Общероссийский математический портал

В. А. Гриценко, В. В. Никулин, Модулярные формы Игузы и “самые простые” лоренцевы алгебры Каца–Муди, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 11, 27–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 03:17:50

УДК 512.818.4+512.817.72+511.334+512.774

В. А. Гриценко, В. В. Никулин

Модулярные формы Игузы и “самые простые” лоренцевы алгебры Каца–Мули

Находится автоморфная коррекция лоренцевых алгебр Каца–Мули с простейшими обобщенными матрицами Картана ранга 3

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для $A_{1,0}$ эта коррекция, являющаяся обобщенной супералгеброй Каца–Мули, задается $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ -модулярной формой Игузы $\chi_{35}(Z)$ веса 35, и для $A_{1,1}$ – некоторой зигелевой модулярной формой $\tilde{\Delta}_{30}(Z)$ веса 30 относительно конгруэнц-подгруппы уровня 2 группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$. Для форм $\chi_{35}(Z)$ и $\tilde{\Delta}_{30}(Z)$ находятся разложения в бесконечное произведение и вычисляются кратности всех корней соответствующих обобщенных лоренцевых супералгебр Каца–Мули. Эти кратности определяются коэффициентами Фурье некоторых форм Якоби веса 0 и индекса 1.

Наш метод построения форм $\chi_{35}(Z)$ и $\tilde{\Delta}_{30}(Z)$ естественно приводит к прямой конструкции зигелевых модулярных форм с дивизорами, являющимися поверхностями Гумберта фиксированного дискриминанта, в виде бесконечных произведений и рядов. Геометрическое построение таких форм дано ван дер Геером в 1982 г.

Показывая перспективу дальнейших исследований, мы приводим список симметричных гиперболических обобщенных матриц Картана A , имеющих ранг 3, эллиптический или параболический тип, решеточный вектор Вейля и содержащих параболическую подматрицу $\tilde{A}_1$.

Библиография: 41 название.

0. Введение

Ключевым моментом данной статьи является нахождение автоморфной коррекции лоренцевой алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ с обобщенной матрицей Картана

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общепризнанно, что данная матрица является простейшей гиперболической (т.е. с ровно одним отрицательным квадратом) обобщенной матрицей Картана ранга ≥ 3 .

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта DFG grant Rus 17/108/95 Гейдельбергского университета.

Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований и гранта Американского математического общества.

Она имеет наименьшие возможные коэффициенты для матриц такого типа. Имеется много публикаций, в которых рассматривалась данная алгебра Каца–Мули $\mathfrak{g}(A_{1,0})$. Мы отметим только статью Фейнгольда и Френкеля [9]. В этой статье была предпринята первая попытка связать эту алгебру с теорией зигелевых модулярных форм.

Группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ является группой целочисленных ортогональных преобразований некоторой целочисленной квадратичной формы сигнатуры $(2, 1)$ и изоморфна расширенной модулярной группе $PGL_2(\mathbb{Z})$. Тожество Вейля–Каца для знаменателя алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ есть

$$\sum_{g \in PGL_2(\mathbb{Z})} \det(g) \exp(2\pi i \operatorname{tr}((gPg^t - P)Z)) = \sum_{\alpha > 0} (1 - \exp(2\pi i \operatorname{tr}(\alpha Z)))^{\operatorname{mult}(\alpha)}, \quad (0.1)$$

где $P = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ – матрица из верхней полуплоскости Зигеля $\mathbb{H}_2$, и произведение берется по всем положительным корням алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ (см. [9]). К сожалению, точная формула для кратностей корней $\operatorname{mult}(\alpha)$ не известна. Наша точка зрения на теорию лоренцевых алгебр Каца–Мули (см. [38], [39], [19]–[21], где мы также используем пионерские идеи Борчердса [2]–[7]), заключается в том, что лоренцевы алгебры Каца–Мули так называемого эллиптического и параболического типа с решеточным вектором Вейля (такие алгебры можно рассматривать как “наиболее симметричные”) имеют автоморфную коррекцию. Это означает, что для алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}(A)$ этого типа существует обобщенная супералгебра Каца–Мули без нечетных вещественных простых корней $\mathfrak{g}(A)'$ такая, что $\mathfrak{g}(A) \subset \mathfrak{g}(A)'$, обе эти алгебры имеют одинаковый ранг, одинаковые системы вещественных корней (в частности, любой вещественный корень четен) и группу Вейля, но алгебра $\mathfrak{g}(A)'$ имеет более хорошие автоморфные свойства для ее функции знаменателя Вейля–Каца–Борчердса $\Phi(z)$. Последнее означает, что $\Phi(z)$ является автоморфной формой на классической эрмитовой симметрической области Ω типа IV, которую следует рассматривать как комплексификацию гиперболического пространства $\mathcal{L}$, в котором действует группа Вейля W алгебры $\mathfrak{g}(A)$. (Группа Вейля лоренцевой алгебры Каца–Мули является подгруппой ортогональной группы сигнатуры $(n, 1)$.) Автоморфная форма $\Phi(z)$ инвариантна с некоторым весом относительно арифметической ортогональной группы сигнатуры $(n + 1, 2)$, которая содержит группу Вейля W .

Отметим, что функция знаменателя лоренцевой алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}(A)$ инвариантна только относительно гиперболической ортогональной группы сигнатуры $(n, 1)$. (Например, функция (0.1) содержит слишком мало коэффициентов Фурье, чтобы быть зигелевой модулярной формой.) Поэтому откорректированную алгебру следует рассматривать как имеющую значительно большую группу симметрий, чем обычная лоренцева алгебра Каца–Мули. Это первое преимущество понятия автоморфной коррекции.

С точки зрения теории автоморфных форм форма, реализующая автоморфную коррекцию, является автоморфной формой с очень специальным разложением Фурье, связанным с обобщенной матрицей Картана A (см. общую постановку в (3.3), (3.4) и [39], [19]). Используя автоморфные свойства формы $\Phi(z)$, можно найти разложение $\Phi(z)$ в бесконечное произведение и вычислить кратности корневых пространств откорректированной алгебры $\mathfrak{g}(A)'$. Это второе преимущество этой алгебры.

Удивительным образом, иногда автоморфная коррекция строится при помощи некоторых хорошо известных классических зигелевых модулярных форм. В теории зигелевых модулярных форм рода 2 существует очень важная исключительная модулярная форма $\Delta_5(Z)$ веса 5 с нетривиальным характером $v: \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \{\pm 1\}$. Эта функция определяется как произведение всех четных тэта-констант рода 2 (см. ниже (1.6)). Эта форма дает автоморфную коррекцию алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}(A_{1,\Pi})$, где

$$A_{1,\Pi} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

– другая простейшая гиперболическая симметричная обобщенная матрица Картана ранга 3. Это доказано в [19], [20], где были найдены первые примеры автоморфной коррекции эллиптических лоренцевых алгебр Каца–Мули. Там было доказано, что имеет место разложение в бесконечное произведение

$$\Delta_5(Z) = (qrs)^{1/2} \prod_{\substack{n,l,m \in \mathbb{Z} \\ (n,l,m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f(4nm-l^2)}. \quad (0.2)$$

Целочисленные показатели $f(4nm-l^2)$ определяются коэффициентами Фурье канонической слабой формы Якоби веса 0 и индекса 1 (см. ниже (1.8)–(1.9)). В (0.2) мы использовали переменные $q = \exp(2\pi i z_1)$, $r = \exp(2\pi i z_2)$, $s = \exp(2\pi i z_3)$.

Для экспонент $f(4nm-l^2)$ имеется формула, выражающая их через так называемые *числа Коэна*. Это дает точную формулу для *кратностей* $f(4nm-l^2)$ корневых подпространств откорректированной алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,\Pi})'$.

В точности та же ситуация имеет место для самой простой лоренцевой алгебры Каца–Мули $\mathfrak{g}(A_{1,0})$. Один из основных результатов данной статьи заключается в том, что автоморфная коррекция алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ задается зигелевой модулярной формой $\chi_{35}(Z)$ наименьшего нечетного веса. Эта форма веса 35 была построена Игузой в [23] как линейная комбинация всех тройных “азигий” тэта-констант. Игуза доказал, что всякая зигелева модулярная форма (с тривиальным характером) нечетного веса делится на форму $\chi_{35}(Z)$. Мы называем $\chi_{35}(Z)$ *модулярной формой Игузы*.

Чтобы доказать, что $\chi_{35}(Z)$ дает автоморфную коррекцию алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ и найти ее разложение в бесконечное произведение, мы используем представление формы $\chi_{35}(Z)$ с помощью $\Delta_5(Z) = \Delta_5(z_1, z_2, z_3)$. Мы показываем, что с точностью до мультипликативной константы $\chi_{35}(Z)$ есть частное

$$\chi_{35}(Z) = \frac{\chi_{75}(Z)}{\Delta_5(Z)^8}, \quad (0.3)$$

где модулярная форма $\chi_{75}(Z)$ веса 75 задается произведением

$$\begin{aligned} \chi_{75}(Z) &:= \prod_{a,b,c \bmod 2} \Delta_5\left(\frac{z_1+a}{2}, \frac{z_2+b}{2}, \frac{z_3+c}{2}\right) \\ &\times \prod_{a \bmod 2} \Delta_5\left(\frac{z_1+a}{2}, z_2, 2z_3\right) \Delta_5\left(2z_1, z_2, \frac{z_3+a}{2}\right) \\ &\times \Delta_5(2z_1, 2z_2, 2z_3) \prod_{b \bmod 2} \Delta_5\left(2z_1, -z_1+z_2, \frac{z_1-2z_2+z_3+b}{2}\right). \end{aligned} \quad (0.4)$$

Данную формулу можно рассматривать как применение к $\Delta_5(Z)$ “мультипликативного” оператора Гекке $T(2)$. Для доказательства (0.3) мы сравниваем дивизоры $\chi_{75}(Z)$ и $\chi_{35}(Z)$ и используем принцип Кёхера. Это также дает новую конструкцию формы $\chi_{35}(Z)$ и доказывает, что $\chi_{35}(Z)$ является зигелевой модулярной формой наименьшего веса. Используя (0.2)–(0.4), получаем аналогичное (0.2) разложение $\chi_{35}(Z)$ в бесконечное произведение. Используя это разложение, нетрудно доказать, что $\chi_{35}(Z)$ доставляет автоморфную коррекцию алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,0})$.

Дивизоры модулярных форм $\Delta_5(Z)$ и $\chi_{35}(Z)$ хорошо известны. Дивизор $\Delta_5(Z)$ является “диагональю” $H_1 = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}_2 \right\}$ факторпространства $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}_2$. Дивизор H_1 , являющийся так называемой поверхностью Гумберта дискриминанта 1, дает многообразие модулей произведений двух эллиптических кривых, и дополнение к нему в $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}_2$ дает многообразие модулей кривых рода 2. (Это геометрическое описание объясняет приложение модулярной формы $\Delta_5(Z)$ в теории струн.) Дивизор модулярной формы Игузы $\chi_{35}(Z)$ является суммой с единичными кратностями рассмотренной выше гумбертовой поверхности H_1 и гумбертовой поверхности H_4 дискриминанта 4.

Рассматривая дивизоры, получаем, что частное

$$\tilde{\Delta}_{30}(Z) = \chi_{35}(Z) / \Delta_5(2Z)$$

является голоморфной модулярной формой относительно конгруэнц-подгруппы

$$\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Оказывается, эта форма дает автоморфную коррекцию алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A_{1,1})$ с другой очень простой обобщенной матрицей Картана

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя (0.2)–(0.4), получаем разложение в бесконечное произведение функции знаменателя $\tilde{\Delta}_{30}(Z)$ алгебры $\mathfrak{g}(A_{1,1})'$ и находим кратности ее корней.

Можно рассмотреть вторую форму Игузы

$$\chi_{30}(Z) = \chi_{35}(Z) / \Delta_5(Z),$$

которая является зигелевой модулярной формой веса 30 с нетривиальным характером $v: \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \{\pm 1\}$. Дивизор этой функции равен H_4 . Ее разложение в бесконечное произведение получается из (0.2)–(0.4). Мы думаем, что $\chi_{30}(2Z)$ дает автоморфную коррекцию лоренцевой супералгебры Каца–Муди с симметризованной обобщенной матрицей Картана

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

или с соответствующей обобщенной матрицей Картана

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и множеством нечетных индексов $\{2\} \subset \{1, 2, 3\}$. Матрица B (и соответствующая ей матрица A) является скрученным вариантом обобщенной матрицы Картана $A_{1,0}$ (см. [26], [27] и [41] по поводу теории супералгебр Каца–Мули). В данной статье мы не рассматриваем автоморфную коррекцию лоренцевых супералгебр Каца–Мули, но данный пример показывает, что они естественным образом появляются в данном контексте. Конечно, эти рассмотрения показывают, что четыре рассмотренные алгебры Каца–Мули очень тесно связаны.

Аналогично (0.4), применяя операторы Гекке $T(p)$ ($p > 2$ простое) к $\Delta_5(Z)$, получаем зигелевы модулярные формы $F^{(p^2)}(Z)$, чьи дивизоры являются поверхностями Гумберта H_{p^2} дискриминанта p^2 , и их разложение в бесконечные произведения и суммы (см. теоремы 1.2 и 1.7 из дополнения А). Заметим, что модулярная форма $F^{(p^2)}(Z)$ равна конечному произведению (или частному) известных бесконечных рядов. Это дает удовлетворительные формулы для коэффициентов Фурье этой формы.

Ван дер Геер (см. [11], [12]) при помощи геометрических рассуждений доказал существование для любого натурального D зигелевой модулярной формы $F^{(D)}(Z)$ с дивизором, являющимся гумбертовой поверхностью H_D . Теорема 1.7 дает прямую конструкцию модулярной формы $F^{(p^2)}(Z)$ с дивизором H_{p^2} . В дополнении В, используя бесконечные произведения типа (0.2), мы даем конструкцию и зигелевых модулярных форм с дивизорами H_D , где D не является полным квадратом.

В дополнении А получены общие результаты, которые связывают мультипликативные операторы Гекке, действующие на зигелевы модулярные формы, с операторами Гекке, действующими на формы Якоби. Это важно в теории подъема форм Якоби (до зигелевых модулярных форм). В частности, мы показываем, что показатели в разложениях в бесконечные произведения всех рассмотренных выше модулярных форм $F^{(D)}(Z)$ связаны с коэффициентами Фурье форм Якоби веса 0 и индекса 1.

В [19] и [21] была указана интерпретация функции $\Delta_5(Z)$ с точки зрения зеркальной симметрии для поверхностей $K3$ и как дискриминанта многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием $S \subset L_{K3}$ на решетку Пикара, где решетка $(S)^\perp_{L_{K3}}$ изоморфна решетке $2U(4) \oplus \langle -2 \rangle$. Здесь U обозначает четную унимодулярную решетку сигнатуры $(1, 1)$.

Форма Игузы $\chi_{35}(Z)$ выполняет аналогичную роль для многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием $S = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1) \subset L_{K3}$ на решетку Пикара. Здесь $(S)^\perp_{L_{K3}} \cong 2U \oplus \langle -2 \rangle$.

Используя автоморфные формы $F^{(D)}(Z)$ с дивизорами H_D , можно задать подмногообразия модулей коразмерности один $\mathcal{M}_{S_1 \subset L_{K3}} \subset \mathcal{M}_{S \subset L_{K3}}$, где $S \subset S_1 \subset L_{K3}$ и $\dim S_1 = \dim S + 1$, одним автоморфным уравнением. Здесь $S \subset L_{K3}$ — одно из двух рассмотренных выше условий на решетку Пикара поверхностей $K3$. Это дает интерпретацию автоморфных форм $F^{(D)}(Z)$ с точки зрения многообразий модулей поверхностей $K3$. Было бы интересно понять разложения форм $F^{(D)}(Z)$ в бесконечные произведения и суммы с точки зрения этой алгебро-геометрической конструкции. В этой связи см. [21].

В § 4 мы даем полный список из 13 симметричных гиперболических обобщенных матриц Картана A эллиптического или параболического типа и с решеточным вектором Вейля таких, что A содержит подматрицу $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Позднее мы надеемся опубликовать результаты, аналогичные рассмотренным в настоящей работе, для всех этих 13 обобщенных матриц Картана. Отметим, что случаи $A_{1,II}$ и $A_{2,II}$ из этого списка уже были рассмотрены в [19], [20], а случаи $A_{1,0}$ и $A_{1,I}$ рассматриваются в настоящей работе.

Предварительный вариант данной статьи был опубликован в качестве препринта [22].

