Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, О существовании предельных значений на границе области решений полигармонического уравнения, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 11, 89–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:07:29

УДК 517.95

В. П. Михайлов

О существовании предельных значений на границе области решений полигармонического уравнения

В работе установлены необходимые и достаточные условия существования пределов в среднем полигармонических функций в круге.

Библиография: 2 названия.

Нас интересует вопрос о существовании предельных значений на границе области решений эллиптических уравнений. Задача рассматривается в самой простой ситуации: двумерный случай, область – круг, уравнение, предельными значениями решений на границе которого мы будем интересоваться, – полигармоническое, точнее m -гармоническое, $m \geq 1$:

$$\Delta^m u = 0, \quad |x| < 1. \quad (1)$$

Под предельным значением на границе $\{|x| = 1\}$ непрерывной в $\{|x| < 1\}$ функции $u(x) = u(r, \varphi)$, $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $0 \leq r < 1$, будем понимать ее L_2 -предельные значения: непрерывная в круге $\{r < 1\}$ функция $u(r, \varphi)$ имеет L_2 -предел на границе $\{r = 1\}$, если существует функция $f(\varphi) \in L_2(0, 2\pi)$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} (u(r, \varphi) - f(\varphi))^2 d\varphi = \|u(r, \cdot) - f(\cdot)\|_{L_2}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1.$$

Соответственно с этим функцию $u(r, \varphi)$ будем называть L_2 -ограниченной, если

$$\sup_{r < 1} \|u(r, \cdot)\|_{L_2} < \infty. \quad (2)$$

Хорошо известны критерии существования L_2 -предельных значений на границе у решений эллиптических уравнений второго порядка. Приведем два из них. В рассматриваемой ситуации (область – круг, и $m = 1$ в (1)) они выглядят следующим образом. Первый критерий – теорема типа теоремы Рисса: для существования L_2 -предела решения на границе $\{|x| = 1\}$ необходимо и достаточно, чтобы это решение было L_2 -ограниченным. Второй критерий – теорема типа теоремы Литлвуда–Пэли: для существования L_2 -предела на границе решения необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|x| < 1} |\nabla u|^2 (1 - |x|) dx < \infty. \quad (3)$$

Эти утверждения, являясь критериями существования L_2 -пределов у решений уравнения второго порядка, перестают быть необходимыми и достаточными условиями для решений уравнения более высокого порядка, $m > 1$. При этом условие L_2 -ограниченности остается, конечно, необходимым условием существования L_2 -предела, но перестает быть условием достаточным. Условие же (3), наоборот, является достаточным условием существования L_2 -предела решения, но не является для этого необходимым. Достаточность условия (3) можно получить с помощью результатов работы [1], впрочем, для рассматриваемого случая ее легко получить и непосредственно. Приведем примеры, показывающие недостаточность условия L_2 -ограниченности и не необходимость условия (3) для существования L_2 -пределов на границе. Эти примеры можно найти среди бигармонических функций – решений уравнения (1) при $m = 2$ (бигармоническая функция, конечно, является и m -гармонической при любом $m \geq 2$).

Прежде всего заметим, что при любой ограниченной числовой последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ функция

$$u(r, \varphi) = (1 - r^2) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sqrt{k} r^k \cos k\varphi, \quad r < 1, \quad (4)$$

является бигармонической в круге $\{|x| < 1\} = \{r < 1\}$. Далее, так как

$$\|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 = \pi(1 - r^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 k r^{2k}, \quad (5)$$

то для всех $r < 1$

$$\|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq \pi(1 - r^2)^2 M_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} k r^{2k} = \pi M_1^2 r^2 \leq \pi M_1^2,$$

где $M_1 = \sup_{k \geq 1} |\varepsilon_k| < \infty$, т.е. функция $u(r, \varphi)$ из (4) L_2 -ограничена. Покажем, что в случае, когда $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = \dots = 1$, функция $u(r, \varphi)$ L_2 -предела на границе не имеет. Прежде всего отметим, что в этом случае из (5) следует равенство

$$\|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 = \pi(1 - r^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k r^{2k} = \pi r^2 \quad \text{для всех } r < 1. \quad (6)$$

Далее, если существует L_2 -предел $f(\varphi)$ на границе $\{r = 1\}$ функции $u(r, \varphi)$, то в силу слабой сходимости

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi &= \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi = 0, \\ \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi &= 0, \quad k \geq 1, \\ \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi &= \lim_{r \rightarrow 1} (1 - r^2) \sqrt{k} r^k = 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $f = 0$, но этого быть не может в силу (6): $\lim_{r \rightarrow 1} \|u(r, \cdot)\|_{L_2} = \sqrt{\pi} \neq 0$. Утверждение о недостаточности условия L_2 -ограниченности для существования L_2 -предела на границе установлено.

Покажем, что если последовательность ε_k , $k = 1, 2, \dots$, стремится к нулю, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то заданная формулой (4) функция $u(r, \varphi)$ имеет нулевой L_2 -предел на границе. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $N = N_\varepsilon > 0$ такое, что $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ для всех $k \geq N$. В связи с этим из (5) получаем справедливое для всех $r < 1$ неравенство

$$\begin{aligned} \|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 &= \pi(1-r^2)^2 \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 k r^{2k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \varepsilon_k^2 k r^{2k} \right) \\ &\leq \pi(1-r^2)^2 M_1^2 \frac{N(N+1)}{2} + \varepsilon^2 \pi(1-r^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k r^{2k} \\ &= \pi(1-r^2)^2 \frac{M_1^2 N(N+1)}{2} + \varepsilon^2 \pi r^2, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq 2\pi\varepsilon^2 \quad \text{для всех } r \geq r_0,$$

где $(1-r_0^2)^2 \frac{M_1^2 N(N+1)}{2} = \varepsilon^2$. Что и требовалось установить. Теперь проверим, что если последовательность ε_k , $k = 1, 2, \dots$, стремится к нулю не слишком сильно, будем предполагать, что $|\varepsilon_k| \geq (\ln(k+1))^{-1/2}$, $k = 1, 2, \dots$, то функция $u(r, \varphi)$ из (4) условию (3) удовлетворять не будет. Действительно, так как

$$|\nabla u|^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\varphi^2 \geq \frac{1}{r^2} u_\varphi^2,$$

а в силу (4)

$$u_\varphi = -(1-r^2) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k k^{3/2} r^k \sin k\varphi, \quad r < 1,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 (1-|x|) dx &\geq \int_{|x|<1} \frac{1-|x|}{|x|^2} u_\varphi^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1-r}{r} (1-r^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 k^3 r^{2k} dr \\ &\geq \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-r^2)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 k^3 r^{2k} dr^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{\ln(k+1)} \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-\xi)^3 \xi^k d\xi \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{\ln(k+1)} B(4, k+1) \\ &= \frac{\pi\Gamma(4)}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{(k+1) \cdots (k+4) \ln(k+1)} = \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

В работе получены критерии существования L_2 -пределов на границе у решений уравнения (1). Для формулировки этих теорем нам понадобятся следующие обозначения.

