Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Относительная эллиптическая теория и задача Соболева, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 11, 115–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:43:34

УДК 517.9

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов

Относительная эллиптическая теория и задача Соболева

В работе строится алгебра операторов, ассоциированная с гладким вложением $i: X \hookrightarrow M$. Для эллиптических элементов этой алгебры устанавливается теорема конечности (фредгольмовости), а также вычисляется индекс. Показана связь с задачами Соболева.

Библиография: 26 названий.

Введение

1. Подотносительной эллиптической теорией мы понимаем эллиптическую теорию, ассоциированную с парой (M, X) , где M — гладкое многообразие и X — его гладкое подмногообразие. Таким образом, относительная эллиптическая теория есть эллиптическая теория в категории гладких вложений.

Тривиальным (и неинтересным) примером относительного эллиптического оператора является пара эллиптических операторов, заданных на многообразиях M и X , соответственно. Такой оператор может быть записан в виде диагональной матрицы операторов

$$\begin{pmatrix} D_M & 0 \\ 0 & D_X \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^{s_1}(M) \\ H^{s_2}(X) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^{\sigma_1}(M) \\ H^{\sigma_2}(X) \end{pmatrix}$$

с эллиптическими (псевдодифференциальными) операторами D_M и D_X , действующими, например, в пространствах Соболева M и X .

Этот тривиальный пример показывает, однако, что в общей ситуации относительный эллиптический оператор должен, вероятно, представляться некоторой (квадратной) матрицей, которая, вообще говоря, не обязана быть диагональной. Заметим, прежде всего, что а posteriori это предположение совершенно верно. Однако, оно нуждается в серьезном объяснении. Дело в том, что по самому своему смыслу элементы, стоящие в левом нижнем и правом верхнем углах матрицы, должны быть операторами, действующими из пространства функций, определенных на одном из многообразий, в пространство функций, определенных на другом. Поэтому такую матрицу можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} D_{MM} & D_{MX} \\ D_{XM} & D_{XX} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где индексы показывают направление действия соответствующих операторов (справа налево). По-видимому, ясно, что в отличие от операторов D_{MM} и D_{XX} ,

Работа первого автора выполнена при поддержке Max-Planck-Arbeitsgruppe "Partielle Differentialgleichungen und Komplexe Analysis", Universität Potsdam.

операторы D_{MX} и D_{XM} не являются псевдодифференциальными операторами (п. д. о.), во всяком случае, если понимать этот термин в классическом смысле. Действительно, классические псевдодифференциальные операторы действуют из пространства функций на некотором гладком многообразии в себя, другими словами, они определены на одном и том же многообразии. Упомянутые выше операторы этим свойством не обладают по определению. Что же это за операторы? Какова их природа?

Попытаемся подыскать кандидатов на роль таких операторов. Для начала рассмотрим оператор D_{XM} . Этот оператор действует из пространства функций, определенных на всем многообразии M , в пространство функций на его подмногообразии X . Наиболее естественный оператор такого типа есть оператор ограничения (или граничный оператор), индуцированный вложением $i: X \hookrightarrow M$. Если иметь в виду, что операторы вида (1) должны выдерживать переход к сопряженному, то отсюда довольно ясно видно, что оператор D_{MX} как двойственный к оператору D_{XM} должен быть оператором коограничения или, как мы его будем называть, *кограничным оператором*. Разумеется, в общем случае в качестве операторов D_{MX} и D_{XM} мы должны использовать композиции (в естественном порядке) операторов ограничения и коограничения с некоторыми псевдодифференциальными операторами. Таким образом, на первый взгляд наша будущая теория есть теория операторов вида

$$\begin{pmatrix} D_{MM} & C_{MM}i_* \\ i^*B_{MM} & D_{XX} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где операторы i^* и i_* – элементарные граничные и кограничные операторы и операторы D_{MM} , B_{MM} , C_{MM} и D_{XX} – псевдодифференциальные операторы на соответствующих многообразиях. К сожалению, однако, операторы вида (2) не образуют алгебру, что является серьезным дефектом с точки зрения эллиптической теории. В самом деле, доказательство теоремы конечности (свойства фредгольмовости) проводится в наиболее удобной и естественной форме с помощью построения так называемых регуляризаторов, т.е. почти обратных (обратных с точностью до компактных) операторов. Разумеется, этот метод требует структуры алгебры на множестве всех рассматриваемых операторов и достаточно эффективного исчисления.

Как мы уже упоминали выше, операторы типа (2) алгебру не образуют. Причина этого состоит в том (это будет показано ниже), что произведение двух операторов такого типа приводит в левом верхнем углу результирующей матрицы к оператору более общей структуры, чем псевдодифференциальный. Этот факт не является удивительным, поскольку среди сомножителей, входящих в этот оператор, встречаются и не псевдодифференциальные операторы, и нет, вообще говоря, основания ожидать, что результат будет псевдодифференциальным оператором.¹ Таким образом, для того чтобы ввести структуру алгебры во множество рассматриваемых операторов, естественно расширить класс псевдодифференциальных операторов, входящих в левый верхний угол матрицы, до более широкого

¹Заметим, однако, что, тем не менее, элемент в правом нижнем углу является все-таки псевдодифференциальным оператором.

класса, включающего операторы типа

$$C_{MM} i_* i^* B_{MM},$$

которые, как легко видеть, возникают при композиции. Замечательным является тот факт, что после такого расширения множество операторов становится уже замкнутым относительно композиции и вопрос о построении необходимой алгебраической структуры является, в принципе, решенным.

Однако, это еще не все. Было бы желательно дать описание введенных выше операторов (которые, как мы уже упомянули, не являются псевдодифференциальными операторами) в известных терминах. Разумеется, положительное решение этой задачи было бы большой удачей. Ведь в принципе, введенные операторы могут быть абсолютно новой природы и неизвестны в литературе. К счастью, в этом случае это не так. Все типы операторов, введенные выше, допускают представление в виде операторов, которые достаточно хорошо известны. Например, эти операторы могут быть интерпретированы как некоторые *интегральные операторы Фурье* на специальных лагранжевых многообразиях. В этой интерпретации каждый тип операторов: граничный, кограничный и т. д. соответствует своему лагранжеву многообразию. Эти операторы допускают также адекватную интерпретацию в совершенно других терминах. Именно, они могут быть представлены в виде специального класса псевдодифференциальных операторов, действующих в сечениях *бесконечномерных расслоений* (псевдодифференциальных операторов с *операторно-значными символами*). При этом в различных ситуациях могут быть полезны различные трактовки. Например, при построении исчисления удобной интерпретацией является интерпретация с помощью интегральных операторов Фурье, для формулировки условий эллиптичности и при вычислении индекса эти операторы полезно интерпретировать как псевдодифференциальные операторы в сечениях бесконечномерных расслоений.

2. Относительная эллиптическая теория позволяет решить одну из важных и интересных задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными, так называемую *задачу Соболева*. Постановка этой задачи следующая. Пусть $i: X \hookrightarrow M$ — гладкое вложение. Ищется решение сравнения

$$Du \equiv f \pmod{X}, \quad (3)$$

которое означает, что написанное выше уравнение выполняется всюду на многообразии M , за исключением точек подмногообразия X . Кроме написанного выше сравнения, задаются еще некоторые граничные условия на многообразии X и проблема состоит, во-первых, в том, чтобы дать корректную постановку такой задачи в том смысле, чтобы соответствующий оператор (пара) определяли бы оператор Фредгольма и, во-вторых, вычислить индекс задачи. Отметим, что впервые такого рода задачи для полигармонического уравнения рассматривал С. Л. Соболев [1], который с помощью вариационных методов доказал в этой ситуации ее однозначную разрешимость. Общая постановка и исследование этой проблемы принадлежит Б. Ю. Стернину [2], который также и назвал эти задачи задачами Соболева.

Мы заметим, что задачи Соболева обладают рядом особенностей по сравнению с обычной теорией эллиптических дифференциальных уравнений. Например, число граничных условий в этих задачах существенно зависит от индекса пространства Соболева, в которых ищется решение. В частности, в пространстве достаточно гладких функций задача Соболева является, по существу, тривиальной. Другими словами, сравнение (3) превращается в равенство и на подмногообразии X никаких граничных условий ставить не надо. Далее, решения эллиптических задач Соболева не являются, вообще говоря, бесконечно гладкими функциями, даже если правая часть уравнения бесконечно гладкая. Решения таких задач могут иметь особенности на подмногообразии X .

3. Итак, в настоящей статье строится относительная теория псевдодифференциальных операторов как теория, ассоциированная с гладким вложением $i: X \hookrightarrow M$. В рамках этой теории вводится понятие эллиптичности и доказывается теорема конечности. Наконец, для относительных эллиптических операторов устанавливается формула индекса. Более того, развивается соответствующая теория задач С. Л. Соболева, доказывается нормальная разрешимость, вычисляется индекс.

4. Настоящая статья развивает идеи, методы и результаты, содержащиеся в [2]–[5]. В частности, эта статья дает новый взгляд на “классические” эллиптические задачи Соболева и относительную эллиптическую теорию с точки зрения теории современных дифференциальных уравнений. Так, дается новая интерпретация граничных и кограничных операторов в терминах интегральных операторов Фурье. Мы также используем результаты наших статей [6]–[8], содержащих новые расширения алгебры псевдодифференциальных операторов.

5. Как можно проследить по приведенной выше литературе, первые работы по общим задачам Соболева были сделаны около 30 лет назад (см. [2], [3]). За прошедшее время появилось большое число замечательных работ по эллиптической теории. Понятие кограничных операторов, первоначально введенное в [4], в настоящее время широко используется в общей теории дифференциальных уравнений. В работах многих авторов независимо и в различных ситуациях появились конструкции, близкие (во всяком случае, с “идейной” точки зрения) к конструкциям относительной эллиптической теории (см., например, [9]–[14] и др.).

6. Английская версия настоящей работы опубликована в качестве препринта [15] Институтом Макса Планка (Бонн, ФРГ).

