Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 11, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:59:26

УДК 517.5

В. А. Юдин

Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов

В работе строится тригонометрический полином, принимающий положительные значения на множестве малой меры. Его свойства используются для доказательства новых неравенств в геометрии чисел.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ — скалярное произведение x и y , $|x| = \sqrt{xx}$, $T^n = \{x : -\frac{1}{2} < x_k \leq \frac{1}{2}, k = 1, \dots, n\}$ — n -мерный тор; $\|\alpha\|$ — расстояние от α до ближайшего целого, если $x \in T^n$, то $|x| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2}$. Через $RD = \{x \in \mathbb{R}^n : x/R \in D\}$ обозначим гомотет множества D , $D \subset \mathbb{R}^n$, а через $D(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x - t \in D\}$ — его сдвиг на вектор t , $t \in \mathbb{R}^n$; $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ — единичный шар из $\mathbb{R}^n$ с объемом $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Пусть $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν , при $\nu = n/2 - 1$ ее первый положительный нуль обозначим через q_n .

Пусть $\mathbb{Z}^n$ — решетка целых чисел из $\mathbb{R}^n$, через L обозначим [1]–[3] невырожденную решетку — множество линейных комбинаций линейно независимой системы векторов $g_1, \dots, g_n$ из $\mathbb{R}^n$. Если из координат векторов g_i , $i = 1, \dots, n$, составить матрицу G , то $L = G\mathbb{Z}^n$. Ее определитель (объем фундаментального параллелепипеда) полагаем равным 1. Через

$$L' = \{m : lm \in \mathbb{Z} \forall l \in L\} = (G^{-1})'\mathbb{Z}^n$$

обозначим решетку, сопряженную к решетке L .

Для функций $f(x) \in L(T^n)$ через

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x}, \quad \hat{f}_\nu = \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx,$$

обозначим ее ряд Фурье. Совокупность тригонометрических полиномов (т.п.), у которых

$$\hat{f}_\nu = 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}^n, \quad \nu \notin D,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00212).

обозначим через $T(D)$; $T(D)$ – множество т.п., спектр которых содержится в области D . В частном случае $n = 1$, через T_m обозначим совокупность т.п. степени не выше $m - 1$.

В работе рассматриваем две экстремальные задачи для т.п. В одномерном случае они и их решения хорошо известны [4, с. 94], [5].

1) Для любого неотрицательного на периоде T т.п. $f(x) \in T_m$ справедливо неравенство

$$\max_{x \in T} f(x) \leq m \hat{f}_0. \quad (1)$$

Если выбрать в качестве $f(x)$ полином Фейера

$$f^*(x) = \frac{\sin^2 \pi m x}{\sin^2 \pi x}, \quad (2)$$

то неравенство (1) обращается в равенство.

2) Для любого нетривиального т.п. $f(x) \in T_m$, имеющего среднее значение $\hat{f}_0$ на периоде T равное нулю, выполняется неравенство:

$$\text{mes}\{x \in T : f(x) \geq 0\} \geq \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

(гипотеза Стечкина–Черных). Как показывает пример

$$f^*(x) = \frac{\cos^2 \pi m x}{\cos 2\pi x - \cos \frac{\pi}{m}}, \quad (4)$$

неравенство (3) является точным.

В многомерном случае аналоги экстремальных полиномов (2), (4) имеют важные приложения. Так для случая многомерной сферы

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

с помощью многочлена (2) по зональным сферическим гармоникам Дельсартом [1], [6] получены оценки снизу мощности дизайнов. Многочлен (4) применяется в теории кодирования [6]–[10], в частности, для покрытия сферы S^{n-1} сферическими “шапками”.

В случае многомерного тора T^n точное решение соответствующих задач неизвестно. Построим “достаточно хорошие” т.п. и дадим их приложения к нескольким задачам теории чисел. Так, докажем предположение [3] о том, что произведение радиуса упаковки решетки L и радиуса покрытия сопряженной решетки L' растет с ростом размерности пространства не быстрее чем n . Многомерная задача об универсальной линейке [11], [12]: как мало элементов содержится в множестве A , $A \subset \mathbb{Z}^n$, если его разностное множество

$$A^* \supset \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu| < R\}$$

содержит все целые точки из шара радиуса R ? Здесь получим оценку снизу, улучшающую очевидную в экспоненциальное число раз с ростом размерности.

