Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Семенов, Доказательство обобщенной гипотезы Х. Неймана для некоторых почти свободных групп, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 10, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:36:47

УДК 512.54

Ю. С. Семенов

Доказательство обобщенной гипотезы Х. Нейман для некоторых почти свободных групп

В работе доказана обобщенная гипотеза Х. Нейман для групп, содержащих свободное произведение трех циклических групп второго порядка в качестве подгруппы конечного индекса.

Библиография: 3 названия.

Введение

Пусть G – некоторая конечно порожденная неэлементарная (т.е. не почти циклическая) группа, содержащая свободную подгруппу G_0 конечного индекса. Обозначим через $[H]$ класс сопряженности подгруппы H в группе G . Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$ -модуль $D(G)$ с базисом, состоящим из всех $[H]$, где H – бесконечная конечно порожденная подгруппа в G . В [1] показано, что на $D(G)$ можно задать такую структуру коммутативного ассоциативного кольца с единицей, что для любых $[H], [K] \in D(G)$

$$[H][K] = \sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} [H \cap K^g].$$

В этой сумме представители H, K соответствующих классов сопряженности $[H], [K]$ фиксированы, а суммирование производится по всем представителям g двойных смежных классов $HgK \in H \setminus G/K$, для которых подгруппы $H \cap gKg^{-1}$ бесконечны (таких классов конечное число, и можно доказать, что $H \cap gKg^{-1}$ будет конечно порожденной подгруппой в G).

Для любого класса $[H] \in D(G)$ положим

$$r([H]) = \chi(H)/\chi(G),$$

где $\chi(L)$ – эйлерова характеристика группы L , и продолжим r по линейности на все кольцо $D(G)$. Функция r называется *приведенной эйлеровой характеристикой*. Будем говорить, что для группы G выполнено *неравенство Х. Нейман*, если

$$r([H][K]) \leq |\chi(G_0)| r([H]) r([K]) \quad (0.1)$$

для любых $[H], [K] \in D(G)$ и для любой свободной подгруппы конечного индекса G_0 . Заметим, что множитель $|\chi(G_0)|$ всегда больше либо равен 1 в силу условий, наложенных на группу G , и можно считать в неравенстве (0.1), что индекс не однозначно определенной подгруппы G_0 в группе G минимален.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00733).

В частности, если G – свободная группа ранга 2, то неравенство (0.1) можно переписать в виде

$$\sum_{g \in (H \backslash G/K)^*} (\text{rank}(H \cap gKg^{-1}) - 1) \leq (\text{rank}(H) - 1)(\text{rank}(K) - 1) \quad (0.2)$$

(мы опускаем квадратные скобки, означающие классы сопряженности), поскольку для любой конечно порожденной свободной группы F эйлерова характеристика равна $1 - \text{rank}(F)$.

Неравенство (0.2) известно как усиленный вариант гипотезы Х. Нейман, предложенный У. Нейманом в работе [2]. Сама же гипотеза была впервые сформулирована в [3] следующим образом: верно ли, что для двух нетривиальных конечно порожденных подгрупп H и K свободной группы F (которую всегда можно считать ранга 2) выполнено неравенство

$$\text{rank}(H \cap K) - 1 \leq (\text{rank}(H) - 1)(\text{rank}(K) - 1). \quad (0.3)$$

Ясно, что (0.3) получается из (0.2) рассмотрением одного слагаемого в сумме при $g = 1$ (если $H \cap K$ – тривиальная подгруппа, то (0.3) очевидно) и что (0.1) является обобщением неравенства (0.2) на целый класс групп.

Это дает основание выдвинуть следующую гипотезу.

ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА Х. НЕЙМАН. *Для любой неэлементарной конечно порожденной почти свободной группы G выполнено неравенство Х. Нейман.*

Гипотеза Х. Нейман может быть сформулирована и для некоторых неэлементарных гиперболических групп (в смысле Громова), например, для фундаментальных групп поверхностей рода, большего единицы.

В данной работе обобщенная гипотеза Х. Нейман доказана для группы $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (теорема 1), а также для любой группы G , которая содержит Γ как подгруппу конечного индекса (теорема 2).

Структура работы такова. В первой части собраны технические результаты (в основном известные), касающиеся некоторого класса размеченных графов. Под *графом* мы всегда будем подразумевать некоторый локально конечный 1-комплекс V . Граф назовем *размеченным*, если имеются два отображения множества вершин $\mu_0: V^0 \rightarrow M_0$ и множества ребер $\mu_1: V^1 \rightarrow M_1$ в некоторые непересекающиеся множества меток M_0 и M_1 .

Под *путем* p в графе V понимается комбинаторный путь, т.е. последовательность ребер $e_1 e_2 \dots e_m$ таких, что начало следующего ребра совпадает с концом предыдущего. Петля p (замкнутый путь) называется *минимальной*, если среди пар $\{e_k, e_{k+1}\}$ и $\{e_m, e_1\}$, $k = 1, \dots, m-1$, нет пар взаимно обратных ребер.

Во второй части доказана обобщенная гипотеза Х. Нейман для любой группы G , содержащей группу $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ как подгруппу конечного индекса. В качестве приложения полученного результата приводится конструкция коммутативной унитарной банаховой алгебры $\hat{A}(G)$ для такой группы G .

§ 1. Подгруппы свободной группы и графы

1.1. Θ -графы. Рассмотрим группу $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Группа Γ имеет очевидное копредставление $\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = 1 \rangle$, которым мы и будем в дальнейшем пользоваться. Зафиксируем систему порождающих $S = \{x, y, z\}$ группы Γ .

Пусть $T = C(\Gamma, S)$ – неориентированный граф Кэли для Γ относительно S , т.е. T – это 1-комплекс, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $g \in \Gamma$, а неориентированные ребра – с неупорядоченными парами элементов (g, h) таких, что $g^{-1}h \in S$. Заметим, что каждому ребру e , соединяющему g и h , можно приписать метку $\mu(e) = g^{-1}h \in S$. Таким образом, метка ребра – это один из порождающих x, y или z .