§ 1. От задачи Соболева к операторным морфизмам

1.1. Два физических примера. Для того чтобы проиллюстрировать возникновение понятия задачи Соболева, мы начнем с достаточно простых физических примеров. Рассмотрим мыльную пленку, натянутую на одномерный контур, и попытаемся подпереть эту пленку тонкой иглой. Тогда, если игла не смачивается мыльным раствором, то пленка мгновенно лопнет, за исключением случая, когда игла фактически лишь прикоснется к пленке, не изменив ее формы. Если же игла изготовлена из идеально смачиваемого материала, то она пройдет через пленку, не изменив формы последней (пленка “обтянет” иглу). Однако, если мы попытаемся подпереть пластинку (мембрану) такой же иглой, тогда мы увидим, что форма

мембраны измениться. Сказанное означает, что никаких граничных условий для уравнений тонкой пленки в одной точке ставить нельзя. Однако, если рассматриваются уравнения для пластинки, то поставить граничные условия в точке уже можно (см. рис.1).

Рис. 1. а) Игла проходит через тонкую пленку.
б) Игла подпирает толстую пленку.

Математически это явление описывается следующим образом.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ форма двумерной тонкой пленки, натянутой на одномерный контур, отвечает задаче Дирихле для гармонической функции u

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\Gamma} = \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

где функция φ определена на плоской кривой Γ , описывающей форму контура, на который натянута пленка. Если мы попытаемся подпереть эту пленку несмачиваемой иглой в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, то это означает, что

- 1) мы предполагаем, что уравнение, входящее в задачу (4), выполняется не во всех точках плоскости, ограниченной контуром Γ , а всюду *за исключением точки* (x_0, y_0) ; эту ситуацию мы будем в дальнейшем записывать в виде сравнения

$$\Delta u \equiv 0 \quad \text{mod } (x_0, y_0), \quad (5)$$

которое означает в точности, что распределение Δu сосредоточено в одной точке (x_0, y_0) ;

- 2) мы добавим к сравнению (4) граничные условия вида

$$u|_{(x_0, y_0)} = u_0 \quad (6)$$

с некоторым фиксированным значением u_0 .

Однако, как следует из хорошо известной теоремы об устранении особенности для гармонической функции, любое решение сравнения (5), которое ограничено в точке (x_0, y_0) (последнее следует из условия (6)), должно быть гармонической функцией во всей области, включая точку (x_0, y_0) , и, следовательно, значение этой функции в точке определяется и притом единственным образом данными задачи (4). Поэтому решение задачи (5), (6), вообще говоря, не существует за исключением единственного случая, когда число u_0 равно значению $u(x_0, y_0)$ решения задачи (4).

Рассмотрим теперь математическую модель системы “пленка–игла” для случая смачиваемой иглы. В этом случае уравнение, входящее в задачу (4), по-прежнему выполняется всюду, за исключением точки (x_0, y_0) , но мы не ставим никаких дополнительных условий в точке (x_0, y_0) . При этом задача

$$\begin{cases} \Delta u \equiv 0 \pmod{(x_0, y_0)}, \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases}$$

эквивалентна в силу теоремы об устранимой особенности задаче (4), что и означает, что пленка “обтягивает” иглу.

Совершенно по другому обстоит дело в случае, когда задача описывает положение жесткой пластинки

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, \\ u|_{\Gamma} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная вдоль внешней нормали к контуру Γ . Если мы заменим уравнение, входящее в последнюю задачу, сравнением

$$\Delta^2 u \equiv 0 \pmod{(x_0, y_0)}, \quad (7)$$

то мы можем поставить *дополнительное условие* типа (6), поскольку это сравнение обладает нетривиальным непрерывным решением (которое ведет себя как $r^2 \ln r$ вблизи точки (x_0, y_0) , где r означает расстояние от этой точки).

Таким образом, мы видим, что для уравнений достаточно высокого порядка можно рассматривать задачи, включающие граничные условия на многообразиях достаточно высокой коразмерности. Задачи с такими условиями называются *задачами Соболева*.

1.2. Граничные и кограничные операторы. Опишем теперь *общую постановку* задачи Соболева. Для того чтобы не утяжелять изложения, мы рассмотрим такую задачу на гладком компактном многообразии M без края. (В этом случае никаких краевых условий задавать не надо.)

Введем важные понятия теории псевдодифференциальных операторов, которые мы будем использовать в последующем. Пусть M – гладкое компактное многообразие без края и пусть

$$i: X \hookrightarrow M \quad (8)$$

– гладкое вложение коразмерности ν . Далее, пусть $E \rightarrow M$ – комплексное векторное расслоение над многообразием M . Через $C^\infty(M, E)$ мы обозначим пространство гладких сечений этого расслоения над многообразием M .

Вложение (8) индуцирует отображение

$$i^*: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(X, E|_X),$$

которое мы будем называть *элементарным граничным оператором*, индуцированным вложением i . Из теоремы вложения Соболева следует, что это вложение продолжается до непрерывного отображения

$$i^*: H^s(M, E) \rightarrow H^{s-\nu/2}(X, E|_X)$$

для $s > \nu/2$, где через $H^s(M, E)$ мы обозначили пространство Соболева сечения расслоения E , отвечающего вещественному индексу s .

Элементарный кограничный оператор определяется двойственным образом:

$$i_*: H^{-s+\nu/2}(X, E|_X) \rightarrow H^{-s}(M, E).$$

Он, естественно, также непрерывен для $s > \nu/2$.

Введенные выше элементарные граничные и кограничные операторы, очевидно, не являются (классическими) псевдодифференциальными операторами. Это следует, например, из того, что эти операторы не действуют во *всей* шкале соболевских пространств. Ниже мы детально обсудим природу этих операторов.

Пусть теперь E и F — два расслоения над многообразием M и пусть

$$B: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

— псевдодифференциальный оператор порядка b . Тогда композиция $i^* \circ B$ называется *граничным оператором*, ассоциированным с оператором B . Этот оператор продолжается до непрерывного отображения

$$i^* \circ B: H^s(M, E) \rightarrow H^{s-b-\nu/2}(X, F|_X) \quad (9)$$

для $s > b + \nu/2$.

Кограничный оператор, ассоциированный с некоторым псевдодифференциальным оператором C порядка c , определяется двойственным образом:

$$C \circ i_*: H^{-s+c+\nu/2}(X, F|_X) \rightarrow H^{-s}(M, E). \quad (10)$$

Это отображение, очевидно, непрерывно для $s > c + \nu/2$.

Попытаемся теперь выяснить, что представляют собой граничные и кограничные операторы. Напомним, что, как мы уже отмечали, эти операторы не являются псевдодифференциальными операторами. Для изучения природы этих операторов мы рассмотрим вначале, скажем, кограничный оператор.

1. *Кограничный оператор*. Прежде всего заметим, что вне некоторой (произвольной) окрестности подмногообразия X этот оператор является бесконечно сглаживающим. Другими словами, существенная часть этого оператора сосредоточена (или, более точно, является ростком) на многообразии X . Таким образом, мы рассмотрим окрестность произвольной точки на многообразии X и введем в этой окрестности координаты (x, t) таким образом, чтобы уравнение многообразия X в этих координатах записывалось равенством $t = 0$. В этих координатах мы имеем

$$Ci_*f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \iint e^{i[\tau t + p(x-x')]} C(x, t, p, \tau) f(x') d\tau dp dx',$$

где $C(x, t, p, \tau)$ — символ оператора C (переменные p, τ — двойственные переменные к переменным x, t , соответственно). Интеграл по τ в последнем выражении может быть вычислен, и мы приходим к следующему выражению для оператора Ci_* :

$$Ci_*f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ip(x-x')} \tilde{C}(x, t, p) f(x') dp dx', \quad (11)$$

где

$$\tilde{C}(x, t, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int e^{i\tau t} C(x, t, p, \tau) d\tau. \quad (12)$$

Оператор (11) имеет вид псевдодифференциального оператора или, более точно, семейства псевдодифференциальных операторов, зависящих от параметра t . Однако, символ (12) этого семейства *не является гладкой функцией параметра*: он имеет особенность при $t = 0$. Природа этого феномена совершенно ясна. Оператор (11) является, например, оператором Грина краевой задачи (потенциалом), т.е. интегральным оператором, у которого ядро есть “функция Грина”. Такой оператор всегда имеет особенности при $t \rightarrow 0$. Чтобы увидеть эту особенность явно, рассмотрим следующий конкретный пример.

Пусть символ оператора C равен

$$C(x, t, p, \tau) = \frac{1}{1 + p^2 + \tau^2}$$

(мы предположим для простоты, что t и τ – одномерные переменные). Тогда, используя теорему о вычетах можно получить:

$$\tilde{C}(x, t, p) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\tau t} d\tau}{1 + p^2 + \tau^2} = \frac{1}{2\sqrt{1 + p^2}} e^{-|t|\sqrt{1 + p^2}}.$$

Очевидно, последняя функция имеет особенность по переменной t в точке $t = 0$, что и требовалось показать. Кроме того, из последнего соотношения можно увидеть, что оператор с символом $\tilde{C}(x, t, p)$ сосредоточен на многообразии X , поскольку вне этого многообразия (т.е. для $t \neq 0$) символ $\tilde{C}(x, t, p)$ убывает быстрее любой степени $|p|$.

2. *Граничный оператор.* Как и в случае кограничного оператора, граничный оператор также сосредоточен на многообразии X . Поэтому мы вновь рассмотрим окрестность многообразия X и, используя обозначения, введенные выше, запишем граничный оператор в виде

$$i^* B f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \iint e^{i[p(x-x') - \tau' t']} B(x, 0, p, \tau') f(x', t') dp d\tau dx' dt', \quad (13)$$

где $B(x, t, p, \tau')$ – символ (псевдодифференциального) оператора B . Перепишем этот оператор в виде псевдодифференциального оператора. Мы имеем

$$i^* B f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \iint e^{i[p(x-x') + \tau'(t-t')]} \tilde{B}(x, p, \tau') f(x', t') dp d\tau dx' dt', \quad (14)$$

где

$$\tilde{B}(x, p, \tau') = e^{-i\tau' t} B(x, 0, p, \tau'). \quad (15)$$

Таким образом, граничный оператор (13) является псевдодифференциальным оператором вида (14) с *быстроосциллирующим символом* (15). Нетрудно видеть, что негладкость кограничного оператора и быстрая осцилляция граничного являются двойственными понятиями.