На пространстве $L_2(0, 2\pi)$ введем семейство проекционных операторов. Оператор P_N для любого целого $N \geq 1$ определим следующим образом. Для произвольной функции $f(\varphi) \in L_2(0, 2\pi)$, разложение которой в тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (7)$$

положим

$$(P_N f)(\varphi) = \sum_{k=N+1}^{2N} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \sum_{(N, 2N]} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Обозначим через δ_h^2 , $h \geq 0$, оператор второй симметрической разности: для любой заданной на $\mathbb{R}_1$ 2π -периодической функции $f(\varphi)$ из $L_2(0, 2\pi)$

$$(\delta_h^2 f)(\varphi) = f(\varphi + h) - 2f(\varphi) + f(\varphi - h), \quad \varphi \in \mathbb{R}_1, \quad h \geq 0.$$

Гильбертово пространство, состоящее из всех определенных на $\mathbb{R}_1$ обобщенных 2π -периодических функций $f(\varphi)$, принадлежащих $W_2^{-1}(0, 2\pi)$, обозначим через H^{-1} ; любую функцию $f(\varphi)$ из H^{-1} можно представить в виде сходящегося в H^{-1} ряда (7); в качестве нормы в H^{-1} , эквивалентной обычной, можно взять выражение

$$\|f\|_{H^{-1}} = \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x)$, $|x| < 1$, – решение уравнения (1). Для существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию (2), т.е. была L_2 -ограниченной, и удовлетворяла условию

$$\sup_{r < 1} \|P_N u(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x)$, $|x| < 1$, – решение уравнения (1). Для существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию (2), т.е. была L_2 -ограниченной, и удовлетворяла условию

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 u(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (9)$$

Из этих теорем вытекает еще один критерий.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x)$, $|x| < 1$, – решение уравнения (1). Для существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы множество функций $u(r, \varphi)$, $r < 1$, было компактным в $L_2(0, 2\pi)$.

Доказательства этих теорем основаны на ряде вспомогательных утверждений. В §1 эти вспомогательные утверждения формулируются и доказываются, в §2 на основании доказанных в §1 лемм устанавливается справедливость теорем 1–3.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Важную роль в наших рассуждениях будут играть специальные полигармонические функции: *при любом целом $k \geq 0$ и при любой гармонической функции $v(x)$ функция $r^{2k}v(x)$ $(k+1)$ -гармонична*. Это утверждение проще всего доказать индукцией по k . При $k = 0$ оно очевидно; пусть оно установлено для всех $k < s$. Докажем его для $k = s$. Так как

$$\Delta(r^{2s}v) = \Delta(r^{2s}) \cdot v + 2(\nabla r^{2s}, \nabla v) + r^{2s}\Delta v = 4s^2r^{2(s-1)}v + 4sr^{2(s-1)}(\nabla v, x)$$

и поскольку вместе с функцией $v(x)$ функция $(\nabla v, x)$ является гармонической, то по предположению индукции функция $\Delta(r^{2s}v)$ является s -гармонической, и тем самым $r^{2s}v$ является $(s+1)$ -гармонической функцией. Из доказанного вытекает, что при любой гармонической функции $v(x)$ и любом целом $s \geq 0$ функция $(1 - |x|^2)^s v(x)$ является $(s+1)$ -гармонической, т.е. функции $(1 - |x|^2)^s v(x)$ для всех целых $s \in [0, m-1]$ и всех гармонических $v(x)$ являются m -гармоническими функциями. Оказывается, что множество всех линейных комбинаций таких функций $(1 - |x|^2)^s v(x)$, $0 \leq s \leq m-1$, совпадает с множеством всех m -гармонических функций. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Для любой m -гармонической в круге $\{|x| < 1\}$ функции $u(x)$ найдутся, причем единственным образом, гармонические в этом круге функции $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ такие, что*

$$u(x) = u_0(x) + (1 - |x|^2)u_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^{m-1}u_{m-1}(x), \quad |x| < 1. \quad (10)$$

Конечно, представление m -гармонической функции в виде (10) не является новым: при $m = 2$ оно имеется, например, в книге [2]. Однако, в известных мне его доказательствах используется дополнительная информация о поведении функции $u(x)$ при приближении к границе области. В связи с этим подчеркнем, что утверждение леммы 1 носит чисто локальный характер: в ней не налагается никаких ограничений на поведение при приближении к границе входящих в формулу (10) функций. Именно в таком виде равенство (10) нами и будет использоваться.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $R \in (0, 1)$ и покажем, что функцией $u(x)$ однозначно определяются в круге $\{|x| < R\}$ такие гармонические функции $u'_0(x), \dots, u'_{m-1}(x)$, $u'_i(x) \in C^\infty(|x| \leq R)$, $i = 0, \dots, m-1$, что имеет место равенство

$$u(x) = u'_0(x) + (R^2 - r^2)u'_1(x) + \dots + (R^2 - r^2)^{m-1}u'_{m-1}(x), \quad |x| < R. \quad (11)$$

Предположим, что равенство (11) имеет место; докажем его единственность, при этом одновременно увидим, каким образом функции $u'_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, определяются через $u(x)$. В силу (11) функция $u'_0(x)$ обязана быть решением задачи Дирихле: $\Delta u'_0 = 0$, $|x| < R$, $u'_0|_{|x|=R} = u|_{|x|=R}$; таким образом, функция u'_0 единственным образом определяется по функции u . Дифференцируя (11) по r и полагая $r = R$, получим, что функция $u'_1(x)$ обязана быть решением задачи Дирихле: $\Delta u'_1 = 0$, $|x| < R$, $u'_1|_{|x|=R} = -\frac{u}{2R}\Big|_{r=R} + \frac{u'_0 r}{2R}\Big|_{r=R}$; таким образом, функция $u'_1(x)$ также однозначно определяется функцией $u(x)$ и т. д. Дифференцируя (11)

по r $(m-1)$ раз и полагая $r = R$, получим, что функция $u'_{m-1}(x)$ обязана быть решением задачи Дирихле:

$$\Delta u'_{m-1} = 0, \quad |x| < R,$$

$$u'_{m-1}|_{|x|=R} = \frac{(-1)^{m-1}}{(2R)^{m-1}(m-1)!} [u_{r^{m-1}}|_{r=R} - u'_{0r^{m-1}}|_{r=R} + \dots],$$

где многоточием обозначены слагаемые, содержащие значения при $r = R$ производных по r порядков, меньших $m-1$, уже определенных однозначно по $u(x)$ функций $u'_0(x), \dots, u'_{m-2}(x)$. Таким образом, и функция u'_{m-1} однозначно определяется функцией u . Для доказательства существования разложения (11) достаточно подставить в (11) в качестве функций $u'_0(x), \dots, u'_{m-1}(x)$ только что найденные функции. При этом будет выполняться тождество (11), так как и в правой, и в левой его частях стоят m -гармонические функции, удовлетворяющие одним и тем же условиям Дирихле для m -гармонического уравнения в круге $\{|x| < R\}$: на окружности $\{|x| = R\}$ их производные по r от нулевого до $(m-1)$ -го порядков совпадают. Равенство (11) можно переписать в виде

$$u(x) = u''_0(x) + r^2 u''_1(x) + \dots + r^{2(m-1)} u''_{m-1}(x), \quad |x| < R, \quad (12)$$

