальнейшем индефинитную метрику в пространстве Понтрягина Π_{κ} (индекс κ , $\kappa < \infty$, равен размерности максимального отрицательного линейала в Π_{κ}) будем обозначать символом $[\cdot, \cdot]$ и использовать общепринятую для пространств Понтрягина терминологию: π -унитарность, π -ортогональность и т. п.

Вектор $x \in \Pi_{\kappa}$ называется *положительным, отрицательным* или *нейтральным* в зависимости от того, будет ли, соответственно, $[x, x] > 0$, $[x, x] < 0$ или $[x, x] = 0$.

Аналогично, линеал $\mathcal{L} \subset \Pi_{\kappa}$ называется *положительным, отрицательным* или *нейтральным*, если все его ненулевые элементы являются положительными, отрицательными или нейтральными, соответственно. Отметим, что на положительных линеалах индефинитная метрика определяет норму, эквивалентную исходной норме.

Произвольный замкнутый линеал $\mathcal{L}$ в Π_{κ} представим в виде π -ортогональной прямой суммы

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \dot{+} \mathcal{L}_0 \dot{+} \mathcal{L}_+ \quad (1)$$

трех подпространств, из которых $\mathcal{L}_0$ нейтрально, а $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) положительно (отрицательно). Любое представление подпространства $\mathcal{L}$ в виде (1) называется *каноническим разложением* подпространства $\mathcal{L}$. Отметим, что в (1) нейтральный линеал $\mathcal{L}_0$ определяется единственным образом и называется *изотропной частью* подпространства $\mathcal{L}$.

Подпространство $\mathcal{L}$ называется *невырожденным*, если $\mathcal{L}_0 = \{0\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Подпространство $\mathcal{L} \subset \Pi_{\kappa}$ невырождено тогда и только тогда, когда Π_{κ} представимо в виде прямой суммы $\Pi_{\kappa} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{L}^{[\perp]}$ линеала $\mathcal{L}$ и его π -ортогонального дополнения $\mathcal{L}^{[\perp]}$.*

Спектр π -унитарного в Π_{κ} оператора U вне единичной окружности состоит из не более чем 2κ (с учетом алгебраической кратности) собственных значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \frac{1}{\bar{\lambda}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{\lambda}_n}, \quad n \leq \kappa, \quad |\lambda| < 1,$$

расположенных симметрично относительно единичной окружности. Через $\mathcal{L}_{\mu}(U)$ обозначим *корневой линеал* оператора U , отвечающий собственному значению μ , и положим

$$\mathcal{P}_- = \mathcal{L}_{\lambda_1}(U) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}_{\lambda_n}(U), \quad \mathcal{P}_+ = \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_1}(U) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_n}(U).$$

Линеалы $\mathcal{P}_-$ и $\mathcal{P}_+$ нейтральны в Π_{κ} , а их прямая сумма $\mathcal{P}_- \dot{+} \mathcal{P}_+$ есть невырожденное подпространство.

На единичной окружности у π -унитарного оператора U существует не более чем $m \leq \kappa - n$ собственных значений $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ таких, что соответствующие корневые линеалы $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$ содержат неположительные ненулевые элементы.

Если линеалы $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$ невырождены, то невырожденными будут и линеалы $\mathcal{L}'_{\varepsilon_j} = \mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U) \ominus \text{Ker}_+(U - \varepsilon_j I)$, где $\text{Ker}_+(U - \varepsilon_j I)$ – положительная компонента канонического разложения $\text{Ker}(U - \varepsilon_j I)$. Но тогда, с учетом соотношения $\mathcal{L}_{\lambda}(U) \perp \mathcal{L}_{\mu}(U)$, $\lambda \bar{\mu} \neq 1$, и утверждения 1 заключаем, что пространство Π_{κ} представимо в виде π -ортогональной прямой суммы

$$\Pi_{\kappa} = \mathfrak{M} \dot{+} \Pi_0 \quad (2)$$

инвариантных относительно оператора U подпространств $\mathfrak{M}$ и Π_0 таких, что

$$\mathfrak{M} = \mathcal{P}_- \dot{+} \mathcal{P}_+ \dot{+} (\mathcal{L}'_{\varepsilon_1} \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}'_{\varepsilon_m})$$

конечномерно, а пространство $\Pi_0 = \mathfrak{M}^{[\perp]}$ положительно определено и, следовательно, является пространством Гильберта по отношению к заданной индефинитной метрике.

§ 2. Уходящие и приходящие подпространства

Для удобства изложения рассмотрим дискретный случай “индефинитной” схемы Лакса–Филлипса.

Пусть U – π -унитарный оператор, действующий в $\Pi_{\mathcal{K}}$. Подпространство D_+ называется *уходящим* для оператора U , если

- а) $UD_+ \subset D_+$;
- б) $\bigcap_{k=0}^{\infty} U^k D_+ = \{0\}$.

Подпространство D_- называется *приходящим* для оператора U , если D_- является уходящим для оператора U^+ , где оператор U^+ – сопряженный к оператору U относительно индефинитной метрики.

В дальнейшем будем считать, что все корневые линейные $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$, $j = 1, \dots, m$, невырождены. Тогда справедливо представление $\Pi_{\mathcal{K}}$ в виде (2). Через P_0 обозначим π -ортогональный проектор в $\Pi_{\mathcal{K}}$ на подпространство Π_0 и положим

$$D'_+ = P_0 D_+, \quad D'_- = P_0 D_-. \quad (3)$$

Рассуждая аналогично [4], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2 [7]. *Линейные D'_+ и D'_- являются, соответственно, уходящим и приходящим подпространствами для оператора U и при этом*

$$D_+ = \{d_+ = d'_+ + s \mid d'_+ \in D'_+, s \in \mathcal{P}_-\}, \quad (4)$$

$$D_- = \{d_- = d'_- + p \mid d'_- \in D'_-, p \in \mathcal{P}_+\}, \quad (5)$$

где векторы s и p однозначно определяются по d'_+ и d'_- , соответственно.

Из теоремы в силу положительности Π_0 и нейтральности $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$ получаем, что подпространства D_+ и D_- положительны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Подпространства $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+$ и $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_-$ неотрицательны в $\Pi_{\mathcal{K}}$ и их изотропные части совпадают с линейными $(I - P_0)D_+$ и $(I - P_0)D_-$, соответственно.¹*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неотрицательность подпространства $\mathcal{L} = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+$ следует из положительности подпространств $U^k D_+$, $k \in \mathbb{Z}$. При этом на основании равенства (4) $U^k D_+ \subset \Pi_0 [\dot{+}] \mathcal{P}_-$ и, следовательно, $\mathcal{L} \subset \Pi_0 [\dot{+}] \mathcal{P}_-$. Последнее включение означает, что изотропная часть $\mathcal{L}_0$ подпространства $\mathcal{L}$ имеет вид $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_-$.

Покажем, что $(I - P_0)D_+ \subset \mathcal{L}_0$. Пусть $s \in (I - P_0)D_+$. Без ограничения общности можем считать, что $s \in \mathcal{L}_{\lambda}(U) \cap (I - P_0)D_+$. Предположим, что для элемента s справедливо условие

$$(U - \lambda I)s = \tilde{s} \in \mathcal{L}_0. \quad (6)$$

С учетом (4) и равенства

$$s = (\lambda U^+)^k s + U^+ \sum_{l=0}^{k-1} (\lambda U^+)^l \tilde{s}$$

¹ $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_k$ – замкнутая линейная оболочка множества $\mathcal{L}_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

непосредственно проверяется, что последовательность

$$\left\{ (\lambda U^+)^k d_+ + U^+ \sum_{l=0}^{k-1} (\lambda U^+)^l \tilde{s} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad d_+ = d'_+ + s,$$

элементов из $\mathcal{L}$ сходится к s и, следовательно, $s \in \mathcal{L}_0$. Ясно, что все элементы $s \in \text{Ker}(U - \lambda I) \cap (I - P_0)D_+ = \mathcal{L}'$ удовлетворяют условию (6) и поэтому $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_0$. Рассуждая по индукции, через конечное число шагов получаем, что $\mathcal{L}_\lambda(U) \cap (I - P_0)D_+ \subset \mathcal{L}_0$ и, следовательно, $(I - P_0)D_+ \subset \mathcal{L}_0$.

