Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Борисов, О числе предельных циклов фактор-системы n -мерной задачи Фуллера, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 12, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:42:57

УДК 517.977

В. Ф. Борисов

О числе предельных циклов фактор-системы n -мерной задачи Фуллера

Доказывается, что число предельных циклов фактор-системы n -мерной задачи Фуллера, т.е. число однопараметрических семейств автомодельных решений уравнения $y^{(2n)} = (-1)^{n+1} \operatorname{sgn} y$, равно $[n/2]$.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

В работе изучаются автомодельные решения уравнения

$$y^{(2n)} = (-1)^{n+1} \operatorname{sgn} y, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Как будет показано ниже, к (1.1) сводится система уравнений принципа максимума Л. С. Понтрягина для одной n -мерной задачи оптимального управления. Особенностью этой задачи является наличие особой траектории порядка n (определение особой траектории и ее порядка см. в [1]). Интерес к изучению геометрии решений системы (1.1) связан с вопросом о стыковке неособых траекторий разрывных гамильтоновых систем и особых траекторий порядка $n \geq 2$. Как правило (см. [2]–[3]), такое сопряжение происходит с бесконечным числом переключений управления $u = \operatorname{sgn} y$, причем точки переключений накапливаются на неособом участке к точке стыковки с особым (феномен Фуллера). В работе [4] для $n = 2$ было доказано, что решения системы (1.1) определяют асимптотику решений общей разрывной гамильтоновой системы в окрестности многообразия особых решений порядка 2. Естественная гипотеза состоит в том, что при произвольном $n \geq 2$ система (1.1) потраекторно эквивалентна общей разрывной гамильтоновой системе в окрестности многообразия особых решений порядка n .

Система (1.1) является однородной относительно действия однопараметрической группы $\mathcal{K} = \bigcup_{\mu > 0} K_\mu$ диффеоморфизмов фазового пространства,

$$K_\mu(y, y', y'', \dots, y^{(2n-1)}) = (\mu^{2n}y, \mu^{2n-1}y', \mu^{2n-2}y'', \dots, \mu y^{(2n-1)}).$$

Непосредственно проверяется, что если $y(t)$ есть решение (1.1), то при любом $\mu > 0$ функция $y_\mu(t)$, где

$$y_\mu(t) = \mu^{2n} y\left(\frac{t}{\mu}\right), \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00890) и Международного научного фонда (грант № UBD300).

также удовлетворяет (1.1). *Автомодельным* называется такое решение $y(t)$, что для некоторого $\tau > 0$ “хвост” траектории $y(t)$ при $t \geq \tau$ получается преобразованием подобия (1.2) из исходной траектории $y(t)$, т.е. $y(t + \tau) = \mu^{2n} y(t/\mu)$.

Рассмотрим фактор-систему $\mathfrak{S}$ системы (1.1) относительно действия группы $\mathcal{K}$. Фактор-система $\mathfrak{S}$ определена (с точностью до потраекторной эквивалентности) на $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}/\mathcal{K}$ – пространстве орбит группы $\mathcal{K}$, гомеоморфном $(2n - 1)$ -мерной сфере S^{2n-1} . Каждой автомодельной траектории системы (1.1) отвечает некоторый замкнутый цикл фактор-системы. Обратно, любой замкнутый цикл системы $\mathfrak{S}$ определяет однопараметрическое семейство автомодельных траекторий системы (1.1) и траектории каждого такого семейства заполняют двумерное интегральное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{2n}$, инвариантное относительно действия группы $\mathcal{K}$. В данной работе определяется число однопараметрических семейств автомодельных решений системы (1.1).