ЗАДАЧА 1. Среди неотрицательных т.п. из $T(D)$ определить наибольшее значение

$$f(0)/\widehat{f_0}. \quad (5)$$

Множество точек $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ из T^n назовем *дизайном типа D* , если кубатурная формула

$$\int_{T^n} f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^{(k)})$$

справедлива для любого т.п. $f(x)$ из $T(D)$.

Допустим, что $\{x^{(k)}\}_1^N$ — дизайн типа D , $f(x) \geq 0$, $x \in T^n$, $f(x) \in T(D)$. Тогда

$$I = \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)} - x^{(l)}) \geq Nf(0),$$

с другой стороны, для любого $\nu \in D$, $\nu \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} = 0,$$

следовательно,

$$I = \sum_{\nu \in D} \sum_{k,l=1}^N e^{2\pi i \nu (x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_{\nu \in D} \widehat{f_\nu} \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 = N^2 \widehat{f_0},$$

откуда находим, что $N \geq f(0)/\widehat{f_0}$.

Таким образом, потребность в оценках снизу количества точек дизайна приводит к экстремальной задаче (5). В случае выпуклой центрально-симметрической области D из $\mathbb{R}^n$ в [13] предлагается следующая конструкция т.п.:

$$f(x) = \left| \sum_{\nu \in \frac{1}{2}D} e^{2\pi i \nu x} \right|^2. \quad (6)$$

Поскольку разностное множество $\frac{1}{2}D$ содержится в D , то $f(x) \in T(D)$. Положительность т.п. f очевидна. Из (6) находим:

$$f(0) = \left(\sum_{\nu \in \frac{1}{2}D} 1 \right)^2, \quad \widehat{f_0} = \sum_{\nu \in \frac{1}{2}D} 1.$$

Таким образом, получается оценка снизу:

$$N \geq \frac{f(0)}{\widehat{f_0}} = \sum_{\nu \in \frac{1}{2}D} 1.$$

Несколько иную, но довольно близкую оценку можно извлечь из работы Зигеля [2], [3], [14], где теорема Минковского о целой точке в выпуклом центрально-симметрическом теле была доказана с использованием гармонического анализа. Приведем двойственные рассуждения к аналогичным из [2, с. 100]. Пусть

$$F(x) = (\chi * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x-y)\chi(y) dy \quad (7)$$

есть свертка [14] характеристических функций тела $\frac{1}{2}D$. Определим т.п. $f(x)$ равенством:

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} F(\nu) e^{2\pi i \nu x}. \quad (8)$$

Поскольку носителем $F(x)$ является разностное множество $\frac{1}{2}D$, то $f(x) \in T(D)$. По формуле суммирования Пуассона [14, с. 280]

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{F}(x-k), \quad (9)$$

но преобразование Фурье свертки функций равно [14, с. 9] произведению их преобразований Фурье:

$$\widehat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(s) e^{-2\pi i s x} ds = |\widehat{\chi}(s)|^2.$$

Следовательно, т.п. $f(x)$ неотрицателен. Из (7)–(9) находим:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{F}(k) \geq \widehat{F}(0) = [\widehat{\chi}(0)]^2 = \left[\text{mes } \frac{1}{2}D \right]^2, \\ \widehat{f}_0 &= F(0) = \text{mes } \frac{1}{2}D. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N \geq \frac{f(0)}{\widehat{f}_0} = \text{mes } \frac{1}{2}D = \frac{1}{2^n} \text{mes } D.$$

ЗАДАЧА 2. Среди нетривиальных т.п. из $T(D)$, имеющих среднее значение на торе T^n равное 0, определить т.п., принимающий положительные значения на множестве наименьшей меры.