где гармонические в $\{|x| < R\}$ и бесконечно дифференцируемые в $\{|x| \leq R\}$ функции $u''_0(x), \dots, u''_{m-1}(x)$ однозначно определяются по функциям $u'_0(x), \dots, u'_{m-1}(x)$ формулами

$$u''_{m-1} = (-1)^{m-1} u'_{m-1},$$

$$\dots$$

$$u''_i = (-1)^{m-1} C_{m-1}^i R^{2(m-1-i)} u'_{m-1} + \dots + (-1)^i C_i^i R^0 u'_i, \quad (13)$$

$$\dots$$

$$u''_0 = (-1)^{m-1} R^{2(m-1)} u'_{m-1} + \dots + (-1)^0 R^0 C_0^0 u'_0.$$

Поскольку соответствие (13) между векторами $(u'_0, \dots, u'_{m-1})$ и $(u''_0, \dots, u''_{m-1})$, компоненты которых – гармонические функции, взаимно однозначное (с определителем матрицы, равным $(-1)^{m(m-1)/2}$), то представление (12) m -гармонической функции в круге $\{|x| \leq R\}$ однозначно определено функцией $u(x)$.

Равенство (12) можно написать и в круге $\{|x| < R'\}$ при любом R' , $R < R' < 1$; при этом значения новых гармонических в круге $\{|x| < R'\}$ функций $u''_0(x), \dots, u''_{m-1}(x)$ обязаны в круге $\{|x| < R\}$ совпадать с соответствующими, найденными выше, значениями функций $u''_0(x), \dots, u''_{m-1}(x)$. Это означает, что функции $u''_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, из формулы (12) на самом деле являются гармоническими функциями в круге $\{|x| < R'\}$ и, тем самым, во всем круге $\{|x| < 1\}$, и равенство (12) имеет место во всем круге $\{|x| < 1\}$.

Функции $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$, $|x| < 1$, из разыскиваемого нами представления (10) находятся по функциям $u''_0(x), \dots, u''_{m-1}(x)$, $|x| < 1$, как решение $(u'_0, \dots, u'_{m-1})$ системы (13) при $R = 1$:

$$u'_0 = u_0, \dots, u'_{m-1} = u_{m-1},$$

$$u_i(x) = (-1)^{m-1} C_{m-1}^i u''_{m-1}(x) + \dots + (-1)^i C_i^i u''_i(x),$$

$$0 \leq i \leq m-1, \quad |x| < 1.$$

Единственность представления m -гармонической функции в виде (10) вытекает из того, что определитель преобразования (13) при $R = 1$ отличен от нуля. Лемма доказана.

Докажем несколько вспомогательных утверждений, касающихся отдельных слагаемых правой части равенства (10).

Пусть $v(x) = v(r, \varphi)$ – гармоническая в круге $\{r < 1\}$ функция. Ее можно представить в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k, \quad r < 1, \quad (14)$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на любом замкнутом подмножестве круга $\{r < 1\}$.

Имеет место следующее элементарное утверждение, относящееся к нулевому (при $i = 0$) слагаемому правой части равенства (10).

ЛЕММА 2. *Если гармоническая в круге $\{r < 1\}$ функция $v(r, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (2)*

$$\sup_{r < 1} \|v(r, \cdot)\|_{L_2} < \infty,$$

то

$$\sup_{r < 1} \|P_N v(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty \quad (15)$$

и

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 v(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие L_2 -ограниченности

$$\frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \leq \mathcal{M}, \quad r < 1,$$

где $\mathcal{M}$ – некоторая постоянная, влечет за собой сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Следовательно, для всех $r < 1$

$$\|P_N v(r, \cdot)\|_{L_2}^2 = \pi \sum_{(N, 2N]} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \leq \pi \sum_{(N, 2N]} (a_k^2 + b_k^2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty$$

и, тем самым, последовательность $\|P_N v(r, \cdot)\|_{L_2}$, $N = 1, 2, \dots$, сходится к нулю равномерно по r , $r < 1$, а значит, имеет место соотношение (15). Столь же просто доказывается и соотношение (16). Поскольку

$$\delta_h^2 v(r, \varphi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k (1 - \cos kh),$$

то для всех $h > 0$ и $r < 1$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\delta_h^2 v(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}}^2 &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \frac{(1 - \cos kh)^2}{k^2 h^2} \\ &\leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \frac{(1 - \cos kh)^2}{k^2 h^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как при каждом k , $k = 1, 2, \dots$, $\frac{(1 - \cos kh)^2}{k^2 h^2} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а последний ряд сходится в силу неравенства $0 \leq \frac{(1 - \cos kh)^2}{k^2 h^2} \leq 1$ равномерно по h , $h > 0$. Лемма доказана.

Обратимся к оставшимся слагаемым, $i = 1, \dots, m - 1$, правой части равенства (10).

ЛЕММА 3. Пусть (целое) число $p > 0$, а $v(x)$ — гармоническая в круге $\{|x| < 1\}$ функция, разложение в ряд Фурье которой имеет вид (14). Для того чтобы выполнялось равенство

$$\|(1 - r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2} = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow 1 \quad (17)$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} = O(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Для того чтобы выполнялось равенство

$$\|(1 - r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2} = o(1) \quad \text{при } r \rightarrow 1 \quad (19)$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} = o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что из (17) и (19) вытекают, соответственно, (18) и (20). Так как

$$\|(1 - r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2}^2 = \pi(1 - r^2)^{2p} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \right),$$

то (17) можно переписать в виде неравенства

$$(1 - r^2)^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \leq \mathcal{M}, \quad r \in (0, 1),$$

при некоторой постоянной $\mathcal{M} > 0$ или, что то же самое (после замены переменной $1 - r^2 = x$, $x \in (0, 1)$), – в виде неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) x^{2p} (1-x)^k \leq \mathcal{M}, \quad x \in (0, 1). \quad (17')$$

Заметим, что в случае выполнения соотношения (19) наряду с (17') имеет место и аналогичное неравенство с $\mathcal{M}$ сколь угодно малым, выполняющееся уже, вообще говоря, не для всех $x \in (0, 1)$, а лишь для всех x из $(0, 1)$, достаточно близких к нулю ($x \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$).

Из (17') имеем неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} (1-x)^k (kx)^{2p} \\ &\geq \sum_{k \in (\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} (1-x)^k (kx)^{2p} \\ &\geq \sum_{(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^k \\ &\geq \frac{e^{-2}}{2} \sum_{(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}}, \end{aligned}$$

из которого при достаточно малых x или достаточно больших $N = 1/x$ получаем неравенство

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} \leq 2\mathcal{M}e^{-2},$$

совпадающее с соотношением (18), если имеет место (17), и в силу сделанного выше замечания – с соотношением (20), если имеет место (19).

Докажем теперь, что из (18) и (20) вытекают, соответственно, соотношения (17) и (19).