Мы ограничимся нахождением автомодельных решений, возвращающихся на исходную орбиту после одного переключения управления (это так называемые траектории “постоянного отношения”, или bi-constant-ratio траектории, см. [5]). Впервые траектории постоянного отношения системы (1.1) были найдены А.Т. Фуллером [6] для $n = 2$ и А.Т. Фуллером и П.Е. Гренстедом [7] для $n = 3$. В обоих случаях оказалось, что имеется ровно одно семейство автомодельных траекторий. Разные авторы [5], [8]–[10] находили автомодельные решения некоторых обобщений системы (1.1) также в размерностях $n = 2$ и $n = 3$. В работе [4] для произвольного $n \geq 2$ было выписано алгебраическое уравнение, которому удовлетворяют параметры μ автомодельных траекторий системы (1.1). В этой же работе М.И. Зеликиным была высказана гипотеза о том, что число решений этого уравнения равно $[n/2]$, т.е. целой части от половины размерности системы. Цель данной работы – доказать это утверждение. Главным при доказательстве стало то, что уравнение, определяющее μ для данного n , может быть интерпретировано как конечная разность порядка n от некоторой аналитической функции. Нахождение числа нулей конечной разности этой функции сведено к вопросу о числе нулей ее производной того же порядка.

§ 2. Вывод уравнений автомодельных решений

Рассмотрим n -мерную задачу Фуллера [3]:

$$\begin{aligned} \int_0^T x_1^2 dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = u \in [-1, 1], \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad x_i(T) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Принцип максимума Понтрягина [11] приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_0 x_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dots, \quad \dot{\psi}_n = -\psi_{n-1}, \\ u &= \begin{cases} 1 & \text{при } \psi_n > 0, \\ -1 & \text{при } \psi_n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Можно показать, что $\psi_0 \neq 0$, мы полагаем $\psi_0 = 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} z_1 &= x_n, \quad z_2 = x_{n-1}, \quad \dots, \quad z_n = x_1, \quad z_{n+1} = \psi_1, \\ z_{n+2} &= -\psi_2, \quad \dots, \quad z_{2n} = (-1)^{n+1} \psi_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{z}_1 = u, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_{2n} = z_{2n-1}, \quad (2.1.a)$$

$$u = (-1)^{n+1} \operatorname{sgn} z_{2n}, \quad (2.1.b)$$

что после переобозначений совпадает с (1.1).

Наряду с уравнением (2.1.a), в котором управление подчиняется закону (2.1.b), рассмотрим еще одну разрывную систему, в которой дифференциальное уравнение совпадает с (2.1.a), а управление отличается только знаком, т.е. $u = (-1)^n \operatorname{sgn} z_{2n}$. Аналогами этих двух систем в пространстве произвольной (а не обязательно четной) размерности являются системы

$$\dot{z}_1 = u, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_m = z_{m-1}, \quad u = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn} z_m, \quad (2.2)$$

$$\dot{z}_1 = u, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_m = z_{m-1}, \quad u = (-1)^m \operatorname{sgn} z_m. \quad (2.3)$$

Решения разрывных систем (2.1)–(2.3) будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова [12]. Система (2.1) совпадает с (2.2) при $m = 2n$ и четном $n = 2l$ и совпадает с (2.3) при $m = 2n$ и нечетном $n = 2l + 1, l = 1, 2, \dots$. Переход от (2.1) к (2.2)–(2.3) связан с тем, что совокупное число автомодельных решений уравнений (2.2) и (2.3) в размерности $m + 1$ можно достаточно просто рекуррентно выразить через соответствующее число в размерности m .

Дадим формальное определение автомодельных решений уравнений (2.2) и (2.3). Однопараметрическая группа диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^m$

$$K_\mu: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad K_\mu z = (\mu z_1, \mu^2 z_2, \dots, \mu^m z_m),$$

сохраняет поле направлений как для системы (2.2), так и для системы (2.3). Если $z(t)$ – решение (2.2) или (2.3), то функция $z_\mu(t) = K_\mu z(t/\mu)$ является решением той же системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение $z(t)$ системы (2.2) или (2.3) будем называть *автомодельным с параметром μ* , если найдется тройка чисел (t_1, t_2, μ) , где $0 < t_1 < t_2, \mu > 0$, такая, что

- 1) управление $u(t)$ на $z(t)$ постоянно, равно 1 по модулю при $t \in (0, t_1)$, $t \in (t_1, t_2)$ и имеет переключения в моменты $t = 0, t = t_1, t = t_2$;
- 2) $z(t_2) = K_\mu z(0)$.