3. *Лагранжева униформизация*. Проведенные выше рассуждения, разумеется, в точности отражают ситуацию в рассматриваемом круге вопросов. В принципе, мы можем попытаться ввести исчисление с “псевдодифференциальными” операторами рассмотренных выше типов. Однако, на практике это не вполне удобно. Оперирование с негладкими и быстроосциллирующими символами доставит нам много технических трудностей. Например, необходимо будет описать допустимый характер негладкости символов, характер осцилляций и т. д.

С другой стороны, для определения класса (ко)границных операторов нам необходимо

- во-первых, зафиксировать тип особенностей;
- во-вторых, вывести правила обращения с такими операторами (исчисление), т.е. ввести структуру модуля над кольцом псевдодифференциальных операторов.

Эта программа может быть выполнена с помощью идеи так называемой *лагранжевой униформизации*, которая, например, может быть реализована с привлечением теории интегральных операторов Фурье. Именно, введенные выше операторы могут быть представлены как интегральные операторы Фурье (см., например, [16]–[18] и др.) на специальных лагранжевых многообразиях, которые учитывают характер особенностей (осцилляций) упомянутых выше символов.

Итак, рассмотрим вначале граничный оператор. Соответствующее лагранжево многообразие есть многообразие

$$N^*(\Delta(X)) \subset T^*(X \times M), \quad (16)$$

где

$$\Delta: X \rightarrow X \times M$$

– “диагональное” вложение: $\Delta(x) = (x, x)$, и N^* – конормальное расслоение подмногообразия.

Попробуем выписать локальное выражение граничного оператора. Он действует из пространства функций, заданных на гладком многообразии M , в другое гладкое подмногообразие X . Отметим координаты на первом многообразии штрихом. Таким образом, (x', t') – координаты на M (так что $t' = 0$ является уравнением подмногообразия X), а x – координаты на X . Через (p', τ', p) мы обозначим двойственные координаты к (x', t', x) и назовем их *импульсными координатами*, двойственными к *физическим координатам* (x', t', x) .

Теперь оператор i^* может быть записан в виде

$$(i^*Bu)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i(p'(x-x')-\tau't')} B(x, 0, p', \tau) u(x', t') dp' d\tau' dx' dt'. \quad (17)$$

Уравнения лагранжева многообразия (16) в этих координатах имеют вид

$$x = x', \quad p = p', \quad t' = 0.$$

Опишем теперь процедуру вычисления фазовой функции

$$\varphi = p'(x - x') - \tau't'$$

интегралов типа (17) в терминах соответствующего лагранжева многообразия.

Мы заметим, что на каждом лагранжевом многообразии существует атлас, состоящий из *канонических карт*. Координатами в таких картах служит часть физических и часть импульсных координат, но множество таких координат не должно содержать никакой пары, двойственной друг другу (разумеется, выбор канонических координат неединственен). Например, каноническими координатами на $\Delta(X)$ служат координаты (x, p', τ') .

Теперь опишем фазовую функцию. Она состоит из двух членов

$$\varphi = (-p'x' - t'\tau') + S(x, p', \tau'),$$

где первый член есть сумма произведений пар двойственных координат по всем парам, для которых импульсный член пары входит во множество канонических координат (произведения, соответствующие штрихованным переменным, имеют знак “−”), а функция S есть решение уравнения

$$dS = p dx + x' dp' + t' d\tau' \big|_{\Delta(X)}.$$

Структура правой части последнего соотношения ясна из рассмотренного примера. Мы заметим только, что знак члена меняется в случае, когда этот член соответствует импульсной координате, или в случае, когда он соответствует штрихованной (так что знак члена $x'p'$ изменен дважды).

Очевидно, решение последнего уравнения есть $S = xp'$, и мы приходим к фазовой функции

$$p'(x - x') - \tau't',$$

как и требовалось.

Подобным же образом, *элементарный кограницный оператор* i_* может быть записан в виде интегрального оператора Фурье, ассоциированного с лагранжевым многообразием

$$N^*(\Delta^*(X)) \subset T^*(M \times X), \quad (18)$$

где

$$\Delta^*: X \rightarrow M \times X$$

— соответствующее “диагональное” вложение. Локальное выражение соответствующего интегрального оператора Фурье имеет вид

$$(Ci_*u)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i[p'(x-x')+\tau t]} C(x, p', \tau) u(x') dp' d\tau dx'.$$

Уравнения отвечающего ему лагранжева многообразия суть

$$t = 0, \quad x = x', \quad p = p',$$

а фазовая функция равна

$$\varphi = -p'x' + \tau t + S(x, p', \tau),$$

где

$$dS(x, p', \tau) = p dx + x' dp' - t d\tau|_{\Delta^*(X)} = p' dx + x dp' = d(xp'),$$

как и требовалось.

Итак, мы показали, что граничные и кограничные операторы (9) и (10) могут быть записаны в виде интегральных операторов Фурье, ассоциированных с лагранжевыми многообразиями (16) и (18), соответственно. Символы этих интегральных операторов Фурье совпадают с символами псевдодифференциальных операторов B и C . Таким образом, мы приходим к следующим определениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Общий граничный оператор* есть интегральный оператор Фурье, ассоциированный с лагранжевым многообразием (16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Общий кограничный оператор* есть интегральный оператор Фурье, ассоциированный с лагранжевым многообразием (18).

1.3. Задачи Соболева. Рассмотрим теперь следующую задачу для пары $X \xrightarrow{i} M$:

$$\begin{cases} Du \equiv f \mod H^{s-m}(M, X; E_2), \\ i^*Bu = g. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь D – псевдодифференциальный оператор порядка m , действующий в сечениях расслоений E_1 и E_2 на многообразии M , B – псевдодифференциальный оператор порядка b , действующий в сечениях E_1 и F на многообразии M , и $H^{s-m}(M, X; E_2)$ – подпространство пространства Соболева $H^{s-m}(M, E_2)$, который состоит из функций (распределений), сосредоточенных на подмногообразии X . Из (9) следует, что для того, чтобы след i^*Bu был корректно определен, необходимо предположить, чтобы $s - b > \nu/2$.

Исследуем разрешимость задачи (19).

Прежде всего заметим, что сравнение

$$Du \equiv f \mod H^{s-m}(M, X; E_2),$$

которое является уравнением на (*открытом*) многообразии $M \setminus X$ относительно неизвестной функции u , эквивалентно уравнению

$$Du + i_*^L v = f$$

на (*замкнутом*) многообразии M относительно *двух* неизвестных функций u и v . Здесь i_*^L – кограничный оператор, отвечающий оператору джета по трансверсальным переменным (в локальных координатах этот оператор содержит в точности все производные по трансверсальным переменным до порядка L). Поэтому справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Задача (19) относительно неизвестной функции u эквивалентна системе уравнений*

$$\begin{cases} Du + i_*^L v = f, \\ i^*Bu = g \end{cases} \quad (20)$$

относительно неизвестных функций u и v , определенных на многообразиях M и X , соответственно.

Здесь число L определяется следующим соотношением:

$$L = \begin{cases} [m - s - \nu/2], & \text{если } m - s - \nu/2 \text{ не целое число,} \\ m - s - \nu/2 - 1, & \text{если } m - s - \nu/2 \text{ целое число.} \end{cases} \quad (21)$$

Доказательство этого утверждения весьма просто. В самом деле, предположим, что функция u является решением сравнения (19). Тогда функция $Du - f$ является распределением (обобщенной функцией), сосредоточенным на подмногообразии X . По теореме Шварца [19], [20] такое распределение может быть представлено в виде линейной комбинации дельта-функций и ее производных до порядка L на многообразии X с коэффициентами (обобщенными) функциями на многообразии X , принадлежащими соответствующим пространствам Соболева. Обозначая множество этих коэффициентов через v , получим, что система уравнений (20) справедлива для такого выбора v . Мы заметим, что вектор v выбирается единственным образом. Обратное утверждение очевидно.

Система (20) может быть переписана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} D & i_*^L \\ i^*B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к необходимости рассматривать операторы типа

$$\begin{pmatrix} D & i_*^L \\ i^*B & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

которые мы будем называть *операторными морфизмами*. Эти операторы (а также их обобщения) будут изучены в следующем параграфе.

Обсудим теперь число граничных условий в задаче (19). По-видимому, почти очевидно, что для того, чтобы задача (19) была хорошо поставлена, необходимо, как минимум, потребовать, чтобы число граничных условий для нее было равно степени свободы, которая допускает сравнение, входящее в эту задачу. Как мы видели, разность $Du - f$, являющаяся распределением в пространстве $H^{s-m}(M, E_2)$, сосредоточенном на многообразии X , может быть представлена в виде

$$Du - f = \sum_{|\alpha| \leq L} c_\alpha \delta_X^{(\alpha)},$$

где $\delta_X^{(\alpha)}$ — производные по трансверсальным направлениям дельта-функции, сосредоточенной на многообразии X , порядка α и c_α — некоторые функции на X . Число таких функций и равно в точности упомянутой выше степени свободы.

Таким образом, число неизвестных функций, которое допускается в сравнении, равно числу мультииндексов α с $|\alpha| \leq L$. Отсюда следует, что число “граничных условий”, которые необходимы для того, чтобы задача (19) была хорошо поставлена, зависит от индекса пространства Соболева s (см. соотношение (21)).