Хорошо известно, что T – это симплициальное дерево, каждая вершина которого имеет степень 3. Группа Γ симплициально действует на T , сохраняя метки ребер, причем действие Γ на вершинах T свободно и транзитивно. Стабилизатор ребра e – циклическая группа второго порядка, сопряженная в Γ с одной из подгрупп $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ или $\langle z \rangle$ в зависимости от метки ребра e .

Дерево T можно превратить в метрическое пространство таким образом, что расстояние $|g - h|$ между двумя вершинами g, h (мы не делаем различия между вершинами T и элементами группы Γ) равнялось бы длине кратчайшей записи $g^{-1}h$ в порождающих S , а каждое ребро e было бы изометрично единичному интервалу $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. При этом Γ будет группой изометрий T .

Пусть Γ_0 – подгруппа Γ , состоящая из всех элементов четной длины. Нетрудно проверить, что Γ_0 – это свободная группа ранга 2 с базисом, состоящим, например, из xu и yz . Индекс $|\Gamma : \Gamma_0|$ равен 2. Группа Γ_0 свободно действует на T . При этом фактор-граф $\Theta = \Gamma_0 \backslash T$ имеет 2 вершины (соответствующие смежным классам Γ_0 и $\Gamma_0 x$), а также три ребра с метками x, y, z , которые соединяют эти две вершины.

Припишем метку “+” всем вершинам T , находящимся в одной орбите с $1 \in T$ относительно действия Γ_0 . Всем оставшимся вершинам припишем метку “–”. В зависимости от знака вершины будем называть их *положительными* или *отрицательными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Размеченный граф V назовем *Θ -графом*, если выполнены следующие условия:

- 1) каждая вершина $v \in V$ имеет метку “+” или “–”;
- 2) любое ребро $e \in V$ имеет метку $\mu(e)$, равную x, y или z и соединяет две вершины с разными метками;
- 3) из каждой вершины выходит не более одного ребра с данной меткой (следовательно, степень каждой вершины не более 3).

Отметим, что любая петля в Θ -графе состоит из четного числа ребер по условию 2). Определим метку пути $p = e_1 e_2 \dots e_m$ в Θ -графе как произведение $\mu(e_1) \mu(e_2) \dots \mu(e_m) \in \Gamma$. Из сказанного выше следует, что метка любой петли лежит в подгруппе Γ_0 .

Примером Θ -графа служит размеченное дерево T . Вообще, *Θ -деревом* мы будем называть связный односвязный Θ -граф. Поскольку любая подгруппа $H \subseteq \Gamma_0$ действует на T свободно и сохраняет метки вершин и ребер, то Θ -графом будет любой фактор-граф $H \backslash T$, в частности, и граф Θ .

Морфизмом $\varphi: A \rightarrow B$ одного Θ -графа в другой назовем отображение, переводящее вершины A в вершины B , ребра A в ребра B , с сохранением всех меток и отношения инцидентности. Например, для любой подгруппы $H \subseteq \Gamma_0$ каноническая проекция $p_H: T \rightarrow H \backslash T$ будет морфизмом. Θ -графы и их морфизмы образуют категорию, которую мы обозначим $\Theta\text{-Graphs}$. Нетрудно видеть, что Θ будет финальным объектом данной категории.

В категории $\Theta\text{-Graphs}$ существуют суммы (дизъюнктные объединения) и прямые произведения объектов. Дадим явную конструкцию произведения $C = A \times B$ двух Θ -графов. Для любого Θ -графа A обозначим A_+^0 (A_-^0) множество его положительных (отрицательных) вершин. Положим $C_+^0 = A_+^0 \times B_+^0$ и $C_-^0 = A_-^0 \times B_-^0$. Ребро с меткой x (y, z) соединяет вершину $c_1 = (a_1, b_1)$ с вершиной $c_2 = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда два некоторых ребра с той же меткой соединяют вершины a_1, a_2 в A и вершины b_1, b_2 в B , соответственно.

Сумма и произведение связаны между собой дистрибутивным законом

$$X \times (Y \sqcup Z) \cong X \times Y \sqcup X \times Z.$$

Пусть V – Θ -граф. Назовем *сопряженным графом* граф V^* , получаемый из V заменой меток всех вершин V на противоположные. Очевидно, что $(V^*)^* = V$.

Если A – конечный Θ -граф, то обозначим $n_3(A)$ ($n_3^+(A)$, $n_3^-(A)$) число всех его (соответственно, положительных, отрицательных) вершин степени 3. Заметим, что всегда $n_3^+(A) = n_3^-(A^*)$ и $n_3^-(A) = n_3^+(A^*)$, и, кроме того, $n_3(A) = n_3^+(A) + n_3^-(A)$.

ЛЕММА 1.1. Пусть A и B – конечные Θ -графы. Тогда

- 1) $n_3^+(A \times B) = n_3^+(A)n_3^+(B)$;
- 2) $n_3^-(A \times B) = n_3^-(A)n_3^-(B)$;
- 3) $n_3(A \times (B \sqcup B^*)) = n_3(A)n_3(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения вытекают из определения произведения Θ -графов, если учесть то, что вершине степени 3 в произведении $A \times B$ соответствует пара вершин, каждая из которых имеет степень 3. Второе утверждение получается из первого:

$$\begin{aligned} n_3(A \times (B \sqcup B^*)) &= n_3(A \times B) + n_3(A \times B^*) \\ &= n_3^+(A \times B) + n_3^-(A \times B) + n_3^+(A \times B^*) + n_3^-(A \times B^*) \\ &= n_3^+(A)n_3^+(B) + n_3^-(A)n_3^-(B) + n_3^+(A)n_3^-(B) + n_3^-(A)n_3^+(B) \\ &= (n_3^+(A) + n_3^-(A))(n_3^+(B) + n_3^-(B)) = n_3(A)n_3(B). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

1.2. Эйлеровы характеристики графов и подгрупп. Напомним некоторые топологические результаты о графах. Пусть X – некоторый связный граф, не являющийся деревом. Существует однозначно определенный подграф $c(X) \subseteq X$, называемый *ядром* X , который может быть охарактеризован следующими свойствами:

- 1) $c(X)$ – деформационный ретракт X ; в частности, если $v \in c(X) \subseteq X$ – некоторая вершина, то $\pi_1(X, v) \cong \pi_1(c(X), v)$;
- 2) $c(X)$ – наименьший подграф графа X со свойством 1).

