Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Осколков, Л. И. Калиниченко, Рост целых функций, представленных рядами Дирихле, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 129–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:16:14

УДК 517.5

В. А. Осолков, Л. И. Калиниченко

Рост целых функций, представленных рядами Дирихле

Пусть $F(z)$ – целая функция, представленная абсолютно сходящимся во всей комплексной плоскости рядом Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

где последовательность показателей $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \mu \in [0, +\infty).$$

В статье в общей форме устанавливается связь между ростом величины

$$M(F; x) = \sup\{|F(x + iy)| : |y| < +\infty\}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

и поведением $|a_n|$ и λ_n при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 13 названий.

Пусть $F(z)$, $z = x + iy$, – целая функция, представленная абсолютно сходящимся во всей комплексной плоскости рядом Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{1}$$

где последовательность показателей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lambda \in \Lambda_{\mu}$. Последнее означает выполнение условий: $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \mu \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Требуется изучить связь между ростом величины

$$M(F; x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|F(x + iy)| : |y| < +\infty\}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

и поведением $|a_n|$ и λ_n при $n \rightarrow \infty$. Этой классической задаче посвящено большое количество работ (см., например, [1]–[10] и библиографию в них), однако до настоящего времени она далека от полного решения. Обычный подход к изучению этой проблемы заключается в применении известного метода Вимана–Валирона.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-242).

В этом случае часто возникают серьезные технические трудности, преодолевать которые приходится за счет сильного сужения множества эталонных функций, с помощью которых измеряют рост величины $M(F; x)$ при $x \rightarrow +\infty$. В работах [11], [12] был применен другой технически очень простой метод, позволяющий решать подобного рода задачи для широкого класса эталонных функций. Именно этим методом мы и воспользуемся в настоящей работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть фиксирована последовательность $\lambda \in \Lambda_\mu$. Будем считать, что $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$, если функция $\varphi(t)$ обладает свойствами:

- 1) $\varphi(t) > 0 \quad \forall t \in (1, +\infty)$;
- 2) $\varphi(t)$ не убывает на $(1, +\infty)$;
- 3) для каждого фиксированного числа $\gamma \in (0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(\gamma \int_2^{\lambda_n/\gamma} \frac{dt}{\varphi(t)} \right)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} b_\varphi < +\infty. \quad (3)$$

Ясно, что величина b_φ , определяемая функцией φ , вообще говоря, зависит от γ и λ .

Отметим, что множество $\Phi_\lambda \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in \Lambda_\mu, 0 \leq \mu < +\infty$, так как, если $\varphi(t) \equiv \text{const} \in (0, +\infty)$, то $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$. Кроме того, очевидно, что для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda_\mu, \mu \in (0, +\infty)$, из условия $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$ следует, что $\varphi(t) = O(1), t \rightarrow +\infty$. Напротив, если $\lambda \in \Lambda_0$, то в множестве Φ_λ имеются неограниченно возрастающие функции $\varphi(t)$. Из (3) следует, что функция $\varphi(t) \in \Phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda_\mu, 0 \leq \mu < +\infty$, слишком быстро возрастать не может; в частности, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} dt/\varphi(t)$ должен расходиться. Множество Φ_λ тем шире, чем быстрее стремление к $+\infty$ последовательности $\lambda \in \Lambda_\mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через A множество функций $\alpha(t)$, определенных на промежутке $[1, +\infty)$ и обладающих свойствами:

- 1) $\alpha(1) = 0$;
- 2) $\alpha(t) \in C^1[1, +\infty)$;
- 3) $\alpha'(t) > 0 \quad \forall t > 1$;
- 4) $\alpha(t) \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\lambda \in \Lambda_\mu$ и $\varphi(t)$ — фиксированная функция из Φ_λ . Будем считать, что $\alpha(t) \in A_\varphi$, если $\alpha(t) \in A$ и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\alpha'(t)}{\alpha(t)\varphi(\alpha(t))} \stackrel{\text{def}}{=} a_{\alpha, \varphi} \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Отметим, что если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_\lambda$ и $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \quad \forall t \geq t_0 > 1$, то $A_{\varphi_1} \subset A_{\varphi_2}$.

Функцию $l(t)$ назовем *правильно изменяющейся*, если она положительна и дифференцируема при всех $t \geq t_0 > 1$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tl'(t)}{l(t)} = \rho \in [0, +\infty). \quad (5)$$

Пусть L_ρ – множество всех правильно изменяющихся функций. Функция $l(t) \in L_0$, $\rho = 0$, такая, что $l(t) \uparrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, называется *медленно возрастающей*. Множество медленно возрастающих функций обозначим через $\mathcal{L}_0$.

Известно, что для всякой $l(t) \in L_\rho$, $0 \leq \rho < +\infty$, справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l(ct)}{l(t)} = c^\rho, \quad (6)$$

равномерное по $c \in [d, \omega] \subset (0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что каковы бы ни были последовательность $\lambda \in \Lambda_\mu$ и функция $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$, справедливо включение $L_\rho \cap A \subset A_\varphi \quad \forall \rho \in [0, +\infty)$.

Для удобства ссылок выделим следующее простое предложение.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha(t) \in A$ и $R \in (0, +\infty)$, $\sigma \in (0, +\infty)$. Тогда

$$s_\alpha(\sigma, R) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x < +\infty} \exp \left\{ Rx - \sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr \right\} = \exp \int_0^R \ln \beta \left(\frac{r}{\sigma} \right) dr, \quad (7)$$

где $\beta(\tau)$ – функция, обратная к $\alpha(t)$, $\beta = \alpha^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$s_\alpha(\sigma, R) = \exp \sup_{x < +\infty} \left\{ Rx - \sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr \right\}.$$

Функция, заключенная в скобки в последнем равенстве, имеет максимум в точке $x = \ln \beta(R/\sigma)$. После подстановки и интегрирования по частям приходим к равенству (7).