Разумеется, даже если задача (19) включает правильное число граничных условий, это еще не значит, что эта задача корректна (хорошо поставлена).² Необходимо потребовать еще, чтобы эта задача была *эллиптической*. Точная формулировка этого понятия будет дана ниже (см. §3), а сейчас мы рассмотрим еще один вопрос, который естественно возникает в данном контексте. Этот вопрос следующий. Каково *максимальное число чисто дифференциальных* граничных условий, т.е. таких, при которых в граничные условия входят только дифференциальные операторы? Дело в том, что, как мы видели выше, число условий, входящих в хорошо поставленную задачу Соболева в пространство $H^s(M)$, дается формулой (21). С другой стороны, максимальный порядок L_1 производных, допускающих ограничения на многообразии X , равен

$$L_1 = \begin{cases} [s - \nu/2], & \text{если } s - \nu/2 \text{ не целое число,} \\ s - \nu/2 - 1, & \text{если } s - \nu/2 \text{ целое число.} \end{cases} \quad (23)$$

Очевидно, для существования задачи Соболева с чисто дифференциальными граничными условиями надо потребовать, чтобы $L_1 \leq L$. Однако, функция (21) убывает, в то время, когда функция (23) возрастает. Поэтому максимальное число граничных условий в чисто дифференциальной задаче Соболева определяется таким значением s , что $L = L_1$. Можно легко проверить, что это равенство имеет место при $s = m/2$. Теперь мы видим, что любая задача Соболева с дифференциальными условиями в полуинтервале, содержащем точку $m/2$, эквивалентна задаче *Соболева–Дирихле*, в которой задаются значения всех производных функции u в трансверсальном направлении до порядка L_D , равного

$$L_D = \frac{m}{2} - \left[\frac{\nu}{2} \right] - 1.$$

Разумеется, задача Соболева существует и для всех s , расположенных левее полуинтервала, содержащего точку $m/2$. Однако, для таких значений s необходимо задавать уже *псевдодифференциальные* граничные условия. Отметим также, что для значений s , расположенных правее $m - \nu/2$, *не существует нетривиальной задачи Соболева*. Последнее означает, что имеет место теорема о стирании особенностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для $s \geq m - \nu/2$ сравнение

$$Du \equiv f \pmod{H^{s-m}(M, X; E_2)}$$

эквивалентно уравнению

$$Du = f$$

на всем многообразии M .

Результат наших последних рассмотрений показан на рис. 2. На этом рисунке буквой L обозначено “число граничных условий” (более точно, максимальный

²Здесь и ниже термины “корректность” и “хорошо поставленная задача” означают, что данная задача является фредгольмовой, т.е. имеет конечное число линейно независимых решений однородного уравнения и является разрешимой при выполнении конечного числа условий типа ортогональности на правую часть задачи.

Рис. 2. Количество граничных условий зависит от s .

порядок $L = |\alpha|$ производных дельта функции, входящих в левую часть первого из уравнений системы (20)), а число s есть индекс рассматриваемого соболевского пространства. График на этом рисунке иллюстрирует зависимость $L = L(s)$. Здесь также отмечен интервал значений s , в котором корректно определена задача Соболева–Дирихле и область, в которой корректно поставленная задача Соболева с необходимостью должна включать “псевдодифференциальные граничные условия”.

§ 2. Алгебра операторных морфизмов

2.1. Исчисление. Для того чтобы исследовать свойства фредгольмовости задач Соболева или, что то же самое, операторного морфизма (22), полезно ввести структуру алгебры во множество таких морфизмов. Основная причина, по которой такую структуру следует попытаться ввести, состоит в том, что, как хорошо известно, свойство фредгольмовости оператора следует из существования так называемого регуляризатора или оператора почти обратного³ к данному. Попытаемся найти общий вид операторов, которые образуют минимальную алгебру, включающую операторы вида (22).

Прежде всего, заметим, что множество матриц типа (22) алгебру не образует. Действительно, произведение двух операторов этого вида является оператором

$$\begin{pmatrix} D_1 & i_* \\ i^* B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2 & i_* \\ i^* B_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 D_2 + i_* i^* B_2 & D_1 i_* \\ i^* B_1 D_2 & i^* B_1 i_* \end{pmatrix},$$

который, конечно же, не является оператором того же типа, что и сомножители. Именно, результирующий оператор отличается от первоначальных следующим:

- 1) имеется оператор вида $i_* i^* B_2$ — член, являющийся слагаемым левого верхнего элемента полученной матрицы;
- 2) в верхнем правом углу стоит оператор $D_1 i_*$ с некоторым псевдодифференциальным оператором D_1 вместо i_* ;
- 3) правый нижний элемент $i^* B_1 i_*$ полученной матрицы не равен нулю.

³То есть оператора, обратного данному в факторалгебре относительно (двустороннего) идеала компактных операторов.

Исследуем ситуацию более детально.

Прежде всего мы заметим, что оператор $i^*B_1i_*$ является *псевдодифференциальным* оператором на многообразии X (см. [21]–[23]). Для того чтобы доказать этот факт, достаточно, например, следуя Л. Хермандеру [24] проверить, что имеет место следующее асимптотическое разложение

$$e^{-i\lambda S}\{i^*B_1i_*\}e^{i\lambda S}\varphi \sim \sum_{j=l}^{-\infty} \lambda^j \mathcal{F}_j[\varphi, S] \quad (24)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ для любой финитной на X функции φ и любой гладкой функции S такой, что $dS \neq 0$ на носителе φ . Здесь $\mathcal{F}_j[\varphi, S]$ – выражения, зависящие от функций φ, S и их производных до определенного порядка, а b – порядок оператора $i^*B_1i_*$. Далее, выражение $\mathcal{F}_b[\varphi, S]$ должно иметь вид

$$\mathcal{F}_b[\varphi, S] = \mathcal{B}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\varphi;$$

при этом $\mathcal{B}(x, p)$ и будет главным символом оператора $i^*B_1i_*$.

Приступим к реализации этой программы. Прежде всего, заметим, что оператор $i^*B_1i_*$ не зависит от значений символа B_1 вне производной фиксированной окрестности многообразия X . Поэтому оператор можно рассматривать как п.д.о. на многообразии X , символ которого является п.д.о., действующим в трансверсальных направлениях. Далее, функцию S можно распространить на трубчатую окрестность многообразия X , пользуясь проекцией этой трубчатой окрестности на X . Теперь имеем

$$i^*B_1i_*e^{i\lambda S}\varphi = i^*B_1e^{i\lambda S}\varphi \otimes \delta_X = e^{i\lambda S}i^*\{e^{-i\lambda S}B_1e^{i\lambda S}\delta_X\}\varphi.$$

Заметим, что главный член в разложении $e^{-i\lambda S}B_1e^{i\lambda S}\delta_X$ по степеням λ имеет вид

$$\text{smb}_X B_1\left(x, \lambda \frac{\partial S}{\partial x}\right)\delta_X,$$

причем $\text{smb}_X B_1\left(x, \lambda \frac{\partial S}{\partial x}\right)$ есть п.д.о. в трансверсальном направлении. Теперь нетрудно показать, что главный член в разложении (24) имеет вид

$$\frac{\lambda^{b_1}}{(2\pi)^\nu} \int i^* \text{smb}_X B_1\left(x, \lambda \frac{\partial S}{\partial x}, \tau\right) d\tau, \quad (25)$$

и, следовательно, оператор $i^*B_1i_*$ есть п.д.о. порядка $b_1 + \nu$ с главным символом

$$\text{smb } i^*B_1i_* = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int i^* \text{smb}_X B_1(p, \tau) d\tau$$

(при этом порядок оператора B_1 должен быть достаточно мал, чтобы интеграл (25) сходилась), причем интегрирование производится по слоям кономального расслоения к многообразию X .

Итак, в правом нижнем углу общего морфизма должен стоять некоторый псевдодифференциальный оператор, заданный на многообразии X .

Далее, если мы возьмем композицию операторов заданного вида, то число членов, содержащих оператор i^* и i_* в левом верхнем углу матрицы, будет возрастать. Таким образом, нам необходимо предъявить некоторые типичные представители этих сумм для того, чтобы записать подобные операторы в общем виде. Можно показать, что полученные операторы являются не чем иным, как *интегральными операторами Фурье* (мы напомним, кстати, что из результатов §1 следует, что (ко)границные операторы i^* и i_* являются интегральными операторами Фурье).

Проведенные рассуждения позволяют теперь нам написать общий операторный морфизм в виде

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{21} \\ \hat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix},$$

где D_{11} есть псевдодифференциальный оператор на многообразии M , D_{22} – псевдодифференциальный оператор на многообразии X , а операторы $\hat{\Phi}_{11}$, $\hat{\Phi}_{21}$, $\hat{\Phi}_{12}$ – интегральные операторы Фурье, ассоциированные с лагранжевыми многообразиями

$$\begin{aligned} L_{11} &= N^*(Y_{11}), \\ L_{21} &= N^*(Y_{21}), \\ L_{12} &= N^*(Y_{12}), \end{aligned} \tag{26}$$

соответственно. Здесь многообразия Y_{11} , Y_{21} и Y_{12} задаются соотношениями

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \{(\alpha, \beta) \in M \times M : \alpha = \beta \in X\}, \\ Y_{21} &= \{(\alpha, \beta) \in M \times X : \alpha = \beta \in X\}, \\ Y_{12} &= \{(\alpha, \beta) \in X \times M : \alpha = \beta \in X\}. \end{aligned}$$

Структура второго и третьего лагранжевых многообразий (26) ясна. Эти многообразия суть лагранжевы многообразия, ассоциированные с (ко)границными операторами. Что же касается первого из многообразий (26), то оно строится из следующих соображений.

Так же как и рассмотренные выше (кограницные) операторы, операторы вида $\hat{\Phi}_{11}$ не являются классическим псевдодифференциальным оператором и ровно по той же причине: этот оператор также сосредоточен на многообразии X . Теперь, следуя схеме униформизации, проведенной для (ко)границных операторов, мы изучим оператор типа $\hat{\Phi}_{11}$ и попытаемся представить его в виде интегрального оператора Фурье на соответствующем лагранжевом многообразии.

