Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ольшанецкий, В. К. Рогов, Модифицированные q -функции Бесселя и q -функции Макдональда, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 109–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:24:12

УДК 517.58

М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Рогов

Модифицированные q -функции Бесселя и q -функции Макдональда

В работе определяются q -аналоги модифицированных функций Бесселя и функции Макдональда. Как и q -функции Бесселя, введенные Джексоном, эти функции бывают двух видов. Подобно их классическим прототипам они возникают в гармоническом анализе на квантовых симметрических пространствах. Их определение основано на представлении в виде степенного ряда. Получены рекуррентные соотношения, разностные уравнения, q -вронскианы и аналоги асимптотических разложений, которые являются сходящимися рядами, если $q \neq 1$. Даются некоторые следующие отсюда соотношения для базисных гипергеометрических рядов.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

В последние годы вновь стали предметом исследования q -аналоги функций Бесселя [2], [3], введенные девяносто лет тому назад Джексоном в [1]. В указанных работах свойства q -функций Бесселя получены в связи с теорией представлений квантовых групп так же, как и в классическом случае [4].

Для нас главный интерес представляют собой q -аналоги функции Макдональда K_ν (ФМ) и модифицированной функции Бесселя I_ν (МФБ). Их присутствие в гармоническом анализе на однородных пространствах обусловлено, по крайней мере, тремя факторами. Прежде всего, ФМ является существенной частью функции Грина для оператора Лапласа–Бельтрами на некомпактных симметрических пространствах неположительной кривизны [5], [6]. Далее, ФМ определяют неприводимые представления группы изометрий псевдоевклидовой плоскости [4]. Наконец, ФМ являются простейшими, так называемыми, функциями Уитеккера [7]–[9], связанными с симметрическими пространствами ранга 1. Оказывается, функции Уитеккера калибровочного преобразования совпадают с волновыми функциями открытой квантовой цепочки Тоды [9]. В частности, для симметрических пространств ранга 1 они определяют волновые функции двумерной гравитации [10].

Основная мотивация нашей работы заключается в следующем. В предыдущей работе [11] мы описали функции Уитеккера на квантовом пространстве Лобачевского. Они возникают как собственные функции оператора Казимира второго порядка некоторого специального вида. В такой постановке задача, которая изначально является некоммутативной, может быть сведена к задаче коммутативного

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 94-02-14365), МНФ (грант № МГ-300) и ИНТАС (грант № 93-0166).

Работа второго автора выполнена при поддержке МНФ (грант № JC 7100).

анализа. Дальнейшее продвижение в гармоническом анализе требует принимать во внимание некоммутативность групповой алгебры. Это, в частности, относится к ядру Пуассона задачи Дирихле на квантовом пространстве Лобачевского. В классическом случае функция Уиттекера или, что то же самое, ФМ является преобразованием Фурье ядра Пуассона. Для того чтобы перенести эту конструкцию на квантовый случай, необходимо получить основные свойства q -МФБ.

Так же, как и в классическом случае, мы начинаем с определения q -МФБ как степенного ряда. Имеются две q -МФБ и они связаны с q -функциями Бесселя Джексона [1] так же, как и в классическом случае. Мы получаем для них действия разностных операторов, рекуррентные соотношения, разностные уравнения и q -вронскианы. Большинство этих результатов может быть легко получено из [2], [3], где исследовались q -функции Бесселя. В то время как определение q -МФБ основано непосредственно на джексоновских q -функциях Бесселя, определение q -ФМ более тонко. Мы даем такое определение q -ФМ, чтобы она была голоморфной в правой полуплоскости. Для q -ФМ мы повторяем ту же программу, что и для q -МФБ. Наиболее важными являются разложения лорановского типа, представляющие собой ряды, сходящиеся в некоторой области, аналоги которых в классике являются только асимптотическими. Используя полученные свойства, мы даем в заключение некоторые соотношения для базисных гипергеометрических рядов.

§ 2. Некоторые предварительные сведения

Приведем некоторые необходимые соотношения для функций $e_q(z)$, $E_q(z)$, и $\Gamma_q(z)$ [12]. Кроме того, определим q -пси-функцию.

2.1. Для любого a

$$(a, q)_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}) & \text{при } n \geq 1; \end{cases}$$

$$(a, q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a, q)_n.$$

q -экспоненты определяются формулами

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q, q)_n} = \frac{1}{(z, q)_\infty}, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} z^n}{(q, q)_n} = (-z, q)_\infty. \quad (2)$$

Они представляют собой q -деформации обычной экспоненты

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} e_q((1-q)z) = \lim_{q \rightarrow 1-0} E_q((1-q)z) = e^z.$$

Очевидно, из (1) и (2) имеем

$$e_q(z) E_q(-z) = 1. \quad (3)$$

Из (1) следует, что функция $e_q(z)$ имеет простые полюсы в точках $z = q^{-k}$, $k = 0, 1, \dots$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (Ф.И. Карпелевич). q -экспонента $e_q(z)$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$e_q(z) = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k (1 - zq^k)}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$e_q(z, n) = \frac{1}{(q, q)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{c_{k,n}}{1 - zq^k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_{k,n} &= \operatorname{res}_{z=q^{-k}} e_q(z, n) = \lim_{z \rightarrow q^{-k}} (1 - zq^k) e_q(z, n) \\ &= \frac{1}{(1 - q^{-k}) \dots (1 - q^{-1})(1 - q) \dots (1 - q^{n-k})} \\ &= \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k (q, q)_{n-k}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_q(z, n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k (1 - zq^k)} \frac{1}{(q, q)_{n-k}}.$$

Так как $1/(q, q)_{n-k} < 1/(q, q)_\infty$, получим

$$e_q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_q(z, n) = \frac{1}{(q, q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2}}{(q, q)_k (1 - zq^k)}.$$