Докажем обратное включение. Пусть $s \in \mathcal{L}_0$ и $\{U^{k_l} d_{k_l}\}_{k=1}^{\infty}$, $d_{k_l} \in D_+$, $k_l \in \mathbb{Z}$, сходящаяся к s последовательность элементов из $\mathcal{L}$. Тогда элементы $(I - P_0)U^{k_l} d_{k_l}$ также сходятся к s , что с учетом равенства (4) и конечномерности линейного подпространства $(I - P_0)D_+$ возможно лишь в случае $s \in (I - P_0)D_+$. Таким образом, $(I - P_0)D_+ \supset \mathcal{L}_0$ и, следовательно, $(I - P_0)D_+ = \mathcal{L}$. Рассматривая аналогично случай $\mathcal{L} = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_-$, завершаем доказательство.

Из утверждения 3 следует, что несмотря на то, что подпространства D_+ и D_- положительны, трансляционное представление оператора U по ним построить в общем случае невозможно, так как подпространства

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+ \quad \text{и} \quad \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_-$$

не являются гильбертовыми пространствами относительно индефинитной метрики.

Рассмотрим гильбертовы пространства

$$M_+ = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D'_+ \quad \text{и} \quad M_- = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D'_-.$$

С учетом утверждения 3 получаем, что

$$\begin{aligned} \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_- &= M_- [+] (I - P_0) D_-, \\ \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+ &= M_+ [+] (I - P_0) D_+. \end{aligned} \tag{7}$$

Положим

$$D''_- = D_- \cap \Pi_0, \quad D''_+ = D_+ \cap \Pi_0. \tag{8}$$

Очевидно, что $D''_{\pm} \subset D'_{\pm}$ и, следовательно, подпространство D''_+ (D''_-) также является уходящим (приходящим) подпространством для оператора U .

ЛЕММА 4 [7]. *Справедливы следующие равенства*

$$M_- = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D''_-, \quad M_+ = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D''_+.$$

§3. Оператор рассеяния. Определение и простейшие свойства

В дальнейшем будем считать, что подпространства D_+ и D_- — π -ортогональны. В силу теоремы 2 подпространства D'_- и D''_- являются приходящими для унитарного (относительно индефинитной метрики) в M_- оператора U . По теореме о трансляционном представлении [1] и с учетом леммы 4 заключаем, что существует два приходящих трансляционных представления оператора $U|_{M_-} : \ell_2(\mathbb{Z}, UN'_-)$, $UN'_- = UD'_- [-] D'_-$, и $\ell_2(\mathbb{Z}, UN''_-)$, $UN''_- = UD''_- [-] D''_-$, первое из которых построено относительно D'_- , а второе относительно D''_- . Представители вектора f из M_- в данных трансляционных представлениях обозначим через f' и f'' , соответственно.

Аналогично, существуют два уходящих трансляционных представления унитарного в M_+ оператора $U|_{M_+} : \ell_2(\mathbb{Z}, N'_+)$, $N'_+ = D'_+ [-] UD'_+$, и $\ell_2(\mathbb{Z}, N''_+)$, $N''_+ = D''_+ [-] UD''_+$, построенные по уходящим подпространствам D'_+ и D''_+ , соответственно. Рассмотрим вектор $g = P_{M_+}f$, где P_{M_+} — π -ортопроектор в Π_0 на M_+ , и через g' и g'' обозначим представители g в этих уходящих представлениях.

Оператор, устанавливающий связь между любыми приходящим представителем элемента f и уходящим представителем элемента g является, по сути, оператором рассеяния. Однако, как показали П. Лакс и Р. Филлипс [1], [2], наиболее естественно в качестве оператора рассеяния выбрать оператор

$$S: f' \rightarrow g'.$$

С учетом легко проверяемого равенства $P_{M_+}U = UP_{M_+}$ заключаем, что оператор рассеяния S является сжимающим оператором из $\ell_2(\mathbb{Z}, UN'_-)$ в $\ell_2(\mathbb{Z}, N'_+)$, коммутирующим с операторами правого сдвига в этих пространствах. В спектральном представлении оператор S определяет сжимающий оператор

$$\mathfrak{S} = F_{N'_+} S F_{UN'_-}^{-1},$$

где F_N — преобразование Фурье пространства $\ell_2(\mathbb{Z}, N)$ на $L_2((0, 2\pi), N)$, действующий из $L_2((0, 2\pi), UN'_-)$ в $L_2((0, 2\pi), N'_+)$ и коммутирующий с умножением на ограниченные измеримые функции.

Отметим, что оператор $\mathfrak{S}$, вообще говоря, не является причинным, так как из π -ортогональности D_+ и D_- не следует, в общем случае, π -ортогональность подпространств D'_+ и D'_- .

Наряду с оператором рассеяния S рассмотрим операторы

$$S_-: f'' \rightarrow f', \quad S_-^0: f'' \rightarrow g'. \quad (9)$$

Каждый из них можно рассматривать как оператор рассеяния относительно некоторой ортогональной пары приходящего и уходящего подпространств. Так, унитарный оператор S_- является оператором рассеяния относительно ортогональной пары $M_- [-] D'_-$ и D''_- подпространств гильбертова пространства M_- . При этом,

очевидно, что для приходящего D''_- и уходящего $M_- [-] D'_-$ подпространств справедливо равенство

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D''_- = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k (M_- [-] D'_-),$$

и, следовательно, для оператора рассеяния имеют место все результаты классической схемы рассеяния Лакса–Филлипса.

В свою очередь, сжимающий оператор S_-^0 является оператором рассеяния в обобщенной схеме Лакса–Филлипса, т.е. когда $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D''_- \neq \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D'_+$ (более подробно см. [8], [9]), относительно ортогональной пары приходящего D''_- и уходящего D'_+ подпространств гильбертова пространства Π_0 . Таким образом, в спектральном представлении оператор S_- определяет причинный оператор $\mathfrak{S}_-$, который может быть реализован как оператор умножения на функцию $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$, значениями которой при почти всех θ есть унитарные операторы из UN''_- в UN'_+ . Аналогично, спектральное представление $\mathfrak{S}_-$ оператора S_-^0 реализуется в виде умножения на функцию $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$, значениями которой являются сжимающие операторы из UN''_- в N'_+ .

В силу соотношений (9) $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_-(e^{i\theta}) = \mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$. Откуда с учетом унитарности оператора $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ заключаем, что оператор $\mathfrak{S}$ представим в виде оператора умножения на функцию

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(e^{i\theta}) = \mathfrak{S}_-(e^{i\theta})\mathfrak{S}_-^{-1}(e^{i\theta}), \quad (10)$$

значениями которой являются сжимающие операторы из UN'_- в N'_+ .

Функцию $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ называют *матрицей рассеяния* (м.р.).

Покажем, что свойства м.р. однозначно определяются спектральными свойствами π -нерастягивающего оператора

$$A = P_{K_{\varkappa}} U|_{K_{\varkappa}}, \quad (11)$$

действующего в пространстве Понтрягина $K_{\varkappa} = \Pi_{\varkappa} [-] (D_+ [+] D_-)$. Для этого предварительно изучим структуру оператора A .

§ 4. Спектральный анализ оператора A

Напомним (см. [5]), что π -унитарный в $\Pi_{\varkappa}$ оператор U называется *регулярной дилатацией* π -нерастягивающего оператора A , действующего в пространстве Понтрягина $K_{\varkappa}'$, если $K_{\varkappa}' \subset \Pi_{\varkappa}$, $\varkappa' = \varkappa$, и $A^k = P_{K_{\varkappa}'} U^k$, $k \in \mathbb{N}$, где $P_{K_{\varkappa}'}$ — π -ортопроектор в $\Pi_{\varkappa}$ на $K_{\varkappa}'$.

Минимальная регулярная дилатация π -нерастягивающего оператора существует и определяется с точностью до изоморфизма.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Пространство $\Pi_{\varkappa}$ представимо в виде π -ортогональной прямой суммы*

$$\Pi_{\varkappa} = \Pi_{\varkappa}^{\min} [+] \mathfrak{N} \quad (12)$$

инвариантных относительно оператора U пространств Понтрягина $\Pi_{\varkappa}^{\min}$ и Гильберта $\mathfrak{N}$. Сужение оператора U на $\Pi_{\varkappa}^{\min}$ определяет минимальную регулярную дилатацию оператора A , а сужение U на гильбертово пространство $\mathfrak{N}$ является двусторонним сдвигом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании критерия Сарасона [11] и равенства (11) заключаем, что оператор U является регулярной дилатацией оператора A .