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha(t) \in A$. Для целой функции $F(z)$, представленной рядом (1), справедлива импликация

$$\begin{aligned} \ln M(F; x) &\leq \sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr \quad \forall x \geq x_0(\sigma), \quad \sigma \in (0, +\infty), \\ &\Downarrow \\ \ln |a_n| &\leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) d\tau \quad \forall n \geq n_0(\sigma), \quad \beta = \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для коэффициентов ряда Дирихле (1) имеют место аналогии неравенств Коши (см., например, [13, с. 125])

$$|a_n| \leq M(F; x) \exp(-\lambda_n x) \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Поэтому, используя условие леммы 2 и лемму 1, где $R = \lambda_n$, имеем

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \inf_{x_0(\sigma) < x < +\infty} \exp \left(\sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr - \lambda_n x \right) = \frac{1}{s_\alpha(\sigma, \lambda_n)} \\ &= \exp \left(- \int_0^{\lambda_n} \ln \beta \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) d\tau \right) \quad \forall n \geq n_0(\sigma), \end{aligned}$$

что и требуется.

ЛЕММА 3. Пусть $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1), где $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$. Пусть $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$ и $\alpha(t) \in A_\varphi$, $\beta = \alpha^{-1}$. Справедлива импликация

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &\leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau \quad \forall n \geq n_0(\sigma), \quad \sigma \in (0, +\infty), \\ &\Downarrow \\ \ln M(F; x) &\leq \sigma_1 \int_0^x \alpha(e^r) dr \quad \forall x \geq x_0(\sigma_1), \end{aligned} \quad (8)$$

где σ_1 – произвольное число такое, что

$$\sigma_1 > \sigma \exp(b_\varphi a_{\alpha, \varphi}), \quad (9)$$

числа b_φ и $a_{\alpha, \varphi}$ определены, соответственно, равенствами (3), (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1), первого из неравенств (8) и леммы 1 для произвольного $\sigma_1 \in (0, +\infty)$ получаем

$$\begin{aligned} M(F; x) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n x} \leq B \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(- \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau + \lambda_n x\right) \\ &\leq B \exp\left(\sigma_1 \int_0^x \alpha(e^r) dr\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(- \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau\right) \\ &\quad \times \sup_{x < +\infty} \exp\left(\lambda_n x - \sigma_1 \int_0^x \alpha(e^r) dr\right) \\ &= B \exp\left(\sigma_1 \int_0^x \alpha(e^r) dr\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(- \int_0^{\lambda_n} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $B \in (0, +\infty)$.

Если нам удастся выбрать число σ_1 , удовлетворяющее условию (9), так, что числовой ряд в правой части (10) сходится и $B_1 \in (0, +\infty)$ – его сумма, то мы получим оценку

$$M(F; x) \leq B_2 \exp\left(\sigma_1 \int_0^x \alpha(e^r) dr\right),$$

где $B_2 = B B_1 \in (0, +\infty)$, которая и доказывает нужную импликацию.

Ясно, что необходимым условием сходимости данного ряда является неравенство $\sigma_1 > \sigma$. Применим теорему Коши о конечных приращениях к отрезку $[\tau/\sigma_1, \tau/\sigma]$, тогда

$$\frac{\ln \beta(\tau/\sigma) - \ln \beta(\tau/\sigma_1)}{\ln(\tau/\sigma) - \ln(\tau/\sigma_1)} = \frac{\ln(\beta(\tau/\sigma)/\beta(\tau/\sigma_1))}{\ln(\sigma_1/\sigma)} = \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)} \cdot \xi,$$

где $\xi \in (\tau/\sigma_1, \tau/\sigma)$. Или

$$\ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} = \xi \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)} \ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right), \quad \xi \in (\tau/\sigma_1, \tau/\sigma). \quad (11)$$

Поскольку $\alpha(t) \in A_\varphi$, то, полагая в (4) $t = \beta(\tau)$, имеем

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\tau)}{\tau \beta'(\tau) \varphi(\tau)} = a_{\alpha, \varphi} \in [0, +\infty).$$

Отсюда (считаем $1/a_{\alpha, \varphi} = +\infty$, если $a_{\alpha, \varphi} = 0$)

$$\underline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\tau \beta'(\tau) \varphi(\tau)}{\beta(\tau)} = \frac{1}{a_{\alpha, \varphi}} \in (0, +\infty].$$

Следовательно, для любого числа $a \in (0, 1/a_{\alpha, \varphi})$ справедливо неравенство

$$\frac{\tau \beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \geq \frac{a}{\varphi(\tau)} \quad \forall \tau \geq \tau_0(a). \quad (12)$$

Выбирая τ достаточно большим так, чтобы $\tau/\sigma_1 \geq \tau_0(a)$, из (11) и (12) получаем

$$\ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} \geq \frac{a}{\varphi(\xi)} \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right). \quad (13)$$

Так как функция $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$ не убывает, то $\varphi(\xi) \leq \varphi(\tau/\sigma)$, поэтому из (13) следует, что

$$\ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} \geq \frac{a}{\varphi(\tau/\sigma)} \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right) \quad \forall \tau \geq \sigma_1 \tau_0(a). \quad (14)$$

Из (14) для всех достаточно больших номеров n имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_n} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau &= \int_0^{\sigma_1 \tau_0(a)} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau + \int_{\sigma_1 \tau_0(a)}^{\lambda_n} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau \\ &\geq C + a \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right) \int_{\sigma_1 \tau_0(a)}^{\lambda_n} \frac{d\tau}{\varphi(\tau/\sigma)} \\ &= C + a\sigma \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right) \int_{\sigma_1 \tau_0(a)/\sigma}^{\lambda_n/\sigma} \frac{dt}{\varphi(t)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C \in (0, +\infty)$ и не зависит от n .