Левую часть (17') с помощью преобразования Абеля представим в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} (1-x)^k (kx)^{2p} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} \frac{(kx)^{2p} (1-x)^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}(k) - \mathcal{F}(k-1)) \frac{(kx)^{2p} (1-x)^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(k) \left[\frac{(kx)^{2p} (1-x)^k}{k} - \frac{((k+1)x)^{2p} (1-x)^{k+1}}{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{F}(k) \psi_k(x), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\mathcal{F}(k) = \sum_{i=1}^k i \frac{a_i^2 + b_i^2}{i^{2p}}, \quad k \geq 1, \quad \mathcal{F}(0) = 0, \quad (22)$$

а

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= k \left(\frac{(kx)^{2p}(1-x)^k}{k} - \frac{((k+1)x)^{2p}(1-x)^{k+1}}{k+1} \right) \\ &= k^{2p}x^{2p}(1-x)^k - k(k+1)^{2p-1}x^{2p}(1-x)^{k+1} \\ &= x^{2p}(1-x)^k (k^{2p} - k(k+1)^{2p-1}) + x^{2p+1}k(k+1)^{2p-1}(1-x)^k \\ &= -x^{2p}(1-x)^k \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j k^{j+1} + x^{2p+1}(1-x)^k \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j k^{j+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\psi_k(x)| \leq x^{2p}(1-x)^k \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j k^{j+1} + x^{2p+1}(1-x)^k \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j k^{j+1}. \quad (23)$$

Легко видеть, что для любого (целого) $\alpha \geq 0$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (1-x)^k \leq \frac{C_\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{для всех } x \in (0, 1). \quad (24)$$

При $\alpha = 0$ это неравенство вытекает из разложения

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k, \quad 0 < x < 2. \quad (25)$$

Для доказательства его справедливости при любом (целом) $\alpha > 0$ продифференцируем ряд (25) α раз. В результате получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\alpha!}{x^{\alpha+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-\alpha+1)(1-x)^{k-\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+\alpha-1) \cdots k(1-x)^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} (k+\alpha-1) \cdots k(1-x)^k \\ &\geq \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (1-x)^k, \quad 0 < x < 2, \end{aligned}$$

из которого (24) немедленно следует.

Из (23) и (24) для всех $x \in (0, 1)$ имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(x)| &\leq x^{2p} \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j \sum_{k=1}^{\infty} k^{j+1} (1-x)^k \\
 &\quad + x^{2p-1} \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j \sum_{k=1}^{\infty} k^{j+1} (1-x)^k \\
 &\leq \sum_{j=0}^{2p-2} C_{2p-1}^j C_{j+1} x^{2p-j-2} \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{2p-1} C_{2p-1}^j C_{j+1} x^{2p+1-j-2} \leq \mathcal{M}_1, \quad x \in (0, 1), \quad (26)
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_1$ — некоторая постоянная.

Имеет место следующая

ЛЕММА 4. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ — последовательность неотрицательных чисел. Если

$$\sum_{(N, 2N]} \gamma_k = O(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (27)$$

то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k \gamma_k = O(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Если

$$\sum_{(N, 2N]} \gamma_k = o(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (29)$$

то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k \gamma_k = o(1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Продолжим доказательство леммы 3, воспользовавшись леммой 4; лемму 4 докажем позднее. Если положить $\gamma_k = (a_k^2 + b_k^2)/k^{2p}$, $k \geq 1$, то в силу (18) и (20) имеем, соответственно, равенства (27) и (29). Следовательно, согласно лемме 4 числовая последовательность $\mathcal{F}(k)$, $k = 0, 1, \dots$, определенная равенствами (22), обладает при некоторой постоянной $\mathcal{M}_2 > 0$ свойством

$$0 \leq \frac{\mathcal{F}(k)}{k} \leq \mathcal{M}_2 \quad \text{для всех} \quad k \geq 1, \quad (31)$$

если выполнено соотношение (18), а если выполнено соотношение (20), то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$, что

$$0 \leq \frac{\mathcal{F}(k)}{k} \leq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k \geq k_0, \quad (32)$$

неравенство (31) и в этом случае, конечно, тоже выполняется.

Продолжим равенство (21). В случае, если имеет место (18), в силу (31) и (26) имеем для всех $x \in (0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) x^{2p} (1-x)^k \leq \mathcal{M}_2 \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(x)| \leq \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1,$$

т.е. имеет место (17'), а значит, и (17) ($x = 1 - r^2$). В случае, если имеет место (20), в силу (31), (32) и (26) для всех $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) (1 - r^2)^{2p} r^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) x^{2p} (1-x)^k \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\mathcal{F}(k)}{k} |\psi_k(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(k)}{k} |\psi_k(x)| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq k_0} |\psi_k(x)| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\mathcal{F}(k)}{k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(x)| \\ &\leq \mathcal{M}_2 k_0 \max_{1 \leq k \leq k_0} |\psi_k(x)| + \varepsilon \mathcal{M}_1 \end{aligned}$$

и, следовательно, для всех достаточно малых x , т.е. для всех r , достаточно близких к единице,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) (1 - r^2)^{2p} r^{2k} \leq \varepsilon (\mathcal{M}_2 k_0 + \mathcal{M}_1),$$

поскольку $\max_{1 \leq k \leq k_0} |\psi_k(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Что и требовалось установить. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Положим для любого целого $N \geq 1$

$$\mathcal{F}(N) = \sum_{k=1}^N k \gamma_k.$$

Нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}(N) = O(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (33)$$

если имеет место (27), и

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}(N) = o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (34)$$

если имеет место (29).

Для любого целого $n \geq 1$ определим функцию $G(n)$:

$$G(n) = \sum_{(2^{n-1}, 2^n]} k \gamma_k = \mathcal{F}(2^n) - \mathcal{F}(2^{n-1}). \quad (35)$$

Так как $0 \leq G(n) \leq 2^n \sum_{(2^{n-1}, 2^n]} \gamma_k$, то в случае (27)

$$G(n) \leq \mathcal{M} \cdot 2^n \quad \text{для всех } n \geq 1, \quad (36)$$

где $\mathcal{M} > 0$ – некоторая постоянная, а в случае (29) по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0 , что

$$G(n) \leq \varepsilon \cdot 2^n \quad \text{для всех } n \geq n_0, \quad (37)$$

при этом, конечно, имеет место и неравенство (36).

Для любого целого $n \geq 1$ в силу (35) имеем равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(2^n) &= \mathcal{F}(2^{n-1}) + G(n) = \mathcal{F}(2^{n-2}) + G(n) + G(n-1) \\ &= \dots = \mathcal{F}(1) + G(n) + G(n-1) + \dots + G(2). \end{aligned} \quad (38)$$

Возьмем произвольное целое $N > 1$ и обозначим через n (единственное) целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$2^{n-1} < N \leq 2^n, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\ln N}{\ln 2} \leq n < \frac{\ln N}{\ln 2} + 1.$$

Если имеет место равенство (27), а значит, и неравенство (35), то из (38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(N)}{N} &\leq \frac{\mathcal{F}(2^n)}{2^{n-1}} \leq \frac{\mathcal{F}(1) + G(2) + \dots + G(n)}{2^{n-1}} \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(1)}{2^{n-1}} + \mathcal{M} \frac{2^1 + \dots + 2^n}{2^{n-1}} \leq \frac{\mathcal{F}(1)}{2^{n-1}} + 4\mathcal{M}, \end{aligned}$$

откуда вытекает (33). Если имеет место равенство (29), то при произвольно взятом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство (37), из которого в силу (38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(N)}{N} &\leq \frac{\mathcal{F}(1) + G(2) + \dots + G(n_0 - 1) + G(n_0) + \dots + G(n)}{2^{n-1}} \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(1) + G(2) + \dots + G(n_0 - 1)}{2^{n-1}} + \varepsilon \frac{2^{n_0} + \dots + 2^n}{2^{n-1}} \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(1) + G(2) + \dots + G(n_0 - 1)}{2^{n-1}} + 4\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда при достаточно большом N (а значит, и n) $\mathcal{F}(N)/N \leq 5\varepsilon$. Что и требовалось установить. Лемма 4 доказана.