Как и в задаче 1, экстремальные полиномы также дают оценку снизу точек дизайна. Пусть $\{x^{(k)}\}_1^N$ – дизайн типа D и $\widehat{f}_0 = 0$, $f \in T(D)$, тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \text{mes} \left\{ x \in T^n : \sum_{k=1}^N f(x - x^{(k)}) \equiv 0 \right\} \\ &\leq \text{mes} \left\{ x \in T^n : \sum_{k=1}^N f(x - x^{(k)}) \geq 0 \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \text{mes} \{ x \in T^n : f(x - x^{(k)}) \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Ввиду инвариантности

$$\text{mes}\{x : f(x - x^{(k)}) \geq 0\} = \text{mes}\{x : f(x) \geq 0\}, \quad k = 1, \dots, N,$$

поэтому

$$1 \leq N \cdot \text{mes}\{x : f(x) \geq 0\},$$

откуда

$$N \geq [\text{mes}\{x \in T^n : f(x) \geq 0\}]^{-1}.$$

Для “малых D ” это неравенство позволяет находить точное решение задачи 2. Например, если D содержит лишь $2n$ целых точек: $(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1)$ (0 не учитывается), то экстремальным полиномом является

$$f(x) = \cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\text{mes}\{x \in T^n : f(x) \geq 0\} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, известно, что множество из двух точек: $(0, \dots, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ является дизайном типа D и, значит,

$$\text{mes}\{x \in T^n : f(x) \geq 0\} \geq \frac{1}{2}.$$

При “больших D ” о дизайнах на торе известно крайне мало информации [15], [16]. В следующем параграфе построим т.п. $f(x)$, $\hat{f}_0 = 0$, со спектром из шара большого радиуса. Он принимает положительные значения лишь в достаточно малой окрестности нуля.

§ 2. Конструкция тригонометрического полинома

Пусть

$$u(x) = |x|^{-\nu} J_\nu(|x|), \quad \nu = \frac{n}{2} - 1, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2};$$

известно [17], что

$$\Delta u + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Положим

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in q_n B, \\ 0, & x \notin q_n B, \end{cases}$$

через Γ обозначим границу шара $q_n B$. Подсчитаем преобразование Фурье функции $v(x)$:

$$\hat{v}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-2\pi i s x} dx.$$

По формуле Грина [17] найдем:

$$\begin{aligned} \int_{q_n B} [\Delta e^{-2\pi i s x} u(x) - e^{-2\pi i s x} \Delta u(x)] dx \\ = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n} e^{-2\pi i s x} u(x) - e^{-2\pi i s x} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\frac{\partial f}{\partial n}$ — производная f по внешней нормали к Γ . Так как $u|_{\Gamma} = 0$, то из (10) находим

$$\widehat{v}(s)[1 - |2\pi s|^2] = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x) e^{-2\pi i s x} dx. \quad (11)$$

Поскольку $u(x)$ — радиальная функция, то из свойств функций Бесселя вытекает, что

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = k > 0.$$

Пусть $\chi_{\Gamma}(x)$ равна 1, если $x \in \Gamma$, и равна 0 в противном случае. Положим

$$w(x) = (v * \chi_{\Gamma})(x) = \int_{\Gamma} v(x - \xi) d\xi, \quad (12)$$

исходя из определения, отмечаем простейшие свойства $w(x)$:

$$\begin{aligned} 1. \quad w(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w(0) = 0, \\ 2. \quad \text{supp } w(x) = 2q_n B. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя формулы для преобразования Фурье свертки функций [14] из (11), (12), найдем:

$$\widehat{w}(s) = \widehat{v}(s) \widehat{\chi}_{\Gamma}(s) = \frac{k |\widehat{\chi}_{\Gamma}(s)|^2}{1 - |2\pi s|^2}. \quad (14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, положим

$$W(x) = w\left(\frac{x}{R}\right), \quad R = \frac{1}{4\pi\varepsilon}. \quad (15)$$

Из (13) получим

$$\widehat{W}(s) = R^n \widehat{w}(Rs) = \frac{k}{(4\pi\varepsilon)^n} |\widehat{\chi}_{\Gamma}(4\pi\varepsilon s)|^2 \left[1 - \left| \frac{s}{2\varepsilon} \right|^2 \right]^{-1}. \quad (16)$$

Эта формула совместно с (13), (14) дает нам три свойства функции $W(x)$:

$$\begin{aligned} 1. \quad W(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad W(0) = 0, \\ 2. \quad \text{supp } W(x) = \frac{q_n}{2\pi\varepsilon} B, \\ 3. \quad \widehat{W}(s) \leq 0, \quad |s| \geq 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (17)$$