Положим $\mathcal{L}_+ = \overline{(U - A)K_{\varkappa}}$ и $\mathcal{L}_- = \overline{(U^+ - A^+)K_{\varkappa}}$. Покажем, что $\mathcal{L}_+ \subset N_+$, где $N_+ = D_+ [-] UD_+$. Действительно, из разложения $\Pi_{\varkappa} = D_- [+] K_{\varkappa} [+] D_+$, с учетом соотношений $UD_- \supset D_-$ и $UD_+ \subset D_+$ получаем, что

$$UK_{\varkappa} \subset K_{\varkappa} [+] D_+. \quad (13)$$

Но тогда, в силу (11) $\mathcal{L}_+ \subset D_+$. В свою очередь, с учетом равенства $[(U - A)x, Ud_+] = 0$, $x \in K_{\varkappa}$, $d_+ \in D_+$, заключаем, что $\mathcal{L}_+ [\perp] UD_+$ и, следовательно, $\mathcal{L}_+ \subset N_+$. Аналогично проверяется, что $\mathcal{L}_- \subset N_-$, где $N_- = D_- [-] U^+ D_-$.

Положим $\mathcal{R} = N_+ [-] \mathcal{L}_+$, $\mathcal{R}_1 = N_- [-] \mathcal{L}_-$.

Нетрудно увидеть, что для уходящего подпространства D_+ справедливо разложение

$$D_+ = \left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} U^k N_+ := N_+ [+] UN_+ [+] \cdots$$

Но тогда

$$D_+ = \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+ \right) [+] \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} U^k \mathcal{R} \right). \quad (14)$$

Аналогично,

$$D_- = \left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k N_- = \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k \mathcal{L}_- \right) [+] \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k \mathcal{R}_1 \right). \quad (15)$$

Положим

$$\Pi_{\varkappa}^{\min} = \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k \mathcal{L}_- \right) [+] K_{\varkappa} [+] \left(\left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+ \right)$$

и

$$\mathfrak{N} = \left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k \mathcal{R}_1 [+] \left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=0}^{\infty} U^k \mathcal{R}. \quad (16)$$

На основании равенств (14), (15) получаем разложение (12). При этом сужение U на пространство Понтрягина $\Pi_{\varkappa}^{\min}$ является минимальной регулярной дилатацией [10]. Но тогда $U\Pi_{\varkappa}^{\min} = \Pi_{\varkappa}^{\min}$ и, следовательно, $U\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Последнее равенство, с учетом (16) влечет $U\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ и $\mathfrak{N} = \left[\begin{smallmatrix} + \\ + \end{smallmatrix} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{R}$. Таким образом, оператор U в гильбертовом (относительно индефинитной метрики) пространстве $\mathfrak{N}$ является двусторонним сдвигом с порождающим подпространством $\mathcal{R}$, что и завершает доказательство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Вне единичного круга спектр π -нерастягивающего оператора A совпадает с множеством $1/\bar{\lambda}_1, \dots, 1/\bar{\lambda}_n$ собственных значений оператора U . При этом*

$$\mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(A) = P_{K_{\varkappa}} \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(U) \quad (17)$$

$$u \dim \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(A) = \dim \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(U).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку вне единичного круга оператор A и его минимальная регулярная дилатация имеют одни и те же точки спектра [10], то с учетом разложения (12) заключаем, что спектр оператора A вне единичного круга совпадает с множеством $1/\bar{\lambda}_1, \dots, 1/\bar{\lambda}_n$ собственных значений оператора U .

Пусть $x \in \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}}(U)$ и $(U - \frac{1}{\lambda}I)^p x = 0$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $d_- \in D_-$ справедливо равенство

$$0 = \left[\left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p x, d_- \right] = \left[x, \left(U^+ - \frac{1}{\lambda}I \right)^p d_- \right]. \quad (18)$$

А так как $U^+ - \pi$ -изометрический оператор на положительном линеале D_- и $|\lambda| < 1$, то $(U^+ - \frac{1}{\lambda}I)^p D_- = D_-$. Но тогда с учетом (18) получаем, что $x \perp D_-$, и, следовательно, $(I - P_{K_{\times}})x \in D_+$. При этом, поскольку D_+ уходящее для U подпространство, то

$$P_{K_{\times}} \left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p (I - P_{K_{\times}})x = 0,$$

и

$$P_{K_{\times}} \left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p x = P_{K_{\times}} \left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p P_{K_{\times}} x = \left(A - \frac{1}{\lambda}I \right)^p P_{K_{\times}} x.$$

Таким образом,

$$P_{K_{\times}} \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}}(U) \subset \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}}(A).$$

Обратно, пусть $(A - \frac{1}{\lambda}I)^p x_0 = 0$. Так как $U_1 = U|_{D_+}$ — π -изометрический оператор на положительном линеале D_+ , то оператор $(U_1 - \frac{1}{\lambda}I)^{-1}$ существует и определен на всем пространстве D_+ . Рассмотрим вектор $x = x_0 + d_+$, где

$$d_+ = - \left(U_1 - \frac{1}{\lambda}I \right)^{-p} P_{D_+} \left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p x_0.$$

С учетом соотношения (13) и определения оператора A получаем, что

$$\left(U - \frac{1}{\lambda}I \right)^p x = \left(A - \frac{1}{\lambda}I \right)^p x_0 = 0,$$

что и завершает доказательство.

На основании утверждения 6 заключаем, что пространство $K_{\times}$ представимо в виде

$$K_{\times} = \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_1}(A) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_n}(A) \dot{+} \mathfrak{H}, \quad (19)$$

где $\mathfrak{H}$ инвариантное для A подпространство в $K_{\times}$ и такое, что

$$\sigma(A|_{\mathfrak{H}}) = \sigma(A) \setminus \{1/\bar{\lambda}_1, \dots, 1/\bar{\lambda}_n\}.$$

В силу (19)

$$\mathfrak{H} = \left(A - \frac{1}{\bar{\lambda}_1}I \right)^{\times} \dots \left(A - \frac{1}{\bar{\lambda}_n}I \right)^{\times} K_{\times}. \quad (20)$$

Но тогда с учетом аналога равенства (17) для операторов U^+ и A^+ получаем

$$\mathfrak{H}^{[\perp]} = \mathcal{L}_{1/\lambda_1}(A^+) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}_{1/\lambda_n}(A^+) = P_{K_{\times}} \mathcal{D}_-. \quad (21)$$

Пусть ε_j , $|\varepsilon_j| = 1$, одно из собственных значений оператора U такое, что корневой идеал $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$ содержит неположительные элементы (см. §1). С учетом разложения (15) заключаем, что оператор U^+ в D_- изоморфен оператору правого сдвига и, следовательно, все точки единичной окружности принадлежат непрерывному спектру оператора $U^+|_{D_-}$. Таким образом,

$$\overline{(U^+ - \bar{\varepsilon}_j I)^n D_-} = D_-.$$

Заменяя теперь в равенстве (18) $1/\lambda$ на ε_j , получаем, что $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U) [\perp] D_-$. Аналогично, с учетом $\overline{(U - \varepsilon_j I)^n D_+} = D_+$ заключаем, что $\mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}_j}(U^+) [\perp] D_+$. Но тогда с учетом равенства $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U) = \mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}_j}(U^+)$ окончательно получаем, что $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U) \subset K_{\varkappa}$ и для любого $x \in \mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$

$$Ux = Ax, \quad U^+x = A^+x. \quad (22)$$

Поэтому на основании равенства (20) $\mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U) \subset \mathfrak{H}$. При этом, поскольку идеал $[+]_{j=1}^m \mathcal{L}_{\varepsilon_j}(U)$ невырожден, то невырожденным будет и идеал $[+]_{j=1}^m \mathcal{L}'_{\varepsilon_j}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 [+]_{j=1}^m \mathcal{L}'_{\varepsilon_j}, \quad (23)$$

где $\mathfrak{H}_0$ – подпространство в $K_{\varkappa}$.