Для простоты рассмотрим типичный пример оператора вида $\hat{\Phi}_{11}$, который является композицией кограницных и границных операторов. Он имеет вид

$$\begin{aligned} Ci_*Ai^*Bf &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i[\tau t + p(x-x') - \tau' t']} C(x, t, p, \tau) A(x, p) \\ &\quad \times B(x, t, p, \tau') f(x', t') dp d\tau d\tau' dx' dt'. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь мы используем координатные обозначения, введенные в §1. Этот оператор может быть записан в виде псевдодифференциального оператора на многообразии M :

$$Ci_*Ai^*Bf = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i[\tau'(t-t') + p(x-x')]} F(x, t, p, \tau') f(x', t') dp d\tau' dx' dt'$$

с символом

$$F(x, t, p, \tau') = e^{-it\tau'} \int e^{it\tau} C(x, t, p, \tau) A(x, p) B(x, t, p, \tau') d\tau.$$

Как и можно было ожидать, символ этого оператора, который вообрал в себя все “дефекты” и граничного, и кограничного операторов, является и негладкой, и быстроосциллирующей функцией. Оператор $\widehat{\Phi}_{11}$ может быть униформизован, т.е. представлен в виде интегральных операторов Фурье на лагранжевом многообразии L_{11} , которое было введено выше.

Вычислим теперь фазовую функцию интеграла (27). Используя координаты

$$(x, t, p, \tau; x', t', p', \tau'),$$

мы можем записать уравнение соответствующего лагранжева многообразия в виде

$$x = x', \quad p = p', \quad t = 0, \quad t' = 0.$$

Выберем теперь набор (x, p', τ, τ') в качестве канонических координат. Тогда фазовая функция дается равенством

$$\varphi = -x'p' + t\tau - t'\tau' + S(x, p', \tau, \tau'),$$

где

$$dS = p dx + x' dp' - t d\tau + t' d\tau' \big|_{L_{11}} = d(xp').$$

Поэтому мы получаем, что $S = xp'$, и, следовательно, фазовая функция равна

$$\varphi = p'(x - x') + t\tau - t'\tau',$$

что и требовалось.

Теперь опишем класс символов, используемых в соответствующих интегральных операторах Фурье. Эти символы являются просто функциями на лагранжевых многообразиях.

Символы Φ_{11} , Φ_{21} и Φ_{12} операторов $\widehat{\Phi}_{11}$, $\widehat{\Phi}_{21}$ и $\widehat{\Phi}_{12}$ должны удовлетворять следующим неравенствам (обычным в теории псевдодифференциальных операторов).

Именно, для операторов типа $\widehat{\Phi}_{11}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |D_x^\alpha D_p^\beta D_\tau^\gamma D_{\tau'}^\delta \Phi_{11}(x, p, \tau, \tau')| \\ & \leq C_{\alpha\beta\gamma\delta} (1 + |(p, \tau)|^2)^{\frac{m-|\gamma|}{2}} (1 + |p|^2)^{\frac{k-|\beta|}{2}} (1 + |(p, \tau')|^2)^{\frac{l-|\delta|}{2}}. \end{aligned}$$

Соответствующий класс символов мы обозначим через $\text{Smb}_{11}(m, k, l)$.

Символы операторов $\widehat{\Phi}_{21}$ должны удовлетворять оценке

$$|D_x^\alpha D_p^\beta D_\tau^\gamma \Phi_{21}(x, p, \tau)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (1 + |(p, \tau)|^2)^{\frac{m-|\gamma|}{2}} (1 + |p|^2)^{\frac{k-|\beta|}{2}}.$$

Соответствующий класс символов мы обозначим через $\text{Smb}_{21}(m, k)$.

Наконец, символы операторов типа $\widehat{\Phi}_{12}$ должны удовлетворять оценке

$$|D_x^\alpha D_p^\beta D_{\tau'}^\delta \Phi_{12}(x, p, \tau')| \leq C_{\alpha\beta\delta} (1 + |p|^2)^{\frac{k-|\beta|}{2}} (1 + |(p, \tau')|^2)^{\frac{l-|\delta|}{2}}.$$

Соответствующий класс символов мы обозначим через $\text{Smb}_{12}(k, l)$.

Итак, в соответствии с определением 1 операторы типа $\widehat{\Phi}_{12}$ и $\widehat{\Phi}_{21}$ являются общими граничными и кограничными операторами типа. Операторы типа $\widehat{\Phi}_{11}$ имеют совершенно иную природу. Их появление обязано алгебраической структуре. Как мы увидим ниже, операторы этого типа входят также и в регуляризаторы для соответствующих морфизмов.

Приведем теперь локальные выражения всех трех типов рассмотренных выше интегральных операторов Фурье:

$$\widehat{\Phi}_{11}f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n+\nu} \int e^{i\{\tau t + p(x-x') - \tau' t'\}} \Phi_{11}(x, p, \tau, \tau') f(x', t') dp d\tau d\tau' dx' dt', \quad (28)$$

$$\widehat{\Phi}_{21}f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i\{\tau t + p(x-x')\}} \Phi_{21}(x, p, \tau) f(x') dp d\tau dx', \quad (29)$$

$$\widehat{\Phi}_{12}f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i\{p(x-x') - \tau' t'\}} \Phi_{12}(x, p, \tau') f(x', t') dp d\tau' dx' dt'. \quad (30)$$

Здесь мы используем введенные выше локальные координаты, n — размерность многообразия X и ν — коразмерность X в M .

Сформулируем теоремы, описывающие свойства введенных операторов.⁴ Во-первых, мы сформулируем три теоремы, описывающие действия построенных операторов в пространствах Соболева.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор (28) является непрерывным оператором в пространствах*

$$\widehat{\Phi}_{11}: H^s(M) \rightarrow H^{s-r}(M)$$

для значений s , удовлетворяющих неравенствам:

$$l + \frac{\nu}{2} < s < k + l + \frac{\nu}{2}.$$

Порядок⁵ r этого оператора равен

$$r = m + k + l + \nu.$$

⁴Эти операторы, так же как и введенные выше классы символов, аналогичны операторам и символам, введенным в статьях авторов [6]–[8]. Поэтому мы не даем ниже доказательство теорем, касающихся свойств этих операторов, и ограничиваемся лишь соответствующими формулировками.

⁵(Соболевским) порядком оператора $\widehat{A}$ в соболевской шкале H^s называется точная нижняя грань множества чисел a , для которых отображение

$$\widehat{A}: H^s \rightarrow H^{s-a}$$

непрерывно. Здесь и ниже под порядком операторов мы будем подразумевать его соболевский порядок.

ТЕОРЕМА 2. Оператор (29) является непрерывным оператором в пространствах

$$\widehat{\Phi}_{21}: H^s(X) \rightarrow H^{s-r}(M)$$

для значений s , удовлетворяющих неравенству

$$s < k.$$

Порядок r этого оператора равен

$$r = k + m + \frac{\nu}{2}.$$

ТЕОРЕМА 3. Оператор (30) является непрерывным оператором в пространствах

$$\widehat{\Phi}_{12}: H^s(M) \rightarrow H^{s-r}(X)$$

для значений s , удовлетворяющих неравенству

$$s > l + \frac{\nu}{2}.$$

Порядок r этого оператора равен

$$r = l + k + \frac{\nu}{2}.$$

Все неравенства, входящие в формулировки приведенных выше теорем, могут быть легко объяснены, если учесть, что в операторы $\widehat{\Phi}_{11}$, $\widehat{\Phi}_{21}$ и $\widehat{\Phi}_{12}$ входят операторы Ci_*Ai^*B , Ci_* и i^*B . Для этих последних операторов все упомянутые неравенства являются следствиями соболевских теорем о вложении.

Следующее утверждение дает описание композиции введенных операторов.

ТЕОРЕМА 4. Имеет место следующая теорема о композиции операторов (28)–(30).

1) Композиция операторов $\widehat{\Phi}'_{11}$ и $\widehat{\Phi}''_{11}$ является оператором типа (28). Символ $\Phi(x, p, \tau, \tau')$ этого оператора равен

$$\Phi(x, p, \tau, \tau') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi'(x, p, \tau, \tau'') \Phi''(x, p, \tau'', \tau') d\tau''.$$

Этот символ принадлежит классу $\text{Smb}l_{11}(m', k' + k'' + l' + m'' + \nu, l'')$, если сомножители имеют символы из классов $\text{Smb}l_{11}(m', k', l')$ и $\text{Smb}l_{11}(m'', k'', l'')$, соответственно.

2) Композиция двух операторов $\widehat{\Phi}'_{11}$ и $\widehat{\Phi}''_{21}$ является оператором типа (29). Символ $\Phi(x, p, \tau)$ этого оператора равен

$$\Phi(x, p, \tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi'(x, p, \tau, \tau'') \Phi''(x, p, \tau'') d\tau''.$$

Этот символ принадлежит классу $\text{Smb}l_{21}(m', k' + k'' + l' + m'' + \nu)$, если сомножители имеют символы из классов $\text{Smb}l_{11}(m', k', l')$ и $\text{Smb}l_{21}(m'', k'')$, соответственно.

3) Композиция двух операторов $\widehat{\Phi}'_{12}$ и $\widehat{\Phi}''_{11}$ является оператором (30). Символ $\Phi(x, p, \tau')$ этого оператора равен

$$\Phi(x, p, \tau') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi'(x, p, \tau'') \Phi''(x, p, \tau'', \tau') d\tau''.$$

Этот символ принадлежит классу $\text{Smb}_{12}(k' + k'' + l' + m'' + \nu l'')$, если сомножители имеют символы из классов $\text{Smb}_{12}(k', l')$ и $\text{Smb}_{11}(m'', k'', l'')$, соответственно.