§ 1. Конструкция зигелевых модулярных форм с рациональными квадратичными дивизорами при помощи операторов Гекке и их разложения в бесконечные произведения

Зигелевой модулярной формой веса k относительно $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ называется голоморфная функция $F(Z)$ на верхней полуплоскости Зигеля

$$\mathbb{H}_2 = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(Z) > 0 \right\},$$

удовлетворяющая функциональному уравнению

$$(F|_k M)(Z) = F(Z), \quad (1.1)$$

$$(F|_k M)(Z) := \det(CZ + D)^{-k} F((AZ + B)(CZ + D)^{-1})$$

для всякой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$. Через $\mathfrak{M}_k(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ обозначается конечномерное пространство всех зигелевых модулярных форм веса k .

В этом параграфе мы определяем мультипликативный аналог операторов Гекке, которые преобразуют зигелевы модулярные формы веса k в зигелевы модулярные формы, вообще говоря, другого веса.

Рассмотрим разложение двойного класса смежности V в конечное объединение левых классов смежности по группе $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$

$$V = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})M \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) = \sum_i \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})M_i, \quad (1.2)$$

где M и M_i — элементы полугруппы симплектических подобиий

$$G\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) = \{M \in M_4(\mathbb{Z}) \mid {}^t M J M = \mu(M) J, \mu(M) \in \mathbb{N}\} \quad \left(J = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $F(Z)$ — зигелева модулярная форма веса k и V — двойной класс смежности (1.2). Мы полагаем

$$[F(Z)]_V := \prod_i (F|_k M_i)(Z). \quad (1.3)$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 1.1. *Функция $[F(Z)]_V$ на $\mathbb{H}_2$ корректно определена и является зигелевой модулярной формой веса $k\nu$, где ν – число левых классов смежности в V .*

Пусть p – простое число. По теореме об элементарных делителях существует ровно один двойной класс смежности

$$T(p) = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})M \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \mathrm{diag}(1, 1, p, p) \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$$

с $\mu(M) = p$. Можно найти систему представителей из различных левых классов смежности в $T(p)$, состоящую из $\nu(p) = (p^2 + 1)(p + 1)$ элементов:

$$\begin{aligned} T(p) = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{a_1, a_2, a_3 \bmod p} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ + \sum_{a \bmod p} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{b_1, b_2 \bmod p} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Мы обозначаем модулярную форму $[F(Z)]_{T(p)}$ как $[F(Z)]_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ $[F(Z)]_p$. Можно дать эквивалентное определение формы $[F(Z)]_p$ в других терминах. Пусть $M_p = \mathrm{diag}(pE_2, E_2)$. Тогда

$$\Gamma_0(p) = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \cap M_p^{-1} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) M_p = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \bmod p \right\}$$

является конгруэнц-подгруппой зигелевой модулярной группы. Очевидно, имеем

$$T_p = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(p) \backslash \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})} \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) M_p \gamma.$$

Следовательно,

$$[F(Z)]_p = \prod_{\gamma \in \Gamma_0(p) \backslash \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})} F(pZ)|_k \gamma.$$

Функция $F(pZ)$ является модулярной формой веса k относительно $\Gamma_0(p)$, и можно рассматривать последнее произведение как мультипликативную $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ -симметризацию $\Gamma_0(p)$ -модулярной формы (ср. с [14, §1, §3], где рассматривалась аддитивная симметризация относительно парамодулярной группы).

В этом параграфе мы найдем $[F(Z)]_p$ для хорошо известной параболической зигелевой модулярной формы $F(Z) = \Delta_5(Z)$ веса 5, которая является произведением всех четных тэта-констант. В частности, мы покажем, что функция $[\Delta_5(Z)]_2$, точное выражение которой дается формулой (0.4), связана с первой (т.е. с наименьшим весом) ненулевой зигелевой модулярной формой нечетного веса.

Прежде всего, напомним результат Игузы о структуре градуированного кольца

$$\mathfrak{M}_*(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_k(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$$

всех зигелевых модулярных форм. Это кольцо имеет пять образующих

$$\mathfrak{M}_*(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}].$$

Ряды Эйзенштейна $E_4(Z)$, $E_6(Z)$ и первые нетривиальные параболические формы $\chi_{10}(Z)$, $\chi_{12}(Z)$ (нижний индекс обозначает вес) алгебраически независимы. Форма $\chi_{35}(Z)$ – первая зигелева модулярная форма нечетного веса, которую мы называем модулярной формой Игузы (см. [23], [24]).

Известно, что $\chi_{10}(Z)$ – это квадрат формы $\Delta_5(Z)$, являющейся $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ -модулярной формой веса 5 с нетривиальным характером (см. [10]). Это означает, что

$$(\Delta_5|_5 M)(Z) = v(M) \Delta_5(Z) \quad (1.5)$$

для любой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$, где $v: \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \{\pm 1\}$ – квадратичный характер. Так как коммутатор группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ имеет индекс 2, существует только один нетривиальный характер группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ (см. [28], где характер v вычислен для образующих $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$). С точностью до константы существует только одна такая модулярная форма веса 5. Ее можно определить как произведение всех четных тэта-констант:

$$\Delta_5(Z) = \frac{1}{64} \prod_{(a,b)} \vartheta_{a,b}(Z), \quad (1.6)$$

где

$$\vartheta_{a,b}(Z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \exp \left(\pi i \left(Z \left[l + \frac{1}{2} a \right] + {}^t b l \right) \right) \quad (Z[l] = {}^t l Z l)$$

и произведение берется по всем векторам $(a, b) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ таким, что ${}^t a b \equiv 0 \pmod{2}$. (Существует ровно десять различных (a, b) .) Заметим, что $\Delta_5(Z)$ имеет целые коэффициенты Фурье.

Можно применить оператор $[\dots]_p$ к $\Delta_5(Z)$. Избегая трудности с формальным определением, фиксируем систему представителей (1.4) в $T(p)$, беря $x = 0, \dots, p-1$ в качестве системы представителей по модулю p . Согласно (1.5) функция $[\Delta_5(Z)]_p$ – это зигелева модулярная форма с характером v или с тривиальным характером. Следующий результат объясняет наш интерес к операторам $[\dots]_p$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для $p = 2$ частное*

$$[\Delta_5(Z)]_2 / \Delta_5(Z)^8$$

является зигелевой модулярной формой веса 35 с тривиальным характером. Для простого $p > 2$ функция

$$[\Delta_5(Z)]_p / \Delta_5(Z)^{(p+1)^2}$$

является зигелевой модулярной формой веса $5p(p^2 - 1)$ с тривиальным характером.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже упоминали, что имеется ровно один нетривиальный характер v на группе $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ со значениями в ± 1 . Из (1.6) легко видеть, что

$$v(\nabla) = -1, \quad \text{где} \quad \nabla = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим ∇ к $[\Delta_5(Z)]_p$. Напомним, что мы зафиксировали систему представителей $\{0, 1, \dots, p-1\}$ по модулю p . Используя (1.4), получаем

$$[\Delta_5(\nabla\langle Z \rangle)]_p = v(\nabla)^{p^2+p} v(\nabla^p)^{p+1} [\Delta_5(Z)]_p,$$

где $M\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ для $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Множитель $v(\nabla)^{p^2+p}$ равен 1 для любого простого p . Таким образом, $[\Delta_5(Z)]_p$ — зигелева модулярная форма веса $5(p^2 + 1)(p + 1)$ с тривиальным характером. Для доказательства теоремы найдем дивизор формы $[\Delta_5(Z)]_p$.

Рациональный квадратичный дивизор на $\mathbb{H}_2$ — это подмножество

$$\mathcal{H}_\ell = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2 \mid (z_2^2 - z_1 z_3)d + cz_3 + bz_2 + az_1 + e = 0 \right\},$$

где $\ell = (e, a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^5$ — примитивный (т.е. с наибольшим общим делителем компонент, равным 1) целочисленный вектор. Число $D(\ell) = b^2 - 4de - 4ac$ называется *дискриминантом* дивизора $\mathcal{H}_\ell$. Этот дивизор определяет *гумбертову поверхность* H_D в трехмерном многообразии Зигеля $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_2$ (многообразии модулей абелевых поверхностей с главной поляризацией)

$$H_D = \pi \left(\bigcup_{\substack{v \in \mathbb{Z}^5 \text{ примитивен} \\ \text{и } D(v)=D}} \mathcal{H}_v \right) = \pi(\mathcal{H}_\ell),$$

где π — естественная проекция $\pi: \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1$. Следующие свойства гумбертовых поверхностей в $\mathcal{A}_1$ хорошо известны и почти очевидны, если рассмотреть их с точки зрения ортогональной группы $\mathrm{SO}(3, 2) \cong P\mathrm{Sp}_4$ (см., например, [11], [18], где также рассмотрен случай неглавной поляризации):

$\mathcal{H}_\ell$ не пусто $\Leftrightarrow D(\ell) > 0$,

$\forall \gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ множество $\gamma(\mathcal{H}_\ell)$ является рациональным квадратичным дивизором с тем же самым дискриминантом $D(\ell)$,

H_D неприводим,

H_D задается уравнением $az_1 + bz_2 + z_3 = 0$, где $b = 0$ или $b = 1$.

Следующий факт очень важен: дивизор формы $\Delta_5(Z)$ на $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_2$ равен гумбертовой поверхности $H_1 = \pi(\{Z \in \mathbb{H}_2 \mid z_2 = 0\})$ дискриминанта 1.

Пусть $M_p = \mathrm{diag}(p, p, 1, 1)$, тогда

$$M_p(\mathcal{H}_\ell) = \{Z \in \mathbb{H}_2 \mid p^2(z_2^2 - z_1 z_3)d + pcz_3 + pbz_2 + paz_1 + e = 0\}.$$

Таким образом, $D(M_p(\mathcal{H}_\ell)) = p^2 D(\ell)$, если $(e, p) = 1$, и $D(M_p(\mathcal{H}_\ell)) = D(\ell)$, если $(e, p) = p$. Из вышеупомянутых свойств вытекает, что для любого элемента $M \in T(p) = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \mathrm{diag}(p, p, 1, 1) \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ дивизор $M(\mathcal{H}_\ell)$ – рациональный квадратичный дивизор дискриминанта $D(\ell)$ или $p^2 D(\ell)$. Следовательно, дивизор модулярной формы $[\Delta_5(Z)]_p$ является суммой гумбертовых поверхностей H_1 и H_{p^2} с некоторыми кратностями α и β

$$\begin{aligned} \mathrm{div}([\Delta_5(Z)]_p) &= T(p)^*(H_1) = \pi \left(\bigcup_{\substack{v \in \mathbb{Z}^5 \\ \text{примитивен} \\ \text{и } D(v)=1}} \sum_{M_i \in T(p)} M_i^{-1}(\mathcal{H}_v) \right) \\ &= \alpha H_1 + \beta H_{p^2}, \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по представителям M_i из различных классов смежности в $T(p)$. Для нахождения числа α (соответственно, β) мы должны найти число элементов M_i из системы (1.4) таких, что $M_i(\mathcal{H}^{(1)}) = \mathcal{H}_\ell$ (соответственно, $M_i(\mathcal{H}^{(p)}) = \mathcal{H}_\ell$) с $D(\ell) = 1$ для двух квадратичных дивизоров

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{Z \in \mathbb{H}_2 \mid z_2 = 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^{(p)} = \{Z \in \mathbb{H}_2 \mid pz_2 = 1\}.$$

Легко видеть, что $\beta = 1$ (только для $M_i = \mathrm{diag}(p, p, 1, 1)$) и $\alpha = (p+1)^2$ (первое и третье слагаемые и слагаемые с $a_2 = 0$ и $b_1 = 0$ в (1.4)). Следовательно, мы показали, что

$$\mathrm{div}([\Delta_5(Z)]_p) = (p+1)^2 H_1 + H_{p^2}.$$

Поэтому функция $[\Delta_5(Z)]_p / \Delta_5(Z)^{(p+1)^2}$ не имеет полюсов в $\mathbb{H}_2$. По принципу Кёхера (см. [1] и [10]) эта функция голоморфна на бесконечности. Для $p > 2$ это частное имеет тривиальный $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ -характер. Для $p = 2$ рассмотрим $[\Delta_5(Z)]_p / \Delta_5(Z)^{(p+1)^2-1}$. Это завершает доказательство теоремы.

Из доказательства теоремы 1.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Для простого $p \geq 2$ дивизор зигелевой модулярной формы $[\Delta_5(Z)]_p / \Delta_5(Z)^{(p+1)^2}$ веса $5p(p^2 - 1)$ совпадает с гумбертовой поверхностью H_{p^2} дискриминанта p^2 , взятой с кратностью один.*

Кроме того, мы получаем следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. 1. *Любая зигелева модулярная форма, обращающаяся в нуль на H_{p^2} , делится на модулярную форму $[\Delta_5(Z)]_p / \Delta_5(Z)^{(p+1)^2}$ веса $5p(p^2 - 1)$.*

2. (Игуза [23]). *С точностью до константы существует и единственная зигелева модулярная форма $\chi_{35}(Z)$ веса 35, и любая зигелева модулярная форма нечетного веса делится на $\chi_{35}(Z)$.*

3. *Любая зигелева модулярная форма с нетривиальным характером $v : \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \{\pm 1\}$ представляется как*

$$\Delta_5(Z)F(Z) \quad \text{или} \quad \frac{[\Delta_5(Z)]_2}{\Delta_5(Z)^9}F(Z),$$

где $F(Z)$ – зигелева модулярная форма с тривиальным характером.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из принципа Кёхера и следствия 1.3.

Пусть $F(Z)$ – зигелева модулярная форма нечетного веса. Тогда $F(z_1, 0, z_3) \equiv 0$, так как не существует $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -модулярной формы нечетного веса. Форма $F(Z)$ равна 0 на гумбертовой поверхности

$$H_4 = \pi \left(\left\{ Z = \begin{pmatrix} z & z_2 \\ z_2 & z \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2 \right\} \right),$$

так как $F(z_1, z_2, z_3) = -F(z_3, z_2, z_1)$. Дивизор формы $[\Delta_5(Z)]_2 / \Delta_5(Z)^8$ равен $H_1 + H_4$. Это доказывает второе утверждение.

Для доказательства третьего утверждения отметим, что любая $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ -модулярная форма нечетного (соответственно, четного) веса с характером v обращается в нуль на H_1 (соответственно, H_4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя некоторые геометрические рассуждения, ван дер Геер доказал существование зигелевой модулярной формы с дивизором H_D для любого $D > 0$ (см. [11], [12]). Форма $[\Delta_5(Z)]_p$ дает зигелеву модулярную форму с дивизором H_{p^2} . В дополнении В мы покажем, как можно явно построить зигелевы модулярные формы с дивизорами H_D , где D не является точным квадратом.

В следующей теореме мы находим разложение $[\Delta_5(Z)]_p$ в бесконечное произведение. Для этого напомним некоторые обозначения и результаты.

Разложение Фурье–Якоби зигелевой модулярной формы $F(Z) = F(z_1, z_2, z_3)$ – это ее разложение Фурье относительно z_3

$$F(z_1, z_2, z_3) = f_0(z_1) + \sum_{m \geq 1} f_m(z_1, z_2) \exp(2\pi i m z_3),$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$ ($y_1 > 0$) принадлежит обычной верхней полуплоскости $\mathbb{H}_1$ и $z_2 \in \mathbb{C}$. Функция

$$\tilde{f}_m(Z) := f_m(z_1, z_2) \exp(2\pi i m z_3)$$

удовлетворяет (1.1) для всех элементов $M \in \Gamma_\infty$ из параболической подгруппы

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \right\}. \quad (1.7)$$

Коэффициент Фурье–Якоби $f_m(z_1, z_2)$ (соответственно, $\tilde{f}_m(Z)$) является формой Якоби (см. [8] и дополнение А) веса k и индекса m (соответственно, Γ_∞ -модулярной формой веса k).