Поскольку $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$, то из равенства (3), где положим $\gamma = \sigma$, имеем $\forall \varepsilon > 0$

$$\sigma \int_{\sigma_1 \tau_0(a)/\sigma}^{\lambda_n/\sigma} \frac{dt}{\varphi(t)} \geq \frac{1}{b_\varphi + \varepsilon} \ln n \quad \forall n \geq n_0(\sigma, \varepsilon). \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\int_0^{\lambda_n} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau \geq C + \frac{a}{b_\varphi + \varepsilon} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma} \cdot \ln n \quad \forall n \geq n_0(\sigma, \varepsilon). \quad (17)$$

Из (17) получаем

$$\exp \left(- \int_0^{\lambda_n} \ln \frac{\beta(\tau/\sigma)}{\beta(\tau/\sigma_1)} d\tau \right) \leq \exp \left(-C - \frac{a}{b_\varphi + \varepsilon} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma} \cdot \ln n \right) \quad \forall n \geq n_0(\sigma, \varepsilon), \quad (18)$$

а из (18) следует, что каково бы ни было число σ_1 , удовлетворяющее условию (9), всегда можно выбрать $\varepsilon > 0$ столь малым, а число a столь близким к $1/a_{\alpha, \varphi}$, что

$$\frac{a}{b_\varphi + \varepsilon} \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right) > 1,$$

и, следовательно, числовой ряд в правой части (10) будет сходиться. Лемма доказана.

Леммы 2 и 3 в общем виде решают поставленную задачу, однако, имеет смысл перейти к их предельным формам. Для этого введем еще два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\alpha(t) \in A$ и $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1), такая, что $\exists \sigma \in (0, +\infty)$

$$\ln M(F; x) \leq \sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr \quad \forall x \geq x_0(\sigma). \quad (19)$$

Точную нижнюю грань таких чисел σ обозначим $\sigma_\alpha(F)$ и назовем α -*типом целой функции* $F(z)$ по максимуму модуля. Если же $\forall \sigma \in (0, +\infty)$ неравенство (19) не имеет места, то будем считать, что $\sigma_\alpha(F) = +\infty$.

Отметим, что определение 4 величины $\sigma_\alpha(F)$ эквивалентно следующему

$$\sigma_\alpha(F) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \ln M(F; x) \left(\int_0^x \alpha(e^r) dr \right)^{-1}. \quad (20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\alpha(t) \in A$, $\beta = \alpha^{-1}$ и $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1), такая, что $\exists \sigma \in (0, +\infty)$

$$\ln |a_n| \leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau \quad \forall n \geq n_0(\sigma). \quad (21)$$

Точную нижнюю грань таких чисел σ обозначим через $\delta_\alpha(F)$ и назовем α -*типом функции* $F(z)$ по коэффициентам и показателям ряда Дирихле. Если же $\forall \sigma \in (0, +\infty)$ неравенство (21) не имеет места, то будем считать, что $\delta_\alpha(F) = +\infty$.

Заметим, что если $\delta_\alpha(F) \in (0, +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, то

$$- \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\delta_\alpha(F) - \varepsilon}\right) d\tau \leq \ln |a_n| \leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\delta_\alpha(F) + \varepsilon}\right) d\tau, \quad (22)$$

где правое неравенство выполняется асимптотически, т.е. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, а левое – лишь вдоль некоторой возрастающей к $+\infty$ подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1), $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$. Тогда, каковы бы ни были функции $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$ и $\alpha(t) \in A_\varphi$, имеют место неравенства

$$\delta_\alpha(F) \leq \sigma_\alpha(F) \leq \delta_\alpha(F) \exp(b_\varphi a_{\alpha, \varphi}), \quad (23)$$

где числа b_φ и $a_{\alpha, \varphi}$ определены, соответственно, в (3) и (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\sigma_\alpha(F) < +\infty$. Тогда $\forall \sigma > \sigma_\alpha(F)$ из определения 4 имеем

$$\ln M(F; x) \leq \sigma \int_0^x \alpha(e^r) dr \quad \forall x \geq x_0(\sigma).$$

Отсюда согласно лемме 2 и определению 5 получаем $\delta_\alpha(F) \leq \sigma$, а поскольку число σ можно выбрать сколь угодно мало отличающимся от $\sigma_\alpha(F)$, то

$$\delta_\alpha(F) \leq \sigma_\alpha(F). \quad (24)$$

Из (24) следует, что если $\sigma_\alpha(F) = 0$, то $\delta_\alpha(F) = 0$. Если же $\delta_\alpha(F) = +\infty$, то $\sigma_\alpha(F) = +\infty$.