В гильбертовом пространстве Π_0 рассмотрим подпространство

$$K_+^0 = \Pi_0 [-] (D'_- [+] D''_+).$$

ЛЕММА 7. *π -ортoprojectор $P_{K_{\varkappa}}$ взаимно однозначно отображает пространство K_+^0 на пространство $\mathfrak{H}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения пространства K_+^0 следует, что $K_+^0 [\perp] D_-$. Таким образом, произвольный элемент $t \in K_+^0$ представим в виде

$$t = t_0 + d_+, \quad (24)$$

где $t_0 \in K_{\varkappa}$, а $d_+ \in D_+$. Покажем, что $t_0 \in \mathfrak{H}_0$. Для этого прежде всего отметим, что в силу равенств (4) и (5) $D_{\pm} [\perp] \mathcal{P}_{\mp}$ и, следовательно,

$$\mathcal{P}_- \subset D_- [+] K_{\varkappa}, \quad \mathcal{P}_+ \subset K_{\varkappa} [+] D_+. \quad (25)$$

Поскольку $t \in \Pi_0$, то $t [\perp] \mathcal{P}_-$, откуда с учетом равенств (24), (25) получаем $t_0 [\perp] P_{K_{\varkappa}} \mathcal{P}_-$, что в силу (21) означает, что $t_0 \in \mathfrak{H}^{[\perp][\perp]} = \mathfrak{H}$. Аналогично, из условия $t \in \Pi_0$ следует, что $t [\perp] [+]_{j=1}^m \mathcal{L}'_{\varepsilon_j}$, откуда в силу разложения (23) элемент $t_0 \in \mathfrak{H}_0$.

Для произвольного $t_0 \in \mathfrak{H}_0$ положим $t = t_0 - (I - P_{K_{\varkappa}})\hat{p}$, где $\hat{p} \in \mathcal{P}_+$ и удовлетворяет условию

$$[t_0, p] + [P_{K_{\varkappa}}\hat{p}, p] = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_+. \quad (26)$$

Отметим, что равенство (26) определяет элемент $d_+ = (I - P_{K_\infty})\hat{p}$ однозначно. Действительно, если существуют элементы $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$, удовлетворяющие (26), то $[P_{K_\infty}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2), p] = 0$, что с учетом нейтральности линеала $\mathcal{P}_+$ влечет $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \in K_\infty$ и, следовательно, $(I - P_{K_\infty})(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 0$.

На основании равенств (2), (8), (23), (25), (26) непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $t \in K_+^0$. Таким образом, оператор $P_{K_\infty}t = t_0$ отображает K_+^0 на $\mathfrak{H}_0$. При этом в равенстве (24) $t_0 \neq 0$, так как в противном случае $d_+ \in D_+''$ и $d_+ [\perp] D_+''$. Следовательно, отображение $P_{K_\infty}: K_+^0 \rightarrow \mathfrak{H}_0$ взаимно однозначно. Лемма доказана.

В пространстве K_+^0 рассмотрим сжимающий (относительно индефинитной метрики) оператор $A_+^0 = P_{K_+^0}U|_{K_+^0}$, где $P_{K_+^0}$ — π -ортопроектор в Π_0 на K_+^0 .

ТЕОРЕМА 8. *Для всех $|\mu| < 1$, $\mu \neq \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, m$, число $\mu \in \sigma_\alpha(A)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \sigma_\alpha(A_+^0)$, $\alpha \in \{p, r, c\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из инвариантности для A подпространства $\mathfrak{H}$ с учетом равенств (22) и (23) следует, что $A: \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}_0$. Но тогда на основании разложения (19) и определения $\mathfrak{H}_0$

$$\mu \in \sigma_\alpha(A) \iff \mu \in \sigma_\alpha(A|_{\mathfrak{H}_0}), \quad |\mu| \leq 1, \quad \mu \neq \varepsilon_j. \quad (27)$$

С учетом разложения $\Pi_0 = D_-' [\dot{+}] K_+^0 [\dot{+}] D_+''$ и соотношений $UD_-' \supset D_-'$ и $UD_+'' \subset D_+''$ получаем, что $UK_+^0 \subset K_+^0 [\dot{+}] D_+''$ и, следовательно, при всех $t \in K_+^0$ $(I - P_{K_+^0})Ut \in D_+''$. Но тогда на основании включения $D_+'' \subset D_+$, $P_{K_\infty}(I - P_{K_+^0})Ut = 0$, т.е.

$$P_{K_\infty}A_+^0t = P_{K_\infty}Ut, \quad t \in K_+^0.$$

При этом на основании последнего равенства и равенства (24)

$$P_{K_\infty}A_+^0t = P_{K_\infty}U(t_0 + d_+) = P_{K_\infty}Ut_0 = AP_{K_\infty}t$$

и, таким образом,

$$P_{K_\infty}(A_+^0 - \mu I)t = (A - \mu I)P_{K_\infty}t, \quad t \in K_+^0,$$

что с учетом леммы 7 и соотношения (27) завершает доказательство.

Для оператора

$$A_-^0 = P_{K_-^0}U^+|_{K_-^0}, \quad (28)$$

действующего в гильбертовом пространстве $K_-^0 = \Pi_0 [-] (D_-'' [\dot{+}] D_+')$, рассуждая аналогично доказательству леммы 7 и теоремы 8, получаем следующее “двойственное” к теореме 8 утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Для всех $|\mu| \leq 1$, $\mu \neq \bar{\varepsilon}_j$, $j = 1, \dots, m$, число $\mu \in \sigma_\alpha(A^+)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \sigma_\alpha(A_-^0)$, $\alpha \in \{p, r, c\}$.*

С помощью операторов A_+^0 и A_-^0 можно выделить важный случай, когда оператор рассеяния S , определенный в §3, является унитарным.

ТЕОРЕМА 10. *Оператор рассеяния S является унитарным тогда и только тогда, когда вполне неунитарная часть оператора A_-^0 (A_+^0) принадлежит классу² C_{00} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения оператора рассеяния ясно, что унитарность оператора S равносильна условию $M_+ = M_-$.

Из равенства (28) следует, что оператор U^+ , действующий в гильбертовом пространстве Π_0 , является унитарной дилатацией сжатия A_-^0 . Рассуждая аналогично доказательству утверждения 5, заключаем, что пространство Π_0 представимо в виде $\Pi_0 = \Pi_0^{\min} [\dot{+}] \mathfrak{N}$, где

$$\begin{aligned} \Pi_0^{\min} &= \left(\left[\dot{+} \right]_{k=0}^{\infty} (U^+)^k \mathcal{L}_-'' \right) [\dot{+}] K_-^0 [\dot{+}] \left(\left[\dot{+} \right]_{k=0}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+' \right), \\ \mathcal{L}_+' &= \overline{(U - (A_-^0)^+) K_-^0}, \quad \mathcal{L}_-'' = \overline{(U^+ - A_-^0) K_-^0}, \end{aligned}$$

$\Pi_0^{\min}$ –пространство минимальной унитарной дилатации, а

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{R}' = \left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{R}'', \\ \mathcal{R}'' &= N_-'' [-] \mathcal{L}_-'', \quad \mathcal{R}' = N_+' [-] \mathcal{L}_+', \quad U^+ \mathcal{R}' = \mathcal{R}'', \end{aligned}$$

$\mathfrak{N}$ –пространство двустороннего сдвига. Но тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} M_- &= \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_-'' = \left(\left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_-'' \right) [\dot{+}] \mathfrak{N}, \\ M_+ &= \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+' = \left(\left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+' \right) [\dot{+}] \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_+ = M_- \iff \left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_-'' = \left[\dot{+} \right]_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+'.$$

Последнее равенство справедливо лишь в случае, когда вполне неунитарная часть оператора A_-^0 принадлежит классу C_{00} [12]. Рассматривая аналогично случай оператора A_+^0 , завершаем доказательство теоремы.

Теорема 8 показывает, что часть спектра π -нерастягивающего оператора A , лежащая на единичном круге, совпадает (за исключением m критических точек ε_j) со спектром сжимающего оператора A_+^0 . В свою очередь, для того чтобы получить подобную характеристику части спектра оператора A , лежащую вне единичного круга, рассмотрим гильбертовы пространства

$$K_- = D_-' [-] D_-'', \quad K_+ = D_+' [-] D_+''$$

и сжимающие операторы

$$A_- = P_{K_-} U|_{K_-}, \quad A_+ = P_{K_+} U^+|_{K_+},$$

действующие, соответственно, в K_- и K_+ .