(2.4)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\hat{z}(t)$ – решение уравнения

$$\dot{z}_1 = u, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_m = z_{m-1}, \quad (2.5)$$

где $u = 1$ при $t \in (0, t_1)$, $u = -1$ при $t \in (t_1, t_2)$. Для того чтобы $\hat{z}(t)$ было решением (2.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} \hat{z}_m(t) &\geq 0 \quad \text{при } t \in (0, t_1), \\ (-1)^{m+1} \hat{z}_m(t) &\leq 0 \quad \text{при } t \in (t_1, t_2). \end{aligned}$$

Аналогично, для системы (2.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} (-1)^m \hat{z}_m(t) &\geq 0 \quad \text{при } t \in (0, t_1), \\ (-1)^m \hat{z}_m(t) &\leq 0 \quad \text{при } t \in (t_1, t_2). \end{aligned}$$

В связи с этим, автомодельные решения определяются параметрами t_1, t_2, μ , для которых выполнено (2.4) и

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad &\hat{z}_m(0) = 0, \quad \hat{z}_m(t_1) = 0; \\ \text{ii)} \quad &\text{функция } \hat{z}_m(t) \text{ не меняет знака внутри интервалов } (0, t_1), (t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В этом параграфе будет найдено явное представление через μ координат векторов $\hat{z}(0), \hat{z}(t_1)$, для которых выполнено соотношение (2.4). В следующем параграфе будет показано, что для любого решения системы (2.6) свойство ii) выполняется автоматически, т.е. (2.4) и (2.6) являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\hat{z}(t)$ было автомодельным решением одной из двух систем, (2.2) или (2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что если $z(t)$ – автомодельное решение с параметром μ , то для любого $\lambda > 0$ траектория $z_\lambda(t) = K_\lambda z(t/\lambda)$ является автомодельной с тем же параметром μ . В силу правосторонней единственности [12] систем (2.2) и (2.3) вне начала координат имеем $z(t + t_2) = K_\mu z(t)$ и $z(t)$ последовательно оканчивается в точках одной орбиты действия группы K_λ

$$z(0), \quad K_\mu z(0), \quad K_{\mu^2} z(0), \quad \dots, \quad K_{\mu^\alpha} z(0), \quad \dots$$

в моменты времени

$$t = 0, \quad t = t_2, \quad t = t_2 + \mu t_2, \quad \dots, \quad t = t_2 + \mu t_2 + \dots + \mu^{\alpha-1} t_2, \quad \dots$$

При $\mu \in (0, 1)$ координаты этих точек образуют убывающие геометрические прогрессии, поэтому $z(t)$ приходит в начало координат за конечное время $t_2/(1 - \mu)$, совершив бесконечное число переключений управления $u(t)$. При $\mu \in (1, \infty)$ автомодельные траектории, наоборот, раскручиваясь, выходят из начала координат с бесконечным числом переключений управления. Между устойчивыми (т.е. с $\mu \in (0, 1)$) и неустойчивыми (с $\mu \in (1, \infty)$) автомодельными траекториями имеется взаимно однозначное соответствие. Это соответствие связано с обращением времени на решениях систем (2.2), (2.3) и задается отображением

$$z(t) \rightarrow \tilde{z}(t) = K_{-1} z(T - t), \quad T = \frac{t_2}{1 - \mu},$$

ввиду чего в дальнейшем мы будем искать только устойчивые (с $\mu \in (0, 1)$) автомодельные траектории.

В определении автомодельного решения без ограничения общности можно положить $u = 1$ при $t \in (0, t_1)$ и $u = -1$ при $t \in (t_1, t_2)$. Кроме того, чтобы найти уравнение на μ , достаточно рассмотреть случай $t_1 = 1$. Положим $t_2 - t_1 = t_2 - 1 = \tau$, тогда $u = 1$ при $t \in (0, 1)$, $u = -1$ при $t \in (1, 1 + \tau)$.