Разложение Фурье параболических форм $\Delta_5(Z)$, $\chi_{10}(Z)$ и $\chi_{12}(Z)$ определяется только коэффициентами Фурье их первых коэффициентов Фурье–Якоби. Другими словами, они являются элементами так называемых подпространств Маасса. Например, первый коэффициент Фурье–Якоби формы $\Delta_5(Z)$ является формой Якоби веса 5 и индекса 1/2

$$\begin{aligned} \phi_{5,1/2}(z_1, z_2) &= \eta^9(z_1) \vartheta_{11}(z_1, z_2) \\ &= -q^{1/2} r^{-1/2} \prod_{n \geq 1} (1 - q^{n-1} r) (1 - q^n r^{-1}) (1 - q^n)^{10} \\ &= \sum_{n, l \equiv 1 \pmod{2}} g(n, l) \exp(\pi i (n z_1 + l z_2)). \end{aligned}$$

Здесь $q = \exp(2\pi i z_1)$ и $r = \exp(2\pi i z_2)$. Формы $\eta(z_1)$ и $\vartheta_{11}(z_1, z_2)$ — это η -функция Дедекинда и тэта-ряд Якоби, соответственно. Разложение Фурье формы $\Delta_5(Z)$ имеет вид (см. [29])

$$\Delta_5(Z) = \sum_{\substack{n, l, m \equiv 1 \pmod{2} \\ n, m > 0, 4mn - l^2 > 0}} \sum_{d | (n, l, m)} d^4 g\left(\frac{nm}{d^2}, \frac{l}{d}\right) \exp(\pi i(nz_1 + lz_2 + mz_3)).$$

С точностью до константы существует ровно одна параболическая форма Якоби веса 12 и индекса 1 с целыми коэффициентами Фурье

$$\begin{aligned} \phi_{12,1}(z_1, z_2) &= \frac{1}{144} (E_4^2(z_1)E_{4,1}(z_1, z_2) - E_6(z_1)E_{6,1}(z_1, z_2)) \\ &= (r^{-1} + 10 + r)q + (10r^{-2} - 88r^{-1} - 132 - 88r + 10r^{-2})q^2 + \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$E_4(z_1) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n, \quad E_6(z_1) = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n)q^n$$

— ряды Эйзенштейна для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $E_{k,1}(z_1, z_2)$ — ряд Эйзенштейна–Якоби веса k и индекса 1, с целыми коэффициентами Фурье (см. [8, §3]).

Введем слабую форму Якоби веса 0 и индекса 1 с целыми коэффициентами Фурье

$$\begin{aligned} \phi_{0,1}(z_1, z_2) &:= \frac{\phi_{12,1}(z_1, z_2)}{\Delta_{12}(z_1)} = \sum_{n \geq 0, l \in \mathbb{Z}} f(n, l) \exp(2\pi i(nz_1 + lz_2)) \\ &= (r^{-1} + 10 + r) + q(10r^{-2} - 64r^{-1} + 108 - 64r + 10r^2) + \dots, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\Delta_{12}(z_1) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ — это $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -параболическая форма веса 12. Форма Якоби $\phi_{0,1}(z_1, z_2)$ — одна из двух канонических образующих кольца слабых форм Якоби (см. [8, §9]). Форма Якоби $\phi_{0,1}(z_1, z_2)$ удовлетворяет тому же самому функциональному уравнению, что и обычные формы Якоби (т.е. $\phi_{0,1}(z_1, z_2) \exp(2\pi i z_3)$ удовлетворяет (1.1) для всех $M \in \Gamma_\infty$) и имеет ненулевые коэффициенты Фурье только с индексами $(n, l) \in \mathbb{Z}$ такими, что $n \geq 0$ (так как $\phi_{12,1}(z_1, z_2)$ является параболической формой) и $4n - l^2 \geq -1$. Ее вес четен, поэтому $f(n, l) = f(n, -l)$ и $f(n, l)$ зависит только от $4n - l^2$. Следовательно, мы можем определить функцию $f(N)$ целого аргумента такую, что

$$f(N) = \begin{cases} f(n, l), & \text{если } N = 4n - l^2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.9)$$

В частности, имеем $f(0) = 10$, $f(-1) = 1$ и $f(n) = 0$, если $n < -1$.

В [19, теорема 4.1] мы показали, что модулярная форма $\Delta_5(Z)$ является функцией знаменателя обобщенной лоренцевой супералгебры Каца–Мули и нашли для нее формулу бесконечного произведения

$$\Delta_5(Z) = (qrs)^{1/2} \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f(4nm - l^2)}, \quad (1.10)$$

где $q = \exp(2\pi iz_1)$, $r = \exp(2\pi iz_2)$, $s = \exp(2\pi iz_3)$. Условие $(n, l, m) > 0$ в произведении означает, что $n \geq 0$, $m \geq 0$, l – произвольное целое, если $n + m > 0$, и $l < 0$, если $n = m = 0$. (Отметим, что бесконечное произведение абсолютно сходится при $\text{Im}(Z) > C$ для достаточно большого $C > 0$.)

Введем модулярную форму веса 35

$$\Delta_{35}(Z) := 2^{110} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \frac{[\Delta_5(Z)]_2}{\Delta_5(Z)^8}.$$

ТЕОРЕМА 1.5. *Зигелева модулярная форма $\Delta_{35}(Z)$ имеет целые коэффициенты Фурье и может быть представлена как бесконечное произведение:*

$$\Delta_{35}(Z) = q^2 r s^2 (q - s) \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f_2(4nm - l^2)}.$$

Целые показатели $f_2(4nm - l^2)$ определяются формулой

$$f_2(N) = 8f(4N) + 2\left(\left(\frac{-N}{2}\right) - 1\right)f(N) + f\left(\frac{N}{4}\right),$$

где $f(N)$ – функция (1.9) и

$$\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } D \equiv 1 \pmod{8}, \\ -1, & \text{если } D \equiv 5 \pmod{8}, \\ 0, & \text{если } D \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Условие $(n, l, m) > 0$ в последнем произведении означает, что $n \geq 0$, $m \geq 0$, l – произвольное целое, если $n + m > 0$, и $l < 0$, если $n = m = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множитель $q^2 r s^2 (q - s)$ показывает, что $\Delta_{35}(Z)$ совпадает с $(4i)\chi_{35}(Z)$, где $\chi_{35}(Z)$ – модулярная форма Игузы (см. [23, теорема 3]).

Ниже мы даем доказательство теоремы 1.5 и ее варианта для произвольного простого p . Однако прежде сформулируем следствие.

Пусть $\Delta_{30}(Z) = \Delta_{35}(Z)/\Delta_5(Z)$ – голоморфная параболическая форма веса 30 с нетривиальным характером v (см. доказательство теоремы 1.2). Используя теорему 1.5 и (1.10), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *Для Z с большой мнимой частью (т.е. $\det(\text{Im}(Z)) \gg 0$) имеет место тождество*

$$\Delta_{30}(Z) = q^{3/2} r^{1/2} s^{3/2} (q - s) \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f'_2(4nm - l^2)},$$

где целые числа $f'_2(4nm - l^2)$ задаются формулой

$$f'_2(N) = 8f(4N) + \left(2\left(\frac{-N}{2}\right) - 3\right)f(N) + f\left(\frac{N}{4}\right).$$

Форма $\Delta_{30}(Z)$ имеет целые коэффициенты Фурье, и дивизор формы $\Delta_{30}(Z)$ на $\text{Sp}_4(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}_2$ равен H_4 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя эти разложения $\Delta_{35}(Z)$ и $\Delta_{30}(Z)$ в бесконечные произведения, можно вычислить первые нетривиальные коэффициенты Фурье–Якоби этих функций с индексами 2 и $3/2$, соответственно. Имеем

$$f_2(-4) = f'_2(-4) = 1, \quad f_2(-1) = 0, \quad f'_2(-1) = -1, \quad f_2(0) = 70, \quad f'_2(0) = 60.$$

Следовательно,

$$\phi_{35,2}(z_1, z_2) = \eta^{69}(z_1) \vartheta_{11}(z_1, 2z_2) = -q^2 r^{-1} \prod_{n \geq 1} (1 - q^{n-1} r^2)(1 - q^n r^{-2})(1 - q^n)^{70}$$

и

$$\begin{aligned} \phi_{30, \frac{3}{2}}(z_1, z_2) &= \eta^{59}(z_1) \frac{\eta(z_1) \vartheta_{11}(z_1, 2z_2)}{\vartheta_{11}(z_1, z_2)} \\ &= q^{3/2} r^{-1/2} \prod_{n \geq 1} (1 + q^{n-1} r)(1 - q^{2n-1} r^2) \\ &\quad \times (1 - q^{2n-1} r^{-2})(1 + q^n r^{-1})(1 - q^n)^{60}. \end{aligned}$$

Перейдем к формулировке аналога теоремы 1.5 для простого $p > 2$. Определим зигелеву модулярную форму

$$F_p(Z) := (-1)^{(p-1)/2} p^{5p(2p^2+p+1)} \frac{[\Delta_5(Z)]_p}{\Delta_5(Z)^{(p+1)^2}}$$

веса $5p(p^2 - 1)$.

ТЕОРЕМА 1.7. Для нечетного простого числа p форма $F_p(Z)$ разлагается в бесконечное произведение

$$F_p(Z) = q^{5p(p^2-1)/12} r^{-(p-1)/2} s^{(p^2-1)/2} \left(\frac{r^p - 1}{r - 1} \right) \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m)}} (1 - q^n r^l s^m)^{f_p(4nm - l^2)}.$$

Целые $f_p(4nm - l^2)$ задаются формулой

$$f_p(N) = p^3 f(p^2 N) + \left(p \left(\frac{-N}{p} \right) - p - 1 \right) f(N) + f\left(\frac{N}{p} \right),$$

где $\left(\frac{\cdot}{p} \right)$ – символ Лежандра квадратичного вычета. Произведение берется по всем целочисленным тройкам (n, l, m) таким, что $m \geq 0$, l – произвольное целое и $n \neq 0$ или $m \neq 0$. В частности, $F_p(Z)$ имеет целые коэффициенты Фурье.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.5 и 1.7. Рассмотрим множитель

$$(1 - q^n r^l s^m) = (1 - \exp(2\pi i \operatorname{tr}(NZ))) = (1 - e(N, Z)) \quad \left(N = \begin{pmatrix} n & l/2 \\ l/2 & m \end{pmatrix} \right),$$

где $e(N, Z) := \exp(2\pi i \operatorname{tr}(NZ))$. Для любого

$$M = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & p {}^t U^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } V = UX, \quad X = {}^t X \in M_2(\mathbb{Z}), \quad UX \pmod{p} {}^t U^{-1},$$

из системы представителей (1.4) имеем

$$(1 - e(N, M\langle Z \rangle)) = (1 - e(p^{-1}N[U], Z + V)).$$

Здесь $N[U] := {}^t U N U$. Следовательно, получаем формулы

$$(1 - e(N, Z))|_5 \begin{pmatrix} pE_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = (1 - e(pN, Z))$$

и

$$\begin{aligned} \prod_{X = {}^t X \pmod{p}} (1 - e(N, Z))|_5 \begin{pmatrix} E_2 & X \\ 0 & pE_2 \end{pmatrix} \\ = p^{-10p^3} \begin{cases} (1 - e(N, Z))^{p^2}, & \text{если } N \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ (1 - e(p^{-1}N, Z))^{p^3}, & \text{если } N \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases} \end{aligned}$$

для действия первого и второго слагаемых из (1.4), и

$$\begin{aligned} \prod_{V \pmod{p} {}^t U^{-1}} (1 - e(N, Z))|_5 \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & p {}^t U^{-1} \end{pmatrix} \\ = p^{-5p} \begin{cases} (1 - e(N[U], Z)), & \text{если } N[U] \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ (1 - e(p^{-1}N[U], Z))^p, & \text{если } N[U] \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases} \end{aligned}$$

для действия третьего и четвертого слагаемых.

Введем функцию $\tilde{f}: M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ матричного аргумента $N = \begin{pmatrix} n & l/2 \\ l/2 & m \end{pmatrix}$ формулой

$$\tilde{f}(N) = \begin{cases} f(4 \det N), & \text{если } (n, l, m) > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $f(4 \det N)$ — функция (1.9). Из этих формул получаем, что множитель $(1 - e(N, Z))$ появляется в произведении для $[\Delta_5(Z)]_p$ с показателем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p(N) &= p^3 \tilde{f}(pN) + p \sum_U \tilde{f}(pN[U^{-1}]) \\ &+ \begin{cases} \sum_U \tilde{f}(N[U^{-1}]) + p^2 \tilde{f}(N), & \text{если } N \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ \tilde{f}(p^{-1}N), & \text{если } N \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Последняя сумма берется по всем $U \in \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \right\}_{b=0, \dots, p-1}$ (см. (1.4)).

Для нахождения формулы для $f_p(N)$ нужно вычислить число (которое зависит только от $M \bmod p$) элементов U из данной системы таких, что $M[U^{-1}]$ является целочисленной матрицей. Это дает нужную формулу для $f_p(N)$.

В силу (1.11) и выбора (1.4) все множители $(1 - e(N, Z))$ с ненулевыми $f_p(N)$ имеют $m \geq 0$. В случае $p = 2$ легко найти, что произведение содержит единственный множитель с $n < 0$, а именно, $(1 - q^{-1}s)$. Это завершает доказательство теорем 1.5 и 1.7.

Формулы теорем 1.5 и 1.7 показывают, что $f_p(N)$ для $p > 2$ и $f'_2(N)$ для $p = 2$ являются коэффициентами Фурье форм Якоби веса 0 и индекса 1

$$p^3(\phi_{0,1}|_0 T^J(p))(z_1, z_2) - (p+1)\phi_{0,1}(z_1, z_2), \quad (1.12)$$

где $T^J(p)$ – оператор Гекке на пространстве форм Якоби (см. [8, § 4]). Мы объясняем это явление в приложении А, где дается другое, “функториальное”, доказательство теорем 1.5 и 1.7.

§ 2. Ортогональная интерпретация построения формы Δ_{35} и приложение к модулям поверхностей $K3$

Здесь дается ортогональная интерпретация конструкции из § 1, использующей форму $\Delta_5(Z)$, автоморфной формы Игузы. Кроме того, дается ее приложение к модулям поверхностей $K3$.

Мы используем для решеток обозначения из [31]. Для *решетки* (т.е. целочисленной симметрической билинейной формы) S и элементов a, b решетки S (т.е. элементов модуля решетки S) через (a, b) обозначается значение формы S на элементах a, b . Через $S(q)$ обозначается решетка, получающаяся умножением формы решетки S на $q \in \mathbb{Q}$. Для целочисленной симметричной матрицы A через $\langle A \rangle$ обозначается решетка, задаваемая матрицей A . Таким образом, $S = \langle A \rangle$ – это решетка S , имеющая базис с матрицей Грама A . Через $\oplus$ обозначается ортогональная сумма решеток.

Положим $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Решетка U – единственная (с точностью до изоморфизма) четная унимодулярная решетка сигнатуры $(1, 1)$.

Пусть T – решетка сигнатуры $(t, 2)$. Через $\Omega^+(T)$ обозначается эрмитова симметрическая область типа IV, которая является одной из двух связных компонент области

$$\Omega(T) = \{Z \in \mathbb{P}(T \otimes \mathbb{C}) \mid (Z, Z) = 0, (Z, \overline{Z}) < 0\}.$$

Мы также рассматриваем однородные конусы (без нуля) $\tilde{\Omega}(T) \subset T \otimes \mathbb{C}$ и $\tilde{\Omega}^+(T) \subset T \otimes \mathbb{C}$ такие, что $\Omega(T) = \tilde{\Omega}(T)/\mathbb{C}^*$ и $\Omega^+(T) = \tilde{\Omega}^+(T)/\mathbb{C}^*$. Пусть $O^+(T)$ – подгруппа индекса два группы $O(T)$, которая переводит в себя компоненту $\Omega^+(T)$. Хорошо известно, что $O^+(T)$ дискретна в $\Omega^+(T)$ и имеет фундаментальную область конечного объема.

Функция $\tilde{\Phi}$ на $\tilde{\Omega}^+(T)$ называется *автоморфной формой веса k* , если $\tilde{\Phi}$ голоморфна на $\tilde{\Omega}^+(T)$, $\tilde{\Phi}(c\omega) = c^{-k}\tilde{\Phi}(\omega)$ для любых $c \in \mathbb{C}^*$ и $\omega \in \tilde{\Omega}^+(T)$, и $\tilde{\Phi}(\gamma(\omega)) = \chi(\gamma)\tilde{\Phi}(\omega)$ для любых $\gamma \in G$, $\omega \in \tilde{\Omega}^+(T)$. Здесь $G \subset O(T)^+$ – подгруппа конечного индекса и $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ – характер с ядром конечного индекса в G . Тогда

Φ называется *автоморфной формой относительно G с характером χ* . Если $\dim \Omega(T) = \text{rk } T - 2 \leq 2$, функция Φ дополнительно должна быть голоморфна на бесконечности области $\Omega(T)$. Если $\dim \Omega(T) > 2$, это условие автоматически выполнено в силу принципа Кёхера.

Для решетки T обозначим $\Delta^{(2)}(T) = \{\delta \in T \mid (\delta, \delta) = 2\}$. Для $e \in T$ с квадратом $(e, e) > 0$ обозначим $\mathcal{H}_e = \{Z \in \Omega^+(T) \mid (Z, e) = 0\}$. Подмножество $\mathcal{H}_e$ называется *квадратичным дивизором, ортогональным e* . Квадратичный дивизор $\mathcal{H}_e$ не меняется при замене e на te , $t \in \mathbb{Q}$.

Ключевым моментом настоящей статьи является нахождение решеток T сигнатуры $(t, 2)$ и автоморфных форм на $\Omega^+(T)$ (относительно подгрупп конечного индекса группы $O(T)$) с дивизорами, которые являются суммами с некоторыми кратностями квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_e$, $e \in \Delta^{(2)}(T)$. Общее обсуждение данной проблемы см. в [40]. Гипотетически множество таких решеток T конечно для $\text{rk } T \geq 5$.