4) Композиция двух операторов $\widehat{\Phi}'_{21}$ и $\widehat{\Phi}''_{12}$ является оператором (28). Символ $\Phi(x, p, \tau, \tau')$ этого оператора равен

$$\Phi(x, p, \tau') = \Phi'(x, p, \tau) \Phi''(x, p, \tau').$$

Этот символ принадлежит классу $\text{Smb}_{11}(m', k' + k'', l'')$, если сомножители имеют символы из классов $\text{Smb}_{21}(m', k')$ и $\text{Smb}_{12}(k'', l'')$, соответственно.

5) Композиция двух операторов $\widehat{\Phi}'_{12}$ и $\widehat{\Phi}''_{21}$ является псевдодифференциальным оператором на многообразии X . Символ $P(x, p)$ этого оператора равен

$$P(x, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi'(x, p, \tau'') \Phi''(x, p, \tau'') d\tau''.$$

Порядок этого оператора $k' + l' + m'' + k''$, если его сомножители имеют символы из классов $\text{Smb}_{12}(k', l')$ и $\text{Smb}_{21}(m'', k'')$, соответственно.

Сформулируем теперь необходимые для дальнейшего рассмотрения утверждения об общем морфизме вида

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \widehat{\Phi}_{11} & \widehat{\Phi}_{21} \\ \widehat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где D_{11} – псевдодифференциальный оператор на многообразии M , D_{22} – псевдодифференциальный оператор на многообразии X , оператор $\widehat{\Phi}_{11}$ имеет тип (28) и $\widehat{\Phi}_{21}$, $\widehat{\Phi}_{12}$ – общий кограничный и граничный операторы (29) и (30), соответственно.

Теоремы 1–3 позволяют написать соотношения, которые являются необходимыми для того, чтобы оператор (31) был непрерывным оператором в следующих соболевских пространствах:

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \widehat{\Phi}_{11} & \widehat{\Phi}_{21} \\ \widehat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^{s_1}(M) \\ H^{s_2}(X) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^{\sigma_1}(M) \\ H^{\sigma_2}(X) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть наборы (m_{11}, k_{11}, l_{11}) , (m_{21}, k_{21}) , (k_{12}, l_{12}) операторов $\hat{\Phi}_{11}$, $\hat{\Phi}_{21}$, $\hat{\Phi}_{12}$, а также порядки m и l операторов D_{11} и D_{22} удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{cases} \sigma_1 = s_1 - m, \\ \sigma_2 = s_2 - l, \\ \sigma_1 = s_1 - m_{11} - k_{11} - l_{11} - \nu, \\ \sigma_1 = s_2 - m_{21} - k_{21} - \nu/2, \\ \sigma_2 = s_1 - k_{12} - l_{12} - \nu/2 \end{cases} \quad (33)$$

и неравенствам

$$\begin{cases} \max\left\{\frac{\nu}{2} - l_{11}, \frac{\nu}{2} + l_{12}\right\} < s_1 < \frac{\nu}{2} + k_{11} + l_{11}, \\ s_2 < k_{21}. \end{cases} \quad (34)$$

Тогда отображение (31) является непрерывным оператором в пространствах (32).

Заметим, что если порядки операторов D_{11} и D_{22} равны нулю, то в силу соотношений (33) порядки всех остальных операторов, входящих в морфизм (31), также равны нулю. Поэтому следующее ниже утверждение является прямым следствием предыдущей теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество операторных морфизмов (31) с $m = l = 0$ и фиксированными значениями таких чисел m_{ij} , k_{ij} и l_{ij} , что $m_{11} + k_{11} + l_{11} + \nu = 0$, $m_{21} + k_{21} + \nu/2 = 0$ и $k_{12} + l_{12} + \nu/2 = 0$, является алгеброй операторных морфизмов, непрерывно действующих в пространстве (32) с $s_1 = \sigma_1$ и $s_2 = \sigma_2$, причем числа s_1 и s_2 удовлетворяют неравенствам (34).

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество операторов вида $1 + \hat{\Phi}_{11}$, где $\hat{\Phi}_{11}$ есть оператор нулевого порядка, образуют алгебру.

В заключение этого параграфа мы заметим, что все введенные здесь понятия инвариантны относительно сопряжения. В частности, сопряженный к операторному морфизму является также операторным морфизмом и, следовательно, построенная алгебра есть $*$ -алгебра (алгебра с инволюцией), причем инволюция задается операцией сопряжения.

2.2. Эллиптичность и теоремы конечности для морфизмов. В этом разделе мы выведем условия, при которых оператор (32), определенный операторным морфизмом (31), является фредгольмовым. Как хорошо известно, для этого достаточно построить регуляризатор этого оператора, т.е. обратный оператор по модулю компактного. Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы построить регуляризатор для оператора (32). Мы заметим, что все рассуждения будут проводиться на уровне главных членов рассматриваемых операторов.

Для того чтобы построить почти обратный оператор (32), необходимо и достаточно построить разрешающий оператор для системы уравнений

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{21} \\ \hat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

или, что то же самое, системы

$$\begin{cases} (D_{11} + \hat{\Phi}_{11})u + \hat{\Phi}_{21}v = f, \\ \hat{\Phi}_{12}u + D_{22}v = g \end{cases} \quad (35)$$

на уровне главных членов. Эта система может быть разрешена обычным образом с помощью исключения неизвестных. Именно (и это является нашим первым условием), мы потребуем прежде всего, чтобы оператор, стоящий в левом верхнем углу матрицы (31), являлся эллиптическим в смысле работ [6]–[8].

Попробуем разобраться, что означает это условие в терминах символов, участвующих в этом определении операторов. Мы заметим, прежде всего, что операторы типа $\hat{\Phi}_{11}$ локально (с точностью до бесконечно-сглаживающих операторов в окрестности многообразия X) могут считаться псевдодифференциальными операторами на многообразии X с операторнозначными коэффициентами в пространстве операторов специального типа в расслоении трубчатой окрестности X в M (см. также последний параграф). Эти коэффициенты являются просто интегральными операторами по переменной τ , которая является двойственной к переменной, трансверсальной к подмногообразию X , относительно преобразования Фурье. Далее, интегральные операторы Фурье образуют модуль над кольцом псевдодифференциальных операторов и оператор

$$D_{11} + \hat{\Phi}_{11}$$

может быть переписан в виде

$$D_{11} + \hat{\Phi}_{11} = D_{11}(1 + D_{11}^{-1}\hat{\Phi}_{11}).$$

Поэтому ясно, что обратимость⁶ этого оператора сводится к двум требованиям:

- 1) оператор D_{11} является обратимым на многообразии M ;
- 2) оператор $(1 + D_{11}^{-1}\hat{\Phi}_{11})$ является обратимым на многообразии M .

Мы заметим, что первое требование означает, что псевдодифференциальный оператор D_{11} является эллиптическим и, следовательно, его главный символ должен быть неособым вне нулевого сечения кокасательного к многообразию M расслоения. Рассмотрим теперь второе требование. Поскольку, как мы уже упоминали выше, операторы типа $\hat{\Phi}_{11}$ образуют модуль над кольцом псевдодифференциальных операторов, оператор $D_{11}^{-1}\hat{\Phi}_{11}$ является также оператором типа $\hat{\Phi}_{11}$. Далее, в силу следствия 2 оператор, обратный к $(1 + D_{11}^{-1}\hat{\Phi}_{11})$, может быть найден в виде $(1 + \hat{\Phi}_1)$. В силу теоремы 4 мы получаем следующее уравнение

$$\Phi_1(\tau, \tau') + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi(\tau, \tau'')\Phi_1(\tau'', \tau') d\tau'' = -\Phi(\tau, \tau') \quad (36)$$

для символа $\Phi_1(\tau, \tau')$ оператора $\hat{\Phi}_1$. Это уравнение должно быть выполнено вне некоторой компактной окрестности нулевого сечения расслоения T^*X . В самом деле, в силу уравнения (36) композиция

$$(1 + D_{11}^{-1}\hat{\Phi}_{11})(1 + \hat{\Phi}_1)$$

⁶Здесь и ниже под обратимостью мы понимаем, как обычно, обратимость с точностью до компактных операторов.

имеет вид $(1 + \widehat{\Phi}_2)$, где $\widehat{\Phi}_2$ является оператором типа $\widehat{\Phi}_{11}$, имеющим нулевой порядок, с главным членом, исчезающим вне компактной окрестности нулевого сечения в T^*X . Символ этого оператора a priori принадлежит пространству $\text{Smb}_{11}(m, k, l)$ с $m + k + l + \nu = 0$. Однако, поскольку этот символ имеет компактный носитель в слоях расслоения T^*X , он принадлежит также пространству $\text{Smb}_{11}(m, k - \varepsilon, l)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поэтому соответствующий оператор $\widehat{\Phi}_2$ имеет отрицательный соболевский порядок.