После сделанных упрощений разрешим уравнение (2.4) относительно $z(0)$. Система (2.5) при постоянном u линейна по z и в матричных обозначениях имеет вид:

$$\dot{z} = Mz + u\mathbf{m},$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы представляется в виде

$$z(t) = e^{tM}z(0) + uw(t),$$

где $w_k(t) = t^k/k!$, $k = 1, \dots, m$. В этих обозначениях (2.4) сводится к операторному уравнению

$$e^{\tau M}(e^M z(0) + w(1)) - w(\tau) = K_\mu z(0). \quad (2.7)$$

Здесь $\mu \in (0, 1)$ и $\tau \in (0, \infty)$ – параметры автомодельной траектории, $z(0)$ – начальные условия,

$$K_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^m \end{pmatrix}$$

– оператор действия группы диффеоморфизмов. Из (2.7) следует

$$z(0) = (e^{(\tau+1)M} - K_\mu)^{-1}(w(\tau) - e^{\tau M}w(1)).$$

Можно проверить, что $K_\mu M = \mu M K_\mu$, откуда $K_\mu e^{tM} = e^{\mu t M} K_\mu$. Раскладывая резольвенту экспоненты в ряд, запишем

$$\begin{aligned} (e^{(\tau+1)M} - K_\mu)^{-1} &= e^{-(\tau+1)M} (E - K_\mu e^{-(\tau+1)M})^{-1} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-(\tau+1)M} (K_\mu e^{-(\tau+1)M})^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-(\tau+1)(1+\mu+\dots+\mu^\alpha)M} K_\mu^\alpha. \end{aligned}$$

Из непосредственно проверяемых соотношений

$$K_p w(s) = w(ps), \quad e^{tM} w(s) = w(s+t) - w(t),$$

следует, что

$$z_k(0) = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(2 \left((\tau+1) \frac{\mu^{\alpha+1}-1}{1-\mu} + \mu^{\alpha\tau} \right)^k - (\tau+1)^k \left(\frac{\mu^{\alpha+1}-1}{1-\mu} \right)^k - \left((\tau+1) \frac{\mu^{\alpha+1}-1}{1-\mu} + (\tau+1)\mu^{\alpha} \right)^k \right),$$

$$k = 1, \dots, m,$$

или, после очевидных преобразований,

$$z_k(0) = \frac{(-1)^{k+1}(\tau+1)^k}{k!(1-\mu)^k} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-2(1-\nu\mu^{\alpha})^k + (1-\mu^{\alpha+1})^k + (1-\mu^{\alpha})^k),$$

$$k = 1, \dots, m,$$

где

$$\nu = \frac{\mu + \tau}{1 + \mu} \in (0, 1).$$

Суммирование по α дает

$$z_k(0) = \frac{(-1)^{k+1}(\tau+1)^k}{k!(1-\mu)^k} \sum_{\beta=1}^k \frac{(-1)^{\beta} C_k^{\beta} (-2\nu^{\beta} + \mu^{\beta} + 1)}{1 - \mu^{\beta}}, \quad (2.8)$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Теперь найдем аналогичное выражение для координат вектора $z(1)$. Так как $z(1) = e^M z(0) + w(1)$, то $z(0) = e^{-M} (z(1) - w(1))$. Подставив это выражение в (2.7), получим

$$e^{\tau M} z(1) - w(\tau) = K_{\mu} e^{-M} (z(1) - w(1)).$$

Вычисления, аналогичные тем, что привели к (2.8), дают явную формулу для координат вектора $z(1)$

$$z_k(1) = \frac{(-1)^k(\tau+\mu)^k}{k!(1-\mu)^k} \sum_{\beta=1}^k \frac{(-1)^{\beta} C_k^{\beta} (-2(\mu^{\beta}/\nu^{\beta}) + \mu^{\beta} + 1)}{1 - \mu^{\beta}}, \quad (2.9)$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Оказывается, между параметрами μ и τ автомодельного решения существует простая связь. Докажем, что из (2.6) следует $\nu = \mu/\nu$, откуда $\nu = \tau$ и $\mu = \tau^2$. Рассмотрим функции

$$\Delta_k(\nu, \mu) = \sum_{\beta=1}^k \frac{(-1)^{\beta} C_k^{\beta} (-2\nu^{\beta} + \mu^{\beta} + 1)}{1 - \mu^{\beta}},$$