Пусть

$$L_{1,0} = 2U \oplus \langle 2 \rangle \quad \text{и} \quad L_{1,\text{II}} = 2U(4) \oplus \langle 2 \rangle.$$

Очевидно, $L_{1,\text{II}} \cong 2L_{1,0}^* \cong L_{1,0}^*(4)$ и $L_{1,0} \cong 2L_{1,\text{II}}^* \cong L_{1,\text{II}}(4)$ (здесь и в аналогичных случаях, рассматриваемых ниже, $2L_{1,0}^* \subset L_{1,0} \otimes \mathbb{Q}$). Отсюда следует, что $O(L_{1,0}) \cong O(L_{1,\text{II}})$. Используя естественный изоморфизм $O^+(L_{1,0})/\{\pm E_5\} \cong \text{Sp}_4(\mathbb{Z})/\{\pm E_4\}$ (см., например, [19]), можно отождествить зигелевы модулярные формы (относительно подгрупп конечного индекса группы $\text{Sp}_4(\mathbb{Z})$) с автоморфными формами на областях IV типа $\Omega^+(L_{1,0})$ или $\Omega^+(L_{1,\text{II}})$.

Функция $\Delta_5(Z)$ — автоморфная форма на $\Omega^+(L_{1,\text{II}})$ с дивизором, равным сумме с единичными кратностями всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,\text{II}})$ (см. [19], где дана такая интерпретация формы $\Delta_5(Z)$). По принципу Кёхера эта функция единственна (с точностью до мультипликативной константы) и автоморфна относительно $O^+(L_{1,\text{II}})$, возможно с некоторым характером. Таким образом, функция $\Delta_5(Z)$ определяется (с точностью до мультипликативной константы) решеткой $L_{1,\text{II}}$, и мы обозначаем ее здесь как $\Delta(L_{1,\text{II}})_5(Z)$.

Рассмотрим теперь решетку $L_{1,0} = 2U \oplus \langle 2 \rangle$. Мы хотим построить автоморфную форму $\Delta(L_{1,0})$ на $\Omega^+(L_{1,0})$ с дивизором, равным сумме с единичными кратностями всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$. По принципу Кёхера $\Delta(L_{1,0})$ единственна с точностью до мультипликативной константы.

Прежде всего отметим, что элементы $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ и соответствующие квадратичные дивизоры $\mathcal{H}_\delta$ делятся на два типа. Элемент $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ имеет тип II, если $(\delta, x) \equiv 0 \pmod{2}$ для любого $x \in L_{1,0}$. В противном случае $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ имеет тип I: тогда найдется $x \in L_{1,0}$ такой, что $(x, \delta) \equiv 1 \pmod{2}$. Два элемента из $\Delta^{(2)}(L_{1,0})$ сопряжены группой $O^+(L_{1,0})$ тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же тип: I или II.

Очевидно, $\delta \in L_{1,0}$ имеет тип II тогда и только тогда, когда $\delta \in 2L_{1,0}^* \cong 2U(4) \oplus \langle 2 \rangle$. Здесь $2L_{1,0}^* \subset L_{1,0}$ является канонической подрешеткой решетки $L_{1,0}$, равной (или изоморфной) решетке $2U(4) \oplus \langle 2 \rangle$. Так как область типа IV любой подрешетки конечного индекса решетки $L_{1,0}$ естественным образом отождествляется с $\Omega^+(L_{1,0})$, автоморфная форма $\Delta(2L_{1,0}^*)_5$ дает автоморфную форму на $\Omega^+(L_{1,0})$ с дивизором, равным сумме с единичными кратностями всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, где $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ и δ имеет тип II. Очевидно, $O(L_{1,0}) = O(2L_{1,0}^*)$. Таким

образом, форма $\Delta(2L_{1,0}^*)_5$ автоморфна относительно $O^+(L_{1,0})$ с некоторым характером.

Идея конструкции автоморфной формы $\Delta(L_{1,0})$ заключается в использовании подрешеток $T \subset L_{1,0}$ таких, что $T \cong L_{1,\text{II}}$, и рассмотрении произведения автоморфных форм $\Delta(T)_5$ этих подрешеток.

Рассмотрим базис $(f_1, f_{-1}, f_2, f_{-2}, f_3)$ решетки $L_{1,0}$ с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, подрешетка $T_0 = \mathbb{Z}4f_1 + \mathbb{Z}f_{-1} + \mathbb{Z}2f_2 + \mathbb{Z}2f_{-2} + \mathbb{Z}f_3 \subset L_{1,0}$ изоморфна $L_{1,\text{II}}$. Множество $\Delta^{(2)}(T_0)$ содержит элементы из $\Delta^{(2)}(L_{1,0})$ типа I. Например, $f_{-1} + f_3 \in \Delta^{(2)}(T_0)$ имеет тип I в $L_{1,0}$. Таким образом, автоморфная форма $\Delta(T_0)_5$ имеет дивизор, равный сумме с единичными кратностями всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, где $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0}) \cap T_0$, и найдется $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0}) \cap T_0$ типа I.

Рассмотрим все подрешетки $T = g(T_0) \subset L_{1,0}$, где $g \in O(L_{1,0})$. Так как $4L_{1,0} \subset T_0$, их число конечно. Обозначим через R все множество таких подрешеток. Очевидно, тогда

$$\Psi(L_{1,0}) = \prod_{\{T \subset L_{1,0}\} \in R} \Delta(T)_5$$

– автоморфная форма на $\Omega^+(L_{1,0})$ с дивизором, равным сумме квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$, с некоторой одной и той же кратностью $a > 0$ для всех δ типа I и с некоторой одной и той же кратностью $b \geq 0$ для всех δ типа II. По принципу Кёхера функция $\Phi(L_{1,0}) = \Psi(L_{1,0})\Delta(2L_{1,0}^*)_5^{a-b}$ является автоморфной формой на $\Omega^+(L_{1,0})$ относительно $O^+(L_{1,0})$, возможно с некоторым характером, такой, что дивизор формы $\Phi(L_{1,0})$ равен сумме с некоторой одной и той же кратностью $a > 0$ всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$. Отсюда следует, что функция $\Delta(L_{1,0}) = \Phi(L_{1,0})^{1/a}$ является искомой автоморфной формой.

Ортогональная интерпретация вычислений, проведенных в §1 для $p = 2$, заключается в том, что $\#R = 15$. Таким образом, $\Psi(L_{1,0})$ имеет вес 75. Кратности $a = 1$ и $b = 9$. Таким образом, $\Delta(L_{1,0}) = \Phi(L_{1,0})$ имеет вес 35, и в дальнейшем мы обозначаем эту автоморфную форму как $\Delta(L_{1,0})_{35}$. Нетрудно повторить эти вычисления, используя ортогональный язык. Для этого очень полезна техника дискриминантных форм (см. [31]). Мы оставляем эти вычисления заинтересованному читателю.

Теперь нетрудно отождествить форму $\Delta(L_{1,0})_{35}$ с модулярной формой Игузы χ_{35} , так как обе эти формы имеют один и тот же нечетный вес и χ_{35} автоморфна относительно $O^+(L_{1,0})$, т.е. имеет тривиальный характер на $SO^+(L_{1,0})$; отсюда следует, что она имеет характер $\det(g)$ для $g \in O^+(L_{1,0})$, так как вес нечетен.

Рассмотрим $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$. Такой δ определяет отражение $s_\delta \in O^+(L_{1,0})$, где

$$s_\delta(x) = x - (\delta, x)\delta, \quad x \in L_{1,0}.$$

Отсюда следует, что $s_\delta(\delta) = -\delta$ и $s_\delta(x) = x$, если $(\delta, x) = 0$. Таким образом, $\det(s_\delta) = -1$. Имеем $\chi_{35}(\omega) = \chi_{35}(s_\delta(\omega)) = -\chi_{35}(\omega) = 0$, если $\mathbb{C}\omega \in \mathcal{H}_\delta$.

Поэтому χ_{35} равна нулю на квадратичном дивизоре $\mathcal{H}_\delta$. По принципу Кёхера $\chi_{35}/\Delta(L_{1,0})_{35}$ – голоморфная автоморфная форма веса 0. Следовательно, она равна константе и $\Delta(L_{1,0})_{35} = c\chi_{35}$, где $c \in \mathbb{C}^*$.

Отметим следующее приложение этих рассуждений к геометрии многообразий модулей поверхностей $K3$ (см. общую постановку вопроса в [40], а также [30], [35]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Модулярная форма Игузы $\chi_{35} = c\Delta(L_{1,0})_{35}$, $c \in \mathbb{C}^*$, дает дискриминант многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием $S = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1) \subset L_{K3}$ на решетку Пикара, где E_8 и E_7 – стандартные положительно определенные решетки, задаваемые системами корней того же типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решетка $L_{K3} = 3U \oplus 2E_8(-1)$ является четной унимодулярной решеткой сигнатуры $(3, 19)$. Пользуясь техникой дискриминантных форм (см. [31]), очень легко вычислить, что $T = (S)^\perp_{L_{K3}} \cong 2U \oplus \langle -2 \rangle = L_{1,0}(-1)$. Дискриминант $\tilde{D}(S \subset L_{K3})$ поверхностей $K3$ с условием $S \subset L_{K3}$ на решетку Пикара равен объединению всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(-2)}(T) = \Delta^{(2)}(L_{1,0})$. Таким образом, модулярная форма Игузы χ_{35} равна нулю в точности на этом дискриминанте. Отсюда вытекает утверждение.

Аналогично, $\Delta_5(Z)$ дает дискриминант многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием $S \subset L_{K3}$ на решетку Пикара, где S – четная гиперболическая решетка сигнатуры $(1, 16)$ и с дискриминантной квадратичной формой $2u_+^{(2)}(4) \oplus q_1^{(2)}(2)$. Для такого условия $(S)^\perp_{L_{K3}} \cong 2U(4) \oplus \langle -2 \rangle = L_{II}(-1)$. См. [19] и [21], где эти вычисления проделаны.

В то же самое время форма $\Delta_5(Z) = \Delta(2L_{1,0}^*)_5(Z)$ имеет дивизор, равный части типа II дискриминанта многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием $U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1) \subset L_{K3}$ на решетку Пикара, которая равна объединению квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ и δ имеет тип II.

Модулярная форма Игузы $\chi_{30} = c_1\chi_{35}/\Delta_5 = c_2\Delta(L_{1,0})_{35}/\Delta(2L_{1,0}^*)_5$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, на области $\Omega^+(L_{1,0})$ имеет дивизор, равный части I этого дискриминанта, так как этот дивизор равен сумме (с единичными кратностями) всех квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, где $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ и δ имеет тип I. Пусть $L_{1,I}$ – подрешетка решетки $L_{1,0}$, порожденная всеми элементами $\delta \in \Delta^{(2)}(L_{1,0})$ типа I. Нетрудно найти, что $L_{1,I} = L_{1,0}$. Отсюда следует, что χ_{30} не равна дискриминанту (или, если угодно, полному дискриминанту) многообразия модулей поверхностей $K3$ с условием на решетку Пикара.

Рассмотрим обсуждавшееся выше условие $S = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1) \subset L_{K3}$ на решетку Пикара поверхностей $K3$. Всякая промежуточная примитивная гиперболическая подрешетка $S \subset S_1 \subset L_{K3}$ задает условие $S_1 \subset L_{K3}$ на решетку Пикара поверхностей $K3$. Это определяет подмногообразие модулей $\mathcal{M}_{S_1 \subset L_{K3}} \subset \mathcal{M}_{S \subset L_{K3}}$ многообразия модулей $\mathcal{M}_{S \subset L_{K3}}$ поверхностей $K3$ с условием $S \subset L_{K3}$ на решетку Пикара. Рассмотрим отрицательно определенную подрешетку $Q = S_1 \cap L \subset L$, где $L = (S)^\perp_{L_{K3}}$. Если $Q = \mathbb{Z}\delta$ имеет ранг один и $\delta^2 = -2p^2$, подмногообразие модулей $\mathcal{M}_{S_1 \subset L_{K3}}$ является множеством нулей зигелевой модулярной формы $F_p(Z)$, построенной в §1. Аналогично можно использовать зигелевы модулярные формы, построенные в §1 и дополнении В, для задания одним автоморфным уравнением (относительно полной группы $O(L)^+$) произвольного подмногообразия модулей коразмерности один $\mathcal{M}_{S_1 \subset L_{K3}} \subset \mathcal{M}_{S \subset L_{K3}}$.

Это дает интерпретацию этих зигелевых модулярных форм в терминах поверхностей $K3$. Было бы интересно понять алгебро-геометрический смысл разложений, найденных в §1 и дополнении В, этих модулярных форм в бесконечные произведения (и суммы). Сравните с некоторыми рассмотрениями в [21].

Аналогичные результаты имеют место для условия $S \subset L_{K3}$, когда $S_{L_{K3}}^\perp = 2U(4) \oplus \langle -2 \rangle$.

Для автоморфной коррекции лоренцевых алгебр Каца–Мули, которая будет рассмотрена ниже, важно иметь автоморфные формы Φ на $\Omega(T)$ с дивизорами, являющимися суммами квадратичных дивизоров $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in \Delta^{(2)}(T)$, с кратностями один. Автоморфные формы $\Delta(L_{1,0})_{35}$ и $\Delta(L_{1,\text{II}})_5$ дают такие автоморфные формы. Частные $\Phi(L_{1,0})_{30} = \Delta(L_{1,0})_{35}/\Delta(T)_5$, где $T \subset L_{1,0}$ и $T \cong L_{1,\text{II}}$, также дают автоморфные формы с этим свойством в силу принципа Кёхера. Существует три типа различных вложений $T \subset L_{1,0}$ с $T \cong L_{1,\text{II}}$.

Первый тип определяется условием $L_{1,0}/T \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Он дает $T = 2L_{1,0}^*$ и $\Delta_{30} = \Delta(L_{1,0})_{30} = \Delta(L_{1,0})_{35}/\Delta(2L_{1,0}^*)_5 = c\chi_{30}$.

Второй тип $\{T \subset L_{1,\text{II}}\} \in R$ мы рассматривали выше. Для этого типа $L_{1,\text{II}}/T \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \dot{+} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Он дает $\tilde{\Delta}_{30} = \tilde{\Delta}(L_{1,0})_{30} = \Delta(L_{1,0})_{35}/\Delta(T)_5$.

Существует третий тип, для которого $T = \mathbb{Z}f_1 + \mathbb{Z}4f_{-1} + \mathbb{Z}f_2 + \mathbb{Z}4f_{-2} + \mathbb{Z}f_3 \subset L_{1,0}$ во введенном выше базисе решетки $L_{1,0}$. Для этого типа $L_{1,0}/T \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

Это дает автоморфную форму $\tilde{\tilde{\Delta}}_{30} = \tilde{\tilde{\Delta}}(L_{1,0})_{30} = \Delta(L_{1,0})_{35}/\Delta(T)_5$.

В §3 мы используем разложение Фурье в подходящих параболических вершинах области типа IV $\Omega^+(L_{1,0})$ (параболическая вершина определяется одномерной примитивной изотропной подрешеткой решетки $L_{1,0}$) автоморфных форм $\Delta_5 = \Delta(L_{1,\text{II}})_5$, $\Delta_{35} = \Delta(L_{1,0})_{35}$ и $\tilde{\Delta}_{30} = \tilde{\tilde{\Delta}}(L_{1,0})_{30}$ для автоморфной коррекции некоторых лоренцевых алгебр Ли Каца–Мули. По-видимому, форма Игузы $\Delta_{30} = \Delta(L_{1,0})_{30} = c\chi_{30}$ и автоморфная форма $\tilde{\tilde{\Delta}}_{30} = \tilde{\tilde{\Delta}}(L_{1,0})_{30}$ могут быть использованы для автоморфной коррекции некоторых лоренцевых супералгебр Каца–Мули (см. ниже замечание 3.2), но мы не рассматриваем в этой статье автоморфную коррекцию для этого более общего класса лоренцевых алгебр Каца–Мули.

§3. Автоморфная коррекция “самых простых” лоренцевых алгебр Каца–Мули ранга 3, использующая автоморфные формы Игузы

Существуют три тесно связанные эллиптические гиперболические (мы используем терминологию из [39]) обобщенные матрицы Картана ранга 3 (см. [25] по поводу общих определений и результатов, связанных с алгебрами Каца–Мули):

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,\text{I}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,\text{II}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Они (в особенности первая матрица $A_{1,0}$) дают самые простые (по размеру и величине коэффициентов) обобщенные матрицы Картана этого типа. Это не означает,

что соответствующие этим матрицам лоренцевы алгебры Каца–Мути являются простейшими. Поэтому мы и используем кавычки в названии статьи и этого параграфа.