где ε — произвольное положительное число. Отметим, что в [22] построены веса W более общего вида. Так как [14, с. 176]

$$\int_{|x|=1} e^{-2\pi i s r x} dx = 2\pi(r|s|)^{1-n/2} J_{n/2-1}(2\pi r|s|), \quad (18)$$

то используя известные [18] оценки для функций Бесселя

$$|J_\nu(z)| \leq c_1 z^{-1/2}, \quad z > 0,$$

из (16)–(18) находим

$$|\widehat{W}(s)| \leq c_2 |s|^{-n-1}, \quad s \neq 0, \quad (19)$$

с некоторыми положительными константами c_1, c_2 . Определим т.п. $\Phi(x)$ равенством

$$\Phi(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} W(\nu) e^{2\pi i \nu x}.$$

Функция W непрерывна на $\mathbb{R}^n$ по построению и имеет конечный носитель (19). Вместе с неравенством (17) ее свойства дают возможность применения формулы суммирования Пуассона [14] к т.п.

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{W}(x - k), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Если $x \in T^n$ и $|x| \geq 2\varepsilon$, $\varepsilon < \frac{1}{4}\sqrt{n}$, то каждое слагаемое правой части неположительно. Следовательно, для т.п. $\Phi(x)$ выполняется неравенство

$$\Phi(x) \leq 0, \quad x \in T^n, \quad |x| \geq 2\varepsilon.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\sqrt{n}$, существует т.п. $\Phi(x)$ со свойствами:*

1. $\widehat{\Phi}_\nu \geq 0$, $\widehat{\Phi}_0 = 0$,
 2. $\widehat{\Phi}_\nu \equiv 0$, $\nu \in \mathbb{Z}^n$, $|\nu| \geq \frac{q_n}{2\pi\varepsilon}$,
 3. $\Phi(x) \leq 0$, $|x| \geq 2\varepsilon$, $x \in T^n$.
- (20)

Полагаем $R = \frac{q_n}{4\pi\varepsilon}$, $R > \frac{2q_n}{\pi\sqrt{n}}$, находим т.п. $\Phi(x)$ порядка R , у которого $\widehat{\Phi}_0 = 0$ и

$$\text{mes}\{x \in T^n : \Phi(x) \geq 0\} \leq \omega_n (2\varepsilon)^n = \omega_n \left(\frac{q_n}{\pi R} \right)^n.$$

§3. Приложения к теории чисел

I. Оценка сверху тригонометрических сумм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество точек $\{x^{(k)}\}_1^N$ из T^n называется 2ε -кодом на T^n , если $|x^{(k)} - x^{(l)}| \geq 2\varepsilon$ для любых $k, l: k \neq l$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < \frac{1}{4}\sqrt{n}$ и $\{x^{(k)}\}_1^N$ — 2ε -код на T^n . Тогда для любых неотрицательных коэффициентов p_k выполняется неравенство:

$$\sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu} \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \leq \sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu} \cdot \sum_{k=1}^N p_k^2. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{k,l=1}^N p_k p_l \Phi(x^{(k)} - x^{(l)}).$$

Используя неотрицательность коэффициентов p_k и свойство 3 (20), находим:

$$I \leq \sum_{k=l} \Phi(x^{(k)} - x^{(l)}) p_k p_l = \Phi(0) \cdot \sum_{k=1}^N p_k^2. \quad (22)$$

С другой стороны, разлагая т.п. $\Phi(x)$ в ряд Фурье, получаем:

$$I = \sum_{k,l=1}^N p_k p_l \sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu} e^{2\pi i \nu (x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu} \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2. \quad (23)$$

Так как

$$\Phi(0) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\Phi}_{\nu},$$

то из сравнения (22), (23) вытекает утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях теоремы

$$\min_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n, \\ 0 < |\nu| < q_n/2\pi\varepsilon}} \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^N p_k^2 \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Используя свойства (20) коэффициентов Фурье т.п. $\Phi(x)$, из (23) находим:

$$I \geq \min_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n, \\ 0 < |\nu| < q_n/2\pi\varepsilon}} \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \cdot \sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu}.$$

Вместе с неравенством (22) это дает

$$\Phi(0) \cdot \min_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n, \\ 0 < |\nu| < q_n/2\pi\varepsilon}} \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \leq \Phi(0) \cdot \sum_{k=1}^N p_k^2,$$

откуда следует (24).