Можно показать, что $c(X)$ представляет собой объединение всех минимальных нестягиваемых петель в графе X .

Отметим еще одно свойство $c(X)$. Очевидно, что в силу своей минимальности $c(X)$ не может содержать вершины степени 1, так как иначе единственное ребро, инцидентное этой вершине, можно было бы стянуть к другому его концу.

Если X является Θ -графом, то ясно, что и его ядро $c(X)$ также является Θ -графом (в случае дерева будем считать, что ядро пусто). Также можно считать, что ядро несвязного Θ -графа состоит из дизъюнктного объединения ядер его связных компонент. Так как переход к ядру коммутирует с морфизмами Θ -графов, то можно рассматривать его как функтор из категории $\Theta\text{-Graphs}$ в себя.

Пусть H – нетривиальная подгруппа Γ_0 . Положим $\Delta_H = H \setminus T$ (с отмеченной точкой $\{H\}$). Поскольку $\pi_1(\Delta_H, \{H\}) \cong H$, то граф Δ_H не является деревом, и можно рассмотреть его ядро $c(\Delta_H)$. Степень любой вершины Δ_H равна 3, следовательно, вершины $c(\Delta_H)$ имеют степень только 2 или 3. Вершины степени 3 назовем *точками ветвления*. Докажем следующую лемму, характеризующую конечно порожденные подгруппы $H \subseteq \Gamma_0$.

ЛЕММА 1.2. *Нетривиальная подгруппа $H \subseteq \Gamma_0$ конечно порождена тогда и только тогда, когда Θ -граф $c(\Delta_H)$ конечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторую вершину $v \in c(\Delta_H)$ и конечный набор l_i петель с началом и концом в v , который порождает $\pi_1(c(\Delta_H), v)$. Пусть $V \subseteq c(\Delta_H)$ – объединение всех этих петель. Ясно, что $v \in V$ и что V – конечный связный граф. Поскольку набор l_i порождает $\pi_1(c(\Delta_H), v)$, то можно считать, что любая петля l с началом и концом в v , представляющая некоторый элемент из $\pi_1(c(\Delta_H), v)$, целиком лежит в V . Более того, любая минимальная нестягиваемая петля также лежит в V . Из того, что $c(\Delta_H)$ есть объединение всех таких петель, следует равенство $V = c(\Delta_H)$, т.е. граф $c(\Delta_H)$ конечен.

В обратную сторону утверждение очевидно, так как $H \cong \pi_1(c(\Delta_H), v)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть $r_0(H)$ обозначает $\text{rank}(H) - 1$. Тогда*

$$n_3(c(\Delta_H)) = 2r_0(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, фундаментальная группа связного графа V является свободной, и если граф V конечен, то $\text{rank}(\pi_1(V, v)) = 1 - \chi(V)$, где $\chi(V)$ – эйлерова характеристика графа V (разность $|V^0| - |V^1|$ между числом вершин и числом ребер графа V). Таким образом, $\text{rank}(H) - 1 = -\chi(c(\Delta_H))$.

Для произвольного конечного связного графа рассмотрим

$$\sum_{v \in V^0} \deg(v).$$

Поскольку любое ребро $e \in V^1$ дает вклад 2 в эту сумму, то

$$\sum_{v \in V^0} \deg(v) = \sum_{e \in V^1} 2 = 2(|V^1| - |V^0| + |V^0|) = -2\chi(V) + \sum_{v \in V^0} 2.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{v \in V^0} (\deg(v) - 2) = -2\chi(V).$$

Граф $c(\Delta_H)$ имеет вершины только степени 2 и 3. Поэтому число точек ветвления $n_3(c(\Delta_H))$ равно $-2\chi(c(\Delta_H)) = 2r_0(H)$. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь, что происходит с графом Δ_H при переходе от подгруппы $H \subseteq \Gamma_0$ к сопряженной подгруппе aHa^{-1} , $a \in \Gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H – нетривиальная подгруппа Γ_0 и $a \in \Gamma$. Тогда

- 1) $\Delta_{aHa^{-1}} \cong \Delta_H$ (изоморфизм Θ -графов), если $a \in \Gamma_0$, и $\Delta_{aHa^{-1}} \cong \Delta_H^*$, если $a \in \Gamma \setminus \Gamma_0$;
- 2) $c(\Delta_{aHa^{-1}}) \cong c(\Delta_H)$, если $a \in \Gamma_0$, и $c(\Delta_{aHa^{-1}}) \cong c(\Delta_H)^*$, если $a \in \Gamma \setminus \Gamma_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_H: T \rightarrow \Delta_H$ – каноническая проекция. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{L_a} & T \\ p_H \downarrow & & \downarrow p_{aHa^{-1}} \\ \Delta_H & \xrightarrow{[a]} & \Delta_{aHa^{-1}}, \end{array}$$

где L_a – левый сдвиг на a , а отображение $[a]$ переводит вершину Ht в вершину $aHa^{-1}(at)$, ребро He в ребро $aHa^{-1}(ae)$. Поскольку $L_{a^{-1}}L_a = L_1 = \text{Id}$, то $[a^{-1}]: \Delta_{aHa^{-1}} \rightarrow \Delta_H$ будет обратным к $[a]$ отображением графов (но, вообще говоря, не Θ -графов).