Рассмотрим гиперболическую решетку $M_{1,0} = \mathbb{Z}f_2 + \mathbb{Z}f_{-2} + \mathbb{Z}f_3$ с симметричной билинейной формой $(f_2, f_2) = (f_{-2}, f_{-2}) = 0$, $(f_2, f_{-2}) = -1$, $(f_3, f_3) = 2$, $(f_2, f_3) = (f_{-2}, f_3) = 0$. Таким образом, матрица Грама f_2, f_{-2}, f_3 равна

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего мы покажем, что обобщенные матрицы Картана $A_{1,0}$, $A_{1,I}$ и $A_{1,II}$ определяются решеткой $M_{1,0}$ и некоторыми ее естественными подрешетками, которые мы ниже определим (здесь мы повторим некоторые результаты из [36] и [19]). Решетка $M_{1,0}$ гиперболична, т.е. имеет сигнатуру $(2, 1)$. Таким образом, $M_{1,0}$ определяет конус

$$V(M_{1,0}) = \{x \in M_{1,0} \otimes \mathbb{R} \mid (x, x) < 0\},$$

являющийся объединением двух его пол. (Все общие определения и обозначения имеют место для произвольных гиперболических (т.е. сигнатуры $(n, 1)$) решеток и мы их будем ниже использовать.) Выберем одну из этих пол $V^+(M_{1,0})$. Обозначим как $O^+(M_{1,0})$ подгруппу ортогональной группы $O(M_{1,0})$ индекса два, которая сохраняет полу $V^+(M_{1,0})$. Хорошо известно, что группа $O^+(M_{1,0})$ дискретна в соответствующем гиперболическом пространстве $\mathcal{L}^+(M_{1,0}) = V^+(M_{1,0})/\mathbb{R}_{++}$ и имеет фундаментальную область конечного объема (ниже индекс $++$ и $+$ обозначает положительные и неотрицательные числа, соответственно). Любое отражение $s_\delta \in O(M_{1,0})$ относительно элемента $\delta \in M_{1,0}$ с $(\delta, \delta) > 0$ является отражением в гиперплоскости

$$\mathcal{H}_\delta = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}^+(M_{1,0}) \mid (x, \delta) = 0\}$$

пространства $\mathcal{L}^+(M_{1,0})$. Это отражение отображает полупространство

$$\mathcal{H}_\delta^+ = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}^+(M_{1,0}) \mid (x, \delta) \leq 0\}$$

в противоположное полупространство $\mathcal{H}_\delta^-$, которые оба ограничены гиперплоскостью $\mathcal{H}_\delta$. Элемент $\delta \in M_{1,0}$ называется ортогональным к гиперплоскости $\mathcal{H}_\delta$ и полупространству $\mathcal{H}_\delta^+$. Все отражения решетки $M_{1,0}$ порождают подгруппу отражений $W(M_{1,0}) \subset O^+(M_{1,0})$.

Гиперболическая решетка $M_{1,0}$ очень специальная, и ее группа автоморфизмов хорошо известна (см., например, [36]). Во-первых, $O^+(M_{1,0}) = W^{(2)}(M_{1,0})$, где индекс 2 обозначает подгруппу, порожденную отражениями во всех элементах с квадратом 2 решетки $M_{1,0}$. Таким образом, $O^+(M_{1,0})$ порождена отражениями в $\Delta^{(2)}(M_{1,0})$. Элемент $\delta \in \Delta^{(2)}(M_{1,0})$ и соответствующее отражение s_δ имеет один из двух типов:

- тип I: $(\delta, M_{1,0}) = \mathbb{Z}$,
- тип II: $(\delta, M_{1,0}) = 2\mathbb{Z}$.

Введем подрешетки $M_{1,I}$ и $M_{1,II}$, порожденные всеми элементами $\delta \in \Delta^{(2)}(M_{1,0})$ типа I и II, соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} M_{1,I} &= \{nf_2 + lf_3 + mf_{-2} \in M_{1,0} \mid n + l + m \equiv 0 \pmod{2}\}, \\ M_{1,II} &= \{nf_2 + lf_3 + mf_{-2} \in M_{1,0} \mid n \equiv m \equiv 0 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

Решетка $M_{1,I}$ единственна в своем роде и определяется однозначно ее дискриминантной формой $q_{M_{1,I}} \cong q_5^{(2)}(8)$ (мы используем обозначения из [31]). Существует единственная надрешетка $M_{1,I} \subset M$ индекса 2, и она равна $M_{1,0}$. Решетка $M_{1,II} = 2M_{1,0}^* \cong U(4) \oplus \langle 2 \rangle$. Решетка $M_{1,0} = 2M_{1,II}^*$. Отсюда следует, что подрешетки (или надрешетки) $M_{1,0}$, $M_{1,I}$, $M_{1,II}$ однозначно определяются друг другом и их группы автоморфизмов естественным образом отождествляются.

Элемент $\delta \in \Delta^{(2)}(M_{1,0})$ имеет тип I (соответственно, II), если и только если $\delta \in M_{1,I}$ (соответственно, $\delta \in M_{1,II}$). Отсюда следует, что подгруппа группы $O^+(M_{1,0}) = W^{(2)}(M_{1,0})$, порожденная всеми отражениями s_δ типа I (соответственно, II) равна $W^{(2)}(M_{1,I})$ (соответственно, $W^{(2)}(M_{1,II})$). Очевидно, три подрешетки $M_{1,0}$, $M_{1,I}$, $M_{1,II}$ являются $W^{(2)}(M_{1,0})$ -инвариантными, и обе подгруппы $W^{(2)}(M_{1,I})$ и $W^{(2)}(M_{1,II})$ нормальны в $W^{(2)}(M_{1,0})$. Индексы $[W^{(2)}(M_{1,0}) : W^{(2)}(M_{1,I})] = 2$ и $[W^{(2)}(M_{1,0}) : W^{(2)}(M_{1,II})] = 6$. Фундаментальные многогранники $\mathcal{M}_{1,0}$, $\mathcal{M}_{1,I}$ и $\mathcal{M}_{1,II}$ для групп $W^{(2)}(M_{1,0})$, $W^{(2)}(M_{1,I})$ и $W^{(2)}(M_{1,II})$, соответственно, равны $\mathcal{M}_{1,i} = \bigcap_{\delta \in P(\mathcal{M}_{1,i})} \mathcal{H}_\delta^+$, где $P(\mathcal{M}_{1,i})$ — минимальные (с этим равенством) множества элементов $\Delta^{(2)}(M_{1,i})$, где $i = 0, I, II$. Они называются ортогональными векторами к многограннику $\mathcal{M}_{1,i}$ и, соответственно, равны

$$\begin{aligned} P(\mathcal{M}_{1,0}) &= \{-f_2 + f_{-2}, f_3, f_2 - f_3\}; \\ P(\mathcal{M}_{1,I}) &= \{f_2 + f_3, f_2 - f_3, -f_2 + f_{-2}\}; \\ P(\mathcal{M}_{1,II}) &= \{2f_2 - f_3, 2f_{-2} - f_3, f_3\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{M}_{1,0}$ — треугольник с углами $\pi/2, 0, \pi/3$; $\mathcal{M}_{1,I}$ — треугольник с углами $\pi/3, 0, \pi/3$ и $\mathcal{M}_{1,II}$ — треугольник с нулевыми углами (т.е. с вершинами на бесконечности). Отсюда следует, что группы $W^{(2)}(M_{1,0})$, $W^{(2)}(M_{1,I})$, $W^{(2)}(M_{1,II})$ порождены отражениями в элементах $P(\mathcal{M}_{1,0})$, $P(\mathcal{M}_{1,I})$ и $P(\mathcal{M}_{1,II})$, соответственно. Мы обозначаем через

$$\text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,i})) = \{g \in O^+(M_{1,i}) \mid g(P(\mathcal{M}_{1,i})) = P(\mathcal{M}_{1,i})\}$$

группу симметрий фундаментального многогранника $\mathcal{M}_{1,i}$ и его множества $P(\mathcal{M}_{1,i})$ ортогональных векторов. Группа $\text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,0}))$ тривиальна, $\text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,I}))$ имеет порядок два и порождена s_{f_3} , группа $\text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,II}))$ является группой симметрий правильного треугольника (т.е. есть S_3) и порождена $s_{f_2-f_3}$, $s_{f_{-2}-f_2}$. Можно записать группы $O^+(M_{1,0}) = O^+(M_{1,I}) = O^+(M_{1,II})$ как полупрямые произведения:

$$\begin{aligned} O^+(M_{1,0}) &= O^+(M_{1,I}) = O^+(M_{1,II}) = W^{(2)}(M_{1,0}) \\ &= W^{(2)}(M_{1,I}) \rtimes \text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,I})) = W^{(2)}(M_{1,II}) \rtimes \text{Sym}(P(\mathcal{M}_{1,II})). \end{aligned}$$

Матрицы Грама множеств $P(\mathcal{M}_{1,0})$, $P(\mathcal{M}_{1,I})$ и $P(\mathcal{M}_{1,II})$, соответственно, равны вышеприведенным обобщенным матрицам Картана $A_{1,0}$, $A_{1,I}$ и $A_{1,II}$. Это показывает, что эти матрицы естественным образом связаны с решеткой $M_{1,0}$ и ее естественными подрешетками $M_{1,I}$ и $M_{1,II}$.

Вводя унифицированные обозначения, далее обозначаем $i = 0, \text{I или II}$. Решетка M обозначает $M_{1,i}$, $\mathcal{M}$ обозначает рассмотренный выше фундаментальный многогранник $\mathcal{M}_{1,i}$ для $W = W^{(2)}(M)$, и $P(\mathcal{M}) = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Обобщенные матрицы Картана $A = A_{1,i}$ (соответственно, группы Вейля $W^{(2)}(M)$) имеют так называемый *эллиптический тип*. Это означает, что фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ имеет конечный объем в $\mathcal{L}^+(M)$. Так как конус $V^+(M)$ самодвойствен, это эквивалентно любому из вложений

$$\mathbb{R}_+ \mathcal{M} \subset \overline{V^+(M)} \subset \mathbb{R}_+ \delta_1 + \mathbb{R}_+ \delta_2 + \mathbb{R}_+ \delta_3, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbb{R}_+ \mathcal{M} = (\mathbb{R}_+ \delta_1 + \mathbb{R}_+ \delta_2 + \mathbb{R}_+ \delta_3)^* = \{x \in M \otimes \mathbb{R} \mid (x, P(\mathcal{M})) \leq 0\}.$$

Другое очень важное свойство $A_{1,i}$ заключается в том, что $P(\mathcal{M}_{1,i})$ имеет *решеточный вектор Вейля* $\rho = \rho_i$, который является, по определению, таким элементом $\rho_i \in M_{1,i} \otimes \mathbb{Q}$, что

$$(\rho_i, \delta) = (\delta, \delta)/2 = -1 \quad \text{для любого } \delta \in P(\mathcal{M}_{1,i}).$$

Имеем

$$\rho_0 = 3f_2 + 2f_{-2} - f_3/2, \quad \rho_{\text{I}} = 2f_2 + f_1, \quad \rho_{\text{II}} = f_2 + f_{-2} - f_3/2. \quad (3.2)$$

Рассмотрим *комплексифицированный конус* $\Omega(V^+(M)) = M \otimes \mathbb{R} + iV^+(M)$. Заметим, что для всех наших решеток $M = M_{1,i}$ эти конусы отождествляются (при помощи изоморфизма решеток над $\mathbb{Q}$), и мы можем использовать одни и те же координаты (z_1, z_2, z_3) для точки $z = z_3 f_2 + z_2 f_3 + z_1 f_{-2}$ этих областей. Рассматривая решетку $L_k = U(k) \oplus M$, где $U(k) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$, мы отождествляем $\Omega(V^+(M))$ с одной (из двух) связных компонент эрмитовой симметрической области

$$\Omega(L_k) = \{Z \in \mathbb{P}(L_k \otimes \mathbb{C}) \mid (Z, Z) = 0, (Z, \overline{Z}) < 0\}$$

типа IV. Если e_1, e_{-1} – базис $U(k)$, точке $z \in \Omega(V^+(M))$ сопоставляется точка

$$\mathbb{C}(((z, z)/2)e_1 + (1/k)e_2 + z) \in \Omega(L_k).$$

Используя эти отождествления, можно говорить об *автоморфных формах* на $\Omega(V^+(M))$ относительно подгрупп конечного индекса группы $O(L_k)$. Таким образом, *автоморфная форма* на $\Omega(V^+(M))$ означает голоморфную функцию на $\Omega(V^+(M))$, которая является автоморфной формой (с некоторым неотрицательным весом) относительно подгруппы конечного индекса группы $O(L_k)$ для некоторого k .

Матрице $A = A_{1,i}$ сопоставляется алгебра Каца–Мути $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ (см. [25]). *Автоморфной коррекцией* (см. [4], [5] и общую постановку вопроса в [39], [19]) алгебры Каца–Мути $\mathfrak{g}(A)$ является автоморфная форма $\Phi(z)$ на $\Omega(V^+(M))$, $M = M_{1,i}$, имеющая разложение Фурье

$$\Phi(z) = \sum_{w \in W} \det(w) \left(\exp(-2\pi i(w(\rho), z)) - \sum_{a \in M^* \cap \mathbb{R}_{++} \mathcal{M}} m(a) \exp(-2\pi i(w(\rho+a), z)) \right), \quad (3.3)$$

где все $m(a)$ являются целыми числами. (Это очень специальный и ограничительный тип разложения Фурье.) Используя это разложение Фурье формы $\Phi(z)$, можно построить *обобщенную супералгебру Ли Каца–Мууди без нечетных простых вещественных корней* $\mathfrak{g}(M, {}_s\Delta)$, которая имеет функцию знаменателя Вейля–Каца–Борчердса $\Phi(z)$. Эта алгебра содержит алгебру Каца–Мууди $\mathfrak{g}(A)$ и имеет хорошие автоморфные свойства для ее функции знаменателя. Используя эти автоморфные свойства, возможно вычислить разложение $\Phi(z)$ в бесконечное произведение (это произведение сходится для z с большой мнимой частью $\text{Im } z \in V^+(M)$, т. е. $-(\text{Im } z, \text{Im } z) \gg 0$):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{w \in W} \det(w) \left(\exp(-2\pi i(w(\rho), z)) - \sum_{a \in M^* \cap \mathbb{R}_{++} \mathcal{M}} m(a) \exp(-2\pi i(w(\rho + a), z)) \right) \\ &= \exp(-2\pi i(\rho, z)) \prod_{\alpha \in \Delta(M)_+^{\text{re}} \cup \Delta(M^*)_+^{\text{im}}} (1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{\text{mult } \alpha}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\Delta(M)_+^{\text{re}} = (W(P(\mathcal{M})) \cap Q_+)$, где $Q_+ = \mathbb{Z}_+ \delta_1 + \mathbb{Z}_+ \delta_2 + \mathbb{Z}_+ \delta_3$; эквивалентно, $\Delta(M)_+^{\text{re}} = \{\delta \in \Delta^{(2)}(M) \mid (\rho, \delta) < 0\}$. Для промежуточной подрешетки $M \subset T \subset M^*$ обозначим $\Delta(T)_+^{\text{im}} = \overline{V^+(M)} \cap T$. Элементы $\Delta(M)_+^{\text{re}}$ называются *положительными вещественными корнями* (они имеют квадрат 2). Элементы из $\Delta(T)_+^{\text{im}}$ называются *положительными мнимыми корнями из подрешетки T* (они имеют неположительный квадрат). Показатели $\text{mult } \alpha$ являются целыми числами. Они называются *кратностями* корней α и очень важны для супералгебры Каца–Мууди $\mathfrak{g}(M, {}_s\Delta)$. Всегда $\text{mult } \alpha = 1$, если $\alpha \in \Delta(M)_+^{\text{re}}$. За деталями мы отсылаем к [19].

Используя результаты § 1, мы находим автоморфные коррекции для алгебр Каца–Мууди $\mathfrak{g}(A)$, $A = A_{1,0}, A_{1,I}, A_{1,II}$. Для алгебры $A_{1,II}$ это сделано в [19], [20], используя форму $\Delta_5(Z)$.

Мы отождествляем точку $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2$ с точкой $z = z_3 f_2 + z_2 f_3 + z_1 f_{-2} \in \Omega(V^+(M))$ с введенными выше координатами (z_1, z_2, z_3) . Зигелевы автоморфные формы на $\mathbb{H}_2$ дают некоторые автоморфные формы на $\Omega(V^+(M))$ в силу хорошо известного изоморфизма $\text{Sp}_4(\mathbb{Z})/\{\pm E_4\} \cong \text{O}^+(L_1)/\{\pm E_5\}$ (см. например, [19]). Таким образом, мы можем рассматривать автоморфную форму $\Delta_5(Z)$ и автоморфные формы $\chi_{35}(Z)$ и $\chi_{30}(Z)$, которые изучались в § 1, как автоморфные формы на $\Omega(V^+(M))$. Можно переписать

$$\exp(\pi i(nz_1 + lz_2 + mz_3)) = \exp(-\pi i(a, z)), \quad a = nf_2 - lf_3/2 + mf_{-2},$$

где $z = z_3 f_2 + z_2 f_3 + z_1 f_{-2}$.