В частном случае $p_1 = p_2 = \dots = p_N$ неравенство (24) дает:

$$\min_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n, \\ 0 < |\nu| < q_n/2\pi\varepsilon}} \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right| \leq N^{1/2}.$$

Рассмотрим частный случай (21) для точек вида:

$$x^{(k)} = \left(\frac{k}{P}, \frac{k^2}{P}, \dots, \frac{k^n}{P} \right), \quad k = 0, 1, \dots, P-1, \quad (25)$$

где P – простое число. Для применения т.п. необходимо оценить снизу взаимные расстояния на торе между точками $\{x^{(k)}\}$. Если x принадлежит системе вычетов $\mathbb{Z}_P$, то под $|x|$ будем понимать расстояние от x до ближайшего целого числа, делящегося на P .

ЛЕММА (А. А. Юдин). Пусть $n \in \mathbb{N}$, P – простое,

$$x = (x, x^2, \dots, x^n), \quad y = (y, y^2, \dots, y^n), \quad x \not\equiv y \pmod{P}.$$

Тогда

$$|x - y| \geq \sqrt{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}. \quad (26)$$

Выберем наименьшее l так, чтобы $x^l \equiv y^l \pmod{P}$. Так как $x \not\equiv y \pmod{P}$, то $l \geq 2$. Покажем, что сравнение $x^s \equiv y^s \pmod{P}$ имеет решение лишь для s , делящихся на l . Допустим, что $x^s \equiv y^s \pmod{P}$ и $s = ql + r$, $0 < r < l$. Поскольку $(xy, P) = 1$, то сравнение $x^s \equiv y^s \pmod{P}$ можно поделить на $x^{ql} \equiv y^{ql} \pmod{P}$. Получим $x^r \equiv y^r \pmod{P}$, что противоречит выбору l . Таким образом, в наборе

$$x - y, x^2 - y^2, \dots, x^n - y^n$$

имеется, по крайней мере,

$$n - \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor \geq n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

ненулевых чисел из $1, 2, \dots, P-1$. Откуда следует (26).

Оценим расстояние между различными точками (25). Имеем:

$$|x^{(k)} - x^{(l)}| \geq \sqrt{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \cdot P^{-1} = 2\varepsilon,$$

неравенство (21) принимает вид

$$\sum_{0 < |\nu| < P \cdot \Delta_n} \widehat{\Phi}_\nu \left| \sum_{k=1}^P e^{2\pi i \frac{\nu_1 k + \nu_2 k^2 + \dots + \nu_n k^n}{P}} \right|^2 \leq P \cdot \Phi(0),$$

где

$$\Delta_n = \left[\frac{n+1}{2} \right]^{-1/2} \cdot \frac{q_n}{\pi}.$$

При $n = 1, 3$ для нулей функций Бесселя известны [18] точные значения: $q_1 = \pi/2$, $q_3 = \pi$. Значит, $\Delta_1 = 1/2$, $\Delta_3 = 1/\sqrt{2}$. Используя [18] асимптотику для q_n при больших значениях n :

$$q_n = \frac{n}{2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (27)$$

находим, что

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{2}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

II. Радиус упаковки и радиус покрытия решетки.

Число

$$r(L) = \frac{1}{2} \inf_{x \in L, x \neq 0} |x|$$

называется *радиусом упаковки* решетки L , а число

$$\rho(L) = \inf \left\{ \rho : \bigcup_{k \in L} \rho B(k) \supset \mathbb{R}^n \right\}$$

называется *радиусом покрытия* решетки L .

Используя метод приведения Коркина–Золотарева, доказано [19], что с некоторой константой δ выполнено неравенство:

$$r(L') \rho(L) \leq \delta n^{3/2}, \quad (27')$$

в [20] отмечается, что существует невырожденная решетка L , для которой произведение $r(L') \rho(L)$ оценивается снизу через n по порядку. В обзоре [3] имеется предположение, что показатель $3/2$ в неравенстве (27) можно понизить до 1. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$r(L') \rho(L) \leq \frac{q_n}{2\pi}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию $W(x)$, определенную в (17), с ε , удовлетворяющим соотношению

$$4\pi\varepsilon r(L') = q_n.$$

Классическая формула суммирования Пуассона [14]

$$\Phi(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} W(\nu) e^{2\pi i \nu x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{W}(x - k) \quad (29)$$

допускает известное обобщение; для любой невырожденной решетки L

$$\Phi(x) = \sum_{\mu \in L'} W(\mu) e^{2\pi i \mu x} = \sum_{k \in L} \widehat{W}(x - k). \quad (30)$$

(Формула (30) вытекает из (29) после замены переменной $x = Gy$.)