Пусть $a \in \Gamma_0$. Заметим, что $L_a: T \rightarrow T$ в этом случае является автоморфизмом Θ -графа T (сохраняет метки вершин), поэтому и индуцированное отображение $[a]$ также есть изоморфизм Θ -графов. Если же $a \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, то L_a отображает любую положительную вершину T в отрицательную и наоборот. Поскольку канонические проекции сохраняют метки, то $[a]$ будет обращать метки вершин и, следовательно, задавать изоморфизм $\Delta_{aHa^{-1}} \cong \Delta_H^*$. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы показали, что если нетривиальные подгруппы H и K сопряжены в Γ_0 , то Θ -графы $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$ изоморфны. Верно и обратное: если Θ -графы $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$ изоморфны, то подгруппы H и K сопряжены в Γ_0 . Действительно, выберем положительную вершину v в $c(\Delta_H)$ (такая всегда существует). Группа $\pi_1(c(\Delta_H), v)$ может быть канонически вложена в Γ_0 . Вложение $\mu: \pi_1(c(\Delta_H), v) \rightarrow \Gamma_0$ осуществляется следующим образом: пусть $l = e_1 e_2 \dots e_{2k}$ – петля, представляющая элемент g из $\pi_1(c(\Delta_H), v)$, где e_i – последовательные ребра графа $c(\Delta_H)$. Положим $\mu(g) = \mu_1(e_1)\mu(e_2) \dots \mu(e_{2k})$, где $\mu(e_i)$ – метка ребра e_i . Нетрудно показать, что если вершина v соответствует орбите Ht , то $\mu(\pi_1(c(\Delta_H), v)) = t^{-1}Ht$. Поскольку v – положительная вершина, то сопрягающий элемент t должен быть из Γ_0 . Итак, класс сопряженности подгруппы H в Γ_0 определяется по Θ -графу $c(\Delta_H)$ (точнее, по его классу изоморфизма) однозначно. На самом деле, любой связный Θ -граф Δ , не являющийся деревом, однозначно

определяет класс сопряженности в Γ_0 некоторой подгруппы $H = H(c(\Delta))$ с помощью приведенной выше конструкции.

Обратно, если подгруппа $H \subseteq \Gamma_0$ порождена элементами $h_1, \dots, h_m$, то Θ -граф $c(\Delta_H)$ строится эффективно за конечное число шагов. Алгоритм здесь таков. Надо взять букет из m окружностей и разбить каждую из них на $|h_i|$ дуг, где $|h_i|$ означает длину h_i , т.е. расстояние от вершины 1 до вершины h_i в T . Присвоим каждой дуге метку так, чтобы при обходе i -й окружности читалось бы слово w_i в алфавите $S = \{x, y, z\}$, равное h_i в группе Γ . Заметим, что каждая окружность разбита на четное число дуг. Начальной вершине букета присвоим метку “+”. Остальным вершинам метки присваиваем так, чтобы плюсы и минусы чередовались. Затем последовательно склеиваем различные ребра с одинаковыми метками, выходящие из одной вершины (при этом каждый раз число ребер уменьшается на единицу). Последний шаг заключается в “отламывании” ребер, инцидентных вершинам степени 1.

Детали рассуждения мы оставляем читателю.

В дальнейшем будем обозначать через H^g подгруппу gHg^{-1} , сопряженную к $H \subseteq \Gamma_0$ при помощи элемента $g \in \Gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть H и K – некоторые подгруппы в Γ_0 . Тогда

$$\bigsqcup_{g \in H \backslash \Gamma_0 / K} \Delta_{H \cap K^g} \cong \Delta_H \times \Delta_K$$

(изоморфизм Θ -графов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм

$$f: \bigsqcup_{g \in H \backslash \Gamma_0 / K} \Delta_{H \cap K^g} \rightarrow \Delta_H \times \Delta_K$$

строится следующим образом. Зафиксируем некоторое множество представителей двойных смежных классов $g \in H \backslash \Gamma_0 / K$. Положим

$$\begin{aligned} f((H \cap K^g)t) &= (Ht, Kg^{-1}t), & t \in T^0, \\ f((H \cap K^g)e) &= (He, Kg^{-1}e), & e \in T^1. \end{aligned}$$

Корректность f проверяется непосредственно. Кроме того, так как $g \in \Gamma_0$, то f отображает положительные вершины в положительные, а отрицательные в отрицательные. Легко видеть, что f сохраняет метки ребер и отношение инцидентности, т.е. является морфизмом Θ -графов. Докажем инъективность и сюръективность f .

Инъективность f . Пусть $(Ht, Kg_1^{-1}t) = (Hs, Kg_2^{-1}s)$, $t, s \in T^0$. Отсюда $Ht = Hs$, $Kg_1^{-1}t = Kg_2^{-1}s$ и можно записать $t = hs = g_1kg_2^{-1}s$ для некоторых элементов $h \in H$, $k \in K$. Поскольку Γ_0 действует на вершинах дерева T одного знака свободно транзитивно, получаем, что $h = g_1kg_2^{-1}$, т.е. $Hg_2K = Hg_1K$. Поэтому $g_1 = g_2 = g$ и $h = gkg^{-1} \in H \cap K^g$. Инъективность для вершин доказана.

Сюръективность f . Пусть $(Ht, Ks) \in \Delta_H \times \Delta_K$ – некоторая вершина. Надо найти такие $t' \in T$ и некоторый двойной смежный класс $H \backslash g/K$, что $Ht' = Ht$,

$Kg^{-1}t' = Ks$. Отсюда $t' = ht = gks$ для некоторых $h \in H$ и $k \in K$. Вершины t и s можно рассматривать как элементы Γ , причем $ts^{-1} \in \Gamma_0$ (t и s как вершины должны быть одного знака). Из равенства $ht = gks$ вытекает, что $Hts^{-1}K = HgK$ и, значит, g как представитель двойного смежного класса определяется однозначно. Из последнего равенства вытекает также, что $ts^{-1} = h^{-1}gk$ для некоторых h и k . Положим $t' = ht = gks$. Это и будет нужная вершина дерева T .

Доказательство биективности отображения f для ребер T проводится совершенно аналогично. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть H и K две нетривиальные подгруппы Γ_0 . Имеет место следующая коммутативная диаграмма в категории $\Theta\text{-Graphs}$

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K)^*} c(\Delta_{H \cap K^g}) & \xrightarrow{J} & c(\Delta_H) \times c(\Delta_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{g \in H \setminus \Gamma_0 / K} \Delta_{H \cap K^g} & \cong & \Delta_H \times \Delta_K, \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают естественные вложения графов.