Пусть теперь $\delta_\alpha(F) < +\infty$ и σ — произвольное число такое, что $\sigma > \delta_\alpha(F)$. Тогда из определения 5 имеем

$$\ln |a_n| \leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau \quad \forall n \geq n_0(\sigma).$$

Отсюда, применяя лемму 3, получаем для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\ln M(F; x) \leq (\sigma \exp(b_\varphi a_{\alpha, \varphi} + \varepsilon)) \int_0^x \alpha(e^r) dr \quad \forall x \geq x_0(\sigma, \varepsilon). \quad (25)$$

Из (25) и определения 4 следует справедливость неравенства

$$\sigma_\alpha(F) \leq \delta_\alpha(F) \exp(b_\varphi a_{\alpha, \varphi}), \quad (26)$$

которое показывает, что если $\sigma_\alpha(F) = +\infty$, то $\delta_\alpha(F) = +\infty$; если же $\delta_\alpha(F) = 0$, то $\sigma_\alpha(F) = 0$. Итак, величины $\sigma_\alpha(F)$ и $\delta_\alpha(F)$ могут быть только одновременно отличными от нуля и $+\infty$. Неравенства (24) и (26) доказывают теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 следует, что если $b_\varphi a_{\alpha, \varphi} = 0$, то $\sigma_\alpha(F) = \delta_\alpha(F)$. В частности, каковы бы ни были $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$, и $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$, последнее равенство справедливо $\forall \alpha(t) \in \mathcal{L}_0 \cap A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как показано в работе [8], правое из неравенств (23) нельзя улучшить для случая $\mu \in (0, +\infty)$ и $\alpha(t) = \rho t^\rho$, $0 < \rho < +\infty$, $t \geq 2$ (на промежутке $[1, 2)$ функцию $\alpha(t)$ можно задавать произвольно, но так, чтобы $\alpha(t) \in A$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства теоремы 1 легко заметить, что используются лишь асимптотические свойства функций $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$, а их поведение на конечном интервале нами было использовано для упрощения выкладок. Поэтому в определениях 1 и 2 условие 1) можно отбросить, а последующие условия должны выполняться для достаточно больших значений t . При этом, конечно, нижние пределы в соответствующих интегралах следует заменить достаточно большими положительными числами.

Теорему 1 можно сформулировать в другой форме.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1), $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$. Пусть $\alpha(t) \in A$ – фиксированная функция такая, что множество Φ_λ содержит хотя бы одну функцию $\varphi(t)$, обладающую тем свойством, что $\alpha(t) \in A_\varphi$. Тогда справедливы неравенства

$$\delta_\alpha(F) \leq \sigma_\alpha(F) \leq \delta_\alpha(F) \exp d_{\lambda, \alpha},$$

где

$$d_{\lambda, \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in \Phi_{\lambda, \alpha}} (b_\varphi a_{\alpha, \varphi}), \quad \Phi_{\lambda, \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(t) : \varphi(t) \in \Phi_\lambda, \alpha(t) \in A_\varphi\}.$$

Отметим, что если множество $\Phi_{\lambda, \alpha}$ содержит хотя бы одну функцию $\varphi(t)$, то оно содержит бесконечное множество функций. Действительно, пусть $\psi(t)$ – любая положительная и неубывающая на $(1, +\infty)$ функция такая, что

$$0 < c_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = c_2 < +\infty.$$

Тогда из (3) и (4) следуют неравенства

$$\frac{b_\varphi}{c_2} \leq b_\psi \leq \frac{b_\varphi}{c_1}, \quad c_1 a_{\alpha, \varphi} \leq a_{\alpha, \psi} \leq c_2 a_{\alpha, \varphi}.$$

Отсюда получаем, что $\psi(t) \in \Phi_{\lambda, \alpha}$, если только $\varphi(t) \in \Phi_{\lambda, \alpha}$. И, кроме того,

$$b_\varphi a_{\alpha, \varphi} \frac{c_1}{c_2} \leq b_\psi a_{\alpha, \psi} \leq b_\varphi a_{\alpha, \varphi} \frac{c_2}{c_1}.$$

Однако множество $\Phi_{\lambda, \alpha}$ может быть и пустым. В частности, если $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 < \mu < +\infty$, а функция $\alpha(t) \in A$ такова, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t\alpha'(t)/\alpha(t) = +\infty$. Действительно, в этом случае $\forall \varphi(t) \in \Phi_\lambda$ обладает свойством $\varphi(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$, следовательно, $\alpha(t) \notin A_\varphi \quad \forall \varphi(t) \in \Phi_\lambda$, и поэтому $\Phi_{\lambda, \alpha} = \emptyset$.

Напротив, каковы бы ни были последовательность $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$, и функция $\alpha(t) \in A$ такая, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t\alpha'(t)/\alpha(t) = \rho \in [0, +\infty)$, справедливо равенство $\Phi_{\lambda, \alpha} = \Phi_\lambda$.

Из этих примеров видно, что для $\Phi_{\lambda, \alpha} \neq \emptyset$ необходима известная “согласованность” роста последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и роста функции $\alpha(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Правда, как это будет показано ниже, данная “согласованность” важна лишь в случае достаточно слабого роста последовательности λ .

Если на последовательность показателей ряда Дирихле накладывать дополнительные условия, гарантирующие достаточно быстрое их стремление к $+\infty$, то неравенства (23) превращаются в равенство $\sigma_\alpha(F) = \delta_\alpha(F)$. Приведем некоторые возможные результаты. Для этого нам потребуются дополнительные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\varphi(t) \uparrow +\infty$ и $\varphi(t) = o(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Будем считать, что $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda_0(\varphi)$, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(\lambda_n) \frac{\ln n}{\lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \nu < +\infty. \quad (27)$$

Очевидно, что $\Lambda_0(\varphi) \subset \Lambda_\mu$ при $\mu = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем считать, что $\varphi(t) \in \widehat{L}_\rho$, если $\varphi(t) \in L_\rho$, $0 \leq \rho < 1$, и дополнительно

$$\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)} < +\infty, \quad (28)$$

где $c > 0$ — достаточно большое число.