Следующее предложение вытекает из (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для функции e_q выполнено соотношение

$$\partial_q e_q((1 - q)z) = e_q((1 - q)z),$$

где

$$\partial_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1 - q)z}. \quad (5)$$

Очевидно следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Справедливы равенства

$$e_q\left(\frac{1 - q^2}{2} qz\right) = \left(1 - \frac{1 - q^2}{2} z\right) e_q\left(\frac{1 - q^2}{2} z\right), \quad (6)$$

$$e_q\left(\frac{1 - q^2}{2} q^{-1} z\right) = \frac{1}{1 - q^{-1}(1 - q^2)z/2} e_q\left(\frac{1 - q^2}{2} z\right). \quad (7)$$

$$e_{q^2}\left(\frac{(1 - q^2)^2}{4} q^2 z^2\right) = \left(1 - \frac{(1 - q^2)^2}{4} z^2\right) e_{q^2}\left(\frac{(1 - q^2)^2}{4} z^2\right). \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} e_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right)e_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) &= \frac{1}{\left(\frac{1-q^2}{2}z, q\right)_\infty} \frac{1}{\left(\frac{1-q^2}{2}z, q\right)_\infty} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2, q^2\right)_\infty} = e_q^2\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right). \end{aligned}$$

2.2. q -гамма-функция определяется формулой

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{(q, q)_\infty}{(q^\alpha, q)_\infty} (1-q)^{1-\alpha}. \quad (9)$$

Если n является натуральным числом, то

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(q, q)_n}{(1-q)^n}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Функция $\Gamma_{q^2}(z)$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_{q^2}(z) = (1-q^2)^{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (1-q^{2k+2z})}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9) следует, что

$$\Gamma_{q^2}(z) = (q^2, q^2)_\infty (1-q^2)^{1-z} e_{q^2}(q^{2z}).$$

Подставляя сюда (4), получим (10).

Обозначим через $\psi_q(z)$ логарифмическую производную Γ_q -функции

$$\psi_q(z) = \frac{\Gamma'_q(z)}{\Gamma_q(z)}. \quad (11)$$

Из (9) и (11) сразу же получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Функция $\psi_{q^2}(z)$ имеет следующий вид:

$$\psi_{q^2}(z) = -\ln(1-q^2) + \ln q^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k+2z}}{1-q^{2k+2z}}. \quad (12)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Справедлива формула

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{\psi_{q^2}(z)}{\Gamma_{q^2}(z)} = (-1)^n q^{-n(n+1)} \frac{(q^2, q^2)_n}{(1-q^2)^{n+1}} \ln q^2. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат получается из [10] и (12).

§ 3. Модифицированные q -функции Бесселя

3.1. Определения. В [1] q -функции Бесселя были определены следующим образом

$$J_\nu^{(1)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_\infty}{(q, q)_\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_2\Phi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{z^2}{4}\right), \quad (14)$$

$$J_\nu^{(2)}(z, q) = \frac{(q^{\nu+1}, q)_\infty}{(q, q)_\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0\Phi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, -\frac{z^2 q^{\nu+1}}{4}\right), \quad (15)$$

где ${}_2\Phi_1$ и ${}_0\Phi_1$ – базисные гипергеометрические функции [12],

$$\begin{aligned} & {}_r\Phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, q)_n \cdots (a_r, q)_n}{(q, q)_n (b_1, q)_n \cdots (b_s, q)_n} ((-1)^n q^{n(n-1)/2})^{1+s-r} z^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Это позволяет определить модифицированные q -функции Бесселя (q -МФБ), исходя из (14) и (15) по аналогии с классическим случаем [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функции

$$\begin{aligned} I_\nu^{(1)}(z, q) &= \frac{(q^{\nu+1}, q)_\infty}{(q, q)_\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_2\Phi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, \frac{z^2}{4}\right), \\ I_\nu^{(2)}(z, q) &= \frac{(q^{\nu+1}, q)_\infty}{(q, q)_\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0\Phi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, \frac{z^2 q^{\nu+1}}{4}\right) \end{aligned}$$

назовем *модифицированными q -функциями Бесселя*.

Очевидно,

$$I_\nu^{(j)}(z, q) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu^{(j)}(e^{i\pi/2} z, q), \quad j = 1, 2.$$

В дальнейшем будем рассматривать функции

$$I_\nu^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}, \quad |z| < \frac{2}{1 - q^2}, \quad (17)$$

$$I_\nu^{(2)}((1 - q^2)z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k(\nu+k)} (1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}. \quad (18)$$

Если $|q| < 1$, ряд (18) сходится абсолютно для всех $z \neq 0$. Таким образом, $I_\nu^{(2)}((1 - q^2)z; q^2)$ является голоморфной функцией вне окрестности нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для $I_\nu^{(j)}((1 - q^2)z; q^2)$ имеем

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} I_\nu^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) = I_\nu(z), \quad j = 1, 2.$$

3.2. Рекуррентные соотношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Функция $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^\nu I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = z^{\nu-1} I_{-\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2), \quad (19)$$

$$\frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^\nu I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = z^{\nu-1} I_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2), \quad (20)$$

где оператор ∂_q определяется формулой (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^\nu I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)^{k-1} z^{2k-2}}{2^{-\nu+2k-1} (q^2, q^2)_{k-1} \Gamma_{q^2}(-\nu+k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^k z^{2k}}{2^{-\nu+1+2k} (q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(-\nu+1+k+1)} \\ &= z^{\nu-1} I_{-\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned}$$

Формула (20) доказывается точно так же.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Функция $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) - I_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ = \frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} - q^\nu) I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) + I_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ = \frac{4}{(1-q^2)z} I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ - \frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} + q^\nu) I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2). \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (19) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) &= \frac{2}{(1-q^2)z} \left(I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) - q^\nu I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) \right), \\ I_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) &= \frac{2}{(1-q^2)z} \left(I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) - q^{-\nu} I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) \right). \end{aligned}$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Функция $I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} I_{-\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) &= q^{-\nu+1} z^{\nu-1} I_{-\nu+1}^{(2)}((1-q^2)qz; q^2), \\ \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) &= q^{-\nu+1} z^{\nu-1} I_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)qz; q^2). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Функция $I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} q^{-\nu} I_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) - q^{\nu} I_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ = \frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} - q^{\nu}) I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2), \\ q^{-\nu} I_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) + q^{\nu} I_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ = \frac{4}{(1-q^2)z} I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)q^{-1}z; q^2) \\ - \frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} + q^{\nu}) I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned}$$

Предложения 3.3 и 3.4 доказываются так же, как и предложения 3.1 и 3.2.