Кроме леммы 4 в дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

ЛЕММА 5. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – последовательность неотрицательных чисел и пусть

$$\sum_{(N, 2N]} \gamma_k = O(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Тогда при любом $\sigma > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k^\sigma} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4

$$\sum_{k=1}^N k\gamma_k \leq \mathcal{M}N \quad \text{для всех } N \geq 1,$$

где $\mathcal{M}$ — некоторая положительная постоянная. Введем обозначение:

$$\mathcal{F}(k) = \sum_{i=1}^k i\gamma_i, \quad k \geq 1, \quad \mathcal{F}(0) = 0.$$

С помощью преобразования Абеля имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k^{\sigma}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k k}{k^{\sigma+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}(k) - \mathcal{F}(k-1)) \frac{1}{k^{\sigma+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(k) \left(\frac{1}{k^{\sigma+1}} - \frac{1}{(k+1)^{\sigma+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(k)}{k^{\sigma+1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-\sigma-1} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-\sigma-1} \right) \Big/ \frac{1}{k} \rightarrow \sigma + 1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

то для достаточно больших k

$$\mathcal{F}(k) \frac{1}{k^{\sigma+1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-\sigma-1} \right) \leq \frac{2(\sigma+1)\mathcal{F}(k)}{k^{\sigma+2}} \leq \frac{2\mathcal{M}(\sigma+1)}{k^{\sigma+1}},$$

т. е. исследуемый ряд сходится. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть (целое) $p > 0$, а $v(r, \varphi)$ — гармоническая в круге $\{r < 1\}$ функция. Следующие три утверждения эквивалентны.

- I. $\|(1-r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$.
- II. $\sup_{r < 1} \|P_N(1-r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.
- III. $\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 (1-r^2)^p v(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Пусть разложение в ряд Фурье функции $v(r, \varphi)$ задается формулой (14). В силу леммы 3 утверждение I эквивалентно следующему свойству коэффициентов Фурье функции $v(r, \varphi)$:

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Свойство II в терминах коэффициентов Фурье функции $v(r, \varphi)$ имеет вид

$$\sup_{r < 1} \sum_{(N, 2N]} (1-r^2)^{2p} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (40)$$

а свойство III – имеет вид

$$\sup_{r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (41)$$

Для доказательства леммы нам следует установить эквивалентность соотношений (39), (40) и (41).

Пусть справедливо соотношение (39). Докажем, что имеет место (40) и имеет место (41). Действительно, функция $(1 - r^2)^{2p} r^{2k}$, $0 \leq r \leq 1$, достигает своего максимального значения при $r = \left(\frac{k}{2p+k}\right)^{1/2}$, и это максимальное значение равно $\frac{(2p)^{2p}}{(k+2p)^{2p}} \left(1 + \frac{2p}{k}\right)^{-k}$. Поэтому для всех $r \in (0, 1)$ и всех достаточно больших N имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{(N, 2N]} (a_k^2 + b_k^2) (1 - r^2)^{2p} r^{2k} &\leq \\ &\leq (2p)^{2p} \sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{(k+2p)^{2p}} \left(1 + \frac{2p}{k}\right)^{-k} \\ &\leq 2(2p)^{2p} e^{-2p} \sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}}, \end{aligned}$$

показывающее, что из (39) вытекает (40).

Докажем теперь, что из (39) следует (41). Для всех $h > 0$ и всех $r_0 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \sup_{r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 &\leq \sup_{r \leq r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \\ &+ \sup_{r_0 \leq r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Так как для всех $h > 0$ и $k \geq 1$ $\frac{(1 - \cos kh)^2}{k^2 h^2} = 4 \frac{\sin^4 \frac{kh}{2}}{k^2 h^2} \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \sup_{r_0 \leq r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 &\leq \sup_{r_0 \leq r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} (1 - r^2)^{2p} \\ &= \frac{1}{\pi} \sup_{r_0 \leq r < 1} \|(1 - r^2)^p v(r, \cdot)\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу I по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 = r_0(\varepsilon) < 1$, что

$$\sup_{r_0 \leq r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \leq \varepsilon \quad \text{для всех } h > 0. \quad (43)$$

Первое слагаемое правой части (42) при выбранном $r_0 < 1$ оценивается так:

$$\begin{aligned} & \sup_{r \leq r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \\ & \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r_0^{2k} \frac{\sin^4 \frac{kh}{2}}{k^2 h^2} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) r_0^{2k} \sin^2 \frac{kh}{2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Последний ряд сходится равномерно по $h > 0$, поскольку в силу (39) и леммы 5 $a_k^2 + b_k^2 \leq \text{const } k^{2p+1}$ для всех $k \geq 1$, следовательно, его сумма при достаточно малом h , $|h| \leq h_0 = h_0(\varepsilon)$, может быть сделана меньшей, чем ε . Тогда из (42), (43) и (44) для $|h| \leq h_0$ имеем

$$\sup_{r < 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^2 h^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \leq 2\varepsilon.$$

Что и требовалось установить.

Покажем теперь, что свойство (39) вытекает как из (40), так и из (41).

Пусть имеет место соотношение (40). Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 = N_0(\varepsilon)$, что

$$\sum_{(N, 2N]} (1 - r^2)^{2p} r^{2k} (a_k^2 + b_k^2) \leq \varepsilon \quad \text{для всех } r < 1 \text{ и всех } N \geq N_0.$$

Подставляя в это неравенство $r = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{1/2}$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon & \geq \sum_{(N, 2N]} (a_k^2 + b_k^2) \frac{1}{N^{2p}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \\ & \geq \sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^k \geq \frac{e^{-2}}{2} \sum_{(N, 2N]} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}}, \end{aligned}$$

если только число N_0 достаточно велико. Соотношение (39) установлено.