Если $0 < \rho < 1$, то условие (28) автоматически выполняется, т.е. $\widehat{L}_\rho = L_\rho$. Если же $\rho = 0$, то условие (28) существенно, так как оно ограничивает рост функции $\varphi(t)$ снизу. В частности,

$$\varphi_1(t) = \prod_{k=1}^n \ln_k t \notin \widehat{L}_0$$

(здесь $\ln_1 t = \ln t$, $\ln_k t = \ln(\ln_{k-1} t)$, $k \geq 2$), в то же время,

$$\varphi_2(t) = (\ln_n t)^\omega \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \ln_k t \in \widehat{L}_0,$$

если $\omega > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функцию $\alpha(t) \in A$ будем называть $\varphi(t)$ -правильно изменяющейся, если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\alpha'(t)}{\alpha(t)\varphi(\alpha(t))} \stackrel{\text{def}}{=} a_{\alpha, \varphi} < +\infty. \quad (29)$$

Заметим, что если $\varphi(t) \equiv 1$, то $\varphi(t)$ -правильно изменяющаяся функция представляет собой обычную правильно изменяющуюся функцию.

ТЕОРЕМА 2. Пусть целая функция $F(z)$ представлена рядом Дирихле (1) таким, что $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \Lambda_0(\varphi)$, где $\varphi(t) \in \widehat{L}_\rho$, $0 \leq \rho < 1$. Пусть $\alpha(t)$ является $\varphi(t)$ -правильно изменяющейся функцией. Тогда

$$\sigma_\alpha(F) = \delta_\alpha(F). \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi(t) \in \widehat{L}_\rho$, $0 \leq \rho < 1$, то с помощью правила Лопиталя можно установить, что

$$\int_c^r \frac{dt}{\varphi(t)} = (1 + o(1)) \frac{1}{1 - \rho} \frac{r}{\varphi(r)}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (31)$$

Из (31) и (27), используя (6), имеем для каждого фиксированного $\gamma \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(\gamma \int_2^{\lambda_n/\gamma} \frac{dt}{\varphi(t)} \right)^{-1} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \rho)(\ln n)\varphi(\lambda_n/\gamma)}{\lambda_n} \\ &= (1 - \rho) \frac{\nu}{\gamma^\rho} < +\infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) и определения 1 следует, что $\varphi(t) \in \Phi_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda_0(\varphi)$. Поэтому для любой функции $\alpha(t) \in A_\varphi$ из теоремы 1 получаем неравенства (23), которые показывают, что теорема 2 будет доказана, если мы установим равенство $a_{\alpha, \varphi} = 0$.

Прежде всего покажем, что каковы бы ни были функции $\alpha(t) \in A$ и $\varphi(t) \in \widehat{L}_\rho$, $0 \leq \rho < 1$, справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\alpha'(t)}{\alpha(t)\varphi(\alpha(t))} = 0. \quad (33)$$

Действительно, предположим противное. Тогда существует число $B < +\infty$ такое, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t)\varphi(\alpha(t))}{t\alpha'(t)} = B.$$

Отсюда, полагая $\alpha(t) = \tau$ и $t = \beta(\tau)$, $\beta = \alpha^{-1}$, имеем

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\tau\varphi(\tau)\beta'(\tau)}{\beta(\tau)} = B. \quad (34)$$

Обозначив $\psi(\tau) = \tau\beta'(\tau)\varphi(\tau)/\beta(\tau)$, согласно (34) заключаем, что $\psi(\tau) = O(1)$, $\tau \geq \tau_0$. Поскольку еще

$$\frac{d}{d\tau} \ln \beta(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\tau\varphi(\tau)},$$

то, используя условие (28), получаем

$$\ln \beta(\tau) = \ln \beta(c) + \int_c^\tau \frac{\psi(\tau)}{\tau\varphi(\tau)} d\tau = O(1), \quad \tau \geq c \geq \tau_0.$$

Следовательно, $\beta(\tau) = O(1)$, $\tau \geq \tau_0$, что невозможно, так как $\beta(\tau) \uparrow +\infty$, $\tau \rightarrow +\infty$, для всякой функции $\alpha(t) \in A$. Итак, равенство (33) имеет место, а поскольку по условию $\alpha(t)$ является $\varphi(t)$ -правильно изменяющейся функцией, то согласно определению 8 справедливо равенство $a_{\alpha, \varphi} = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательства теоремы 2 следует, что условие (29) не налагает каких-либо ограничений (снизу или сверху) на скорость роста функции $\alpha(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ (если, конечно, $\varphi(t) \in \widehat{L}_\rho$) и является условием регулярного поведения $\alpha(t)$ на бесконечности. В частности, условиям теоремы 2 удовлетворяют как медленно возрастающие функции $\alpha(t)$, например, любые конечные итерации логарифма, так и быстро возрастающие функции такие, как произвольные итерации функции e^t . Таким образом, теорема 2 обладает достаточно высокой степенью общности, обслуживая целые функции $F(z)$, представленные рядом Дирихле (1), которые имеют любой R -порядок ρ , $\rho \in [0, +\infty]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть целая функция $F(z)$ представлена рядом Дирихле (1), показатели которого удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = h < +\infty. \quad (35)$$