²Ограниченный оператор A принадлежит классу C_{00} , если $A^k x \rightarrow 0$ и $(A^*)^k x \rightarrow 0$ $\forall x \in \Pi_{\infty}$ при $k \rightarrow \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Оператор A_- вполне неунитарный, и его спектр состоит из тех собственных значений λ_j оператора U , для которых линеал $\mathcal{L}_{1/\lambda_j}(A^+)$ содержит отрицательные элементы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу первого из равенств (25) $(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{P}_- \subset D_-$. При этом, как легко видеть, $(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{P}_- [\perp] D''_-$ и, следовательно,

$$P_0(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{P}_- \subset D'_- [-] D''_- = K_-.$$

Предположим, что $f \in K_-$ и $f [\perp] P_0(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{P}_-$. В силу (5) $f = d_- - p$, где $d_- \in D_-$, $p \in \mathcal{P}_+$, и $0 = [f, P_0(I - P_{K_{\kappa}})s] = -[p, s] \quad \forall s \in \mathcal{P}_-$, что в силу невырожденности линеала $\mathcal{P}_+ \dot{+} \mathcal{P}_-$ возможно лишь в случае $p = 0$. Но тогда $f \in D''_- \cap K_-$ и $f = 0$. Таким образом,

$$K_- = P_0(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{P}_-. \quad (29)$$

С учетом равенства (29) непосредственно проверяется, что произвольный элемент $f \in K_-$ представим в виде

$$f = (I - P_{K_{\kappa}})\tilde{s} - \tilde{p}, \quad \tilde{s} \in \mathcal{P}_-, \quad (30)$$

где элемент $\tilde{p} \in \mathcal{P}_+$ и однозначно определяется равенством

$$[\tilde{p}, s] + [P_{K_{\kappa}}\tilde{s}, s] = 0 \quad \forall s \in \mathcal{P}_-. \quad (31)$$

В силу (29) пространство K_- конечномерное и, следовательно, оператор A_- имеет только точечный спектр.

Из разложения $M_- = D''_- [\dot{+}] K_- [\dot{+}] (M_- [-] D'_-)$, с учетом включения $UD''_- \supset D''_-$ следует, что $UK_- \subset K_- [\dot{+}] (M_- [-] D'_-)$, а, значит,

$$A_- = P_{K_-}U|_{K_-} = P_{D'_-}U|_{K_-},$$

$P_{D'_-}$ — π -ортопроектор в Π_{κ} на D'_- . Но тогда на основании равенств (5) и (30) для любых $f \in K_-$ и $d_- \in D_-$

$$[A_-^n f, d_-] = [f, (U^+)^n P_{D'_-} d_-] = [f, (U^+)^n d_-] = [U^n \tilde{s}, d_-],$$

и, следовательно,

$$K_- = \mathcal{L}_{\lambda_1}(A_-) \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{L}_{\lambda_n}(A_-), \quad (32)$$

где

$$\mathcal{L}_{\lambda_j}(A_-) = P_0(I - P_{K_{\kappa}})\mathcal{L}_{\lambda_j}(U).$$

При этом в силу утверждения 6 и разложения (30) $\mathcal{L}_{\lambda_j}(A_-) \neq \{0\}$ (а, значит, $\lambda_j \in \sigma(A_-)$) лишь тогда, когда линеал $\mathcal{L}_{1/\lambda_j}(A^+)$ содержит отрицательные элементы.

Вполне неунитарность сжатия A_- следует из того, что спектр оператора A_- лежит внутри единичной окружности. Утверждение 11 доказано.

Заметим, что в равенстве (30) π -ортогональные элементы $(I - P_{K_{\kappa}})\tilde{s}$ и $\tilde{p}$ равноправны и каждый из них однозначно определяет другой с помощью равенства (31). При этом с учетом разложения $D'_- = K_- [\dot{+}] D''_-$ и равенства (5) очевидно, что множество всех векторов $\tilde{p}$ из разложения (30) совпадает с линеалом $(I - P_0)D_-$.

Из доказательства утверждения 11 ясно, что корневые линеалы оператора A_- , по сути, определяются компонентой $(I - P_{K_{\kappa}})\tilde{s}$ в разложении (30). В то же время можно показать, что корневые линеалы оператора A_-^+ зависят уже от составляющей $\tilde{p}$ элемента f .

ЛЕММА 12. Если $f' \in K_-$ и $f' = (I - P_{K_\kappa})s' - p'$, то равенство $(A_-^+ - \bar{\lambda}I)^n f' = 0$ эквивалентно равенству $(U^+ - \bar{\lambda}I)^n p' = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$A_-^+ f' = r = (I - P_{K_\kappa})s'' - U^+ p', \quad (33)$$

где элемент $(I - P_{K_\kappa})s''$ определяется по элементу $U^+ p'$ с помощью равенства (31).

Для любого $f \in K_-$ в силу нейтральности линеалов $\mathcal{P}_+ = U^+ \mathcal{P}_+$, $\mathcal{P}_- = U^+ \mathcal{P}_-$ и равенства (31)

$$[r, f] = -[P_{K_\kappa} s'', \tilde{s}] = [U^+ p', \tilde{s}]. \quad (34)$$

В свою очередь,

$$[A_-^+ f', f] = -[U^+(I - P_{K_\kappa})s', P_{K_\kappa} \tilde{s}] + [U^+(I - P_{K_\kappa})s', \tilde{s}].$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как на основании (25) $(I - P_{K_\kappa})s' \subset D_-$, а для второго с учетом (31) получаем

$$[U^+(I - P_{K_\kappa})s', \tilde{s}] = -[P_{K_\kappa} s', U\tilde{s}] = [p', U\tilde{s}].$$

Таким образом, $[A_-^+ f', f] = [p', U\tilde{s}]$. Но тогда, воспользовавшись равенством (34), убеждаемся в справедливости равенства (33). При этом элемент $p' \in (I - P_0)D_-$ однозначно определяет элемент $f' \in K_-$, что и завершает доказательство леммы.

Подобные утверждению 11 и лемме 12 результаты можно сформулировать и для оператора A_+ , действующего в гильбертовом пространстве K_+ . Ограничимся здесь лишь теми утверждениями, которые будут использоваться в дальнейшем.

Произвольный вектор $g \in K_+$ представим в виде

$$g = (I - P_{K_\kappa})\hat{p} - \hat{s}, \quad \hat{p} \in \mathcal{P}_+, \quad (35)$$

где π -ортогональные элементы $(I - P_{K_\kappa})\hat{p}$ и $\hat{s} \in \mathcal{P}_- \cap (I - P_0)D_+$ взаимно однозначно определяют друг друга при помощи равенства

$$[\hat{s}, p] + [P_{K_\kappa} \hat{p}, p] = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_+. \quad (36)$$

При этом $A_+ = P_{D'_+} U^+|_{K_+}$ и для произвольных $g \in K_+$ и $d_+ \in D_+$ справедливо равенство

$$[A_+^n g, d_+] = [(U^+)^n \hat{p}, d_+]. \quad (37)$$

Это дает возможность утверждать, что

$$K_+ = \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_1}^-(A_+) + \dots + \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_n}^-(A_+),$$

где

$$\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}^-(A_+) = P_0(I - P_{K_\kappa})\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}^-(U^+).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. При всех $f \in K_-$ справедливо равенство

$$A_+ P_{K_+} f = P_{K_+} A_+^+ f,$$

где P_{K_+} — π -ортотпроектор в Π_0 на K_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $f = (I - P_{K_\infty})\tilde{s} - \tilde{p}$ из K_-

$$P_{K_+} f = g = -((I - P_{K_\infty})\tilde{p} - \tilde{s}(\tilde{p})), \quad (38)$$

где элемент $\tilde{s}(\tilde{p}) \in \mathcal{P}_-$ и определяется по $(I - P_{K_\infty})\tilde{p}$ с помощью равенства (36).

Действительно, по построению $g \in K_+$. При этом

$$f - g = \tilde{s} - \tilde{s}(\tilde{p}) - P_{K_\infty}(\tilde{s} + \tilde{p}),$$

и, поскольку вектор $\tilde{s} - \tilde{s}(\tilde{p})$ π -ортогонален пространству $\Pi_0 \supset K_+$, а π -ортогональность элемента $P_{K_\infty}(\tilde{s} + \tilde{p})$ и пространства K_+ непосредственно проверяется (см. (31) и (35)), то $(f - g) \perp K_+$, что и доказывает равенство (38).

Из равенства (37) при $g = P_{K_+} f$ следует, что

$$[A_+ P_{K_+} f, d_+] = -[U^+ \tilde{p}, d_+] \quad \forall d_+ \in D_+.$$

В свою очередь, на основании равенств (33) и (38)

$$[P_{K_+} A_+^+ f, d_+] = -[(I - P_{K_\infty})U^+ \tilde{p}, d_+] = -[U^+ \tilde{p}, d_+].$$

Но тогда

$$[A_+ P_{K_+} f, d_+] = [P_{K_+} A_+^+ f, d_+] \quad \forall d_+ \in D_+,$$

что и завершает доказательство.

В заключение докажем одно вспомогательное утверждение, которое будет использоваться в дальнейшем.