Пусть, наконец, справедливо (41). Тогда по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{h^2 k^2} r^{2k} (1 - r^2)^{2p} (1 - \cos kh)^2 \leq \varepsilon \quad \text{для всех } r < 1 \text{ и всех } h \leq h_0. \quad (45)$$

Поскольку

$$\frac{(1 - \cos kh)^2}{h^2 k^2} = \frac{\sin^4 \frac{kh}{2}}{\frac{h^2 k^2}{4}} \geq \gamma = \min \left\{ \sin^4 1, \frac{\sin^4 2}{4} \right\} > 0$$

для всех $h \leq h_0$, $k \geq 1$, для которых $\frac{1}{2}kh \in (1, 2]$, то из неравенства (45) имеем неравенство, справедливое для всех $r < 1$, $h \leq h_0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \sum_{\frac{2}{h} \leq k \leq \frac{4}{h}} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} (1 - r^2)^{2p} \frac{(1 - \cos kh)^2}{(kh)^2} \\ &\geq \gamma \sum_{\frac{2}{h} < k \leq 2 \cdot \frac{2}{h}} (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} (1 - r^2)^{2p}, \end{aligned}$$

после подстановки в которое $r = (1 - h)^{1/2}$ (считаем, что $h_0 < 1$), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \gamma \sum_{(\frac{2}{h}, 2 \cdot \frac{2}{h}] } (a_k^2 + b_k^2) (1 - h)^k h^{2p} \\ &\geq \gamma \sum_{(\frac{2}{h}, 2 \cdot \frac{2}{h}] } (a_k^2 + b_k^2) \left(1 - \frac{4}{k}\right)^k \left(\frac{2}{k}\right)^{2p} \\ &\geq \frac{\gamma}{2} e^{-4} 2^{2p} \sum_{(\frac{2}{h}, 2 \cdot \frac{2}{h}] } \frac{a_k^2 + b_k^2}{k^{2p}}, \end{aligned}$$

совпадающее при $2/h = N$ с неравенством (39). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *m -гармоническая функция $u(x)$ L_2 -ограничена тогда и только тогда, когда L_2 -ограничено каждое из слагаемых $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, равенства (10), т.е. свойства*

$$1) \quad \sup_{r < 1} \|u(r, \cdot)\|_{L_2} < \infty \quad (46)$$

и

$$2) \quad \sup_{r < 1} \|(1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)\|_{L_2} < \infty, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (47)$$

эквивалентны.

Ясно, что в доказательстве нуждается лишь утверждение, что из 1) следует 2), поскольку обратное утверждение очевидно.

Каждую гармоническую функцию $u_i(x)$ в (10) представим в виде

$$u_i(r, \varphi) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ki} \cos k\varphi + b_{ki} \sin k\varphi) r^k, \quad r < 1, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (48)$$

Тогда при всех $r < 1$

$$\begin{aligned} \|u(r, \cdot)\|_{L_2}^2 &= \frac{\pi}{2} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{0i} (1-r^2)^i \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \\ &\quad + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} b_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2, \quad r < 1, \end{aligned}$$

и из неравенства (46) вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \leq \mathcal{M}, \quad r < 1, \quad (49)$$

и неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} b_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \leq \mathcal{M}, \quad r < 1, \quad (49')$$

где $\mathcal{M}$ — некоторая положительная постоянная. Неравенства в (47), в свою очередь, эквивалентны совокупности следующих неравенств для коэффициентов a_{ki} :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{ki} (1-r^2)^i r^k)^2 \leq \mathcal{M}_i, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad r < 1, \quad (50)$$

и неравенств для коэффициентов b_{ki} :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_{ki} (1-r^2)^i r^k)^2 \leq \mathcal{M}_i, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad r < 1. \quad (50')$$

Покажем, что из (49) вытекают неравенства (50); доказательство того, что из (49') вытекают неравенства в (50'), совершенно аналогично.

Возьмем произвольное $N \geq 1$. Из (49) имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \leq \mathcal{M}, \quad r < 1,$$

после перехода в котором к пределу при $r \rightarrow 1$, получим

$$\sum_{k=1}^N a_{k0}^2 \leq \mathcal{M} \quad \text{при любом } N \geq 1,$$

т. е. имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}^2 \leq \mathcal{M}$, а значит, и неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}^2 r^{2k} \leq \mathcal{M}, \quad r < 1,$$

которое совпадает с нулевым (при $i = 0$) неравенством в (50).

Из неравенства (49) и доказанного для $i = 0$ неравенства в (50) вытекает, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \leq \mathcal{M}', \quad r < 1, \quad \mathcal{M}' = \text{const}. \quad (51)$$

В случае $m = 2$, т.е. для того случая, когда уравнение в (1) бигармоническое, лемма 7 установлена, так как неравенство (51) в этом случае совпадает со вторым (и последним) неравенством в (50). Поэтому в дальнейшем считаем, что $m > 2$.

Нам удобнее иметь дело не с неравенством (51), а с полученным из него, как и при доказательстве леммы 3, с помощью замены переменной $1 - r^2 = x$, $x \in (0, 1)$; $x \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$, неравенством

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} x^i (1-x)^{k/2} \right)^2 \leq \mathcal{M}', \quad x \in (0, 1). \quad (52)$$

Из этого неравенства нам нужно получить оставшиеся в (50) недоказанными неравенства для $i = 1, \dots, m-1$. Из (52) вытекает, что при произвольном целом $N \geq 1$ имеет место неравенство

$$\sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} x^{i-1} (1-x)^{k/2} \right)^2 \leq \frac{\mathcal{M}'}{x^2}, \quad x \in (0, 1),$$

проинтегрировав которое по x по интервалу $(x, 1)$, получим

$$\sum_{(N, 2N]} \int_x^1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} \xi^{i-1} (1-\xi)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq \frac{\mathcal{M}'(1-x)}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

Полагая в последнем неравенстве $N = 1/x$ и считая x достаточно малым, $x \in (0, \frac{1}{3})$, получим

$$\sum_{(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{x}{1-x} \int_x^1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} \xi^{i-1} (1-\xi)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq \mathcal{M}', \quad x \in (0, \frac{1}{3}).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_{ki}}{k^i} = \alpha_{ki}, \quad k \geq 1, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad (53)$$

тогда последнее неравенство переписывается в виде

$$\sum_{(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{k^2 x}{1-x} \int_x^1 \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki} (k\xi)^{i-1} (1-\xi)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq \mathcal{M}', \quad x \in (0, \frac{1}{3}),$$

или в виде

$$\sum_{(\frac{1}{x}, \frac{2}{x}]} \frac{kx}{1-x} \int_{kx}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki} \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq \mathcal{M}'. \quad (54)$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{P}(x, k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) = \frac{kx}{1-x} \int_{kx}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^{k/2} \right)^2 d\xi, \quad (55)$$

очевидно, неотрицательную и непрерывную на (неограниченном) множестве $Q = \{0 < x \leq \frac{1}{3}, 1 \leq kx \leq 2, \alpha_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}^2 = 1\}$. Покажем, что (неотрицательная) точная нижняя грань этой функции по множеству Q положительна:

$$\lambda_1 = \inf_Q \mathcal{P} > 0. \quad (56)$$

Предположим, напротив, что $\lambda_1 = 0$. Прежде всего, заметим, что не может быть конечной точки $(x_0, k_0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{m-1}^0)$, $x_0 > 0$, из Q , в которой $\mathcal{P} = 0$: наличие такой точки приводило бы к равенству

$$\frac{k_0 x_0}{1-x_0} \int_{k_0 x_0}^{k_0} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^0 \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k_0}\right)^{k_0/2} \right)^2 d\xi = 0,$$

которое возможно только при $\alpha_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, m-1$. Следовательно, из предположения $\lambda_1 = 0$ вытекает существование последовательностей x_n , $n = 1, 2, \dots$, k_n , $n = 1, 2, \dots$, α_1^n , $n = 1, 2, \dots$, α_{m-1}^n , $n = 1, 2, \dots$, $x_n \rightarrow 0$, $k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, для которых

$$\frac{k_n x_n}{1-x_n} \int_{k_n x_n}^{k_n} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^n \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k_n}\right)^{k_n/2} \right)^2 d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и тем более (поскольку $2k_n x_n < k_n$)

$$\frac{k_n x_n}{1-x_n} \int_{k_n x_n}^{2k_n x_n} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^n \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k_n}\right)^{k_n/2} \right)^2 d\xi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