Используя решетку $M_{1,II}$, можно переписать форму $\Delta_5(Z)$ как

$$\Delta_5(z) = \exp(-\pi i(\rho_{II}, z)) \prod_{\alpha \in \Delta(M_{1,II})_+^{\text{re}} \cup \Delta(M_{1,II})_+^{\text{im}}} (1 - \exp(-\pi i(\alpha, z)))^{\text{mult } \alpha}, \quad (3.5)$$

где

$$\text{mult } \alpha = f(-(\alpha, \alpha)/2) \quad (3.6)$$

для функции $f(N)$, введенной в (1.9). Отсюда следует, что

$$\Delta_5(2z) = \exp(-2\pi i(\rho_{\text{I}}, z)) \prod_{\alpha \in \Delta(M_{1,\text{II}})_{+}^{\text{re}} \cup \Delta(M_{1,\text{II}})_{+}^{\text{im}}} (1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{\text{mult } \alpha}, \quad (3.7)$$

$\text{mult } \alpha = f(-(\alpha, \alpha)/2)$, имеет вид (3.4).

Используя решетку $M_{1,0}$, можно переписать форму $\Delta_{35}(z)$ как

$$\Delta_{35}(z) = \exp(-2\pi i(\rho_0, z)) \prod_{\alpha \in \Delta(M_{1,0})_{+}^{\text{re}} \cup \Delta(M_{1,0}^*)_{+}^{\text{im}}} (1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{\text{mult } \alpha}, \quad (3.8)$$

где

$$\text{mult } \alpha = f_2(-2(\alpha, \alpha)) \quad (3.9)$$

для функции $f_2(N)$, введенной в теореме 1.5.

Рассмотрим автоморфную форму $\tilde{\Delta}_{30}(z) := \Delta_{35}(z)/\Delta_5(2z)$. На ортогональном языке §2 эта автоморфная форма равна $\tilde{\Delta}_{30} = \tilde{\Delta}(L_{1,0})_{30}$. Используя решетку $M_{1,\text{I}}$, можно переписать $\tilde{\Delta}_{30}(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{30}(z) &= \Delta_{35}(z)/\Delta_5(2z) \\ &= \exp(-2\pi i(\rho_{\text{I}}, z)) \prod_{\alpha \in \Delta_{+}(M_{1,\text{I}})_{+}^{\text{re}} \cup \Delta(M_{1,0}^*)_{+}^{\text{im}}} (1 - \exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{\text{mult } \alpha}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\text{mult } \alpha = f_2(-2(\alpha, \alpha)) - \begin{cases} f(-(\alpha, \alpha)/2), & \text{если } \alpha \in M_{1,\text{II}} = 2M_{1,0}^*, \\ 0, & \text{если } \alpha \notin M_{1,\text{II}} = 2M_{1,0}^*. \end{cases} \quad (3.11)$$

Используя эти предварительные вычисления, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Аutomорфная форма $\Delta_{35}(z)$ дает автоморфную коррекцию алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A_{1,0})$ с разложением в бесконечное произведение (3.8), (3.9).*

Аutomорфная форма $\tilde{\Delta}_{30}(z) = \Delta_{35}(z)/\Delta_5(2z)$ дает автоморфную коррекцию алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A_{1,\text{I}})$ с разложением в бесконечное произведение (3.10), (3.11).

Аutomорфная форма $\Delta_5(2z)$ дает автоморфную коррекцию алгебры Каца–Муди $\mathfrak{g}(A_{1,\text{II}})$ с разложением в бесконечное произведение (3.7), (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.3 в [19]. Например, рассмотрим $\mathfrak{g}(A_{1,0})$. Из произведения (3.8) видно, что $\Delta_{35}(s_{\alpha}(z)) = -\Delta_{35}(z)$ для любого $\alpha \in \Delta(M_{1,0})_{+}^{\text{re}}$, так как $\text{mult } \alpha = 1$. Отсюда следует, что $\Delta_{35}(w(z)) = \det(w)\Delta_{35}(z)$, $w \in W = W^{(2)}(M_{1,0})$. Так как все $\text{mult } \alpha$ целые, из этого произведения видно, что

$$\Delta_{35}(z) = \sum_{w \in W} \det(w) \left(- \sum_{\rho_0 + a \in M_{1,0}^* \cap \mathbb{R}_{+} \mathcal{M}_{1,0}} m(a) \exp(-2\pi i(w(\rho_0 + a), z)) \right),$$

где все $m(a)$ целые и $m(0) = -1$. Рассмотрим $\rho_0 + a \in M_{1,0}^* \cap \mathbb{R}_{+} \mathcal{M}_{1,0}$. Имеем $(\rho_0 + a, \delta_i) \leq 0$, $i = 1, 2, 3$. Если $(\rho_0 + a, \delta_i) = 0$, соответствующий коэффициент

Фурье $m(a) = 0$, так как $\Delta_{35}(z)$ анти-инвариантна относительно s_{δ_i} . Рассматривая только ненулевые $m(a)$, можно считать, что $(\rho_0 + a, \delta_i) < 0$, $i = 1, 2, 3$. По определению ρ_0 тогда получаем, что $(a, \delta_i) \leq 0$, так как $a \in M_{1,0}^*$. В силу (3.1) тогда $a \in M_{1,0}^* \cap \mathbb{R}_+ \mathcal{M}_{1,0}$. Поэтому $a \in \mathbb{R}_{++} \mathcal{M}_{1,0}$, если $a \neq 0$. Если $a = 0$, имеем $m(a) = -1$. Таким образом, $\Delta_{35}(z)$ имеет вид (3.3). Отсюда вытекает требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В §1 и §2 мы рассматривали модулярную форму Игузы $\Delta_{30}(z) = \Delta_{35}(z)/\Delta_5(z) = c\chi_{30}(z)$. По-видимому, $\Delta_{30}(2z)$ с разложением в бесконечное произведение из следствия 1.6 дает автоморфную коррекцию супералгебры Каца–Мули с симметризованной обобщенной матрицей Картана

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

и соответствующей обобщенной матрицей Картана

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и подмножеством нечетных индексов $\tau = \{2\} \subset \{1, 2, 3\}$. Матрица B (и соответствующая матрица A) является скрученным вариантом обобщенной матрицы Картана $A_{1,0}$: если $A_{1,0}$ – матрица Грама элементов $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, то матрица B – матрица Грама элементов $\alpha_1 = 2\delta_1, \alpha_2 = \delta_2, \alpha_3 = 2\delta_3$, и матрица $A = (a_{ij}) = (2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i))$. См. [26], [27] и [41] по поводу этих алгебр. Мы не рассматриваем автоморфную коррекцию супералгебр Каца–Мули в этой статье.

§4. Перспектива

Используя методы и результаты [36], [39] (см. также общие результаты в [33], [34]), можно получить следующий классификационный результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Существуют в точности 12 эллиптических гиперболических симметричных обобщенных матриц Картана ранга 3, имеющих группу Вейля с некомпактным фундаментальным многоугольником (т.е. по крайней мере с одной вершиной на бесконечности) и решеточный вектор Вейля. Это матрицы $A_{1,0} - A_{3,III}$ ниже:*

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{1,I} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_{1,II} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{1,III} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_{2,0} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,I} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, & A_{2,II} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
A_{2,III} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 \\ -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 \\ -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 \\ -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
A_{3,0} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, & A_{3,I} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
A_{3,II} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10 \\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14 \\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10 \\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
A_{3,III} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 \\ -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 \\ -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 \\ -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 \\ -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 \\ -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 \\ -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 \\ -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 \\ -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 \\ -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $M_{4,0} = U(16) \oplus \langle 2 \rangle$. Пусть $\mathcal{M}_{4,0}$ – фундаментальный многоугольник для группы отражений $W = W^{(2)}(M_{4,0})$, действующей в $\mathcal{L}^+(M_{4,0})$, и $P(\mathcal{M}_{4,0}) \subset \Delta^{(2)}(M_{4,0})$ – множество всех ортогональных векторов к $\mathcal{M}_{4,0}$.

Матрица Грама $A_{4,0} = G(P(\mathcal{M}_{4,0}))$ элементов $P(\mathcal{M}_{4,0})$ (эта матрица бесконечна) – это единственная параболическая симметричная обобщенная матрица Картана ранга 3, которая имеет фундаментальный многоугольник с по крайней мере одной отличной от каспа вершиной на бесконечности и имеет решеточный вектор Вейля.

Используя методы, развитые в [19]–[21] и настоящей работе, можно найти автоморфную коррекцию для всех лоренцевых алгебр Каца–Муиди $\mathfrak{g}(A)$, где A – любая из тринадцати обобщенных симметричных матриц Картана теорем 4.1 и 4.2. Для всех матриц $A_{i,II}$, $A_{i,0}$, $A_{i,I}$, $i = 1, \dots, 4$, существуют соответствующие аналоги автоморфных форм Δ_5 , Δ_{35} , Δ_{30} . $\tilde{\Delta}_{30}$, $\tilde{\tilde{\Delta}}_{30}$. Случаи $A_{1,II}$ и $A_{2,II}$ уже были рас-

смотрены в [19], и случаи $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ рассмотрены в этой статье. Случаи $A_{i,III}$, $i = 1, 2, 3$, – более деликатные. Применяя к этим формам мультипликативные операторы Гекке, можно найти аналоги для этих форм модулярных форм $F_p(Z)$, которые рассматривались в § 1, и модулярных форм приложения В и их разложения в бесконечные произведения и суммы. Мы надеемся опубликовать эти результаты в последующих работах.

Дополнение А.

Мультипликативные операторы Гекке и подъем форм Якоби

В этом приложении мы дадим доказательство обобщения теорем 1.5 и 1.7. Это, в частности, дает новое доказательство теорем 1.5 и 1.7 и объясняет, почему операторы Гекке–Якоби $T^J(p)$ появляются в формуле (1.12) для показателей в разложении в бесконечное произведение модулярной формы $[\Delta_5(Z)]_p$.

Для произвольного положительного целого числа t обозначим через

$$\Gamma_t = \left\{ \begin{pmatrix} * & t* & * & * \\ * & * & * & t^{-1}* \\ * & t* & * & * \\ t* & t* & t* & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}) \right\}$$

парамодулярную группу типа $(1, t)$, где все $*$ – целые числа. (Трехмерное многообразие $\Gamma_t \setminus \mathbb{H}_2$ – это грубое многообразие модулей абелевых поверхностей с поляризациями типа $(1, t)$.) Для $t = 1$ имеем $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Голоморфная функция $\phi(z_1, z_2): \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *формой Якоби* индекса $t \in \mathbb{N}$ и веса k , если функция $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3)$ на верхней полуплоскости Зигеля $\mathbb{H}_2$ является модулярной формой веса k относительно параболической подгруппы Γ_∞ (см. (1.7)). Это означает, что $\tilde{\phi}(Z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (1.1) для любого $M \in \Gamma_\infty$, и что $\tilde{\phi}(Z)$ голоморфна на бесконечности, т.е. имеет разложение Фурье типа

$$\tilde{\phi}(Z) = \sum_{\substack{n, l \in \mathbb{Z} \\ 4nt - l^2 \geq 0}} f(n, l) \exp(2\pi i(nz_1 + lz_2 + tz_3)).$$

Отметим, что форма Якоби индекса t удовлетворяет функциональному уравнению (1.1) для любой $M \in \Gamma_\infty^{(t)} = \Gamma_t \cap \Gamma_\infty(\mathbb{Q})$. Мы будем использовать термин “форма Якоби” также и к функции $\tilde{\phi}(Z)$.

Мы называем функцию $\phi(z_1, z_2)$ (или $\tilde{\phi}(Z)$) *параболической формой Якоби*, если для ее разложения Фурье имеет место строгое неравенство $4nt > l^2$.

Функция $\phi(z_1, z_2)$ (или $\tilde{\phi}(Z)$) называется *слабой формой Якоби*, если в ее разложении Фурье вместо $4nt \geq l^2$ выполнено условие $n \geq 0$ (см. [8, § 9]).

Пространство всех форм Якоби (соответственно, параболических форм Якоби) индекса t и веса k обозначается как $M_{k,t}^J$ (соответственно, $S_{k,t}^J$).

Максимальная параболическая подгруппа Γ_∞ является полупрямым произведением группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и целочисленной группы Гейзенберга

$$\Gamma_\infty / \{\pm E_4\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \ltimes \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $\mu, \lambda, \kappa \in \mathbb{Z}$. Таким образом, для формы Якоби уравнение (1.1) эквивалентно двум отдельным функциональным уравнениям – одного для элементов группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и другого для элементов группы Гейзенберга.

Алгебра Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_\infty) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_\infty, G\Gamma_\infty)$ будет очень полезна в нашей конструкции. Как линейное пространство над $\mathbb{Q}$ эта алгебра порождена двойными классами смежности

$$U = \Gamma_\infty M \Gamma_\infty = \sum_i \Gamma_\infty M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty),$$

где M и M_i – элементы полугруппы целочисленных симплектических подобий $G\Gamma_\infty$ типа Γ_∞ (см. (1.2)). Алгебра $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ снабжена обычным умножением (см. общую точку зрения на эти алгебры в [15], [17]).

Эта алгебра Гекке действует на пространство форм Якоби всех индексов. Пусть $V = \sum_i a_i \Gamma_\infty M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ – произвольный элемент и пусть $F(Z)$ – произвольная функция, инвариантная относительно действия $|_k$ параболической подгруппы Γ_∞ , т.е. $F|_k \gamma = F$ для любого $\gamma \in \Gamma_\infty$ (см. (1.1)). Тогда мы полагаем

$$F(Z) \rightarrow (F|_k V)(Z) = \begin{cases} \sum_i \mu(M_i)^{2k-3} a_i (F|_k M_i)(Z), & \text{если } k > 0, \\ \sum_i a_i (F|_k M_i)(Z), & \text{если } k = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

где $\mu(M_i)$ обозначает степень симплектического подобия (см. (1.2)). Для $k > 0$ в этом определении фиксируется некоторый нормализующий множитель, обычный для операторов Гекке группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$.

Если $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3)$ – форма Якоби веса k и индекса t , то $(\tilde{\phi}|_k V)(Z)$ – сумма форм Якоби, возможно, различных индексов. Для описания этого представления нам понадобится понятие сигнатуры двойных классов смежности из $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$. Пусть

$$U = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & a & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty) \quad (a, d \in \mathbb{N}).$$

Рациональное число $\mathrm{Sign}(U) = ad^{-1}$ называется *сигнатурой* U . Сигнатура является мультипликативным инвариантом двойных классов смежности, так как

$$\mathrm{Sign}(\Gamma_\infty M_1 \Gamma_\infty \cdot \Gamma_\infty M_2 \Gamma_\infty) = \mathrm{Sign}(\Gamma_\infty M_1 \Gamma_\infty) \cdot \mathrm{Sign}(\Gamma_\infty M_2 \Gamma_\infty).$$

Нетрудно доказать (см. [17, предложение 5.2]) следующее утверждение.

ЛЕММА А.1. Пусть $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3) \in M_{k,t}^J$, и $U \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ – двойной класс смежности сигнатуры ad^{-1} .

Тогда $(\tilde{\phi}|_k U)(Z) \in M_{k,tad^{-1}}^J$, если $tad^{-1} \in \mathbb{N}$, и $(\tilde{\phi}|_k U)(Z) \equiv 0$ в противном случае.

Алгебра Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ некоммутативна и содержит делители нуля. Эта алгебра имеет два важных свойства:

- алгебра $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ является некоммутативным расширением стандартной алгебры Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_1) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}), G\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ зигелевой модулярной группы;
- алгебра $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ содержит две копии алгебры Гекке специальной линейной группы $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), M_2^+(\mathbb{Z}))$.

Эти две алгебры являются тензорным произведением их локальных компонент

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \bigotimes_p \mathcal{H}_p(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \quad \mathcal{H}(\Gamma_1) = \bigotimes_p \mathcal{H}_p(\Gamma_1),$$

которые являются полиномиальными кольцами с образующими

$$T(p) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \operatorname{diag}(1, p) \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad T(p, p) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) p E_2 \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

и

$$T_p = \Gamma_1 \operatorname{diag}(1, 1, p, p) \Gamma_1, \quad T_{1,p} = \Gamma_1 \operatorname{diag}(1, p, p^2, p) \Gamma_1, \quad \Delta_p = \Gamma_1 (p E_4) \Gamma_1,$$

соответственно. Напомним, что

$$\mathcal{H}_p(\Gamma) = \left\{ \sum_i a_i \Gamma M_i \in \mathcal{H}_p(\Gamma) \mid \mu(M_i) = p^{m_i} \right\},$$

где Γ — одна из групп Γ_t , Γ_∞ или $\Gamma_\infty^{(t)}$.