Тогда для t -правильно изменяющейся функции $\alpha(t)$ справедливо равенство $\sigma_\alpha(F) = \delta_\alpha(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t) \equiv t$. Тогда $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$. Действительно, условия 1) и 2) определения 1 выполнены, а поскольку в силу (35)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(\gamma \int_2^{\lambda_n/\gamma} \frac{dt}{\varphi(t)} \right)^{-1} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(\gamma \ln \left(\frac{\lambda_n}{\gamma} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\gamma} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = \frac{h}{\gamma} < +\infty, \end{aligned}$$

то и условие 3) определения 1 имеет место. Следовательно, предположения теоремы 1 для $\varphi(t) \equiv t$ выполнены. Кроме того, справедливы неравенства (23), в которых $a_{\alpha, \varphi} = 0$, что доказывается дословно так же, как и в теореме 2. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 3 имеет особый интерес в случае, когда показатели λ_n ряда Дирихле представляют собой натуральные числа, поскольку заменой $\xi = e^z$ ряд Дирихле (1) сводится к лакунарному ряду Тейлора. В частности, полагая $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n = n - 1$, $n = 2, 3, \dots$, мы получаем обычный ряд Тейлора. В последнем случае теорема 3 содержит теорему 1 работы [12, с. 131], если, конечно, в определении 4 заменить интеграл $\int_0^x \alpha(e^t) dt = \int_1^{e^x} \alpha(t) d \ln t$ на $\int_1^r \alpha(t) d \ln t$. Теорема 1 из [12] обслуживает все целые трансцендентные функции в том смысле, что, какова бы ни была целая трансцендентная функция $Q(\xi)$ существует t -правильно изменяющаяся функция $\alpha(t)$ такая, что

$$\sigma_\alpha(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left(\ln \max_{|\xi| \leq r} |Q(\xi)| \right) \left(\int_1^r \alpha(t) d \ln t \right)^{-1} = 1.$$

Поэтому теорема 3 также обслуживает все целые функции $F(z)$, представленные рядами Дирихле (1), если только показатели λ_n возрастают достаточно быстро так, что выполнено условие (35).

Величина α -типа целой функции $F(z)$ по коэффициентам и показателям ряда Дирихле определена в виде точной нижней грани. Для конкретных применений, а также для сравнения полученных выше результатов с ранее известными, полезно найти выражение величины $\delta_\alpha(F)$ через верхний предел. Это можно сделать, если только на функции $\alpha(t) \in A_\varphi$ накладывать те или иные условия, ограничивающие их рост снизу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (см. [12]). Будем полагать $\alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$, если $\alpha(t)$ дважды дифференцируемая функция из A_φ такая, что обратная к ней функция $\beta(\tau)$ обладает свойством

$$\gamma(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau \beta'(\tau)}{\beta(\tau)} \in L_0. \quad (36)$$

Отметим, что условие (36) накладывает на рост $\alpha(t)$ ограничение снизу (но не сверху), а именно, $\forall \alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$ обладает свойством $\ln \ln t = o(\ln \alpha(t))$, $t \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$ и $F(z)$ – целая функция, представленная рядом Дирихле (1). Тогда

$$\delta_\alpha(F) = e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)}, \quad (37)$$

где $\beta = \alpha^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рассуждениями из работы [12, с. 135–136]. Пусть $\sigma \in (0, +\infty)$ – фиксированное число. По теореме Коши о конечных приращениях

$$\ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) = \ln \beta(\tau) - \frac{\xi \beta'(\xi)}{\beta(\xi)} \ln \sigma, \quad (38)$$

где ξ расположено между τ и τ/σ . По условию $\alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$, и, следовательно, согласно (6)

$$\gamma(\xi) = \frac{\xi \beta'(\xi)}{\beta(\xi)} = (1 + o(1))\gamma(\tau), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Поэтому из (38) имеем

$$\ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) = \ln \beta(\tau) - (1 + o(1))\gamma(\tau) \ln \sigma, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (39)$$

где $o(1)$ равномерно по $\sigma \in [c, d] \subset (0, +\infty)$. Из (39) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau &= \int_0^{\lambda_n} \ln \beta(\tau) d\tau - (1 + o(1)) \ln \sigma \int_0^{\lambda_n} \gamma(\tau) d\tau \\ &= \lambda_n \ln \beta(\lambda_n) - \int_0^{\lambda_n} \tau d(\ln \beta(\tau)) - (1 + o(1)) \ln \sigma \int_0^{\lambda_n} \gamma(\tau) d\tau \\ &= \lambda_n \ln \beta(\lambda_n) - (1 + \ln \sigma + o(1)) \int_0^{\lambda_n} \gamma(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме того, используя правило Лопиталя, условие $\gamma(\tau) \in L_0$ и тот факт, что $\lambda_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, можно установить равенство

$$\int_0^{\lambda_n} \gamma(\tau) d\tau = (1 + o(1))\lambda_n \gamma(\lambda_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

применяя которое к (40), получаем

$$\int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau = \lambda_n \ln \beta(\lambda_n) - (1 + \ln \sigma + o(1))\lambda_n \gamma(\lambda_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Пусть сначала $\delta_\alpha(F) < +\infty$. Тогда для произвольного $\sigma > \delta_\alpha(F)$ из (41) и определения 5 имеем

$$\ln |a_n| \leq - \int_0^{\lambda_n} \ln \beta\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) d\tau = -\lambda_n \ln \beta(\lambda_n) + (1 + \ln \sigma + o(1))\lambda_n \gamma(\lambda_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, выбирая σ сколь угодно близким к $\delta_\alpha(F)$, заключаем, что справедливо неравенство

$$\delta_\alpha(F) \geq e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)}, \quad (42)$$

из которого следует, что при $\delta_\alpha(F) = 0$ имеет место равенство (37).