Ввиду выбора ε носитель $W(x)$ не содержит точек решетки L' за исключением нулевой точки. Так как по свойству (20) $\Phi(0) = 0$, то $\Phi(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. С другой стороны, правая часть (30) оказывается неположительной на множестве

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in L} 2\varepsilon B(k).$$

Если это множество содержит окрестность, то, используя явное выражение (16) для $\widehat{W}(s)$, нетрудно увидеть, что $\Phi(x)$ будет отрицательной функцией в этой окрестности. Это противоречит тождеству $\Phi(x) \equiv 0$. Следовательно,

$$\bigcup_{k \in L} 2\varepsilon B(k) \supset \mathbb{R}^n,$$

откуда находим, что

$$2\varepsilon \geq \rho(L).$$

Учитывая выбор ε , получаем доказательство теоремы.

В частном случае $n = 1$, $q_1 = \pi/2$, неравенство (28) приводит к точной, хотя и очевидной оценке

$$r(L')\rho(L) \leq \frac{1}{4}.$$

В трехмерном случае $q_3 = \pi$ неравенство (28) дает оценку

$$r(L')\rho(L) \leq \frac{1}{2}.$$

Из асимптотики (27) нулей функций Бесселя находим

$$r(L')\rho(L) \leq \frac{n}{4\pi}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает предположение, сделанное в [3].

III. Разностные множества.

Через

$$A^* = \{z : z = x - y, x, y \in A\}$$

обозначим разностное множество A . Пусть

$$A^* \supset \{0, \pm 1, \dots, \pm n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как мало элементов может содержаться в множестве A , $A \subset \mathbb{Z}$? Это известная [11], [12] задача об универсальной линейке. Рассмотрим ее многомерный аналог. Пусть D — центрально-симметрическая область из $\mathbb{R}^n$. Какое наименьшее количество точек содержит множество A , $A \subset \mathbb{Z}^n$, разностное множество которого содержит D ? Число точек, содержащихся в D , обозначим через M , а число точек из A — через N . Так как разностное множество A^* содержит не более $N^2 - N + 1$ точек, то включение $A^* \supset D$ приводит к оценке

$$M \leq N^2 - N + 1,$$

откуда вытекает неравенство

$$N \geq M^{1/2}. \quad (31)$$

В общей ситуации это есть грубая оценка. Дадим оценку снизу для шара $D = RB$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset \mathbb{Z}^n$ таково, что

$$A^* \supset \{\nu : \nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| < R\}, \quad R > \frac{2q_n}{\pi\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$N = \sum_{\nu \in A} 1 \geq R^{n/2} \pi^{n/2} q_n^{-n/2} \omega_n^{-1/2}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим т.п. $\Phi(x)$ с $\varepsilon = q_n/(2\pi R)$, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x) &= \sum_{\nu \in A} e^{2\pi i \nu x}, \\ |\mathcal{D}(x)|^2 &= \sum_{\nu \in A} \sum_{\mu \in A} e^{2\pi i \nu x} e^{-2\pi i \mu x} = \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \alpha_s e^{2\pi i s x}. \end{aligned}$$

По условию теоремы все коэффициенты α_s с номерами из шара RB не меньше 1. Следовательно, по равенству Парсеваля

$$I = \int_{T^n} |\mathcal{D}(x)|^2 \Phi(x) dx = \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \alpha_s \widehat{\Phi}_s \geq \sum_{|s| < R} \widehat{\Phi}_s = \Phi(0). \quad (33)$$

С другой стороны, т.п. $\Phi(x)$ неположителен при $|x| \geq 2\varepsilon$, значит,

$$I \leq \int_{|x| \leq 2\varepsilon} |\mathcal{D}(x)|^2 \Phi(x) dx. \quad (34)$$