Здесь и далее в работе “*” при суммировании по двойным смежным классам означает, что берутся только те классы HgK , для которых группа $H \cap K^g$ бесконечна.

В доказательстве нуждается только утверждение о верхнем вложении J . Рассмотрим нетривиальную подгруппу $H \cap K^g$ (если такая существует). Пусть имеется минимальная нестягиваемая петля $l = e_1 e_2 \dots e_{2n}$ в $c(\Delta_{H \cap K^g})$. Поскольку при отображении f , построенном при доказательстве предложения 2, петля l переходит в произведение петель l_1 и l_2 , каждая из которых имеет ту же самую метку $\mu(e_1)\mu(e_2) \dots \mu(e_{2n})$, что и l , то петли l_1 и l_2 будут также минимальными нестягиваемыми петлями в соответствующих графах $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$. По свойствам ядер графов отсюда вытекает, что l_1 и l_2 целиком лежат в $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$. Так как $c(\Delta_{H \cap K^g})$ есть не что иное, как объединение всех минимальных нестягиваемых петель в $\Delta_{H \cap K^g}$, то предложение можно считать доказанным.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если в условиях предложения 3 подгруппы H и K конечно порождены, то существует только конечное число двойных смежных классов HgK таких, что подгруппа $H \cap K^g$ нетривиальна. При этом она будет конечно порожденной.

Действительно, рассмотрим вложение J . Графы $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$ конечны по лемме 1.2. Так как $c(\Delta_{H \cap K^g})$ не пусто, если $H \cap K^g$ — нетривиальная подгруппа, то число таких двойных смежных классов HgK будет конечным. Ясно к тому же, что граф $c(\Delta_{H \cap K^g})$ должен быть в этом случае конечным, поэтому по той же лемме 1.2 подгруппа $H \cap K^g$ конечно порождена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть H и K — две нетривиальные конечно порожденные подгруппы Γ_0 и пусть K^x — подгруппа, сопряженная с K при помощи

одной из образующих $x \in \Gamma$. Тогда

$$\sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K)^*} r_0(H \cap K^g) + \sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K^x)^*} r_0(H \cap (K^x)^g) \leq 2r_0(H)r_0(K). \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3 можно считать, что Θ -граф

$$\bigsqcup_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K)^*} c(\Delta_{H \cap K^g}) \sqcup \bigsqcup_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K^x)^*} c(\Delta_{H \cap (K^x)^g})$$

вложен в произведение

$$c(\Delta_H) \times (c(\Delta_K) \sqcup c(\Delta_{xKx^{-1}})) \cong c(\Delta_H) \times (c(\Delta_K) \sqcup c(\Delta_K)^*).$$

Сравним число точек ветвления в обоих графах

$$\begin{aligned} \sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K)^*} n_3(c(\Delta_{H \cap K^g})) + \sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K^x)^*} n_3(c(\Delta_{H \cap (K^x)^g})) \\ \leq n_3(c(\Delta_H) \times (c(\Delta_K) \sqcup c(\Delta_K)^*)). \end{aligned}$$

По следствию к лемме 1.2 левая часть неравенства равна

$$\sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K)^*} 2r_0(H \cap K^g) + \sum_{g \in (H \setminus \Gamma_0 / K^x)^*} 2r_0(H \cap (K^x)^g).$$

По этому же следствию и лемме 1.1 правая часть равна $4r_0(H)r_0(K)$. Сократив на 2, получаем нужное утверждение. Предложение доказано.

§ 2. Доказательство гипотезы Х. Нейман

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что группа G имеет тип NVF, если она является неэлементарной (не почти циклической) конечно порожденной почти свободной группой, т.е. группой, содержащей некоторую нециклическую конечно порожденную свободную подгруппу G_0 конечного индекса.

Вообще говоря, группы типа NVF можно рассматривать как объекты соответствующей категории, морфизмами которой являются вложения групп, но этот факт здесь не будет использован.

Как известно, любая группа G типа NVF обладает рациональной эйлеровой характеристикой $\chi(G)$, которая равна $(1 - \text{rank}(G_0))/|G : G_0|$, где $G_0 \subseteq G$ — свободная подгруппа конечного индекса $|G : G_0|$. Заметим, что для всех групп типа NVF эйлерова характеристика строго отрицательна. Для определенных в предыдущем разделе групп Γ и Γ_0 эйлерова характеристика принимает значение $\chi(\Gamma) = -\frac{1}{2}$ и $\chi(\Gamma_0) = -1$.

Возьмем некоторую группу G типа NVF. Напомним конструкцию коммутативного ассоциативного кольца с единицей $D(G)$, ассоциированного с группой G , которая подробно описана в [1] для класса бесконечных гиперболических (в смысле Громова) групп, и, в частности, для групп типа NVF.

Как $\mathbb{Z}$ -модуль $D(G)$ состоит из конечных сумм вида $\sum n_i [H_i]$, где все n_i – целые числа, а все $[H_i]$ – классы сопряженности в группе G бесконечных конечно порожденных подгрупп H_i , т.е. классы сопряженности таких подгрупп составляют аддитивный базис кольца $D(G)$. Произведение двух базисных элементов определяется по следующей формуле (подгруппы H и K , представляющие соответствующие классы сопряженности, считаются фиксированными)

$$[H][K] = \sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} [H \cap K^g].$$

Произведение по аддитивности можно распространить на $D(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [1] показано, что это умножение корректно определено, т.е. не зависит от выбора представителей классов сопряженности. Кроме того, сумма всегда будет конечной и состоять из классов сопряженности бесконечных конечно порожденных подгрупп группы G . Это умножение обладает свойствами ассоциативности и коммутативности. Единицей кольца $D(G)$ служит класс $[G]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Умножение в кольце $D(\Gamma_0)$ прямо связано с умножением Θ -графов. Рассмотрим две бесконечные конечно порожденные подгруппы H, K в Γ_0 и соответствующие им графы Δ_H, Δ_K (зависящие только от классов сопряженности $[H], [K]$), а также их ядра $c(\Delta_H)$ и $c(\Delta_K)$, которые будут конечными по лемме 1.2. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – все связные компоненты произведения $c(\Delta_H) \times c(\Delta_K)$, не являющиеся деревьями. Θ -графам $c(\Delta_1), \dots, c(\Delta_m)$ однозначно соответствуют классы сопряженности $[H_1], \dots, [H_m]$ некоторых конечно порожденных подгрупп в Γ_0 (см. замечание после предложения 1). Сумма всех этих классов сопряженности в кольце $D(\Gamma_0)$ равна произведению $[H][K]$.