Пусть теперь $\delta_\alpha(F) \in (0, +\infty]$. Из (41) и левого из неравенств (22) вдоль подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ получаем

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k} \ln \beta(\lambda_{n_k}) + (1 + \ln \sigma_1 + o(1)) \lambda_{n_k} \gamma(\lambda_{n_k}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (43)$$

где σ_1 — произвольное число из интервала $(0, \delta_\alpha(F))$. Согласно (43)

$$e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)} \geq e^{-1} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_{n_k}) |a_{n_k}|^{1/\lambda_{n_k}})^{1/\gamma(\lambda_{n_k})} \geq \sigma_1.$$

Поскольку σ_1 можно выбрать сколь угодно близким к $\delta_\alpha(F)$, то справедливо неравенство

$$\delta_\alpha(F) \leq e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)}. \quad (44)$$

Из (44) следует, что если $\delta_\alpha(F) = +\infty$, то равенство (37) сохраняется. Неравенства (42) и (44) доказывают лемму.

Из теоремы 1 и леммы 4 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F(z)$ — целая функция, представленная рядом Дирихле (1), $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$, $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$, $\alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \ln M(F; x) \left(\int_0^x \alpha(e^r) dr \right)^{-1} \\ &\leq \exp(b_\varphi a_{\alpha, \varphi} - 1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)}, \end{aligned}$$

где $\beta = \alpha^{-1}$, $\gamma(\tau) = \tau \beta'(\tau) / \beta(\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $F(z)$ — целая функция, представленная рядом Дирихле (1), $\lambda \in \Lambda_\mu$, $0 \leq \mu < +\infty$, $\alpha(t)$ — дважды дифференцируемая функция из множества $A \cap L_\rho$, $0 < \rho < +\infty$. Тогда

$$\delta_\alpha(F) \leq \sigma_\alpha(F) \leq \delta_\alpha(F) \exp(\mu \rho), \quad (45)$$

где

$$\sigma_\alpha(F) = \rho^{-1} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(F; x)}{\alpha(e^x)}, \quad (46)$$

$$\delta_\alpha(F) = e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^\rho, \quad \beta = \alpha^{-1}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mu \in (0, +\infty)$. В этом случае в качестве $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$ выберем функцию $\varphi(t) \equiv 1$. Для нее из (2) и (3) следует, что $b_\varphi = \mu$, а поскольку $\alpha(t) \in A \cap L_\rho$, $0 < \rho < +\infty$, то из (5) имеем равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \rho,$$

сравнивая которое с (4), заключаем, что $a_{\alpha, \varphi} = \rho$. Поэтому неравенства (45) следуют из теоремы 1, а равенство (46) – из (20), где из условия $\alpha(t) \in A \cap L_\rho$, $0 < \rho < +\infty$, имеем

$$\int_0^x \alpha(e^r) dr = (1 + o(1))\rho^{-1}\alpha(e^x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Равенство (47) следует из (37), поскольку $\gamma(\tau) = (1 + o(1))\rho^{-1}$, $\tau \rightarrow +\infty$, и, следовательно, $\alpha(t) \in \tilde{A}_\varphi$, $\varphi(t) \equiv 1$.

Если $\mu = 0$, то множество Φ_λ , как это видно из определения 1, содержит функцию $\varphi(t) \uparrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$. Для любой такой функции $\varphi(t)$ и функции $\alpha(t) \in A \cap L_\rho$, $0 < \rho < +\infty$, как это следует из равенств (4) и (5), $a_{\alpha, \varphi} = 0$. Воспользовавшись теоремой 1, мы опять приходим к неравенствам (45), которые в данном случае превращаются в равенство $\delta_\alpha(F) = \sigma_\alpha(F)$. Соотношения (46), (47) и здесь сохраняются. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В частном случае, когда $\alpha(t) = \rho t^\rho$, $0 < \rho < +\infty$, следствие 1 дает нам основной результат работы [8]. Если к тому же $\mu = 0$, то из (45)–(47) вытекает классический результат Ритта [1] о представлении R -типа функции $F(z)$ через коэффициенты и показатели ряда Дирихле.

Из приведенные выше утверждений следуют не только известные результаты работ [1]–[10], но и новые. Приведем лишь один из них.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi(t) = \psi(t) \ln t$, где $\psi(t)$ – произвольная фиксированная функция, положительная и неубывающая на $(0, +\infty)$, $\psi(t) \uparrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, $\psi(t) \in L_\rho$, $0 \leq \rho < 1$. Пусть $\omega \in (0, +\infty)$ – произвольное фиксированное число. Тогда для целой функции $F(z)$, представленной рядом Дирихле (1) таким, что $\lambda \in \Lambda_0(\varphi)$, справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(F; x)}{\exp(\omega e^x)} = e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{(\ln \lambda_n)/\lambda_n} \left(\frac{\ln \lambda_n}{\omega} \right)^{\ln \lambda_n} \frac{1}{\ln \lambda_n}. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \omega t e^{\omega t}, \quad t > 2, \quad (49)$$