Существует естественное вложение алгебры $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ в $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$. Если

$$V = \sum_i a_i \Gamma_1 M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_1),$$

то по теореме об элементарных делителях можно представить V в форме $V = \sum_i a_i \Gamma_1 M'_i$, где $M'_i \in \mathrm{G}\Gamma_\infty(\mathbb{Z})$. Легко видеть, что отображение

$$\operatorname{Im}: U = \sum_i a_i \Gamma_1 M_i \rightarrow \sum_i a_i \Gamma_\infty M'_i$$

является вложением $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ в $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ (см. [15], [17] по поводу более общей конструкции).

Мы будем отождествлять $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ с ее образом в $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$.

Кольцо $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ содержит два подкольца, изоморфные $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) & \\ & j_- \downarrow j_+ & \\ \mathcal{H}(\Gamma_1) & \xrightarrow{\operatorname{Im}} & \mathcal{H}(\Gamma_\infty). \end{array}$$

Достаточно определить вложения $j_\pm$ для образующих $T(p)$ и $T(p, p)$, чьи образы мы обозначим как $T_\pm(p) = j_\pm(T(p))$ и $\Lambda_\pm(p) = j_\pm(T(p, p))$. По определению имеем

$$\begin{aligned} T_-(p) &= \Gamma_\infty \operatorname{diag}(1, p, p, 1) \Gamma_\infty, & \Lambda_-(p) &= \Gamma_\infty \operatorname{diag}(p, p^2, p, 1) \Gamma_\infty, \\ T_+(p) &= \Gamma_\infty \operatorname{diag}(1, 1, p, p) \Gamma_\infty, & \Lambda_+(p) &= \Gamma_\infty \operatorname{diag}(p, 1, p, p^2) \Gamma_\infty. \end{aligned}$$

Эти элементы связаны со стандартными образующими симплектической алгебры Гекке $\mathcal{H}_p(\Gamma_1)$

$$T(p) = T_-(p) + T_+(p), \quad T_{1,p} = \Lambda_-(p) + \Lambda_+(p) + T_0(p) + \nabla_p - \Delta_p, \quad (\text{A.2})$$

где

$$T_0(p) = \Gamma_\infty \operatorname{diag}(1, p, p^2, p) \Gamma_\infty, \quad \nabla_p = \sum_{r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & r \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

и $\Delta_p = \Gamma_\infty (pE_4) \Gamma_\infty$. (Последний элемент является центральным элементом в $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$.)

Для любого элемента $V = \sum_i a_i \Gamma_\infty M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ обозначим через $\operatorname{Sign}_s(V)$ или $V^{(s)}$ его однородную часть сигнатуры s

$$V^{(s)} = \operatorname{Sign}_s(V) = \sum_{i, \operatorname{Sign}(M_i)=s} a_i \Gamma_\infty M_i.$$

Перестановочность элементов $T_\pm(p)$, $\Lambda_\pm(p)$, $T_0(p)$ и ∇_p для различных простых p следует из леммы (см. [14, теорема 5.1]):

ЛЕММА А.2. Пусть $U = \sum_a U^{(a)}$ и $V = \sum_b V^{(b)}$ — разложения в $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ элементов $U, V \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$ в сумму однородных компонент той же сигнатуры.

Тогда верно тождество

$$\sum_{ab=r} U^{(a)} \cdot V^{(b)} = \sum_{ab=r} V^{(b)} \cdot U^{(a)}.$$

Мы увидим, что формула теоремы 1.7 для $f_p(N)$ и формула (1.12) следуют из коммутационных соотношений в некоммутативном кольце $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$, которые отражают свойства локальных L -функций групп $\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z})$ и $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Напомним, что элемент Гекке $T(m) \in \mathcal{H}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}))$ равен сумме всех различных двойных классов смежности с определителем m

$$T(m) = \sum_{a|b, ab=m} \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Для простого p введем p -локальный многочлен Гекке

$$Q_p(X) = 1 - T(p)X + pT(p, p)X^2,$$

равный знаменателю локальной ζ -функции группы $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\sum_{d \geq 0} T(p^d)X^d = Q_p(X)^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Аналогичный $Q_p(X)$ многочлен для симплектической группы является полиномом над $\mathcal{H}_p(\Gamma_1)$

$$S_p(X) = 1 - T_p X + p(T_{1,p} + (p^2 + 1)\Delta_p)X^2 - p^3 \Delta_p T_p X^3 + p^6 \Delta_p^2 X^4,$$

являющимся знаменателем ряда Гекке типа (A.3) для $\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z})$. Этот полином является локальным множителем так называемой спинорной L -функции группы $\operatorname{Sp}_4(\mathbb{Z})$.

Следующее тождество (см. [17]) показывает связь между полиномом $S_p(X)$ и $\pm$ -вложениями полинома $Q_p(X)$ в параболическое расширение $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ кольца $\mathcal{H}(\Gamma_1)$. Это

$$S_p(X) = Q_{p,-}(X)(1 - K_p X^2)Q_{p,+}(X), \quad (\text{A.4})$$

где

$$Q_{p,\pm}(X) = 1 - T_\pm(p)X + p\Lambda_\pm(p)X^2, \quad K_p = p^2\Delta_p - p\nabla_p.$$

(Доказательство (A.4) и некоторых более общих тождеств такого типа см. в [15], [17].)

“Минус”-вложение используется в конструкции арифметического подъема форм Якоби. По определению “минус”-вложения имеем

$$T_-(m) = \sum_{\substack{ad=m \\ b \bmod d}} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по лемме A.1

$$(\tilde{\phi}|_k T_-(m))(Z) = m^{2k-3} \sum_{\substack{ad=m \\ b \bmod d}} d^{-k} \phi\left(\frac{az_1+b}{d}, az_2\right) \exp(2\pi i m t z_3) \in M_{k,t}^J$$

для любого $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3) \in M_{k,t}^J$ ($k > 0$). В [13, теорема 3] доказано, что для любой параболической формы Якоби $\tilde{\phi}(Z) \in S_{k,t}^J$ ($k > 0$) функция

$$\text{Lift}(\tilde{\phi})(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{2-k} (\tilde{\phi}|_k T_-(m))(Z) \quad (\text{A.5})$$

— параболическая форма веса k относительно парамодулярной группы Γ_t .

Другое приложение того же самого метода найдено в [19], где были рассмотрены модулярные формы относительно парамодулярной группы Γ_t типа

$$G(Z) = \tilde{\psi}(Z) \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} (\tilde{\phi}|_0 T_-(m))(Z)\right), \quad (\text{A.6})$$

где $\tilde{\psi}(Z)$ — параболическая форма Якоби целого или полуполого индекса и $\tilde{\phi}(Z)$ — слабая форма Якоби веса 0 и индекса t . Тождество типа (A.6) дает разложение модулярной формы $\Delta_5(Z)$ в бесконечное произведение (0.2) (см. [19, теорема 4.1]).

Для $t = 1$ подъем (A.5) совпадает с подъемом Маасса и коммутирует с действием операторов Гекке из $\mathcal{H}(\Gamma_1)$. Доказательство этого факта в [8, §6] основано на точных формулах для действия операторов Гекке на коэффициенты Фурье зигелевых модулярных форм. Другое доказательство, использующее параболические операторы Гекке из $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$, можно найти в [16], где доказана перестановочность подъема и операторов Гекке для эрмитовой модулярной группы $SU(2, 2)$. В [16] используется то, что подъем является модулярной формой.

Ниже мы докажем перестановочность подъема форм Якоби с действием операторов Гекке как следствие некоторых коммутаторных тождеств в некоммутативном расширении $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$. Эти соотношения дают чисто алгебраическое доказательство для парамодулярной группы Γ_t упомянутых выше результатов и точную формулу для действия произвольного оператора Гекке типа (1.3) на модулярные формы типа (A.6).

Следующее предложение играет решающую роль в доказательстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.3. 1. Для любого элемента $V \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$ формальный степенной ряд

$$R_p(V, X) = Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X) = \left(\sum_{d \geq 0} T_-(p^d) X^d \right) V Q_{p,-}(X)$$

является полиномом от переменной X над $\mathcal{H}(\Gamma_\infty)$.

2. Пусть $V \in \mathcal{H}_p(\Gamma_1)$, и $F_t(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3)$ есть $|_k$ -инвариантная функция относительно Γ_∞ , где $(t, p) = 1$. Тогда

$$F_t|_k R_p(V, p^{2-k}) = \sum_{d \geq 0} F_t|_k \text{Sign}_1(T_-(p^d)V) p^{(2-k)d},$$

где $\text{Sign}_1(U)$ обозначает компоненту сигнатуры 1 элемента $U \in \mathcal{H}_p(\Gamma_\infty)$ (см. лемму А.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Кольцо $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ коммутативно, поэтому имеем

$$S_p(X)^{-1} V S_p(X) = V$$

для любого $V \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$. Используя (А.4), получаем

$$Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X) = (1 - K_p X^2) Q_{p,+}(X) V Q_{p,+}(X)^{-1} (1 - K_p X^2)^{-1}. \quad (\text{А.7})$$

По определению имеем

$$\text{Sign}(T_-(p^d)) = p^d, \quad \text{Sign}(T_+(p^d)) = p^{-d}, \quad \text{Sign}(K_p) = 1.$$

Сравнивая сигнатуры обеих сторон в (А.7), видим, что формальные степенные ряды $Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X)$ полиномиальны, потому что

$$\min(\text{Sign}(V)) \leq \text{Sign}(Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X)) \leq \max(\text{Sign}(V)),$$

где $\min(\text{Sign}(V))$ (соответственно, $\max(\text{Sign}(V))$) – минимальная (соответственно, максимальная) сигнатура компонент элемента V .

2. По лемме А.1 и условию $(t, p) = 1$ имеем $F_t|_k W \equiv 0$, если $\text{Sign}(W) = p^{-n}$, где $n > 0$. Поэтому все элементы сигнатуры типа p^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) исчезают при $|_k$ -действии элемента V на F_t . Элементы сигнатуры p^n умножают индекс t функции F_t . Легко видеть, что

$$F_d|_k K_p = F_d|_k (p^2 \Delta_p - p \nabla_p) = \begin{cases} p^{2k-4} F_d, & \text{если } (d, p) = 1, \\ 0, & \text{если } (d, p) = p. \end{cases}$$

Запишем (А.7) в форме

$$\begin{aligned} R_p(V, X) &= Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X) \\ &= (1 - K_p X^2) Q_{p,+}(X) V Q_{p,+}(X)^{-1} + Q_{p,-}(X)^{-1} V Q_{p,-}(X) K_p X^2. \end{aligned}$$

Это тождество дает второе утверждение, так как $F_t|_k (1 - K_p X^2) \equiv 0$ для $X = p^{2-k}$ и $F_t|_k (\text{Sign}_{p^n}(R_p(V, X)) K_p) = 0$ для $n \geq 1$.

Введем отображение $\mathcal{J}$ из алгебры Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ в линейное пространство

$$\mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty) = \left\{ V = \sum_i a_i \Gamma_\infty M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty) \mid \text{Sign}(M_i) = 1 \right\}.$$

Для любого $V = \sum_a V^{(a)} \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$ (см. лемму А.2) полагаем

$$\mathcal{J}_k(V) := \sum_{m \geq 1} m^{2-k} T_-(m) V^{(m^{-1})} \in \mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty). \quad (\text{А.8})$$

Перестановочность подъема и операторов Гекке следует из глобального варианта второго утверждения предложения А.3.

СЛЕДСТВИЕ А.4. Пусть $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i z_3) \in S_{k,1}^J$ – параболическая форма Якоби веса k и индекса 1, и пусть $V \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$. Тогда имеем

$$\text{Lift}(\tilde{\phi})|_k V = \text{Lift}(\tilde{\phi}|_k \mathcal{J}_k(V)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности предположим, что V – двойной класс смежности. Пусть

$$V = \Gamma_1 \text{diag}(a, b, c, d) \Gamma_1 = \prod_{p|v} V_p \quad (v = ac = bd = \mu(V))$$

– разложение элемента $V \in \mathcal{H}(\Gamma_1)$ в произведение его локальных компонент $V_p \in \mathcal{H}_p(\Gamma_1)$. Элемент $T_-(p^d)$ – это компонента сигнатуры p^d элемента Гекке $T(p^d) \in \mathcal{H}_p(\Gamma_1)$. Поэтому по лемме А.2

$$\mathcal{J}_k(V) = \left(\prod_{p|\mu(V)} Q_{p,-}(p^{2-k})^{-1} \right) V \left(\prod_{p|\mu(V)} Q_{p,-}(p^{2-k}) \right) = \prod_{p|\mu(V)} R_p(V_p, p^{2-k}).$$

В силу рациональности рядов Гекке из $\mathcal{H}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ (см. (А.3)), можно переписать определение подъема, используя формальное бесконечное произведение (см. [13])

$$\text{Lift}(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}|_k \sum_{m=1}^{\infty} m^{2-k} T_-(m) = \tilde{\phi}|_k \prod_p Q_{p,-}(p^{2-k})^{-1}.$$

Ввиду предложения А.3 и леммы А.2 получаем формулу следствия

$$\text{Lift}(\tilde{\phi})|_V = \left(\tilde{\phi}|_k \left(\prod_{p|\mu(V)} Q_{p,-}(p^{2-k})^{-1} V \prod_{p|\mu(V)} Q_{p,-}(p^{2-k}) \right) \right) |_k \prod_p Q_{p,-}(p^{2-k})^{-1}.$$

ПРИМЕР А.5 (см. [8, теорема 6.3]). Используя (А.2), можно вычислить образы образующих алгебры Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ при действии $\mathcal{J}_k$. Нетрудно проверить, что

$$T_-(p)T_+(p) = pT_0(p) + (p^3 + p^2)\Delta_p, \quad (\text{А.9})$$

$$T_-(p^2)\Lambda_+(p) = p^3T_0(p)\Delta_p + p^4\Delta_p^2. \quad (\text{А.10})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}|_k \mathcal{J}_k(T_p) &= \tilde{\phi}|_k (p^{3-k}T_0(p) + p^{k-1} + p^{k-2}), \\ \tilde{\phi}|_k \mathcal{J}_k(T_{1,p}) &= \tilde{\phi}|_k ((p+1)T_0(p) + p^{2k-6}(p^2-1)). \end{aligned}$$

Элемент $T_0(p) \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty)$ имеет разложение в сумму левых классов смежности

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty \text{diag}(1, p, p^2, p) \Gamma_\infty &= \sum_{a \bmod p} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 & 0 \\ -pa & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \sum_{a \bmod p} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & a \\ 0 & p & pa & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{b \not\equiv 0 \bmod p} \sum_{a \bmod p} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} p & 0 & b & ab \\ 0 & p & ab & a^2b \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя эту систему представителей, легко видеть, что оператор $|_k T_0(p)$ связан с оператором Гекке–Якоби $T^J(p)$:

$$(\phi|_{k,t} T^J(p))(z_1, z_2) = p^{k-4} \sum_{\substack{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus M_2^+(\mathbb{Z}) \\ \det(M)=p^2 \\ \gcd(M)=1 \text{ или } p^2}} \sum_{X \in \mathbb{Z}^2/p\mathbb{Z}^2} \phi|_{k,t} M \mid X,$$

введенным Эйхлером–Загиром (см. [8, § 3]), формулой

$$\tilde{\phi}|_k T_0(p) = p^{k-3} \tilde{\phi}|_k T^J(p).$$

Для действия $T_0(p)$ на форму Якоби $\tilde{\phi}(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i z_3)$ индекса 1 имеет место формула

$$\tilde{\phi}|_k T_0(p)(Z) = \sum_{n,l} f_p(4n - l^2) \exp(2\pi i(nz_1 + lz_2 + tz_3)),$$

где

$$f_p(N) = \begin{cases} p^{k-3}(f(p^2 N) + p^{k-2}f(N) + p^{2k-3}f(N/p)), & \text{если } k > 0, \\ p^3 f(p^2 N) + pf(N) + f(N/p), & \text{если } k = 0, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

используя обозначения (1.8), (1.9). Заметим, что коэффициенты Фурье $f(n, l)$ произвольной формы Якоби индекса 1 зависят только от нормы $4n - l^2$.