С другой стороны, можно показать, что кольцо $D(\Gamma_0)$ (и аналогичные кольца $D(G)$) является группой Гротендика K_0 некоторой категории, а именно, категории конечных Θ -графов, совпадающих со своими ядрами.

Каждая конечно порожденная подгруппа H группы G будет почти свободной группой с эйлеровой характеристикой

$$\chi(H) = \chi(H \cap G_0) / |H : H \cap G_0|$$

(очевидно, что индекс $|H : H \cap G_0|$ конечен). Поскольку на классе сопряженности подгруппы H значение эйлеровой характеристики постоянно, то можно определить рациональное число $\chi([H])$ для всего класса сопряженности подгруппы H . Заметим, что для бесконечной конечно порожденной подгруппы H число $\chi(H)$ равно нулю в том и только том случае, когда H – почти циклическая подгруппа, в противном случае, $\chi(H) < 0$.

Продолжим χ по аддитивности до гомоморфизма абелевых групп $\chi: D(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел), который мы также будем называть *эйлеровой характеристикой*. Приведенной эйлеровой характеристикой будем называть гомоморфизм абелевых групп $r: D(G) \rightarrow \mathbb{Q}$, отличающийся от эйлеровой характеристики лишь нормирующим множителем $1/\chi([G])$ (таким образом, $r([H])$ равно $\chi(H)/\chi(G)$). В частности, если G – свободная группа ранга 2, а H – ее нетривиальная (бесконечная) конечно порожденная подгруппа, то

$$r([H]) = -\chi([H]) = \text{rank}(H) - 1 = r_0(H).$$

ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА Х. НЕЙМАН. Пусть G – группа типа NVF, G_0 – ее свободная подгруппа (минимального) конечного индекса, и $[H], [K] \in D(G)$. Тогда выполнено следующее неравенство (неравенство Х. Нейман)

$$r([H][K]) \leq |\chi(G_0)|r([H])r([K]). \quad (2.1)$$

В более подробной записи

$$\sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} r([H \cap K^g]) \leq |\chi(G_0)|r([H])r([K]). \quad (2.2)$$

Связь этой гипотезы с классической гипотезой Х. Нейман об оценке ранга пересечения двух нетривиальных конечно порожденных подгрупп H, K свободной группы F и ее более сильным вариантом, предложенным У. Нейманом, уже отмечалась во введении.

Будем говорить, что для группы G типа NVF выполнено неравенство Х. Нейман, если неравенство (2.1) выполнено в кольце $D(G)$.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Для группы $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ выполнено неравенство Х. Нейман

$$r([H][K]) \leq r([H])r([K]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено в два шага.

Шаг 1. Будем работать пока с произвольной группой G типа NVF. Выберем подгруппы H и K , представляющие классы сопряженности $[H], [K]$. Покажем, как свести доказательство неравенства (2.1) к доказательству того же неравенства для $[L]$ и $[P]$, где L, P – некоторые подгруппы конечного индекса в H и K , соответственно.

ЛЕММА 2.1. Пусть G – группа типа NVF; H и K – две ее бесконечные конечно порожденные подгруппы и L – подгруппа конечного индекса в H . Тогда

$$\sum_{\gamma \in (L \setminus G/K)^*} \chi(L \cap K^\gamma) = |H : L| \sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} \chi(H \cap K^g). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем представители g множества двойных смежных классов $H \setminus G/K$. Для данного g положим $K_g = H \cap K^g \subseteq H$. Пусть $T(g)$ – множество представителей двойных смежных классов $L \setminus H/K_g$ в подгруппе H . Так как индекс подгруппы L в H конечен, то $T(g)$ – конечное множество для любого g .

Непосредственной проверкой убеждаемся, что произвольный двойной смежный класс HgK представляется в следующем виде:

$$HgK = \bigsqcup_{h \in T(g)} LhgK.$$

Пусть $h \in T(g)$. Рассмотрим подгруппу

$$L \cap K^{hg} = L \cap hgK(hg)^{-1} = h(h^{-1}Lh \cap K^g)h^{-1}.$$

Индекс $|H : h^{-1}Lh|$ конечен для любого $h \in H$. Поскольку

$$h^{-1}Lh \cap K^g = H \cap h^{-1}Lh \cap K^g = h^{-1}Lh \cap H \cap K^g = h^{-1}Lh \cap K_g$$

и $K_g \subseteq H$, то индекс $|K_g : h^{-1}Lh \cap K_g|$ также конечен. Следовательно, подгруппа $L \cap K^{hg} \cong h^{-1}Lh \cap K_g$ бесконечна тогда и только тогда, когда бесконечна подгруппа K_g . Отсюда вытекает равенство

$$\sum_{\gamma \in (L \setminus G/K)^*} \chi(L \cap K^\gamma) = \sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} \sum_{h \in T(g)} \chi(h^{-1}Lh \cap K_g).$$

Так как индекс $|K_g : K_g \cap h^{-1}Lh| < \infty$, то по известной формуле для эйлеровых характеристик

$$\chi(h^{-1}Lh \cap K_g) = |K_g : K_g \cap h^{-1}Lh| \chi(K_g) = |K_g : K_g \cap h^{-1}Lh| \chi(H \cap K^g).$$

Подсчитаем сумму

$$\sum_{h \in T(g)} |K_g : K_g \cap h^{-1}Lh|. \quad (2.4)$$

Для этого рассмотрим правое действие подгруппы $K_g \subseteq H$ на конечном множестве правых смежных классов $L \setminus H$

$$R_k : Lh \rightarrow L(hk^{-1}), \quad k \in K_g.$$

Стабилизатор точки Lh есть подгруппа $K_g \cap h^{-1}Lh$. Точки Lh_1 и Lh_2 принадлежат одной K_g -орбите в том и только том случае, когда $Lh_1K_g = Lh_2K_g$, т.е. множество $T(g)$ параметризует орбиты этого действия. Поэтому сумма (2.4) есть в точности число точек в множестве $L \setminus H$, равное индексу $|H : L|$. Итак,

$$\sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} \sum_{h \in T(g)} \chi(h^{-1}Lh \cap K_g) = \sum_{g \in (H \setminus G/K)^*} |H : L| \chi(H \cap K^g).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо следующее равенство $r([L][K]) = |H : L| r([H][K])$.*

Непосредственно получается из (2.3) умножением на $1/\chi(G)$.