которую доопределим на отрезке $[1, 2]$ так, чтобы $\alpha(t) \in A$. Из (4) и условия следствия 2 видно, что функция (49) обладает свойством $a_{\alpha, \varphi} = 0$ и $\alpha(t) \in A_\varphi$. Кроме того, $\forall \gamma \in (0, +\infty)$, используя (6), имеем

$$\gamma \int_2^{\lambda_n/\gamma} \frac{dt}{\varphi(t)} \geq \frac{\gamma}{\varphi(\lambda_n/\gamma)} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{\gamma} - 2 \right) = (1 + o(1)) \cdot \frac{\lambda_n \gamma^\rho}{\varphi(\lambda_n)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Из (50), (3) и определения 6 получаем

$$b_\varphi = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(\gamma \int_2^{\lambda_n / \gamma} \frac{dt}{\varphi(t)} \right)^{-1} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda_n) \ln n}{\gamma^\rho \lambda_n} = \gamma^{-\rho} \nu < +\infty, \quad (51)$$

т.е. $\varphi(t) \in \Phi_\lambda$. Согласно теореме 1 имеет место равенство

$$\sigma_\alpha(F) = \delta_\alpha(F). \quad (52)$$

Из (20) и (49) следует, что

$$\sigma_\alpha(F) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(F; x)}{\exp(\omega e^x)}. \quad (53)$$

Кроме того, нетрудно получить асимптотические равенства

$$\omega \beta(\tau) = \ln \tau - \ln \ln \tau + O\left(\frac{\ln \ln \tau}{\ln \tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (54)$$

$$\gamma(\tau) = \frac{\tau \beta'(\tau)}{\beta(\tau)} = \frac{1}{1 + \omega \beta(\tau)} = \frac{1 + o(1)}{\ln \tau}, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (55)$$

где $\beta(\tau)$ — функция, обратная к функции (49). Из (55) видно, что $\gamma(\tau) \in L_0$, и, следовательно, $\alpha(t) \in A_\varphi$. Поэтому согласно лемме 4 имеем

$$\delta_\alpha(F) = e^{-1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\beta(\lambda_n) |a_n|^{1/\lambda_n})^{1/\gamma(\lambda_n)}. \quad (56)$$

Из (52), (53) и (56), используя (54), (55) и равенство

$$\left(1 - \frac{\ln \ln \lambda_n}{\ln \lambda_n} + O\left(\frac{\ln \ln \lambda_n}{(\ln \lambda_n)^2}\right) \right)^{\ln \lambda_n} = \frac{1 + o(1)}{\ln \lambda_n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

которое нетрудно установить, получаем (48). Следствие доказано.

В качестве примера применения следствия 2 рассмотрим ряд Дирихле

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

у которого показатели удовлетворяют условиям следствия 2, а коэффициенты a_n таковы, что

$$|a_n| = (\ln \lambda_n)^{\lambda_n (-1 + (1/\ln \lambda_n))} \quad \forall n \geq n_0. \quad (57)$$

Из (57) и следствия 2, где положим $\omega = 1$, для функции $\Phi(z)$ имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\Phi; x)}{\exp(\exp x)} = e^{-1}.$$

Отсюда получаем оценку

$$M(\Phi; x) \leq \exp((e^{-1} + \varepsilon) \exp(\exp x)) \quad \forall x \geq x_0(\varepsilon), \quad (58)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число.

Если для той же самой функции $\Phi(z)$ воспользоваться известным равенством

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\Phi; x)}{\exp x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/\lambda_n} \ln \lambda_n) \quad (59)$$

(см. [7]), то можно лишь утверждать, что для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$M(\Phi; x) \leq \exp(\exp((1 + \varepsilon) \exp x)) \quad \forall x \geq x_1(\varepsilon),$$

которая значительно менее точна, чем (58). Этот пример показывает, что следствие 2 дает более тонкие характеристики роста, чем (59).

Отметим, что можно привести и другие следствия, аналогичные рассмотренным.

Список литературы

1. *Ritt J. F.* On certain points in the theory of Dirichlet Series // Amer. J. Math. 1928. V. 50. № 1. P. 73–86.
2. *Sugimura K.* Übertragung einiger Satze uas der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen // Math. Z. 1929. V. 29. P. 264–277.
3. *Azpeitia A. G.* A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 722–723.
4. *Azpeitia A. G.* On the Ritt order of entire Dirichlet series // Quart. J. Math. 1964. V. 15. № 59. P. 275–277.
5. *Rahman Q. J.* On the lower order of entire functions defined by Dirichlet series // Quart. J. Math. 1956. V. 7. P. 96–99.
6. *Reddy A. R.* On entire Dirichlet series of infinite order, I // Rev. Mat. Iberoamericana. 1967. V. 27. P. 120–131.
7. *Reddy A. R.* On entire Dirichlet series of infinite order, II // Rev. Mat. Iberoamericana. 1969. V. 29. P. 215–231.
8. *Оруджев С. Р.* О порядке и типе целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Сер. матем. 1974. Т. 7 (146). С. 60–65.
9. *Пьяныло Я. Д., Шеремета М. Н.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Сер. матем. 1975. Т. 10 (161). С. 91–93.
10. *Шеремета М. Н.* О целых функциях, представленных рядами Дирихле // Изв. вузов. Сер. матем. 1978. Т. 3 (190). С. 90–98.
11. *Осколков В. А.* О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Матем. сб. 1976. Т. 100 (146). № 2 (6). С. 312–334.
12. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 129–148.
13. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

Московский институт коммунального хозяйства и строительства; Поступила в редакцию
Ростовский государственный университет 29.06.1995