3.3. Разностные уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Функция $I_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ является решением разностного уравнения*

$$\left(1 - \frac{q^{-2}(1-q^2)^2}{4} z^2\right) f(q^{-1}z) - (q^{-\nu} + q^{\nu}) f(z) + f(qz) = 0. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (17) в левую часть (23), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^{-\nu-2k} - q^{-\nu} - q^{\nu} + q^{\nu+2k} - \frac{q^{-\nu-2k-2}(1-q^2)^2 z^2}{4} \right) \frac{(1-q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu+k+1)} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{-\nu-2k}(1-q^{2k})(1-q^{2\nu+2k})(1-q^2)^k (z/2)^{\nu+2k}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu+k+1)} \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{-\nu-2k-2}(1-q^2)^{k+2} (z/2)^{\nu+2k+2}}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu+k+1)}. \end{aligned}$$

Меняя k на $k+1$ в первом слагаемом, получаем нуль.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Функция $I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет уравнению (23).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, левая часть (23) — четная функция ν . Тогда замена ν на $-\nu$ в (17) переводит решение уравнения (23) в решение того же уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. q -вронскиан двух решений $f_\nu^1(z)$, $f_\nu^2(z)$ разностного уравнения второго порядка определим следующим образом

$$W(f_\nu^1, f_\nu^2)(z) = f_\nu^1(z)f_\nu^2(qz) - f_\nu^1(qz)f_\nu^2(z).$$

Если q -вронскиан не обращается в нуль, любое решение разностного уравнения второго порядка может быть записано в виде

$$f_\nu(z) = C_1 f_\nu^1(z) + C_2 f_\nu^2(z).$$

В этом случае функции $f_\nu^1(z)$ и $f_\nu^2(z)$ образуют фундаментальную систему решений данного уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если ν не является целым числом, функции $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ и $I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (23) ($z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим q -вронскиан

$$\begin{aligned} W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(z) &= I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) \\ &\quad - I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Так как $I_\nu^{(1)}$ и $I_{-\nu}^{(1)}$ являются решениями (23), то

$$\begin{aligned} I_{\pm\nu}^{(1)}((1-q^2)q^2z; q^2) &= -\left(1 - \frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right) I_{\pm\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ &\quad + (q^{-\nu} + q^\nu) I_{\pm\nu}^{(1)}((1-q^2)qz; q^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(qz) &= I_\nu^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)q^2z; q^2) \\ &\quad - I_\nu^{(1)}((1-q^2)q^2z; q^2) I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)qz; q^2) \\ &= \left(1 - \frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right) W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(z). \end{aligned}$$

Сравнивая это равенство с (8), выводим

$$W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(z) = C_\nu e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right).$$

Полагая здесь и в (24) $z = 0$, получаем

$$C_\nu = \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)}.$$

Таким образом, окончательно

$$W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(z) = \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)} e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right). \quad (25)$$

Очевидно, эта функция определена при $z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$, и не обращается в нуль.

Если $\nu = n$ — целое число, то из (17) и (18)

$$I_{-n}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = I_n^{(j)}((1-q^2)z; q^2), \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Функция $I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ является решением уравнения*

$$f(q^{-1}z) - (q^{-\nu} + q^\nu)f(z) + \left(1 - \frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)f(qz) = 0. \quad (27)$$

Это предложение доказывается так же, как и предложение 3.5.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Функции (17) и (18) связаны соотношением*

$$I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (27) и (8) следует, что функция

$$e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$$

удовлетворяет уравнению (23). Значит, если ν не является целым,

$$\begin{aligned} e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ = AI_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) + BI_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Умножая это равенство на $(z/2)^\nu$ и полагая $z = 0$, получаем $B = 0$. Умножая (29) на $(z/2)^{-\nu}$ и полагая $z = 0$, получаем $A = 1$.

Так как (17) и (18) – непрерывные функции ν , соотношение (28) верно и для целых значений $\nu = n$.

Умножая обе части (28) на $E_{q^2}(-(1-q^2)^2z^2/4)$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Справедливо равенство*

$$I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) = E_{q^2}\left(-\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2). \quad (30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Если ν не является целым числом, функции $I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ и $I_{-\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (27) при $z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (30) и (25) следует, что

$$\begin{aligned} W(I_\nu^{(2)}, I_{-\nu}^{(2)})(z) &= E_{q^2}\left(-\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right)W(I_\nu^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})(z) \\ &= \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)}E_{q^2}\left(-\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right). \end{aligned}$$

Очевидно, эта функция не обращается в нуль при $z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *Функция $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ вне окрестности нуля является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z = \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение предложения следует из (28) и замечания 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $q \rightarrow 1 - 0$, все полюсы функции $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$

$$z_r = \pm \frac{2q^{-r}}{1-q^2}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

стремятся к бесконечности вдоль вещественной оси.