Ограничение $t = 1$ в следствии А.4 не принципиально. Подъем (А.5) – это модулярная форма относительно парамодулярной группы Γ_t . Форма Якоби $\tilde{\phi}_t(Z) = \tilde{\phi}(z_1, z_2) \exp(2\pi i tz_3)$ веса k и индекса t является инвариантом относительно параболической подгруппы $\Gamma_\infty^{(t)} = \Gamma_t \cap \Gamma_\infty(\mathbb{Q})$. Рассмотрим алгебру Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_\infty^{(t)})$, содержащую $\pm$ -вложения алгебры $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ (можно использовать предыдущее определение) и алгебру Гекке всех элементов, имеющих хорошую редукцию, парамодулярной группы Γ_t

$$\mathcal{H}_*(\Gamma_t) = \bigotimes_{(p,t)=1} \mathcal{H}_p(\Gamma_t) \cong \bigotimes_{(p,t)=1} \mathcal{H}_p(\Gamma_1).$$

Для простого p , не делящего t , эти новые алгебры Гекке изоморфны алгебрам Гекке, связанным с симплектической группой:

$$\mathcal{H}_p(\Gamma_t) \cong \mathcal{H}_p(\Gamma_1), \quad \mathcal{H}_p(\Gamma_\infty^{(t)}) \cong \mathcal{H}_p(\Gamma_\infty).$$

Таким образом, мы определяем тот же самый морфизм $\mathcal{J}$ для любого элемента $V = \sum_a V^{(a)} \in \mathcal{H}_*(\Gamma_t)$

$$\mathcal{J}_k^{(t)}(V) = \sum_{m \geq 1} m^{2-k} T_-(m) V^{(m^{-1})} \in \mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty^{(t)}). \quad (\text{A.8-t})$$

Тогда имеем

СЛЕДСТВИЕ А.4-т. Пусть $\tilde{\phi}_t(Z) = \phi(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3) \in S_{k,t}^J$ – параболическая форма Якоби веса k и индекса t и $V \in \mathcal{H}_*(\Gamma_t)$ – элемент Гекке с хорошей редукцией. Тогда

$$(\text{Lift}(\tilde{\phi}_t))|_k V = \text{Lift}(\tilde{\phi}_t|_k \mathcal{J}_k^{(t)}(V)).$$

(См. [14], где для простых p с произвольной редукцией вычислены локальные множители спинорной L -функции подъема.)

Теперь мы рассмотрим приложение предложения А.3 к модулярным формам типа (А.6). Во-первых, имеется аналог леммы 1.1 для форм Якоби:

ЛЕММА А.6. Пусть $\tilde{\phi}(z_1, z_2) \exp(2\pi i t z_3) \in M_{k,t}^J$ – форма Якоби веса k и индекса t и $V = \Gamma_\infty^{(t)} M \Gamma_\infty^{(t)} = \sum_i \Gamma_\infty^{(t)} M_i \in \mathcal{H}(\Gamma_\infty^{(t)})$ – двойной класс смежности параболического кольца Гекке. Тогда функция

$$[\tilde{\phi}(Z)]_V := \prod_i (\tilde{\phi}|_k M_i)(Z)$$

является формой Якоби веса $k\nu$ и индекса $(t\nu) \text{Sign}(V)$, где ν – число левых классов смежности в V .

ТЕОРЕМА А.7. Пусть

$$G(Z) = \tilde{\psi}(Z) \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}|_0 m^{-1} T_-(m)(Z)\right)$$

– модулярная форма (см. (А.6)) веса k относительно парамодулярной группы Γ_t , где $\tilde{\psi}(Z)$ – форма Якоби веса k и $\tilde{\phi}(Z)$ – форма Якоби веса 0 и индекса t . Пусть $V \in \mathcal{H}_*(\Gamma_t)$ – элемент Гекке. Тогда имеет место формула

$$[G(Z)]_V = [\tilde{\psi}(Z)]_V \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{\phi}_{0,t} | \mathcal{J}_0^{(t)}(V))|_0 m^{-1} T_-(m)(Z)\right),$$

где

$$\mathcal{J}_0^{(t)}(V) = \sum_{m \geq 1} m^{-1} T_-(m) V^{(m^{-1})} \in \mathcal{H}^{(0)}(\Gamma_\infty^{(t)}),$$

и форма $[G(Z)]_V$ определена в (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае форм Якоби веса 0 мы не имеем нормализующего множителя в определении представления $\phi_{0,t}|_0 V$ (см. (А.1)). Это объясняет различие в определении операторов $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F(Z)$ функцию под экспонентой в функции $G(Z)$. Каждый мультипликативный оператор Гекке $[\dots]_V$, действующий на $\exp(F(Z))$, превращается в обычный оператор Гекке, действующий на функцию $F(Z)$ под экспонентой:

$$[\exp(F(Z))]_V = \exp(F|_0 V(Z)).$$

Заметим, что элемент V справа рассматривается как элемент кольца Гекке $\mathcal{H}(\Gamma_\infty^{(t)})$. Функция $F(Z)$ имеет форму типа (А.5)

$$F(Z) = \tilde{\phi}|_0 \prod_p Q_{p,-}(p^{-1})^{-1}.$$

Используя предложение А.3, получаем формулу теоремы А.7.

ПРИМЕР А.8. Вычислим $[\Delta_5(Z)]_V$ для $V = T_p$ и $V = T_{1,p}$. Используя (А.9), (А.10), имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}|_0 \mathcal{J}_0(T_p) &= \tilde{\phi}|_0(T_0(p) + p^2 + p), \\ \tilde{\phi}|_0 \mathcal{J}_0(T_{1,p}) &= \tilde{\phi}|_0((p+1)T_0(p) + p^2 - 1).\end{aligned}$$

Ввиду (А.11) получаем формулу (1.12) для показателей $f_p(N)$ в представлении $[\Delta_5(Z)]_p$ в виде бесконечного произведения.

Дополнение В.

Зигелевы модулярные формы с дивизором H_D

В замечании после следствия 1.4 мы упоминали результат ван дер Геера. Он доказал [12], что существует зигелева модулярная форма веса $-60H(2, D)$ с дивизором

$$G_D = \bigcup_{e^2|D} H_{D/e^2},$$

где $H(2, D)$ – так называемое число Коэна и H_{D/e^2} – гумбертова поверхность дискриминанта D/e^2 . Доказательство в [12] основано на вычислении степени дивизора G_D на гладкой компактификации трехмерного зигелевого модулярного многообразия и не дает прямой конструкции зигелевых модулярных форм с заданными дивизорами. Как в §1 и приложении А, итерируя экспоненциальные операторы Гекке и рассматривая частные, легко построить, начиная с формы $\Delta_5(Z)$, зигелевы модулярные формы с дивизорами H_{D^2} для любого D и их разложения в бесконечные произведения. В настоящем приложении мы опишем построение в виде бесконечных произведений модулярных форм с дивизорами H_D , где D не является полным квадратом.

В [12] был найден пример зигелевой модулярной формы $G^{(5)}$ веса 24 с дивизором H_5 , использующий образующие Игузы градуированного кольца зигелевых модулярных форм:

$$G^{(5)} = (\chi_{12} - 2^{-12}3^{-3}(E_6^2 + E_4^3))^2 - E_4(2 \cdot 3^{-1}\chi_{10} - 2^{11}3^{-6}E_6E_4)^2.$$

Ниже мы найдем разложение этой функции в бесконечное произведение.

Пусть $j(\tau)$ – это j -инвариант, являющийся $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -модулярной функцией веса 0

$$\begin{aligned}j(\tau) &= \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta_{12}(\tau)} = \frac{(1 + 240q + 2160q^2 + \dots)^3}{q - 24q^2 + 253q^3 + \dots} \\ &= q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots,\end{aligned}$$

где $E_4(\tau)$ – ряд Эйзенштейна веса 4 и $\Delta_{12}(\tau)$ – параболическая форма веса 12 для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Произведение $j(z_1)\phi_{0,1}(z_1, z_2)$ (см. (1.8)) является мероморфной формой Якоби веса 0 и индекса 1. Эта функция не является слабой формой Якоби, так как имеет разложение Фурье

$$j(z_1)\phi_{0,1}(z_1, z_2) = q^{-1}(r^{-1} + 10 + r) + (10r^{-2} + 680r^{-1} + 7548 + 680r + 10r^2) + q(\dots).$$

Определим другую форму Якоби того же типа

$$\phi_{0,1}^{(5)}(z_1, z_2) = j(z_1)\phi_{0,1}(z_1, z_2) - 10(\phi_{0,1} | T_0(2))(z_1, z_2) - 680\phi_{0,1}(z_1, z_2),$$

где $T_0(2)$ – оператор Гекке–Якоби (см. (A.11)). Эта форма Якоби имеет разложение Фурье типа

$$\phi_{0,1}^{(5)}(z_1, z_2) = \sum_{\substack{n \geq -1 \\ l \in \mathbb{Z}}} g(n, l) \exp(2\pi i(nz_1 + lz_2)) = q^{-1}(r^{-1} + r) + 48 + q(\dots).$$

Как и в § 1, мы используем коэффициенты Фурье последней формы Якоби для нахождения бесконечного произведения, которое является зигелевой модулярной формой.

ТЕОРЕМА В.1. *Бесконечное произведение*

$$F^{(5)}(Z) = r^{-1}(qr - s)(q - rs) \prod_{\substack{n, l, m \in \mathbb{Z} \\ (n, l, m) > 0}} (1 - q^n r^l s^m)^{g(n, m, l)},$$

где $(n, l, m) > 0$ означает, что $n \geq 0$, $m \geq 0$, $n + m > 0$ и l – произвольное целое число, определяет зигелеву модулярную форму веса 24. Дивизор формы $F^{(5)}(Z)$ – это гумбертова поверхность H_5 дискриминанта 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно доказать эту теорему, используя метод, который был использован в [19, теорема 4.1] (см. также [6, теорема 5.1]). Отметим только основные шаги доказательства.

i) Данное бесконечное произведение абсолютно сходится для всех $\det(\operatorname{Im} Z) > C$ при большом $C > 0$ и может быть аналитически продолжено до многозначной аналитической функции на $\mathbb{H}_2$.

ii) Это произведение инвариантно относительно перестановки переменных $q \rightarrow s$, $s \rightarrow q$ (эквивалентно, $z_1 \rightarrow z_3$, $z_3 \rightarrow z_1$).

iii) Функция $F^{(5)}(Z)$ представляется с помощью операторов Гекке $T_-(m)$

$$F^{(5)}(Z) = \Delta_{12}(z_1)^2 \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(\tilde{\phi}_{0,1}^{(5)}|_0 T_-(m))(Z)\right).$$

Поэтому это произведение является Γ_∞ -инвариантной функцией веса 24. Параболическая подгруппа Γ_∞ и преобразование $z_1 \rightarrow z_3$, $z_3 \rightarrow z_1$ порождают зигелеву модулярную группу.

iv) Только множители с отрицательным квадратом $l^2 - 4nm < 0$ этого бесконечного произведения имеют нули на $\mathbb{H}_2$. Эти множители существуют только с квадратом $l^2 - 4nm = -5$ и определяют гумбертову поверхность H_5 .

Отметим, что указанная выше конструкция является общей. Она дает модулярные формы с неприводимым дивизором H_D для всех D . Для $D = 4d + 1$ можно взять форму Якоби

$$j(z_1)^d \cdot \phi_{0,1}(z_1, z_2) = q^{-d}(r^{-1} + 10 + r) + q^{-d+1}(\dots).$$

Для $D = 4d$ можно начать с формы Якоби веса 0

$$(\phi_{0,1}|_0 T_0(2))(z_1, z_2) - 2\phi_{0,1}(z_1, z_2) = q^{-1} + (r^2 + r^{-2} + 70) + q(\dots),$$

которая определяет разложение в бесконечное произведение формы $\Delta_{35}(Z)$.

Мы надеемся представить эту конструкцию более детально в последующих публикациях.

Список литературы

1. *Baily W. L.* Fourier–Jacobi series // Algebraic groups and discontinuous subgroups. Proc. Symp. Pure Math. Vol. IX / ed. A. Borel and G. D. Mostow. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1966. P. 296–300.
2. *Borcherds R.* Generalized Kac–Moody algebras // J. Algebra. 1988. V. 115. P. 501–512.
3. *Borcherds R.* The monster Lie algebra // Adv. Math. 1990. V. 83. P. 30–47.
4. *Borcherds R.* The monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras // Invent. Math. 1992. V. 109. P. 405–444.
5. *Borcherds R.* Sporadic groups and string theory // Proc. European Congress of Mathem. 1992. P. 411–421.
6. *Borcherds R.* Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products // Invent. Math. 1995. V. 120. P. 161–213.
7. *Borcherds R.* The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra // Preprint, 1994.
8. *Eichler M., Zagier D.* The theory of Jacobi forms. Birkhäuser: Progress in Math. V. 55, 1985.
9. *Feingold A. J., Frenkel I. B.* A hyperbolic Kac–Moody algebra and the theory of Siegel modular forms of genus 2 // Math. Ann. 1983. V. 263. №1. P. 87–144.
10. *Freitag E.* Siegelsche Modulfunktionen. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
11. *van der Geer G.* Hilbert modular surfaces. Erg. Math. Grenzgeb., 3. Folge. V. 16. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
12. *van der Geer G.* On the geometry of a Siegel modular threefold // Math. Ann. 1982. V. 260. P. 317–350.
13. *Gritsenko V. A.* Irrationality of the moduli spaces of polarized abelian surfaces // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 6. P. 235–243; // In full form in “Abelian varieties”, Proc. of the Egloffstein conference (1993) de Gruyter, Berlin, 1995. P. 63–81.
14. *Gritsenko V. A.* Modulformen zur Paramodulgruppe und Modulräume der Abelschen Varietäten // Mathematica Gottingensis Schrift. des SFB. Geometrie und Analysis. 1995. Heft 12. P. 1–89.
15. *Гриценко В. А.* Индукция в теории L -функций // Алгебра и Анализ. 1994. Т. 6. №1. С. 1–76.
16. *Гриценко В. А.* Функции Якоби и эйлеровы произведения для эрмитовых модулярных форм // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1990. Т. 183. С. 77–123.
17. *Гриценко В. А.* Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье–Якоби модулярных форм // Матем. сб. 1982. Т. 119. С. 248–277.
18. *Gritsenko V., Hulek K.* Minimal Siegel modular threefolds // Prépublication de l’Institut Fourier 1995. №312. P. 1–28; alg-geom/9506017.
19. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras // Amer. J. Math. 1996 (to appear); alg-geom/9504006.
20. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* Siegel automorphic form correction of a Lorentzian Kac–Moody algebra // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 1995. V. 321. P. 1151–1156.
21. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* $K3$ surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry // Math. Res. Lett. 1996. V. 3. №2. P. 211–229; alg-geom/9510008.
22. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* The Igusa modular forms and “the simplest” Lorentzian Kac–Moody algebras // Preprint Forschergruppe Automorphe Formen Universität Mannheim und Universität Heidelberg. V. 3, 1996. P. 1–40; alg-geom/9603010.
23. *Igusa J.* On Siegel modular forms of genus two (II) // Amer. J. Math. 1964. V. 84. №2. P. 392–412.
24. *Igusa J.* Ring of modular forms of degree two over $\mathbb{Z}$ // Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 132–148.
25. *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
26. *Kac V.* Lie superalgebras // Adv. Math. 1977. V. 26. P. 8–96.
27. *Kac V.* Infinite-dimensional algebras, Dedekind’s η -function, classical Möbius function and the very strange formula // Adv. Math. 1978. V. 30. P. 85–136.

28. *Maass H.* Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II. 1964. № 11. P. 125–135.
29. *Maass H.* Über ein Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa // Invent. Math. 1980. V. 60. P. 85–104.
30. *Никulin В. В.* Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа $K3$ // Труды ММО. 1979. Т. 38. С. 75–137.
31. *Никulin В. В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 111–177.
32. *Никulin В. В.* О фактор-группах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1981. С. 3–114.
33. *Никulin В. В.* Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 3. С. 637–668.
34. *Никulin В. В.* О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 113–142.
35. *Никulin В. В.* Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 109–188.
36. *Никulin В. В.* Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга три // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 119–142.
37. *Nikulin V. V.* Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces // Proc. Int. Congr. Math. Berkeley, 1986. V. 1. P. 654–669.
38. *Nikulin V. V.* A lecture on Kac–Moody Lie algebras of the arithmetic type // Preprint Queen's University, Canada. V. #1994-16, 1995; alg-geom/9412003.
39. *Никulin В. В.* Группы отражений в пространствах Лобачевского и тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Мули // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 73–106.
40. *Nikulin V. V.* The remark on discriminants of $K3$ surfaces moduli as sets of zeros of automorphic forms // Duke e-prints alg-geom/9512018, 1995.
41. *Ray U.* A character formula for generalized Kac–Moody superalgebras // J. Algebra. 1995. V. 177. P. 154–163.

С.-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gritsenk@gauss.pdmi.ras.ru, valera@mathi.uni-heidelberg.de;

slava@nikulin.mian.su

Поступила в редакцию

04.06.1996