Для того чтобы понять, что означает условие разрешимости уравнения (36), мы покажем, что это уравнение эквивалентно классическому интегральному уравнению Фредгольма второго рода с интегрируемым ядром. Действительно, интегральное уравнение (36) должно быть разрешимо в классах символов $\Phi_1(\tau, \tau')$, которые удовлетворяют оценкам

$$|\Phi_1(\tau, \tau')| \leq C(1 + |\tau|^2)^{m/2}(1 + |\tau'|^2)^{l/2}.$$

Поэтому, если мы обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\tau, \tau') &= \frac{\Phi(\tau, \tau')}{(1 + |\tau|^2)^{m/2}(1 + |\tau'|^2)^{l/2}}, \\ \widetilde{\Phi}_1(\tau, \tau') &= \frac{\Phi_1(\tau, \tau')}{(1 + |\tau|^2)^{m/2}(1 + |\tau'|^2)^{l/2}},\end{aligned}$$

ограниченные функции, соответствующие функциям $\Phi(\tau, \tau')$ и $\Phi_1(\tau, \tau')$, то придем к классическому интегральному уравнению

$$\widetilde{\Phi}_1(\tau, \tau') + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int (1 + |\tau''|^2)^{(m+l)/2} \widetilde{\Phi}(\tau, \tau'') \widetilde{\Phi}_1(\tau'', \tau') d\tau'' = -\widetilde{\Phi}(\tau, \tau'),$$

которое имеет *интегрируемое ядро* в силу неравенства $l + m < -\nu$, полученного из оценок теоремы 5, взятой для $s_i = \sigma_i$, $i = 1, 2$ (см. также следствие 1). Таким образом, это уравнение, которое должно быть разрешимо в пространстве ограниченных функций, действительно является обычным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Таким образом, существует регуляризатор $(D_{11} + \widehat{\Phi}_{11})^{-1}$ для этого оператора, который имеет тот же самый вид:

$$(D_{11} + \widehat{\Phi}_{11})^{-1} = D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11},$$

где оператор $\widehat{\Phi}'_{11}$ является оператором типа (28), символ которого принадлежит пространству $\text{Smb}_{11}(-l_{11}, -k_{11}, -m_{11})$, если оператор $\widehat{\Phi}_{11}$ имеет символ из пространства $\text{Smb}_{11}(m_{11}, k_{11}, l_{11})$. Поэтому из первого уравнения системы (35) мы можем выразить функцию u через v :

$$u = (D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})(f - \widehat{\Phi}_{21}v). \quad (37)$$

Подставляя последнее соотношение во второе уравнение системы (35), получаем уравнение для неизвестной функции v :

$$\widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})(f - \widehat{\Phi}_{21}v) + D_{22}v = g$$

или, что то же самое, уравнение

$$(D_{22} - \widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21})v = g - \widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})f. \quad (38)$$

В силу теоремы 4 оператор, действующий на неизвестную функцию v в левой части последнего соотношения, является псевдодифференциальным оператором, символ которого можно легко вычислить в силу упомянутой выше теоремы. Обозначим этот оператор через

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} D_{22} - \widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21}. \quad (39)$$

Второе условие является условием обратимости оператора (32) (которое эквивалентно условию эллиптичности псевдодифференциального оператора Δ на X). При этом условии функцию v можно найти из уравнения (38):

$$v = -\Delta^{-1}\widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})f + \Delta^{-1}g. \quad (40)$$

Подставляя это выражение в (37), получаем формулу для решения u :

$$u = ((D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11}) + (D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21}\Delta^{-1}\widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11}))f - (D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21}\Delta^{-1}g. \quad (41)$$

Уравнения (40) и (41) показывают, что регуляризатор для оператора (32) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{R}_{11}(1 + \widehat{\Phi}_{21}\Delta^{-1}\widehat{\Phi}_{12}\widehat{R}_{11}) & -\widehat{R}_{11}\widehat{\Phi}_{21}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}\widehat{\Phi}_{12}\widehat{R}_{11} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $\widehat{R}_{11} = (D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})$ является обратным оператором к оператору $D_{11} + \widehat{\Phi}_{11}$.

Теперь мы сформулируем основное утверждение этого параграфа. Прежде всего мы введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Операторный морфизм (32) называется *эллиптическим морфизмом*, если

- 1) оператор $D_{11} + \widehat{\Phi}_{11}$ является обратимым оператором на многообразии M ;
- 2) (псевдодифференциальный) оператор (39) является обратимым оператором на многообразии X .

Мы заметим, что в случае, когда оператор $\widehat{\Phi}_{11}$ исчезает (как это имеет место, например, для морфизмов, ассоциированных с задачами Соболева) первое условие определения 3 сводится просто к эллиптичности псевдодифференциального оператора D_{11} , так же как и оператора (39).

Имеет место следующая теорема конечности.

ТЕОРЕМА 6. *Если операторный морфизм (32) эллиптичен, тогда он фредгольмов, т.е. ядро и коядро этого морфизма являются конечномерными векторными пространствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые вычисления показывают, что операторный морфизм (42) является двусторонним регуляризатором для операторного морфизма (31). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По существу, мы показали, что обратный элемент к эллиптическому морфизму также является (эллиптическим) операторным морфизмом.

2.3. Индекс эллиптических морфизмов. Цель этого пункта – установить формулу индекса для эллиптических морфизмов. Пусть

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} D_{11} + \widehat{\Phi}_{11} & \widehat{\Phi}_{21} \\ \widehat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (43)$$

– эллиптический морфизм. Для того чтобы вычислить его индекс, мы построим гомотопию, которая будет связывать эллиптический морфизм с диагональным морфизмом. Эта гомотопия имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \widehat{\Phi}_{11} & \sqrt{1-t}\widehat{\Phi}_{21} \\ \sqrt{1-t}\widehat{\Phi}_{12} & D_{22} - t\widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (44)$$

Легко проверить, что

- 1) морфизм (44) совпадает с морфизмом (43) для $t = 0$ и является диагональным для $t = 1$;
- 2) оператор типа (39), входящий в определение эллиптичности морфизма (44), не зависит от t и совпадает с условиями эллиптичности для начального морфизма (43).

Итак, мы видим, что гомотопия (44) является гомотопией в классе эллиптических морфизмов, которая связывает морфизм (43) с диагональным морфизмом

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \widehat{\Phi}_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} - \widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 7. *Индекс эллиптического морфизма (43) равен*

$$\text{index } \mathcal{A} = \text{index } D_{11} + \text{index}(1 + D_{11}^{-1}\widehat{\Phi}_{11}) + \text{index}(D_{22} - \widehat{\Phi}_{12}(D_{11}^{-1} + \widehat{\Phi}'_{11})\widehat{\Phi}_{21}).$$

Мы заметим, что первое и последнее слагаемые в написанном выражении суть индексы псевдодифференциальных операторов на гладких компактных многообразиях без края M и X , соответственно. Второе слагаемое есть индекс псевдодифференциального оператора на многообразии X с коэффициентами в алгебре операторов специального вида (см. обсуждение перед формулой (36)).

§ 3. Задача Соболева

В этом параграфе мы применим развитую выше теорию к исследованию задачи Соболева (19). Как было показано в §1, эта задача эквивалентна задаче для операторного морфизма вида

$$\begin{pmatrix} D & i_*^L \\ i^*B & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

(см. (20), (22)). Здесь D – псевдодифференциальный оператор порядка m и B – псевдодифференциальный оператор порядка b . Таким образом, для доказательства фредгольмовости задачи Соболева достаточно установить теорему конечности

для морфизма этого специального вида. Однако, для этого нам необходимо сделать некоторые (впрочем весьма простые и естественные) модификации изложенной выше теории. Дело в том, что операторы $\widehat{\Phi}_{21}$ и $\widehat{\Phi}_{12}$, соответствующие морфизмам вида (45), являются, вообще говоря, *матричными* операторами. В самом деле, оператор $\widehat{\Phi}_{21}$, соответствующий морфизму (45) для $L \geq 1$, является последовательностью интегральных операторов Фурье типа (29) с соответствующими символами (τ^α) с индексом α , пробегающим множество всех натуральных мультииндексов с $|\alpha| \leq L$.

Запишем условие, при котором морфизм (45) определяет непрерывное отображение

$$\begin{pmatrix} D & i_*^L \\ i^*B & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H^{s_1}(M) \\ H^{s_2}(X) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} H^{\sigma_1}(M) \\ H^{\sigma_2}(X) \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Для рассматриваемой задачи мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(x, p, \tau, \tau') &= 0, \\ \Phi_{21}(x, p, \tau) &= (\tau^\alpha), \\ \Phi_{12}(x, p, \tau') &= B(x, p, \tau'). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $B(x, p, \tau')$ так же, как и соответствующий оператор $\widehat{\Phi}_{12}$, очевидно, надо считать столбцом, состоящим из псевдодифференциальных операторов B_j порядков b_j , $j = 1, \dots, J$. Итак, мы видим, что

- 1) в морфизме (46) числа s_2 и σ_2 являются не числами,⁷ а столбцами:

$$s_2 = (s_2^\alpha, |\alpha| \leq L), \quad \sigma_2 = (\sigma_2^j, j = 1, \dots, J),$$

где J число граничных условий в задаче (19), т.е. высота столбца $\widehat{\Phi}_{12}$;

- 2) все равенства и неравенства в формулировке теоремы 5, включающие числа m_{11} , k_{11} и l_{11} , должны быть исключены, равно как и те, которые включают число l ;
- 3) все равенства и неравенства в формулировке теоремы 5, включающие числа m_{21}^α и k_{21}^α , должны быть повторены для всех значений α с $|\alpha| \leq L$;
- 4) все равенства и неравенства в формулировке теоремы 5, включающие числа k_{12}^j и l_{12}^j , должны быть повторены для всех значений j с $1 \leq j \leq J$.

Мы заметим, что в силу специального вида морфизма (45), имеем

$$m_{21}^\alpha = |\alpha|, \quad k_{21}^\alpha = 0, \quad k_{12}^j = 0, \quad l_{12}^j = b_j,$$

где b_j – порядки операторов B_j , $j = 1, \dots, J$. Поэтому системы равенств (33) и неравенств (34) приводятся в этом случае к виду

$$\begin{cases} \sigma_1 = s_1 - m, \\ \sigma_1 = s_2^\alpha - |\alpha| - \nu/2, \quad |\alpha| \leq L, \\ \sigma_2^j = s_1 - b_j - \nu/2, \quad 1 \leq j \leq J, \end{cases} \quad (48)$$

⁷ В действительности, нам необходимо работать в ситуации систем Дуглиса–Ниренберга [25].