§ 4. Ряды лорановского типа для q -МФБ

К сожалению, функция $I_\nu^{(1)}((1 - q^2)z; q^2)$ определяется степенным рядом (17) лишь в области $|z| < 2/(1 - q^2)$, в то время, как нам нужно представление этой функции в виде ряда на всей комплексной плоскости. Здесь мы попытаемся исправить ситуацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Любое решение уравнения (23) может быть записано в виде*

$$f_\nu(z) = \frac{a}{\sqrt{z}} e_q\left(\frac{1 - q^2}{2}z\right) {}_2\Phi_1\left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1 - q^2)z}\right) + \frac{b}{\sqrt{z}} e_q\left(-\frac{1 - q^2}{2}z\right) {}_2\Phi_1\left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, -\frac{2q}{(1 - q^2)z}\right), \quad (31)$$

где ${}_2\Phi_1$ определяется формулой (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_\nu(z)$ – решение уравнения (23). Представим ее в виде

$$f_\nu(z) = \frac{a}{\sqrt{z}} e_q\left(\frac{1 - q^2}{2}z\right) \varphi_\nu^1(z) + \frac{b}{\sqrt{z}} e_q\left(-\frac{1 - q^2}{2}z\right) \varphi_\nu^2(z). \quad (32)$$

Предположим, что первое слагаемое в правой части удовлетворяет уравнению (23). Тогда второе слагаемое также является его решением. Рассмотрим первое слагаемое. Подставляя его в (23) и используя (6), (7), получаем разностное уравнение для $\varphi_\nu^1(z)$

$$\left(1 + \frac{q^{-1}(1 - q^2)}{2}\right) q \varphi_\nu^1(q^{-1}z) - q^{1/2}(q^{-\nu} + q^\nu) \varphi_\nu^1(z) + \left(1 - \frac{1 - q^2}{2}z\right) \varphi_\nu^1(qz) = 0. \quad (33)$$

Представим функцию $\varphi_\nu^1(z)$ в виде

$$\varphi_\nu^1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Тогда a_0 произвольно, для любого $k \geq 1$

$$a_k = a_{k-1} \frac{2q(1 - q^{\nu-1/2+k})(1 - q^{-\nu-1/2+k})}{(1 - q^2)(1 - q^{2k})}$$

и

$$a_k = a_0 \frac{2^k q^k (q^{\nu+1/2}, q)_k (q^{-\nu+1/2}, q)_k}{(1 - q^2)^k (q^2, q^2)_k}.$$

Полагая $a_0 = 1$, получаем

$$\varphi_\nu^1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k q^k (q^{\nu+1/2}, q)_k (q^{-\nu+1/2}, q)_k}{(1 - q^2)^k (q^2, q^2)_k} z^{-k}. \quad (34)$$

Точно так же

$$\varphi_\nu^2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k q^k (q^{\nu+1/2}, q)_k (q^{-\nu+1/2}, q)_k}{(1-q^2)^k (q^2, q^2)_k} z^{-k} = \varphi_\nu^1(-z).$$

Ввиду этого, мы в дальнейшем не будем писать верный индекс. Ряд (34) абсолютно сходится при $|z| > 2q/(1-q^2)$.

Коэффициенты a и b по функции $f_\nu(z)$ определяются однозначно. Действительно, пусть при $z = z_0$, $|z_0| > 2/(1-q^2)$, $f_\nu(z_0) = A$ и $f_\nu(qz_0) = B$. Используя (6), (7), получаем систему уравнений для определения a и b

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{z_0}} e_q\left(\frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) \varphi_\nu(z_0) + \frac{b}{\sqrt{z_0}} e_q\left(-\frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) \varphi_\nu(-z_0) = A; \\ \frac{a}{\sqrt{qz_0}} \left(1 - \frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) e_q\left(\frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) \varphi_\nu(qz_0) \\ + \frac{b}{\sqrt{qz_0}} \left(1 + \frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) e_q\left(-\frac{(1-q^2)}{2} z_0\right) \varphi_\nu(-qz_0) = B. \end{cases} \quad (35)$$

Ее определитель имеет вид

$$W = \frac{q^{-1/2}}{z_0} e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2\right) \left(\varphi_\nu(z_0) \varphi_\nu(-qz_0) - \varphi_\nu(qz_0) \varphi_\nu(-z_0) \right. \\ \left. + \frac{1-q^2}{2} z_0 (\varphi_\nu(z_0) \varphi_\nu(-qz_0) + \varphi_\nu(qz_0) \varphi_\nu(-z_0)) \right).$$

Предположим, что $W(z_0) = 0$ для некоторого z_0 , $|z_0| > 2/(1-q^2)$. Тогда

$$\begin{cases} \varphi_\nu(z_0) \varphi_\nu(-qz_0) - \varphi_\nu(qz_0) \varphi_\nu(-z_0) = 0; \\ \varphi_\nu(z_0) \varphi_\nu(-qz_0) + \varphi_\nu(qz_0) \varphi_\nu(-z_0) = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_\nu(z_0) \varphi_\nu(-qz_0) = 0; \\ \varphi_\nu(qz_0) \varphi_\nu(-z_0) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Из (34) следует, что $\varphi_\nu(z_0) = \varphi_\nu(qz_0) = 0$ (или $\varphi_\nu(-z_0) = \varphi_\nu(-qz_0) = 0$) удовлетворяет (36). В этом случае из (33) имеем $\varphi_\nu(q^{-1}z_0) = 0$, и, следовательно, $\varphi_\nu(q^{-r}z_0) = 0$ для любого $r = 0, 1, \dots$. Но это противоречит очевидному равенству $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi_\nu(z) = 1$. Таким образом, $W \neq 0$, и a, b определяются однозначно из (35).

Из (16) легко видеть, что

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\nu+1/2}, q)_k (q^{-\nu+1/2}, q)_k}{(q, q)_k (-q, q)_k} \left(\frac{2q}{(1-q^2)z} \right)^k \\ &= {}_2\Phi_1\left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1-q^2)z}\right). \end{aligned}$$

Подставляя эту функцию в (32), получаем (31).