ЛЕММА 14. Если $g \in \mathcal{L}_{\bar{\lambda}}(A_+)$, то в уходящем спектральном представлении $L_2((0, 2\pi), N'_+)$ его представитель $\hat{g}$ имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{(1 - \bar{\lambda}e^{i\theta})^{k+1}} P_{N'_+} (A_+ - \bar{\lambda}I)^k g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уходящее спектральное представление $L_2((0, 2\pi), N'_+)$ получено в результате преобразования Фурье пространства $M_+ = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D'_+ = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} U^k N'_+$, где $N'_+ = D'_+ [-] U D'_+$ — блуждающее относительно оператора U подпространство. При этом, поскольку $D'_+ = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U^k N'_+$, а $g \in K_+ \subset D'_+$, то

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} U^k g_k, \quad g_k \in N'_+. \quad (39)$$

Но тогда, если $(A_+ - \bar{\lambda}I)g = 0$, то на основании равенства $A_+ = P_{D'_+}U^+|_{K_+}$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} U^{k-1}g_k = \bar{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} U^k g_k,$$

и, следовательно, элементы g_k в равенстве (39) имеют вид $g_k = \bar{\lambda}^k g_0 = \bar{\lambda}^k P_{N'_+} g$. Аналогично, если $(A_+ - \bar{\lambda}I)^p g = 0$, то, как несложно проверить,

$$g_k = \sum_{l=0}^k C_k^l \bar{\lambda}^{k-l} P_{N'_+} (A_+ - \bar{\lambda}I)^l g.$$

Но тогда спектральное представление элемента g имеет вид

$$\hat{g} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta} g_k = \sum_{l=0}^{\infty} e^{il\theta} \left(\sum_{k=l}^{\infty} C_k^l \bar{\lambda}^{k-l} e^{i(k-l)\theta} \right) P_{N'_+} (A_+ - \bar{\lambda}I)^l g,$$

что с учетом тождества

$$\sum_{k=l}^{\infty} C_k^l \bar{\lambda}^{k-l} e^{i(k-l)\theta} = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda}e^{i\theta})^{l+1}}$$

завершает доказательство леммы.

§ 5. Свойства матрицы рассеяния

Из равенства (10) следует, что свойства матрицы рассеяния (м.р.) $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ определяются свойствами м.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ и $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$, соответственно, операторов рассеяния S_-^0 и S_- .

Суммируем необходимые в дальнейшем известные [1], [12] свойства этих функций в виде следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 15. *М.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ есть граничное значение аналитической в области $|\omega| > 1$ операторнозначной функции $\mathfrak{S}_-(\omega)$, значениями которой являются сжимающие операторы из UN''_- в N'_+ . При этом*

- а) $0 \in \sigma_{\alpha}(\mathfrak{S}_-(\omega))$ тогда и только тогда, когда $1/\omega \in \sigma_{\alpha}(A_-^0)$, $\alpha \in \{p, r, c\}$, $|\omega| > 1$, где оператор A^0 определяется равенством (28);
- б) м.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ унитарна на множестве $C \setminus \sigma((A_{\text{вн}}^0)^+)$, где C – единичная окружность в комплексной плоскости, а $A_{\text{вн}}^0$ – вполне неунитарная часть оператора A_-^0 , и может быть аналитически продолжена через это множество внутрь единичного круга.

Для полноты изложения приведем основные этапы доказательства. В силу равенства (9) оператор S_-^0 , по сути, является трансляционным представлением ортопроектора P_{M_+} , действующего из M_- в M_+ . При этом с учетом ортогональности подпространств D''_- и D'_+ заключаем, что $P_{M_+} UN''_- \subset [+]_{k=-\infty}^0 U^k N'_+$.

Но тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 3.1 из главы 5 монографии [12], получаем, что м.р. $\mathfrak{S}_-^0(e^{i\theta})$ есть граничное значение аналитической в области $|\omega| > 1$ функции

$$\mathfrak{S}_-^0(\omega) = P_{N'_+} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} U \right)^k = P_{N'_+} \left(U^+ - \frac{1}{\omega} I \right)^{-1} U^{-1},$$

значениями которой являются сжимающие операторы из UN_-'' в N'_+ . При этом на основании доказательства теоремы 10 заключаем, что

$$\mathfrak{S}_-^0(\omega) = (\Theta_{A_-^0}(\bar{\lambda}) \oplus UP_{\mathcal{R}''})U^{-1}, \quad (40)$$

где

$$\Theta_{A_-^0}(\bar{\lambda}) = P_{\mathcal{L}'_+}(U^+ - \bar{\lambda}I)^{-1}P_{\mathcal{L}''_-}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\omega},$$

характеристическая функция оператора A_-^0 , $P_{\mathcal{R}''}$ — ортопроектор в $\mathfrak{N}$ на $\mathcal{R}''$.

Из разложения (40) и [10] получаем утверждение а). Утверждение б) настоящей теоремы следует из теоремы 4.1, главы 5 [12].

Теорема 15 показывает, что свойства м.р. $\mathfrak{S}_-^0(e^{i\theta})$ определяются спектральными свойствами сжимающего оператора A_-^0 . Рассуждая точно так же, нетрудно получить аналогичную связь между м.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ и спектром сжимающего оператора A_-^+ . При этом в силу утверждения 11 аналогии утверждений а) и б) теоремы 15 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 16. *М.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ есть граничное значение аналитической в области $|\omega| > 1$ операторнозначной функции $\mathfrak{S}_-(\omega)$, значениями которой являются сжимающие операторы из UN_-'' в UN_-' . При этом*

- а) *оператор $\mathfrak{S}_-(\omega)$ вполне обратим, т.е. $0 \in \rho(\mathfrak{S}_-(\omega))$, при всех $|\omega| > 1$ за исключением лишь конечного множества точек $\{\omega_j = 1/\bar{\lambda}_j\}$ таких, что линейал $\mathcal{L}_{1/\lambda_j}(A^+)$ содержит отрицательные элементы;*
- б) *м.р. $\mathfrak{S}_-(e^{i\theta})$ унитарна на единичной окружности и допускает аналитическое продолжение в область $|\omega| < 1$.*

Положим

$$\mathfrak{S}(\omega) = \mathfrak{S}_-^0(\omega)\mathfrak{S}_-^{-1}(\omega). \quad (41)$$

На основании теорем 15, 16 заключаем, что функция $\mathfrak{S}(\omega)$ мероморфна в области $|\omega| > 1$ и множество ее особых точек совпадает с множеством точек $\{\omega_j\}$, в которых $\mathfrak{S}_-(\omega)$ не имеет обратного. При этом с учетом равенства (10) и теорем 9, 15, 16 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 17. *При почти всех θ м.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ является граничным значением мероморфной в области $|\omega| > 1$ операторнозначной функции $\mathfrak{S}(\omega)$, множество особых точек которой совпадает с множеством $\{\omega_j = 1/\bar{\lambda}_j\}$ собственных значений оператора A таких, что линейал $\mathcal{L}_{1/\lambda_j}(A^+)$ содержит отрицательные элементы.*

Если точка ω не является особой, то $0 \in \sigma_\alpha(\mathfrak{S}(\omega))$ тогда и только тогда, когда $1/\omega \in \sigma_\alpha(A^+)$, $\alpha \in \{p, r, c\}$.

М.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ унитарна на множестве $C \setminus \sigma((A_{\text{BH}}^0)^+)$ и допускает аналитическое продолжение через это множество в область $|\omega| < 1$.

§6. Матрица рассеяния и характеристическая функция π -нерастягивающего оператора A^+

Аналогично [10], мероморфную внутри единичного круга, операторнозначную функцию

$$\Theta_{A^+}(\mu) = P_{\mathcal{L}_+}(U^+ - \mu I)^{-1}P_{\mathcal{L}_-},$$

где U^+ – минимальная регулярная дилатация оператора A^+ , а $P_{\mathcal{L}_+}$ ($P_{\mathcal{L}_-}$) – π -ортопроектор в $\Pi_{\mathcal{K}}$ на подпространство $\mathcal{L}_+ = \overline{(U - A)K_{\mathcal{K}}}$ ($\mathcal{L}_- = \overline{(U^+ - A^+)K_{\mathcal{K}}}$) будем называть *характеристической функцией* (х.ф.) оператора A^+ .

Отметим, что в том случае, когда индефинитная метрика является скалярным произведением, определенная так х.ф. совпадает с х.ф. сжимающего оператора [12].