За счет, быть может, прореживания этих последовательностей их можно считать дополнительно обладающими следующими свойствами: $x_n k_n \rightarrow \theta$, $n \rightarrow \infty$, где θ — некоторое число отрезка $[1, 2]$:

$$1 \leq \theta \leq 2; \quad \alpha_1^n \rightarrow \alpha_1^0, \quad n \rightarrow \infty; \quad \dots; \quad \alpha_{m-1}^n \rightarrow \alpha_{m-1}^0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$(\alpha_1^0)^2 + \dots + (\alpha_{m-1}^0)^2 = 1$. Это означает, что должно выполняться равенство

$$\theta \int_{\theta}^{2\theta} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^0 \xi^{i-1} e^{-\xi/2} \right)^2 d\xi = 0,$$

которого быть не может. Неравенство (56) установлено.

Функция $\mathcal{P}(x, k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$, (см. (55)), является квадратичной формой по переменным $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$

$$\mathcal{P}(x, k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) = \sum_{i,j=1}^{m-1} A_{ij}(x, k) \alpha_i \alpha_j,$$

где

$$A_{ij}(x, k) = \frac{kx}{1-x} \int_{kx}^k \xi^{i+j-1} \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^k d\xi, \quad i, j = 1, \dots, m-1.$$

При всех интересующих нас значениях (x, k) , $0 < x \leq \frac{1}{3}$, $1 \leq kx \leq 2$, симметрическая матрица $\|A_{ij}(x, k)\|$ положительно определена и ее минимальное собственное значение совпадает с числом λ_1 из (56). Следовательно, в силу (54) для всех $x \in (0, \frac{1}{3})$

$$\lambda_1 \sum_{(1/x, 2/x]} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki}^2 \leq \sum_{(1/x, 2/x]} \frac{kx}{1-x} \int_{kx}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki} \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq \mathcal{M}',$$

откуда согласно с определением (53) имеем при достаточно больших N

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2}{k^{2i}} \leq \frac{\mathcal{M}'}{\lambda_1} \quad \text{при каждом } i, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (57)$$

Неравенства в (50) для $i = 1, \dots, m-1$ теперь вытекают из леммы 3. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Если существует L_2 -предел на границе $\{|x| = 1\}$ функции

$$U(x) = (1 - |x|^2)u_1(x) + \dots + (1 - |x|^2)^{m-1}u_{m-1}(x), \quad |x| < 1, \quad m > 1, \quad (58)$$

где $u_1(x), \dots, u_{m-1}(x)$ — гармонические функции в круге $\{|x| < 1\}$, то этот предел равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы 8, в частности, справедливо, конечно, и для функции $U(x)$, равной какому-нибудь одному слагаемому из правой части (58): $U(x) = (1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 1, \dots, m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $f(\varphi)$ — L_2 -предел функции $U(x)$ при $r \rightarrow 1$ и пусть разложения в ряды Фурье функции $f(\varphi)$ и функций $u_i(r, \varphi)$, $i = 1, \dots, m-1$, задаются формулами (7) и (14). Тогда разложение в ряд Фурье функции $U(r, \varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} U(r, \varphi) = & \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_{0i}}{2} (1 - r^2)^i + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right) \cos k\varphi \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right) \sin k\varphi. \end{aligned} \quad (59)$$

Из L_2 -сходимости вытекает слабая сходимость. Следовательно, коэффициенты Фурье функции f являются пределами при $r \rightarrow 1$ соответствующих коэффициентов функции U :

$$\begin{aligned} a_k &= \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} r^k (1 - r^2)^i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \\ b_k &= \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{i=1}^{m-1} b_{ki} r^k (1 - r^2)^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, $f = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *m -гармоническая функция $u(x)$, $|x| < 1$, имеет L_2 -предел на границе $\{|x| = 1\}$ тогда и только тогда, когда имеют L_2 -пределы на границе все слагаемые $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$, правой части равенства (10).*

В доказательстве нуждается лишь утверждение, что из существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ вытекает существование L_2 -пределов на границе функций $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 0, \dots, m-1$.

Пусть L_2 -предел на границе функции $u(x)$ существует. Тогда она L_2 -ограничена, а по лемме 7 L_2 -ограничена и функция $u_0(x)$, которая, тем самым, являясь решением эллиптического уравнения второго порядка, имеет L_2 -предел на границе. Следовательно, L_2 -предел на границе имеет и функция $u(x) - u_0(x)$, являющаяся функцией $U(x)$, вида (58). Согласно лемме 8 этот L_2 -предел равен нулю:

$$\|U(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1.$$

Из формулы (59) тогда немедленно вытекает, что имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1,$$

и соответствующее соотношение, связанное с коэффициентами b_{ki} :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{ki} (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1.$$

Поэтому по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 < 1$, что для всех r , $r_0 \leq r < 1$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} (1 - r^2)^i r^k \right)^2 \leq \varepsilon.$$

Это означает (см. доказательство леммы 7), что для всех x , $0 < x \leq x_0$, где $x_0 = 1 - r_0^2$, имеет место неравенство (52) с $\mathcal{M}' = \varepsilon$ и, тем самым, в силу (57)

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2}{k^{2i}} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \quad \text{при каждом } i = 1, \dots, m-1,$$

для всех достаточно больших N . Аналогично, конечно, получаем и неравенства

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{b_{ki}^2}{k^{2i}} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \quad \text{при каждом } i = 1, \dots, m-1,$$

справедливые для всех достаточно больших N . То есть

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2 + b_{ki}^2}{k^{2i}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Из леммы 7 после этого вытекает, что $\|(1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$ для любого $i = 1, \dots, m-1$. Лемма доказана.

Вполне аналогично доказываются и последние две леммы.

ЛЕММА 10. *m -гармоническая в круге $\{|x| < 1\}$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{r < 1} \|P_N u(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty$$

тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяют все слагаемые правой части равенства (10):

$$\sup_{r < 1} \|P_N (1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty \quad (60)$$

для всех $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

ЛЕММА 11. *m -гармоническая в круге $\{|x| < 1\}$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 u(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяет каждое слагаемое правой части равенства (10):

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 (1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (61)$$

для всех $i = 0, \dots, m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Из формул (10) и (48)

$$P_N u(r, \varphi) = \sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right) \cos k\varphi + \sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=0}^{m-1} b_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right) \sin k\varphi$$

и, тем самым, по условию леммы 10 (в доказательстве нуждается, конечно, лишь утверждение о необходимости) по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 > 0$, что

$$\varepsilon \geq \sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right)^2 \quad \text{для всех} \quad r < 1 \quad \text{и} \quad N \geq N_0. \quad (62)$$

Аналогичное неравенство имеет место и для b_{ki} -коэффициентов Фурье.