Так как коэффициенты Фурье $\Phi(x)$, $\mathcal{D}(x)$ неотрицательны (20), то

$$\Phi(x) \leq \sum_{\nu} \widehat{\Phi}_{\nu} = \Phi(0), \quad |\mathcal{D}(x)| \leq N, \quad x \in T^n.$$

Значит, из неравенства (34) следует оценка:

$$I \leq N^2 \Phi(0) \cdot \text{mes}\{x \in T^n : |x| \leq 2\varepsilon\} = N^2 \Phi(0) (2\varepsilon)^n \omega_n,$$

которая совместно с неравенством (33) дает

$$\Phi(0) \leq N^2 \Phi(0) (2\varepsilon)^n \omega_n,$$

откуда вытекает (32). Теорема доказана.

Отметим, что при малых размерностях n доказанное неравенство (32) оказывается хуже очевидного (31). Однако при больших размерностях n , $n \rightarrow \infty$, из асимптотики нулей функций Бесселя и гамма-функции следует, что оценка (32) растёт быстрее оценки (31) в $e^{n/2}$ раз.

Рассмотрим задачу о разностных множествах в непрерывном случае: на торе T^n . Пусть $A \subset T^n$ и $A^* \supset D$. Если A измеримо по Лебегу, то нетрудно построить множество A нулевой меры, разностное множество которого даёт весь тор T^n . Поэтому рассмотрим следующую задачу.

Пусть $f(x) \in L_2(T^n)$, $f(x) \geq 0$, $x \in T^n$ и

$$(f * f)(x) = \int_{T^n} f(x-t) f(t) dt \geq 1, \quad x \in D, \quad (35)$$

где D – центрально-симметрическое множество. Как мало среднее значение $\widehat{f}_0$?

Пусть Γ – кусочно-гладкая граница выпуклой центрально-симметрической области D из $\mathbb{R}^n$, λ_1 – первое собственное число краевой задачи:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad u \in L_2(D).$$

В [21], [22] доказана теорема Джексона, из которой вытекает, что для любой функции $f(x) \in L_2(T^n)$ и любого числа R , $R > 0$, выполняется неравенство

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| \geq R} |\widehat{f}_{\nu}|^2 \leq \sup_{t \in \frac{\sqrt{\lambda_1} D}{\pi R}} [(f * f)(0) - (f * f)(t)]. \quad (36)$$

Используем его для оценки снизу $\widehat{f}_0$. Выберем $R = \sqrt{\lambda_1}/\pi$, так как

$$(f * f)(0) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_{\nu}|^2, \quad (f * f)(t) \geq 1, \quad t \in D,$$

то из (36) находим

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| \geq R} |\widehat{f}_{\nu}|^2 \leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_{\nu}|^2 - 1,$$

откуда

$$1 \leq \sum_{|\nu| < R} |\hat{f}_\nu|^2.$$

Используя положительность функции $f(x)$, получим

$$1 \leq \sum_{|\nu| < R} |\hat{f}_\nu|^2 \leq N(\hat{f}_0)^2,$$

где

$$N = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| < R} 1$$

— число целых точек в шаре RB . Таким образом, оценка снизу среднего значения $f(x)$ принимает вид:

$$\hat{f}_0 \geq N^{-1/2} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| < \sqrt{\lambda_1}/\pi} 1 \right)^{-1/2}. \quad (37)$$

Отметим, что неравенство (37) может использоваться и в дискретных случаях. Пусть G — конечная абелева группа. Так как она представима в виде произведения циклических, то, разбивая T^n многомерной сеткой на части и рассматривая на T^n ступенчатые функции с значениями 0, 1, можно оценить снизу количество элементов множества A , $A \subset G$, удовлетворяющих условию: $A^* \supset D$, $D \subset G$.

Еще одно применение знакопеременных т.п. связано с покрытиями тора T^n . Как и в сферическом случае S^{n-1} [9], [10], оно основывается на следующем утверждении. Через E' обозначим дополнительное к E множество на T^n .

ТЕОРЕМА 5. Пусть

1. $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ — дизайн типа D ,
2. т.н. $f(x) \in T(D)$, $\hat{f}_0 = 0$,
3. $f(x) \leq 0$, $x \in E$.