Покажем, что свойства м.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ определяются свойствами х.ф. $\Theta_{A^+}(\mu)$. Запомним, что в отличие от дефинитного случая, когда м.р., по сути, есть граничное значение х.ф. некоторого сжатия [13], эта связь не столь явная.

ТЕОРЕМА 18. *Если $\omega \notin \sigma(A)$, то $0 \in \sigma_{\alpha}(\mathfrak{S}(\omega))$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_{\alpha}(\Theta_{A^+}(1/\omega))$, $\alpha \in \{p, r, c\}$.*

Справедливость сформулированного утверждения непосредственно следует из теоремы 4 [10] и теоремы 17.

Пусть $P_{\bar{\lambda}_j}$ – проектор в $\Pi_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(U^+)$, определяемый разложением (2). Используя разложение резольвенты $(U^+ - \bar{\lambda}I)^{-1}$ в окрестности изолированной особой точки $\bar{\lambda}_j$, получаем, что

$$\Theta_{A^+}(\bar{\lambda}) = P_{\mathcal{L}_+} \left(- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^l}{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_j)^{l+1}} P_{\bar{\lambda}_j} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^{-k-1}}{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_j)^{-k}} (I - P_{\bar{\lambda}_j}) \right) P_{\mathcal{L}_-}. \quad (42)$$

На основании разложения (42) ясно, что порядок γ особой точки $\bar{\lambda}_j$ функции $\Theta_{A^+}(\bar{\lambda})$ равен

$$\max_{p_j \in P_{\bar{\lambda}_j} \mathcal{L}_-} \max_{0 \leq l \leq \infty} \{l + 1 \mid P_{\mathcal{L}_+}(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^l p_j \neq 0\}.$$

Откуда с учетом равенств (25) и соотношения $U^+ K_{\mathcal{K}} \subset D_- [\dot{+}] K_{\mathcal{K}}$ находим

$$\gamma = \max_{p_j \in P_{\bar{\lambda}_j} \mathcal{L}_-} \min_{0 \leq k \leq \infty} \{k \mid (U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k p_j \in K_{\mathcal{K}}\}. \quad (43)$$

ТЕОРЕМА 19. *Точка ω_j – полюс порядка $\gamma > 0$ функции $\mathfrak{S}(\omega)$ тогда и только тогда, когда точка $\bar{\lambda}_j = 1/\omega_j$ является полюсом того же порядка х.ф. $\Theta_{A^+}(\bar{\lambda})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $y \in UN'_-$ имеем

$$P_{M_+} y = (I - P_{UD'_+})y + P_{UD'_+} y, \quad (44)$$

где $P_{UD'_+}$ — π -ортопроектор в Π_0 на UD'_+ . При этом $(I - P_{UD'_+})y \in [+]_{k=-\infty}^0 U^k N'_+$ и, как легко проверяется,

$$(I - P_{UD'_+})y = \sum_{k=-\infty}^0 U^k P_{N'_+} U^{-k} y. \quad (45)$$

В свою очередь, полагая $y = Ud'_-$, где $d'_- \in N'_-$ и $d'_- = d''_- + f$, $d''_- \in D''_-$, $f \in K_-$, получим, что

$$P_{UD'_+} y = P_{UD'_+} Uf = UP_{D'_+} f.$$

При этом, поскольку элемент f π -ортогонален D''_+ , то $UP_{D'_+} f = UP_{K_+} f$. На основании равенства (32) и утверждения 13 заключаем, что

$$P_{K_+} f = P_{K_+} \sum_{j=1}^n f_j = \sum_{j=1}^n g_j,$$

где $f_j \in \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(A_-^+)$, $g_j = P_{K_+} f_j \in \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(A_+)$. Таким образом,

$$P_{UD'_+} y = UP_{K_+} f = U \sum_{j=1}^n g_j. \quad (46)$$

Переходя в равенстве (44) к спектральному представлению, с учетом равенств (45), (46) и леммы 14 получаем

$$\mathfrak{S}(e^{i\theta})y = P_{N'_+} \sum_{k=-\infty}^0 e^{ik\theta} U^{-k} y + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{il\theta}}{(1 - \bar{\lambda}_j e^{i\theta})^l} P_{N'_+} (A_+ - \bar{\lambda}_j I)^{l-1} g_j$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{S}(\omega)y = P_{N'_+} \left(I - \frac{U}{\omega} \right)^{-1} y + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega^l}{(1 - \bar{\lambda}_j \omega)^l} P_{N'_+} (A_+ - \bar{\lambda}_j I)^{l-1} g_j. \quad (47)$$

Из доказательства леммы 14 ясно, что если $g_j \in \text{Ker}(A_+ - \bar{\lambda}_j I)$ и $g_j \neq 0$, то $P_{N'_+} g_j \neq 0$. Но тогда из разложения (47) и утверждения 13 следует, что точка $\omega_j = 1/\bar{\lambda}_j$ является для функции $\mathfrak{S}(\omega)$ полюсом порядка

$$\gamma_1 = \max_{f \in P_{K_-} N'_-} \min_k \{k \mid P_{K_+} (A_-^+ - \bar{\lambda}_j I)^k f_j = 0\}. \quad (48)$$

В силу равенств (30), (33), и (38) заключаем, что вектор f_j представим в виде

$$f_j = (I - P_{K_{\infty}}) \tilde{s}_j - \tilde{p}_j,$$

где $\tilde{p}_j \in \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(U^+)$, и равенство $P_{K_+} (A_-^+ - \bar{\lambda}_j I)^k f_j = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k \tilde{p}_j \in K_{\infty}$.

Но тогда с учетом (48) находим, что

$$\gamma_1 = \max_{\tilde{p}_j \in P_{\bar{\lambda}_j} (I - P_{D_-}) P_{K_-} N'_-} \min_k \{k \mid (U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k \tilde{p}_j \in K_{\varkappa}\}. \quad (49)$$

В силу равенства (5) произвольное $d'_- \in N'_-$ представимо в виде $d'_- = d_- - \tilde{p}$, где $d_- \in N_- = D_- [-] U^+ D_-$. При этом $d'_- = d''_- + f$, где $f = (I - P_{K_{\varkappa}}) \tilde{s} - \tilde{p} \in K_-$. Но тогда

$$P_{\bar{\lambda}_j} (I - P_{D_-}) P_{K_-} d'_- = P_{\bar{\lambda}_j} (I - P_{D_-}) f = -P_{\bar{\lambda}_j} \tilde{p} = -P_{\bar{\lambda}_j} d_-$$

и, следовательно,

$$P_{\bar{\lambda}_j} (I - P_{D_-}) P_{K_-} N'_- = P_{\bar{\lambda}_j} N_-,$$

где в силу утверждения 5 $P_{\bar{\lambda}_j} N_- = P_{\bar{\lambda}_j} \mathcal{L}_-$. Но тогда с учетом равенств (43), (49) получаем $\gamma_1 = \gamma$, что и завершает доказательство.

§ 7. Частный случай

В классической схеме рассеяния Лакса–Филлипса наиболее полные результаты достигаются при условии, когда ортогональная пара приходящего D_- и уходящего D_+ подпространств гильбертова пространства $\mathcal{H}$ удовлетворяет дополнительно условию

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_- = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k D_+ = \mathcal{H}. \quad (50)$$

В пространстве Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$, $\varkappa > 0$, равенство (50) заведомо не выполняется, так как подпространства D_+ и D_- положительны.

Всюду в этом пункте будем считать, что для π -ортогональной пары подпространств D_- и D_+ справедливо “ослабленное” условие (50):

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} U^k (D_- [+] D_+) = \Pi_{\varkappa}. \quad (51)$$

Рассуждая аналогично [12], с учетом утверждения 5 и равенств (22) заключаем, что при выполнении условия (51) оператор U не имеет собственных значений, лежащих на единичной окружности. Но тогда разложение (2) для оператора U принимает вид

$$\Pi_{\varkappa} = \Pi_0 [+] (\mathcal{P}_- \dot{+} \mathcal{P}_+).$$

В то же время, на основании равенств (7) и (51)

$$\Pi_{\varkappa} = M_+ \vee M_- [+] (I - P_0)(D_+ \dot{+} D_-).$$

Но тогда с учетом (4), (5) получаем

$$M_+ \vee M_- = \Pi_0 \quad (52)$$

и

$$(I - P_0)D_- = \mathcal{P}_+, \quad (I - P_0)D_+ = \mathcal{P}_-. \quad (53)$$

ТЕОРЕМА 20. При выполнении условия (51) справедливы следующие утверждения:

- а) м.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ является граничным значением мероморфной в области $|\omega| > 1$ функции $\mathfrak{S}(\omega)$, множество особых точек которой совпадает с множеством собственных значений $\{\omega_j = 1/\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^n$ оператора A вне единичного круга. Порядок полюса ω_j равен индексу³ собственного значения $1/\bar{\lambda}_j$ оператора A ;
- б) м.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ унитарна на множестве $C \setminus \sigma(A)$, где C – единичная окружность, и допускает аналитическое продолжение через это множество в область $|\omega| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathcal{P}_- \cap K_{\varkappa}$. Тогда в силу равенств (5) и (53) $x[\perp]\mathcal{P}_+$, что с учетом невырожденности линеала $\mathcal{P}_+ \dot{+} \mathcal{P}_-$ возможно лишь при $x = 0$. Итак, $\mathcal{P}_- \cap K_{\varkappa} = \{0\}$. Но тогда на основании утверждения 6 линеалы $\mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(A^+)$ отрицательны и, следовательно, (см. теорему 17) множество особых точек функции $\mathfrak{S}(\omega)$ совпадает с собственными значениями $1/\bar{\lambda}_1, \dots, 1/\bar{\lambda}_n$ оператора A .