Положим сначала, как и при доказательстве леммы 7, в формуле (62) r равным единице. В результате получим неравенство

$$\sum_{(N, 2N]} a_{k0}^2 r^{2k} \leq \sum_{(N, 2N]} a_{k0}^2 \leq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad r < 1 \quad \text{и всех} \quad N \geq N_0,$$

из которого вытекает доказываемое соотношение (60) для $i = 0$ и неравенство

$$\sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} r^k (1 - r^2)^i \right)^2 \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех} \quad r < 1 \quad \text{и} \quad N \geq N_0$$

или, что то же, неравенство

$$\sum_{(N, 2N]} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} x^i (1-x)^{k/2} \right)^2 \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } x \in (0, 1) \text{ и } N \geq N_0$$

(сделана замена переменной $1 - r^2 = x$).

Как и при доказательстве леммы 7, проделаем с последним неравенством последовательно следующие операции: разделим на x^2 , проинтегрируем по интервалу $(x, 1)$, умножим на $x/(1-x)$ и положим $x = 1/N$ (считая, что x достаточно мало). В результате после введения обозначений: $a_{ki}/k^i = \alpha_{ki}$, $k \geq 1$, $i = 1, \dots, m-1$, получим неравенство

$$\sum_{(1/x, 2/x]} \frac{xk}{1-x} \int_{kx}^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ki} \xi^{i-1} \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^{k/2} \right)^2 d\xi \leq 4\varepsilon,$$

совпадающее с неравенством (54), в котором $\mathcal{M}' = 4\varepsilon$. Следовательно, имеют место неравенства (57) с $\mathcal{M}' = 4\varepsilon$ и аналогичные неравенства для b_{ki} -коэффициентов Фурье. А тогда на основании лемм 3 и 6 получаем оставшиеся еще недоказанными для $i = 1, \dots, m-1$ соотношения в (60). Лемма 10 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11. Согласно (10) и (48)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_h^2 u(r, \varphi)}{h} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right) \frac{1 - \cos kh}{h} \cos k\varphi \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} b_{ki} (1-r^2)^i r^k \right) \frac{1 - \cos kh}{h} \sin k\varphi, \end{aligned}$$

поэтому по условию леммы 11 (в ней мы тоже, естественно, доказываем лишь утверждение о необходимости) по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что для всех $h \leq h_0$ и всех $r < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \left(\frac{1 - \cos kh}{h} \right)^2 \leq \varepsilon$$

(аналогичное неравенство имеет место и для b_{ki} -коэффициентов Фурье). Так же, как и при доказательстве леммы 7, убеждаемся, что для всех $r < 1$ и всех $h \leq h_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}^2 r^{2k} \left(\frac{1 - \cos kh}{kh} \right)^2 \leq \varepsilon.$$

Это означает, что имеет место соотношение (61) для $i = 0$. Кроме того, из последних двух неравенств вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ki} (1-r^2)^i r^k \right)^2 \left(\frac{1 - \cos kh}{kh} \right)^2 \leq 4\varepsilon$$

для всех $r < 1$ и всех $h \leq h_0$,

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2 + b_{ki}^2}{k^{2i}} \left(\frac{1 - \cos kh}{kh} \right)^2 \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda_1}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (63)$$

(неравенства для b_{ki} -коэффициентов, как уже неоднократно отмечалось, получаются в полной аналогии с соответствующими неравенствами для a_{ki} -коэффициентов). Поскольку

$$\frac{\sin^4 \varphi}{\varphi^2} \geq \min \left\{ \frac{\sin^4 \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}, \frac{\sin^4 \frac{5}{2}}{\frac{25}{4}} \right\} = \gamma' > 0$$

при $\varphi \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, то

$$\left(\frac{1 - \cos kh}{kh} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}} \right)^2 \geq \gamma' \quad \text{при всех (целых) } k \in \left(\frac{1}{h}, \frac{5}{h} \right).$$

Следовательно, полагая в неравенствах (63) h равным $2/N$, при достаточно больших N ($N \geq 2/h_0$) и учитывая, что $[N, 2N] \subset (\frac{1}{2}N, \frac{5}{2}N)$, получим, что имеют место неравенства

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2 + b_{ki}^2}{k^{2i}} \leq \frac{4\varepsilon}{\lambda_1 \gamma'}$$

для всех достаточно больших N и всех $i = 1, \dots, m-1$, т.е.

$$\sum_{(N, 2N]} \frac{a_{ki}^2 + b_{ki}^2}{k^{2i}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m-1.$$

Применяя после этого леммы 3 и 6, получим недостающие при $i = 1, \dots, m-1$ соотношения в (61). Лемма 11 доказана.

§ 2. Доказательства теорем

Теоремы 1 и 2 будем доказывать одновременно.

Необходимость. Пусть существует L_2 -предел на границе m -гармонической функции $u(x)$. Тогда $u(x)$ L_2 -ограничена, т.е. выполняются первые условия доказываемых теорем, и по лемме 7 L_2 -ограничена функция $u_0(x)$ из равенства (10). По лемме 2 функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{r < 1} \|P_N u_0(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

и

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 u_0(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

По лемме 9 каждое слагаемое $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 1, \dots, m-1$, правой части формулы (10) имеет предел, совпадающий по лемме 8 с нулевой функцией. Следовательно, по лемме 6

$$\sup_{r < 1} \|P_N (1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (64)$$

и

$$\sup_{r < 1} \left\| \frac{\delta_h^2 (1 - r^2)^i u_i(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (65)$$

Поэтому функция $u(x)$ удовлетворяет и вторым условиям доказываемых теорем.

Достаточность. Пусть m -гармоническая функция $u(x)$ L_2 -ограничена, и для нее выполняются условие (8) или условие (9). Докажем, что она имеет L_2 -предел на границе. По лемме 7 функция $u_0(x)$ из представления (10) L_2 -ограничена; следовательно, существует ее L_2 -предел на границе. Из вторых условий доказываемых теорем согласно леммам 10 и 11 соответственно имеют место для всех $i = 1, \dots, m-1$ соотношения (64) или (65). Но тогда по лемме 6 существуют (нулевые) L_2 -пределы на границе слагаемых $(1 - |x|^2)^i u_i(x)$, $i = 1, \dots, m-1$. Следовательно, функция $u(x)$ имеет L_2 -предел на границе. Теоремы 1 и 2 доказаны.

В теореме 3 в доказательстве нуждается лишь утверждение о достаточности. В силу критерия компактности в L_2 множество $u(r, \varphi)$, $r < 1$, равномерно L_2 -ограничено, т.е. выполняется условие (2), и L_2 -равностепенно непрерывно, т.е. выполняется условие

$$\sup_{r < 1} \|\delta_h^1 u(r, \cdot)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $\delta_h^1 u(r, \varphi) = u(r, \varphi + h) - u(r, \varphi)$, из которого в силу очевидного неравенства

$$\|\delta_h^1 u(r, \cdot)\|_{L_2} \geq \left\| \frac{\delta_h^2 u(r, \cdot)}{h} \right\|_{H^{-1}}, \quad h \neq 0,$$

вытекает условие (9). Таким образом, теорема 3 следует из теоремы 2.

Список литературы

1. Ройтберг Я. А. О граничных значениях обобщенных решений эллиптических уравнений // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 1. С. 41–44.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
20.06.1996