и

$$\begin{cases} \nu/2 + b_j < s_1, & 1 \leq j \leq J, \\ s_2^\alpha < 0, & |\alpha| \leq L. \end{cases} \quad (49)$$

Используя равенства (48), можно получить, что

$$\begin{cases} \sigma_1 = s - m, \\ s_2^\alpha = s - m + |\alpha| + \nu/2, & |\alpha| \leq L, \\ \sigma_2^j = s - b_j - \nu/2, & j \leq J. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в систему неравенств (49), мы получаем окончательные границы для индекса соболевского пространства s . Именно, отображение (46) будет непрерывным оператором, если

$$\frac{\nu}{2} + \max_{1 \leq j \leq J} b_j < s < m - L - \frac{\nu}{2}.$$

Запишем теперь условие эллиптичности для задачи Соболева (19). Поскольку, как уже было упомянуто выше, оператор $\widehat{\Phi}_{11}$ тождественно равен нулю, первое условие эллиптичности в определении 3 сводится к условию эллиптичности псевдодифференциального оператора D . Выпишем второе условие эллиптичности. Нетрудно проверить, что для данного конкретного случая общее условие эллиптичности морфизма сводится к условию эллиптичности псевдодифференциального оператора

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} -\widehat{\Phi}_{12} D^{-1} \widehat{\Phi}_{21} \quad (50)$$

на многообразии X . Здесь $\widehat{\Phi}_{12}$ и $\widehat{\Phi}_{21}$ — операторы типа (29), (30) с символами, определенными соотношениями (47). В частности, это означает, что оператор (50) (который является *матричным* оператором) должен быть *квадратным*. Другими словами, число J граничных условий должно быть равно числу кограничных условий, т.е. числу мультииндексов α , таких, что $|\alpha| \leq L$.

Итак, определение 3 эллиптичности операторного морфизма приводит к следующей формулировке понятия эллиптичности для задачи Соболева (см. [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Задача Соболева (19) называется *elliptической*, если

- 1) оператор D является эллиптическим псевдодифференциальным оператором на многообразии M ;
- 2) оператор (50) является эллиптическим оператором на многообразии X .

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы 6.

ТЕОРЕМА 8. Если задача Соболева (19) эллиптическая, тогда она *фредгольмова*, т.е. имеет конечномерное ядро и коядро.

Дадим теперь операторную трактовку задачи Соболева. Именно, задача

$$\begin{cases} Du \equiv f \mod H^{s-m}(M, X; E_2), \\ i^* Bu = g \end{cases}$$

определяет, очевидным образом, оператор

$$\mathcal{S}: H^s(M, E_1) \rightarrow (H^{s-m}(M, E_2)/H^{s-m}(M, X; E_2)) \oplus H^{s-b-\nu/2}(M, F), \quad (51)$$

где b – порядок оператора B .

Можно так же построить *сопряженный* оператор к данному.

Действительно, если принять во внимание, что пространство $H^{s-m}(M, X; E_2)$ является просто образом кограничного оператора i_*^L , тогда сопряженный оператор является оператором, действующим в пространствах

$$\mathcal{S}^*: \text{Ker}(i_L^*) \oplus H^{-s+b+\nu/2}(M, F) \rightarrow H^{-s}(M, E_1),$$

и, следовательно, сопряженная задача имеет вид

$$\begin{cases} Du + Bi_*v = f, \\ i_L^*u = 0, \end{cases}$$

где i_L^* – композиция взятия джета порядка L в трансверсальном направлении и элементарного граничного оператора. Легко видеть, что (почти) обратный оператор к оператору (51) имеет вид

$$\mathcal{S}^{-1} = (D^{-1}(1 + i_*^L(-i^*BD^{-1}i_*^L)^{-1}i^*BD^{-1}), D^{-1}i_*^L(-i^*BD^{-1}i_*^L)^{-1}). \quad (52)$$

Поскольку задача Соболева может быть редуцирована к операторному морфизму, то используя результат теоремы 7, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9. Пусть

$$\begin{cases} Du \equiv f \pmod{H^{s-m}(M, X; E_2)}, \\ i^*Bu = g \end{cases}$$

– эллиптическая задача Соболева. Тогда имеет место следующая формула индекса

$$\text{index } \mathcal{S} = \text{index } D + \text{index } \Delta,$$

где оператор Δ – (псевдодифференциальный) оператор вида

$$\Delta = -i^*BD^{-1}i_*^L.$$

Таким образом, мы свели вычисление индекса задачи Соболева к вычислению индексов в двух псевдодифференциальных операторах на гладких компактных многообразиях без границы. Формула индекса для таких операторов хорошо известна (см., например, [26]).

§ 4. Заключительные замечания

1. Общий вид операторного морфизма

$$\begin{pmatrix} D_{11} + \hat{\Phi}_{11} & \hat{\Phi}_{21} \\ \hat{\Phi}_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$$

показывает, что существует обобщение понятия задачи Соболева для операторов вида $D_{11} + \hat{\Phi}_{11}$. Мы не будем рассматривать здесь этот новый класс соболевских задач в деталях, однако заметим здесь, что полученный класс является классом *нелокальных* задач. Это следует из нелокальной природы оператора $\hat{\Phi}_{11}$. Важно отметить также, что класс соболевских задач не приводит к дальнейшему расширению класса операторных морфизмов. Таким образом, этот новый класс соболевских задач замкнут не только относительно сопряжения, но также и относительно перехода к почти обратному оператору.

2. С алгебраической точки зрения класс операторов вида

$$D_{11} + \widehat{\Phi}_{11}$$

является расширением класса псевдодифференциальных операторов с помощью (непсевдодифференциальных) операторов специального вида. Такого типа расширение (ассоциированное с погружением $i: X \hookrightarrow M$) является частным случаем более общей конструкции расширения алгебры псевдодифференциальных операторов (ассоциированного не только с вложением, но также и с расслоением $\pi: M \rightarrow X$) было введено авторами в серии недавних работ [6]–[8]. Алгебра операторных морфизмов, построенная на базе этого расширения, так же как и теория соответствующих “задач Соболева”, дает *новый интересный класс* нелокальных задач (ср. с задачами, рассмотренными в цитированных выше статьях).

3. Принимая во внимание важность введенных выше операторов $\widehat{\Phi}_{ij}$, мы дадим здесь еще одну трактовку этих операторов, которая не связана с лагранжевой униформизацией. Эта интерпретация основана на сделанном выше замечании о том, что эти операторы сосредоточены на подмногообразии X . Возникает естественный вопрос: нельзя ли проинтерпретировать эти операторы (которые являются псевдодифференциальными операторами на M с нерегулярными символами) как псевдодифференциальные операторы более общей природы на многообразии X . Ответ на этот вопрос положительный, если рассмотреть категорию псевдодифференциальных операторов на X , действующих в сечениях *бесконечномерных расслоений*. Эта интерпретация оказывается весьма полезной для объяснения условия эллиптичности пункта 2.2, где, по-существу, было дано определение эллиптичности для операторов, действующих в сечениях бесконечномерных расслоений. В качестве иллюстрации сказанного выше, рассмотрим оператор $\widehat{\Phi}_{11}$. Этот оператор имеет вид

$$\widehat{\Phi}_{11}f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+\nu} \int e^{i[\tau t + px]} \Phi(x, p, \tau, \tau') \widetilde{f}(p, \tau') dp d\tau d\tau'$$

(см. формулу (28)). Данный оператор может быть представлен в виде псевдодифференциального оператора на многообразии X :

$$\widehat{\Phi}_{11}f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ixp} \widehat{K}(x, p) \widetilde{f}(p) dp$$

с символом $\widehat{K}(x, p)$, причем в каждой точке (x, p) этот символ является оператором

$$\widehat{K}(x, p) = F_{\tau \rightarrow t} K_{(x, p)} F_{t \rightarrow \tau},$$

где

$$(K_{(x, p)}f)(\tau) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int \Phi_{(x, p)}(\tau, \tau') f(\tau') d\tau'$$

и $\Phi_{(x, p)}(\tau, \tau') = \Phi(x, p, \tau, \tau')$.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения // Матем. сб. 1937. V. 2. №3. Р. 467–500.
2. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 38–108.
3. *Стернин Б. Ю.* Общие краевые задачи для эллиптических уравнений в области, границей которой служат многообразия различной размерности // ДАН СССР. 1964. Т. 159. №5. С. 992–994.
4. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические (ко)граничные морфизмы // ДАН СССР. 1967. Т. 172. №1. С. 44–47.
5. *Стернин Б. Ю.* Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева // ДАН СССР. 1976. Т. 230. №2. С. 287–290.
6. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Интегральные операторы Фурье–Маслова, ассоциированные с расслоением, и одно расширение алгебры псевдодифференциальных операторов // ДАН. 1992. Т. 323. №1. С. 25–29.
7. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Об одном классе нелокальных эллиптических задач // ДАН. 1992. Т. 323. №2. С. 245–249.
8. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Расширение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные задачи // Матем. сб. 1994. Т. 185. №3. С. 117–159.
9. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Уравнения в свертках в ограниченной области // УМН. 1965. Т. 20. №3. С. 89–152.
10. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения // УМН. 1965. Т. 22. №1. С. 15–76.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
12. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math. 1971. V. 126. P. 11–51.
13. *Schulze B.-W.* Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. Amsterdam: North-Holland, 1991.
14. *Schulze B.-W.* The Mellin pseudo-differential calculus on manifolds with corners // Symp. “Analysis on Manifolds with Singularities”, Breitenbrunn, 1990, 1992. P. 208–289; // Teubner Texte zur Mathematik. V. 131. Stuttgart–Leipzig: Teubner-Verlag.
15. *Sternin B., Shatalov V.* Relative Elliptic Theory and Sobolev Problems // Preprint. V. 114. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1994.
16. *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
17. *Hörmander L.* Fourier integral operators I // Acta Math. 1971. V. 127. P. 79–183.
18. *Mishchenko A. S., Shatalov V. E., Sternin B. Yu.* Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
19. *Schwartz L.* Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1966.
20. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1959.
21. *Стернин Б. Ю.* Топологические аспекты проблемы С. Л. Соболева. М.: МИЭМ, 1971.
22. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и К-теория // ДАН СССР. 1966. Т. 170. №6.
23. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Эллиптические операторы и подмногообразия // ДАН СССР. 1966. Т. 171. №3.
24. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 501–517.
25. *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 503–538.
26. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 422–433.