Из доказательства теоремы 19 ясно, что функция $\mathfrak{S}(\omega)$ в точке $\omega_j = 1/\bar{\lambda}_j$ имеет полюс порядка

$$\gamma = \max_{p_j \in P_{\bar{\lambda}_j}^- N_-} \min_k \{k \mid (U - \bar{\lambda}_j I)^k p_j \in K_{\varkappa}\}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, заключаем, что линеалы $\mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(A)$ также отрицательны. Но тогда на основании (17) получаем, что элемент $(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k p_j$ принадлежит $K_{\varkappa}$ лишь тогда, когда $(U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k p_j = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma &= \max_{p_j \in P_{\bar{\lambda}_j}^- N_-} \min_k \{k \mid (U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k p_j = 0\} \\ &= \max_{p_j \in P_{\bar{\lambda}_j}^- \bigvee_{l=0}^{\varkappa} (U^+)^l N_-} \min_k \{k \mid (U^+ - \bar{\lambda}_j I)^k p_j = 0\}. \end{aligned} \quad (54)$$

При этом, поскольку $\dim \mathcal{L}_{1/\bar{\lambda}_j}(U) \leq \varkappa$, то

$$P_{\bar{\lambda}_j}^- \bigvee_{k=0}^{\varkappa} (U^+)^k N_- = (I - P_0) D_-,$$

что с учетом первого из равенств (53) и (54) завершает доказательство утверждения а). Для доказательства утверждения б) достаточно в силу теорем 9 и 17 показать, что оператор A_-^0 вполне неунитарен. Действительно, из доказательства утверждения 10 с учетом (52) получаем, что

$$\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_-'' \vee \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} U^k \mathcal{L}_+' = \Pi_0^{\min},$$

что равносильно вполне неунитарности оператора A_-^0 (см. [12]).

³ Индексом собственного значения μ оператора A называется такое наименьшее $k \in \mathbb{N}$, что $\text{Ker}(A - \mu I)^k = \mathcal{L}_{\mu}(A)$.

§ 8. Непрерывный случай

Пусть $W(t)$ – π -унитарная полугруппа класса C_0 , действующая в пространстве $\Pi_{\mathcal{K}}$.

Подпространство D_+ называется *уходящим для полугруппы $W(t)$* , если выполняются следующие условия:

- а) $W(t)D_+ \subset D_+, t \geq 0$;
- б) $\bigcap_{t \geq 0} W(t)D_+ = \{0\}$.

Подпространство D_- называется *приходящим для полугруппы $W(t)$* , если D_- является уходящим для полугруппы $W^+(t)$.

Генератор R полугруппы $W(t)$ является π -кососопряженным оператором в $\Pi_{\mathcal{K}}$ и поэтому существует такое $\xi_0 > 0$, что все ξ с $\operatorname{Re} \xi > \xi_0$ принадлежат резольвентному множеству оператора R . π -унитарный оператор $U = (R + \xi_0 I)(R - \xi_0 I)^{-1}$ будем называть *когенератором полугруппы $W(t)$* . Рассуждая аналогично [1], нетрудно получить следующее предложение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Подпространство D_- – уходящее (приходящее) для полугруппы $W(t)$ тогда и только тогда, когда оно является уходящим (приходящим) для когенератора U .*

Пусть, как и раньше, $D_+ [\perp] D_-$. Тогда π -нерастягивающие операторы $Z(t) = P_{K_{\mathcal{K}}} W(t)|_{K_{\mathcal{K}}}$ являются полугруппой класса C_0 , действующей в пространстве Понтрягина $K_{\mathcal{K}} = \Pi_{\mathcal{K}} [-] (D_+ [\perp] D_-)$. Генератор этой полугруппы, оператор B , – максимальный π -диссипативный в $K_{\mathcal{K}}$ (см. [14]), а его когенератор, оператор $A = (B + \xi_0 I)(B - \xi_0 I)^{-1}$, является π -нерастягивающим оператором, для которого оператор U является регулярной дилатацией.

С помощью утверждения 21 и дробно-линейного преобразования

$$z = i\xi_0 \frac{1 + \omega}{1 - \omega},$$

переводящего область $|\omega| \geq 1$ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \leq 0$, аналогично [1], изучение м.р. $\mathfrak{S}_W(\delta)$ для полугруппы $W(t)$ сводится к изучению соответствующей м.р. $\mathfrak{S}(e^{i\theta})$ для когенератора U этой полугруппы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. *Если все корневые линеалы $\mathcal{L}_{i\gamma}(R)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, невырождены, то м.р. $\mathfrak{S}_W(\delta)$ при почти всех $\delta \in \mathbb{R}$ является граничным значением мероморфной в области $\operatorname{Im} z < 0$ операторнозначной функции $\mathfrak{S}_W(z)$, множество особых точек которой совпадает с множеством $\{z_j\}$ собственных значений оператора $-iB$ таких, что линеал $\mathcal{L}_{\bar{z}_j}(iB^+)$ содержит отрицательные элементы.*

Порядок особой точки z_j совпадает с порядком полюса х.ф. $\Theta_{A^+}(\bar{\lambda})$ в точке

$$\bar{\lambda}_j = \frac{z_j + i\xi_0}{z_j - i\xi_0}.$$

Если же точка z не является особой, то $0 \in \sigma_{\alpha}(\mathfrak{S}_W(z))$ тогда и только тогда, когда $z \in \sigma_{\alpha}(iB^+)$, $\alpha \in \{p, r, c\}$.

Если выполняется условие

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} W(t)(D_+ [+] D_-) = \Pi_{\kappa},$$

то

а) м.р. $\mathfrak{S}_W(\delta)$ унитарна на множестве

$$\overline{\mathbb{R}} \setminus \left\{ i\xi_0 \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \mid \gamma \in \sigma(A) \right\}$$

и может быть аналитически продолжена через это множество в верхнюю полуплоскость;

б) множество особых точек функции $\mathfrak{S}_W(z)$ совпадает с множеством собственных значений $\{z_j\}$ оператора $-iB$ в нижней полуплоскости; порядок полюса z_j равен индексу собственного значения z_j оператора $-iB$.

Список литературы

1. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
2. Laz P. D., Phillips R. S. The acoustic equation with an indefinite energy form and the Schrödinger equation // J. Funct. Anal. 1967. V. 1. P. 37–83.
3. Павлов Б. С., Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния и автоморфные функции // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 161–193.
4. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния для автоморфных функций. М.: Мир, 1979.
5. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
6. Vognar J. Indefinite inner product spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
7. Кужель С. А. О схеме рассеяния Лакса–Филлипса в пространствах Понтрягина // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. С. 52–59.
8. Адамьян В. М., Аров Д. З. Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Матем. исследования АН Молд. ССР. 1966. Т. 1. №2. С. 3–64.
9. Кужель С. А., Третьяков Д. В. Об одном обобщении схемы Лакса–Филлипса в теории рассеяния // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. №2. С. 19–21.
10. Кужель С. А. Спектральный анализ двояко J -нерастягивающих операторов // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. №3. С. 384–388.
11. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
12. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
13. Адамьян В. М., Аров Д. З. Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий // ДАН СССР. 1965. Т. 160. №1. С. 9–12.
14. Кужель С. А. Условие равномерной корректности задачи Коши в случае пространств с индефинитной метрикой // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. №5. С. 697–700.

Институт математики АН Украины

Поступила в редакцию
25.03.1994