Для краткости обозначим

$${}_2\Phi_1\left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1-q^2)z}\right) = \Phi_\nu(z). \quad (37)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. q -МФБ $I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ при $z \neq 0$ может быть представлена в виде

$$I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{a_\nu}{\sqrt{z}} \left(e_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right) \Phi_\nu(z) + i e^{i\nu\pi} e_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) \Phi_\nu(-z) \right), \quad (38)$$

где $\Phi_\nu(z)$ определяется формулой (37) и

$$a_\nu = \sqrt{\frac{2}{1-q^2}} e_q(-1) \frac{I_\nu^{(2)}(2; q^2)}{\Phi_\nu\left(\frac{2}{1-q^2}\right)}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3.2 и предложения 4.1 следует, что

$$\begin{aligned} e_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right) e_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ = \frac{a_\nu}{\sqrt{z}} e_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right) \Phi_\nu(z) + \frac{b_\nu}{\sqrt{z}} e_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) \Phi_\nu(-z) \end{aligned} \quad (40)$$

в области $2q/(1-q^2) < |z| < 2/(1-q^2)$. Функции, стоящие в обеих частях этого равенства, являются мероморфными в области $z \neq 0$ и имеют простые полюсы в точках $z = \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$. В силу единственности аналитического продолжения равенство (40) остается справедливым в области $z \neq 0$. Потребуем, чтобы совпадали вычеты в полюсах в обеих частях (40). Тогда при $z = 2q^{-r}/(1-q^2)$

$$e_q(-q^{-r}) I_\nu^{(2)}(2q^{-r}; q^2) = a_\nu q^{r/2} \sqrt{\frac{1-q^2}{2}} \Phi_\nu\left(\frac{2q^{-r}}{1-q^2}\right), \quad (41)$$

и при $z = -2q^{-r}/(1-q^2)$

$$e_q(-q^{-r}) I_\nu^{(2)}(-2q^{-r}; q^2) = b_\nu \frac{q^{r/2}}{i} \sqrt{\frac{1-q^2}{2}} \Phi_\nu\left(-\frac{2q^{-r}}{1-q^2}\right). \quad (42)$$

Из (18) следует, что

$$I_\nu^{(2)}(-2q^{-r}; q^2) = e^{i\nu\pi} I_\nu^{(2)}(2q^{-r}; q^2).$$

Следовательно, из (41) и (42)

$$b_\nu = i e^{i\nu\pi} a_\nu. \quad (43)$$

Полагая $r = 0$ в (41), получаем (39). Подставляя (43) в (40), выводим утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Коэффициенты a_ν (39) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{\nu+1} = a_\nu q^{-\nu-1/2}, \quad (44)$$

и условию

$$a_\nu a_{-\nu} = \frac{q^{-\nu+1/2}}{2\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)\sin\nu\pi}. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (38) в (21) и (22). Тогда из (6) имеем

$$a_{\nu-1}\Phi_{\nu-1}(z) - a_{\nu+1}\Phi_{\nu+1}(z) = 2a_{\nu}q^{-1/2}\frac{q^{-\nu} - q^{\nu}}{(1-q^2)z}\left(1 - \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(qz), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a_{\nu-1}\Phi_{\nu-1}(z) + a_{\nu+1}\Phi_{\nu+1}(z) &= \frac{4a_{\nu}}{(1-q^2)z}\Phi_{\nu}(z) \\ &\quad - 2a_{\nu}q^{-1/2}\frac{q^{-\nu} + q^{\nu}}{(1-q^2)z}\left(1 - \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(qz). \end{aligned} \quad (47)$$

Устремляя z к бесконечности в (46) и (47), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{\nu-1} - a_{\nu+1} = -a_{\nu}q^{-1/2}(q^{-\nu} - q^{\nu}); \\ a_{\nu-1} + a_{\nu+1} = a_{\nu}q^{-1/2}(q^{-\nu} + q^{\nu}). \end{cases}$$

Из данной системы получаем первое утверждение предложения.

Рассмотрим q -вронскиан $W(I_{\nu}^{(1)}, I_{-\nu}^{(1)})$ (25) и представление (38). Тогда при $\nu \neq n$

$$\begin{aligned} \frac{q^{-\nu}(1-q^2)}{\Gamma_{q^2}(\nu)\Gamma_{q^2}(1-\nu)}e_{q^2}\left(\frac{(1-q^2)^2}{4}z^2\right) &= q^{-1/2}a_{\nu}a_{-\nu}z^{-1}e_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right)e_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) \\ &\times \left(ie^{-i\nu\pi}\left(\left(1 + \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(z)\Phi_{\nu}(-qz) - \left(1 - \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(qz)\Phi_{\nu}(-z)\right)\right. \\ &\quad \left.+ ie^{i\nu\pi}\left(\left(1 - \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(-z)\Phi_{\nu}(qz) - \left(1 + \frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(-qz)\Phi_{\nu}(z)\right)\right). \end{aligned}$$

Разделив это равенство на q -экспоненты и устремив z к бесконечности, получим (45).

Если $\nu = n$, то из (44) имеем

$$a_n = a_{n-k}q^{-k/2(2n-k)}.$$

Положим $k = 2n$. Тогда $a_n = a_{-n}$.

Из (45) и [12, 1.10.16] имеем

$$a_n^2 = \frac{q^{-n^2+1/2}\ln q^{-2}}{2\pi(1-q^2)}. \quad (48)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. q -МФБ $I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ при $z \neq 0$ может быть представлена в виде

$$I_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{a_{\nu}}{\sqrt{z}}\left(E_q\left(\frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(z) + ie^{i\nu\pi}E_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right)\Phi_{\nu}(-z)\right). \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из следствия 3.3 и (3).