Пусть $L \subseteq H$ и $P \subseteq K$ — подгруппы конечного индекса в H и K такие, что выполнено неравенство $r([L][P]) \leq |\chi(G_0)| r([L]) r([P])$. Поскольку умножение в кольце $D(G)$ коммутативно, то по предыдущему следствию

$$r([L][P]) = |H : L| |K : P| r([H][K]).$$

Очевидно, что справедливо равенство

$$r([L]) r([P]) = |H : L| |K : P| r([H]) r([K]).$$

Таким образом, неравенство $r([H][K]) \leq |\chi(G_0)| r([H]) r([K])$ также выполняется.

Шаг 2. Предыдущие рассуждения показывают, что в группе Γ можно доказывать неравенство Х. Неймана для классов сопряженности подгрупп $L = H \cap \Gamma_0$ и $P = K \cap \Gamma_0$. Поскольку Γ_0 – свободная группа ранга 2, то подгруппы L, P будут бесконечными конечно порожденными свободными группами.

Необходимо показать, что

$$\sum_{g \in (L \setminus \Gamma / P)^*} r([L \cap P^g]) \leq r([L])r([P]).$$

Поскольку для $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ эйлерова характеристика равна $-\frac{1}{2}$, то для любой бесконечной конечно порожденной свободной подгруппы $W \subset \Gamma$

$$r([W]) = \chi(W)/\chi(\Gamma) = 2(\text{rank}(W) - 1) = 2r_0(W).$$

Таким образом, надо показать, что

$$\sum_{g \in (L \setminus \Gamma / P)^*} r_0(L \cap P^g) \leq 2r_0(L)r_0(P).$$

Рассмотрим левую часть этого неравенства. Обозначим через U подмножество представителей g двойных смежных классов $L \setminus \Gamma / K$ таких, что $L \cap P^g$ – бесконечная подгруппа (т.е. $g \in (L \setminus \Gamma / P)^* \Leftrightarrow g \in U$). Положим

$$U_0 = U \cap \Gamma_0, \quad U_1 = U \cap \Gamma_0 x = U \setminus U_0$$

(x – один из порождающих Γ).

ЛЕММА 2.2. (i) U_0 – множество представителей g всех двойных смежных классов $L \setminus \Gamma_0 / P$ в группе Γ_0 таких, что подгруппа $L \cap P^g$ бесконечна.

(ii) $U_1 x^{-1} \subset \Gamma_0$ – множество представителей g всех двойных смежных классов $L \setminus \Gamma_0 / P^x$ в группе Γ_0 таких, что подгруппа $L \cap (P^x)^g$ бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно. Докажем утверждение (ii). Поскольку $U_1 \subset \Gamma_0 x$, то $U_1 x^{-1} \subset \Gamma_0$. Предположим, что $Lu_1 x^{-1} P^x = Lu_2 x^{-1} P^x$. Отсюда следует, что двойные смежные классы $Lu_1 P$ и $Lu_2 P$ совпадают, т.е. $u_1 = u_2$.

Пусть $g \in U_1$. Тогда

$$L \cap g x^{-1} P^x x g^{-1} = L \cap P^g.$$

Получаем, что $g x^{-1} \in (L \setminus \Gamma_0 / P)^*$ тогда и только тогда, когда $g \in U_1$. Лемма доказана.

По этой лемме

$$\sum_{g \in (L \setminus \Gamma / P)^*} r_0(L \cap P^g) = \sum_{g \in (L \setminus \Gamma_0 / P)^*} r_0(L \cap P^g) + \sum_{g \in (L \setminus \Gamma_0 / P^x)^*} r_0(L \cap (P^x)^g).$$

Нужная оценка теперь вытекает из неравенства (1.1), доказанного в предложении 4. Теорема доказана.

Назовем элемент $d = \sum n_i [H_i]$ кольца $D(G)$ неотрицательным (неположительным), если все $n_i \geq 0$ ($n_i \leq 0$). Обозначим множество неотрицательных (неположительных) элементов $D(G)_+ (D(G)_-)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $d_1, d_2 \in D(\Gamma)_+$ – два неотрицательных элемента. Тогда $r(d_1 d_2) \leq r(d_1) r(d_2)$.

Доказательство очевидно.

Теорема 1 позволяет получить более общий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа G типа NVF содержит свободное произведение $\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ в качестве подгруппы конечного индекса. Тогда для группы G выполнено неравенство Х. Неймана (с $|\chi(G_0)| = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что имеется вложение $j: \Gamma \rightarrow G$, и отождествим группу Γ с ее образом при этом вложении. Классы сопряженности подгрупп в группе G и группе Γ будем обозначать, соответственно, $[-]_G$ и $[-]_\Gamma$, а приведенные эйлеровы характеристики – r_G и r_Γ .

В работе [1] показано, что гомоморфизм абелевых групп $\pi: D(G) \rightarrow D(\Gamma)$ такой, что

$$\pi([H]_G) = \sum_{g \in (\Gamma \backslash G/H)^*} [\Gamma \cap H^g]_\Gamma \quad \forall [H]_G \in D(G),$$

является в действительности гомоморфизмом колец (отметим, что множество $\Gamma \backslash G/H = (\Gamma \backslash G/H)^*$ конечно, поскольку Γ имеет конечный индекс в G).