Тогда

$$A = \bigcup_{k=1}^N E'(x^{(k)}) \supset T^n. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: множество A не покрывает T^n . В таком случае множество

$$\bigcap_{k=1}^N E(x^{(k)})$$

содержит окрестность, которую обозначим через U . Из кубатурной формулы находим, что

$$I = \sum_{k=1}^N f(x - x^{(k)}) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, \nu \in D} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x} \sum_{k=1}^N e^{-2\pi i \nu x^{(k)}} \equiv 0, \quad x \in T^n.$$

С другой стороны, каждое слагаемое, входящее в сумму I , неположительно на U . Поскольку n -мерная мера Лебега множества нулей т.п. равна нулю, то оказывается, что на множестве из U положительной меры Лебега сумма I отрицательна. Полученное противоречие дает доказательство теоремы.

Отметим, что отсутствие конструкций точных дизайнов большого порядка не дает возможности использования (28) для исследования плотности покрытия $\mathbb{R}^n$ при больших размерностях. Использование известных конструкций приводит к оценкам, значительно уступающим вероятностным оценкам Роджерса [23].

Задача о построении экстремальных полиномов представляет большой интерес и для других компактов. Приведем ее формулировку для гармонических многочленов.

1. Гармонический многочлен $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, степени s ($\deg x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n} = s_1 + \cdots + s_n$) неотрицателен на S^{n-1} и $f(0) = 1$. Каково наибольшее значение $\max_{x \in S^{n-1}} f(x)$?

2. Если гармонический многочлен $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, степени s удовлетворяет условию $f(0) = 0$, то по формуле среднего значения [17]

$$\int_{S^{n-1}} f(x) dx = 0.$$

Значит, на S^{n-1} он принимает как положительные, так и отрицательные значения. Каково наименьшее значение

$$\text{mes}\{x \in S^{n-1} : f(x) > 0\}?$$

В заключение выражаю благодарность С. В. Конягину и А. А. Юдину за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.
2. Касселе Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
3. Gruber P. M. Geometry of numbers // Handbook on convex geometry: Elsevier Science Publishers B.V., 1993. P. 739–763.
4. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть 2. М.: Наука, 1978.
5. Бабенко А. Г. Об одной экстремальной задаче для полиномов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 349–356.
6. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. T. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.
7. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценке мощности кода // Пробл. перед. информ. 1980. Т. 14. № 3. С. 17–30.
8. Левинштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. № 40. М.: Наука. С. 43–110.
9. Fazekas G., Levenshtein V. I. On upper bounds for Code Distance and Covering Radius of Designs in Polynomial Metric Spaces // J. Comb. Theory. Ser. A. 1995. V. 70. P. 267–288.
10. Юдин В. А. Покрытия сферы и экстремальные свойства ортогональных многочленов // Дискретная матем. 1995. Т. 7. № 3. С. 81–88.
11. Leech J. On the representation of $1, 2, \dots, n$ by differences // J. Lond. Math. Soc. 1956. V. 31. № 122. P. 160–169.
12. Конягин С. В., Савин А. П. Об универсальных линейках // Матем. заметки. 1989. Т. 48. № 2. С. 136–137.

13. *Резцов А. В.* О кубатурных формулах гауссова типа с асимптотически минимальным числом узлов // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №1. С. 151–152.
14. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
15. *Beckers M., Cools M.* A relation between cubature formulae of trigonometric degree and lattice rules // Inter. Series of Numer Math. 1993. V. 112. P. 13–24.
16. *Мысовский И. П.* О кубатурных формулах, точных для тригонометрических многочленов // ДАН СССР. 1987. Т. 296. №1. С. 28–31.
17. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. А. М.: Гостехиздат, 1951.
18. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.
19. *Lagarias J. C., Lenstra Jr H. W., Snorr C. P.* Korkine–Zolotarev bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice // Combinatorica. 1990. V. 10. P. 333–348.
20. *Banaszczyk W.* Additive Subgroups of Topological Vector Spaces // Lect. Notes in Math. V. 1466, 1991.
21. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1965. Т. 17. №3. С. 401–405.
22. *Юдин В. А.* Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. №2. С. 309–315.
23. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

Москва

Поступила в редакцию
14.03.1996