§ 5. q -функции Макдональда

В классическом анализе функция Макдональда определяется следующим образом

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} (I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) \quad (50)$$

для $\nu \neq n$, для $\nu = n$ – предельным переходом в (50) при $\nu \rightarrow n$. Здесь мы проведем корректное “квантование” этого определения таким образом, чтобы были “проквантованы” и все свойства данной функции.

ЛЕММА 5.1. Для a_ν (39) имеет место формула

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} a_\nu - \frac{\partial}{\partial \nu} a_{-\nu} \right) \Big|_{\nu=n} = a_n \tilde{a}, \quad (51)$$

где

$$\tilde{a} = \frac{2 \ln q^2}{I_0^{(2)}(2; q^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k^2}}{(q^2, q^2)_k^2} \left(k - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l+2k+2}}{1 - q^{2l+2k+2}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = [\nu]$. Из (44) следует, что

$$a_\nu = a_{\nu-n} q^{-n\nu+n^2/2}, \quad a_{-\nu} = a_{-\nu+n} q^{-n\nu+n^2/2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} a_\nu - \frac{\partial}{\partial \nu} a_{-\nu} \right) \Big|_{\nu=n} = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} a_{\nu-n} - \frac{\partial}{\partial \nu} a_{-\nu+n} \right) \Big|_{\nu=n} q^{-n^2/2}.$$

Используя (39), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \nu} a_\nu - \frac{\partial}{\partial \nu} a_{-\nu} \right) \Big|_{\nu=0} \\ &= \frac{\sqrt{2/(1-q^2)} e_q(-1) I_0^{(2)}(2; q^2)}{\Phi_0(2/(1-q^2))} \frac{q^{-n^2/2}}{I_0^{(2)}(2; q^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu^{(2)}(2; q^2) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}^{(2)}(2; q^2) \right) \Big|_{\nu=0} \\ &= a_0 \frac{q^{-\frac{n^2}{2}}}{I_0^{(2)}(2; q^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu^{(2)}(2; q^2) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}^{(2)}(2; q^2) \right) \Big|_{\nu=0}. \end{aligned} \quad (52)$$

Из (18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu^{(2)}(2; q^2) &= \ln q^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k q^{2k(\nu+k)}}{(q^2, q^2)_k (1-q^2)^{\nu+k} \Gamma_{q^2}(\nu+k+1)} \\ &\quad - \ln(1-q^2) I_\nu^{(2)}(2; q^2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k(\nu+k)} \psi_{q^2}(\nu+k+1)}{(q^2, q^2)_k (1-q^2)^{\nu+k} \Gamma_{q^2}(\nu+k+1)}. \end{aligned}$$

Из (12) и (13)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_{\nu}^{(2)}(2; q^2) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}^{(2)}(2; q^2) \right) \Big|_{\nu=0} \\
&= 2 \ln q^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k q^{2k^2}}{(q^2, q^2)_k^2} - 2 \ln(1 - q^2) I_0^{(2)}(2; q^2) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k^2}}{(q^2, q^2)_k^2} \psi_{q^2}(k+1) \\
&= 2 \ln q^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k q^{2k^2}}{(q^2, q^2)_k^2} - 2 \ln q^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k^2}}{(q^2, q^2)_k^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l+2k+2}}{1 - q^{2l+2k+2}}. \quad (53)
\end{aligned}$$

Теперь (51) следует из (52) и (53).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. q -функцию Макдональда (q -ФМ) определим следующим образом

$$\begin{aligned}
& K_{\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) \\
&= \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{4(a_{\nu}a_{-\nu})^{3/2} \sin \nu \pi} \left(a_{\nu} I_{-\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) - a_{-\nu} I_{\nu}^{(j)}((1 - q^2)z; q^2) \right), \quad (54)
\end{aligned}$$

где a_{ν} определяется формулой (39), $j = 1, 2$.

Как и в классическом случае, это определение должно быть распространено на целые значения индекса $\nu = n$. Рассмотрим предел (54) для $j = 1$, принимая во внимание (48),

$$\begin{aligned}
& K_n^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) \\
&= \frac{q^{-n^2+1/2}}{4a_n^3} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{a_{\nu} I_{-\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) - a_{-\nu} I_{\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2)}{\sin \nu \pi}.
\end{aligned}$$

Используя (17), можем написать

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \nu} I_{\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) \\
&= \ln(z/2) I_{\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^k (z/2)^{\nu+k} \psi_{q^2}(\nu + k + 1)}{(q^2, q^2)_k \Gamma_{q^2}(\nu + k + 1)}.
\end{aligned}$$

Ввиду следствия 2.1

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_{\nu}^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) \right) \Big|_{\nu=n} = -2 \ln(z/2) I_n^{(1)}((1 - q^2)z; q^2) \\
&+ \ln q^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{q^{-(n-k-1)(n-k-2)} (1 - q^2)^{-n+2k} (q^2, q^2)_{n-k-1}}{(q^2, q^2)_k} (z/2)^{-n+2k} \\
&+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - q^2)^{n+2k} (z/2)^{n+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^2, q^2)_{n+k}} (\psi_{q^2}(n + k + 1) + \psi_{q^2}(k + 1)). \quad (55)
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_n^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{(-1)^n q^{-n^2+1/2}}{4\pi a_n^3} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \nu} a_\nu - \frac{\partial}{\partial \nu} a_{-\nu} \right) \Big|_{\nu=n} I_n^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \right. \\ \left. + a_n \left(\frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \right) \Big|_{\nu=n} \right).$$

Из леммы 5.1 и (55) получим окончательное выражение

$$K_n^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{(-1)^n q^{-n^2+1/2}}{4\pi a_n^2} \left(\left(\tilde{a} - 2 \ln \left(\frac{z}{2} \right) \right) I_n^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \right. \\ \left. + \ln q^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{q^{-(n-k-1)(n-k-2)} (1-q^2)^{-n+2k} (q^2, q^2)_{n-k-1}}{(q^2, q^2)_k} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2k} \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^{n+2k} (z/2)^{n+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^2, q^2)_{n+k}} (\psi_{q^2}(n+k+1) + \psi_{q^2}(k+1)) \right).$$