Докажем равенство

$$r_\Gamma(\pi([H]_G)) = r_G([H]_G). \quad (2.5)$$

Имеем

$$r_\Gamma(\pi([H]_G)) = \chi(\Gamma)^{-1} \sum_{g \in \Gamma \backslash G/H} \chi(\Gamma \cap H^g) = \chi(\Gamma)^{-1} \sum_{g \in \Gamma \backslash G/H} \chi(g^{-1} \Gamma g \cap H).$$

Подгруппа $g^{-1} \Gamma g \cap H$ имеет конечный индекс в H . Рассматривая правое действие подгруппы H на множестве правых смежных классов $\Gamma \backslash G$ (см. доказательство леммы 2.1.), получаем, что

$$\sum_{g \in \Gamma \backslash G/H} \chi(g^{-1} \Gamma g \cap H) = \sum_{g \in \Gamma \backslash G/H} |H : g^{-1} \Gamma g \cap H| \chi(H) = |G : \Gamma| \chi(H).$$

Следовательно,

$$r_\Gamma(\pi([H]_G)) = |G : \Gamma| \chi(H) / \chi(\Gamma) = \chi(H) / \chi(G) = r_G([H]_G).$$

Пусть теперь $[H]_G, [K]_G \in D(G)$. Воспользуемся гомоморфизмом π .

$$r_G([H]_G \cdot [K]_G) = r_\Gamma(\pi([H]_G \cdot [K]_G)) = r_\Gamma(\pi([H]_G) \cdot \pi([K]_G)).$$

Поскольку $\pi([H]_G)$ и $\pi([K]_G)$ принадлежат $D(\Gamma)_+$, то, по следствию к лемме 2.2 и равенству (2.5),

$$r_G(\pi([H]_G) \cdot \pi([K]_G)) \leq r_\Gamma(\pi([H]_G)) r_\Gamma(\pi([K]_G)) = r_G([H]_G) r_G([K]_G).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если для группы H типа NVF выполнено неравенство X Неймана, то это неравенство выполнено и для любой группы G , в которую группа H вложена как подгруппа конечного индекса.

2.2. Конструкция банаховой алгебры $\hat{A}(G)$. В этом разделе группа G предполагается группой типа NVF, для которой выполнены условия теоремы 2. Рассмотрим кольцо $D(G)$. В этом кольце имеется идеал $E(G)$, состоящий из всевозможных конечных сумм вида $\sum n_i[E_i]$, в которых все подгруппы E_i – бесконечные почти циклические подгруппы в G . Утверждение, что $E(G)$ – идеал, легко вытекает из формулы умножения в $D(G)$. Фактор-кольцо $D(G)/E(G)$ изоморфно кольцу $DN(G)$, определенному в [1]. Кольцо $DN(G)$ как $\mathbb{Z}$ -модуль свободно порождается всеми классами сопряженности $[H]$ неэлементарных конечно порожденных подгрупп $H \subseteq G$. Произведение двух классов определяется по формуле

$$[H][K] = \sum_{g \in (\Gamma \backslash G/H)^{**}} [H \cap K^g],$$

в которой “**” означает, что берутся только те двойные смежные классы HgK , для которых группа $H \cap K^g$ неэлементарна.

На идеале $E(G)$ функции χ и r тождественно равны 0. С другой стороны, χ и r очевидным образом определяются на кольце $DN(G)$. Заметим, что $r([H]) > 0$ для любого $[H] \in DN(G)$.

Пусть $A(G) = \mathbb{C} \otimes DN(G)$, т.е. $\mathbb{C}$ -алгебра $A(G)$ состоит из конечных сумм вида $\sum c_i[H_i]$, $c_i \in \mathbb{C}$.

Для любого $a = \sum c_i[H_i] \in A(G)$ положим $\|a\| = \sum |c_i| r([H_i])$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Норма $\|\cdot\|$ является мультипликативной на алгебре $A(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\|a\| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ для любых $a \in A(G)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Неравенство $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ также легко проверяется непосредственно. Остается проверить, что норма мультипликативна. Докажем сначала, что $\|[H][K]\| \leq \|[H]\| \times \|[K]\|$ для любых $[H], [K] \in A(G)$.

Действительно,

$$\|[H][K]\| = \sum_{g \in (\Gamma \backslash G/H)^{**}} r([H \cap K^g]) \leq r([H])r([K]) = \|[H]\| \cdot \|[K]\|$$

по неравенству Х. Неймана.

Пусть теперь $a = \sum_i \alpha_i[H_i]$ и $b = \sum_j \beta_j[K_j]$ лежат в $A(G)$. Тогда

$$a \cdot b = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [H_i][K_j].$$

Из уже доказанных свойств нормы вытекает

$$\|a \cdot b\| \leq \sum_{i,j} |\alpha_i| \cdot |\beta_j| \cdot \|[H_i][K_j]\| \leq \sum_{i,j} |\alpha_i| \cdot |\beta_j| \cdot \|[H_i]\| \cdot \|[K_j]\| = \|a\| \cdot \|b\|.$$

Единицей в $A(G)$ является $[G]$. Очевидно, что $\|[G]\| = 1$. Предложение доказано.

Коммутативная унитарная банахова алгебра $\hat{A}(G)$ определяется как пополнение $A(G)$ по норме $\|\cdot\|$. Она состоит из всех таких бесконечных сумм $\hat{a} = \sum c_i[H_i]$, что ряд $\sum |c_i| r([H_i])$ сходится (к норме $\|\hat{a}\|$).

Список литературы

1. *Semenov Yu. S.* Rings associated with hyperbolic groups // Comm. Algebra. 1994. V. 22 (15). P. 6323–6347.
2. *Neumann W.* On intersections of finitely generated subgroups of free groups // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1456. P. 161–170.
3. *Neumann H.* On intersections of finitely generated subgroups of free groups // Publ. Math. Debrecen. 1955–56. V. 4. P. 186–189; 1957–58. V. 5. P. 128.

Московский государственный
университет путей сообщения

Поступила в редакцию
16.01.1996