Для $j = 2$ имеем

$$K_n^{(2)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{(-1)^n q^{-n^2+1/2}}{4\pi a_n^2} \left(\left(\tilde{a} - 2 \ln \left(\frac{z}{2} \right) \right) I_n^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \right. \\ \left. + \ln q^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{q^{-(n-k-1)(n-k-2)+2k(k-n)} (1-q^2)^{-n+2k} (q^2, q^2)_{n-k-1}}{(q^2, q^2)_k} \right. \\ \left. \times \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2k} \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k(n+k)} (1-q^2)^{n+2k} (z/2)^{n+2k}}{(q^2, q^2)_k (q^2, q^2)_{n+k}} (\psi_{q^2}(n+k+1) + \psi_{q^2}(k+1)) \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. q -ФМ $K_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ является голоморфной функцией в области $\operatorname{Re} z > 2q/(1-q^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (38) в (54). Тогда

$$K_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{2\sqrt{a_\nu a_{-\nu}}\sqrt{z}} e_q \left(-\frac{1-q^2}{2} z \right) \Phi_\nu(z). \quad (56)$$

Произведение $e_q \left(-\frac{1-q^2}{2} z \right)$ и ${}_2\Phi_1 \left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1-q^2)z} \right)$ является голоморфной функцией в области $\operatorname{Re} z > 2q/(1-q^2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. q -ФМ $K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ является голоморфной функцией в области $z \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из (54) и (18).

СЛЕДСТВИЕ 5.1.

$$K_{\nu}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) = \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{2\sqrt{a_{\nu}a_{-\nu}}\sqrt{z}} E_q\left(-\frac{1-q^2}{2}z\right) \Phi_{\nu}(z). \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта формула вытекает из (54) и (49).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Функция $K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) &= -z^{\nu-1} K_{\nu-1}((1-q^2)z; q^2), \\ \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{-\nu} K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) &= -z^{-\nu-1} K_{\nu+1}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned} \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 5.1 и предложения 3.1

$$\begin{aligned} &\frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{4(a_{\nu}a_{-\nu})^{3/2} \sin \nu \pi} \left(a_{\nu} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} I_{-\nu}^{(1)} - a_{-\nu} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} I_{\nu}^{(1)} \right) \\ &= \frac{q^{-\nu^2+1/2}}{4(a_{\nu}a_{-\nu})^{3/2} \sin \nu \pi} (a_{\nu} z^{\nu-1} I_{-\nu+1}^{(1)} - a_{-\nu} z^{\nu-1} I_{\nu-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Как следует из (44) $a_{\nu} = a_{\nu-1} q^{-\nu+1/2}$, $a_{-\nu} = a_{-\nu+1} q^{-\nu+1/2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{\nu} K_{\nu}^{(1)} &= -z^{\nu-1} \frac{q^{-(\nu-1)^2+1/2}}{4(a_{\nu-1}a_{-\nu+1})^{3/2} \sin(\nu-1)\pi} \\ &\quad \times (a_{\nu-1} z^{\nu-1} I_{-\nu+1}^{(1)} - a_{-\nu+1} z^{\nu-1} I_{\nu-1}^{(1)}) \\ &= -z^{\nu-1} K_{\nu-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $K_{-\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = K_{\nu}^{(j)}((1-q^2)z; q^2)$. Тогда из (58)

$$\frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{-\nu} K_{\nu}^{(1)} = \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{-\nu} K_{-\nu}^{(1)} = -z^{-\nu-1} K_{-\nu-1}^{(1)} = -z^{-\nu-1} K_{\nu+1}^{(1)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Функция $K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} &K_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) - K_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= -\frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} - q^{\nu}) K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2), \\ &K_{\nu-1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) + K_{\nu+1}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= -\frac{4}{(1-q^2)z} K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \\ &\quad + \frac{2}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} + q^{\nu}) K_{\nu}^{(1)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим коэффициент перед квадратными скобками в (54) через A_ν . Тогда из (44)

$$A_{\nu-1} = -A_\nu q^{-\nu+1/2}, \quad A_{\nu+1} = -A_\nu q^{\nu+1/2}.$$

Утверждение предложения вытекает из (44), (54), (21) и (22).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Функция $K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^\nu K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) &= -q^{-\nu+1} z^{\nu-1} K_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2), \\ \frac{2}{(1+q)z} \partial_q z^{-\nu} K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) &= -q^{-\nu+1} z^{-\nu-1} K_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Функция $K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} &K_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) - K_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= -\frac{2q^{\nu-1}}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} - q^\nu) K_\nu^{(2)}((1-q^2)qz; q^2), \\ &K_{\nu-1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) + K_{\nu+1}^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ &= -\frac{4q^{\nu-1}}{(1-q^2)z} K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \\ &\quad + \frac{2q^{\nu-1}}{(1-q^2)z} (q^{-\nu} + q^\nu) K_\nu^{(2)}((1-q^2)qz; q^2). \end{aligned}$$

Предложения 5.5 и 5.6 доказываются так же, как и предложения 5.3 и 5.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *Для любого ν*

$$I_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2) \quad \text{и} \quad K_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K_\nu^{(1)}((1-q^2)z; q^2)$ является решением уравнения (23), q -вронскиан $W(I_\nu^{(1)}, K_\nu^{(1)})(z)$ может быть записан в виде

$$W(I_\nu^{(1)}, K_\nu^{(1)})(z) = D_\nu e_{q^2} \left(\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2 \right).$$

С другой стороны, из (38) и (56) следует, что

$$\begin{aligned} W(I_\nu^{(1)}, K_\nu^{(1)})(z) &= \frac{q^{-\nu^2}}{2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} e_{q^2} \left(\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2 \right) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1-q^2}{2} \right) \Phi_\nu(z) \Phi_\nu(-qz) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1-q^2}{2} \right) \Phi_\nu(-z) \Phi_\nu(qz) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках есть константа. Пусть z стремится к бесконечности. Тогда эта константа равна $1 - q^2$ и

$$W(I_\nu^{(1)}, K_\nu^{(1)})(z) = \frac{q^{-\nu^2}(1-q^2)}{2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} e_{q^2} \left(\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2 \right).$$

Значит эта функция не обращается в нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Для любого ν

$$I_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2) \quad \text{и} \quad K_\nu^{(2)}((1-q^2)z; q^2)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с доказательством предложения 5.7 имеем

$$W(I_\nu^{(2)}, K_\nu^{(2)})(z) = \frac{q^{-\nu^2}(1-q^2)}{2} \sqrt{\frac{a_\nu}{a_{-\nu}}} E_{q^2} \left(-\frac{(1-q^2)^2}{4} z^2 \right).$$

Эта функция не обращается в нуль при $z \neq \pm 2q^{-r}/(1-q^2)$, $r = 0, 1, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Справедливо равенство

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} K_\nu^{(j)}((1-q^2)z; q^2) = K_\nu(z), \quad j = 1, 2. \quad (59)$$

Действительно, из (44) и (45) следует, что если $q = 1$, то a_ν не зависит от ν , и $a_\nu = 1/\sqrt{2\pi}$. Теперь (59) следует из замечания 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если $q \rightarrow 1-0$, представления (38) и (56) дают нам хорошо известные асимптотические разложения для функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, соответственно [13].

§ 6. Некоторые соотношения для базисных гипергеометрических функций

Дадим некоторые соотношения для базисных гипергеометрических функций, которые уже получены в § 4. Заметим, что они основаны на отождествлении степенных рядов и лорановских разложений для одной и той же q -функции. Напомним, что

$${}_2\Phi_1 \left(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, \frac{2q}{(1-q^2)z} \right) = \Phi_\nu(z),$$

$$a_\nu = \sqrt{\frac{2}{1-q^2}} e_q(-1) \frac{I_\nu^{(2)}(2; q^2)}{\Phi_\nu(\frac{2}{1-q^2})}, \quad \nu \neq n, \quad a_n = \sqrt{\frac{q^{-n^2+1/2} \ln q^{-2}}{2\pi(1-q^2)}}. \quad (60)$$

Положим в (60) $2q/((1-q^2)z) = u$, $|u| < 1$. Тогда из (46) и (47)

$$\begin{aligned} & a_{\nu-1} {}_2\Phi_1(q^{\nu-1/2}, q^{-\nu+3/2}; -q; q, u) - a_{\nu+1} {}_2\Phi_1(q^{\nu+3/2}, q^{-\nu-1/2}; -q; q, u) \\ &= a_\nu q^{-1/2} (q^{-\nu} - q^\nu) (u/q - 1) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, u/q), \\ & a_{\nu-1} {}_2\Phi_1(q^{\nu-1/2}, q^{-\nu+3/2}; -q; q, u) + a_{\nu+1} {}_2\Phi_1(q^{\nu+3/2}, q^{-\nu-1/2}; -q; q, u) \\ &= 2a_\nu (u/q) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, u) \\ & \quad - a_\nu q^{-1/2} (q^{-\nu} + q^\nu) (u/q - 1) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, u/q). \end{aligned}$$

Следующее соотношение, использующее q -вронскиан (25), было получено для нецелых значений ν

$$\begin{aligned} & (u/q + 1) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, u) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, -u/q) \\ & - (u/q - 1) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, -u) {}_2\Phi_1(q^{\nu+1/2}, q^{-\nu+1/2}; -q; q, u/q) = 2. \end{aligned}$$

Так как ${}_2\Phi_1$ является непрерывной функцией от ν , это равенство остается справедливым и для целых ν .

Список литературы

1. *Jackson F. H.* The application of basic numbers to Bessel's and Legendre's functions // Proc. London Math. Soc. (2). 1905. V. 2. P. 192–220.
2. *Floresanini R., Vinet L.* Addition formulas for q -Bessel functions // Preprint University of Montreal, UdeM-LPN-TH60, 1991; Representations of quantum algebras and q -special functions // Preprint Universite de Montreal, 1991.
3. *Ваксман Л., Корогодский Л.* Алгебра ограниченных функций на квантовой группе движений плоскости и q -аналоги функций Бесселя // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1036–1040.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1990.
5. *Дынкин Е. Б.* Неотрицательные собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на некоторых симметрических пространствах // ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 2. С. 288–291.
6. *Olshanetsky M.* Martin boundaries for real semisimple Lie groups // J. Funct. Anal. 1994. V. 126. P. 169–216.
7. *Jacquet H. P. B.* Fonctions de Whittaker associees aux groupes de Chevalley // Bull. Soc. Math. France. 1967. V. 95. P. 243–309.
8. *Schiffmann G.* Integrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker // Bull. Soc. Math. France. 1971. V. 99. P. 3–72.
9. *Семенов-Тянь-Шанский М.* Квантование открытой цепочки Тоды // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 194–226.
10. *Ginsparg P., Moore G.* Lectures on 2d Gravity and 2d Strings // Preprint Yale Univ. TCTP-P23-92.
11. *Olshanetsky M., Rogov V.* Liouville quantum mechanics on a lattice from geometry of quantum Lorentz group // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 4669–4683.
12. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Институт теоретической и экспериментальной физики;
 Московский институт инженеров транспорта
E-mail: olshanez@vxdesy.desy.de; m10106@sucemi.bitnet

Поступила в редакцию
 23.01.1996