где $k = 1, \dots, m$, или, эквивалентно,

$$\Delta_k(\nu, \mu) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-2(1 - \nu\mu^\alpha)^k + (1 - \mu^{\alpha+1})^k + (1 - \mu^\alpha)^k).$$

Тогда (2.6) означает, что

$$\Delta_m(\nu, \mu) = \Delta_m\left(\frac{\mu}{\nu}, \mu\right) = 0. \quad (2.10)$$

При $\nu \in (0, 1)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_k = \sum_{\alpha=0}^{\infty} 2k\mu^\alpha (1 - \nu\mu^\alpha)^{k-1} > 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Так как $\nu - \mu = \tau(1 - \mu)/(1 + \tau) > 0$, то $0 < \mu/\nu < 1$. Монотонность по ν функции $\Delta_k(\nu, \mu)$ влечет $\nu = \mu/\nu$, как только $\Delta_k(\nu, \mu) = \Delta(\mu/\nu, \mu)$. В частности, из (2.10) следует, что $\nu = \mu/\nu$. Сравнение (2.8) и (2.9) при $\nu = \mu/\nu$ доказывает справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть вектор $z(0)$ удовлетворяет (2.8), а вектор $z(1)$ – (2.9). Если $z_k(0) = z_k(1) = 0$ для некоторого k , $1 \leq k \leq m$, то $\mu = \nu^2$ и

$$z(1) = -K_\nu z(0). \quad (2.11)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Параметр $\mu = \nu^2$ автономной траектории удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\beta=0}^m \frac{(-1)^\beta C_m^\beta}{1 + \nu^\beta} = 0. \quad (2.12)$$

Действительно, подстановка $\mu = \nu^2$ в (2.10) дает

$$\sum_{\beta=1}^m \frac{(-1)^\beta C_m^\beta (1 - \nu^\beta)}{1 + \nu^\beta} = 1 + 2 \sum_{\beta=1}^m \frac{(-1)^\beta C_m^\beta}{1 + \nu^\beta} = 0,$$

что равносильно (2.12).

Нам понадобится обобщение операторного уравнения (2.11)

$$e^M z(0) + w(1) = -K_\nu z(0),$$

а именно, уравнение

$$e^M z(0) + w(1) = -aK_\nu z(0), \quad (2.13)$$

где $a > 0$ – произвольный вещественный параметр. Опуская очевидные выкладки, из (2.13) получаем

$$z_k(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!(1 - \nu)^k} \frac{a + 1}{a} \sum_{\beta=0}^k \frac{(-1)^\beta C_k^\beta}{1 + a\nu^\beta}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

§ 3. Свойства автомодельных траекторий

В этом параграфе будет показано, что уравнение (2.11) является достаточным условием существования автомодельной траектории (см. замечание 1), в связи с чем задача определения числа автомодельных траекторий получит простую алгебраическую формулировку.

Соотношение (2.11) означает, что последовательные переключения управления на автомодельной траектории происходят на симметричных орбитах группы K_λ . В частности, если для некоторого k имеем $z_k(0) \geq 0$, то $z_k(1) = -\nu^k z_k(0) \leq 0$, и наоборот. Следствием этого является следующее утверждение.

Пусть $z(t) = e^{tM} z(0) + w(t)$ – решение уравнения (2.5) с $u = 1$ при $t \in (0, 1)$ и начальные условия $z(0)$ удовлетворяют (2.8). Пусть $z_m(0) = z_m(1) = 0$.

ЛЕММА 1. 1) Если $z_k(0) \neq 0$, то $z_k(t)$ имеет ровно один нуль на интервале $(0, 1)$, $k = 1, \dots, m-1$.

2) Если $z_k(0) = 0$, то $z_k(t) \neq 0$ при $t \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по k . Для $k = 1$ имеем $\dot{z}_1(t) = 1$ при $t \in (0, 1)$. Ввиду монотонности функции $z_1(t)$ значения $z_1(0)$ и $z_1(1) = -\nu z_1(0)$ не могут одновременно обратиться в нуль. Следовательно, $z_1(0)$ и $z_1(1)$ имеют разные знаки, а функция $z_1(t)$ – единственный нуль внутри интервала $(0, 1)$. Пусть утверждение леммы доказано при $k = 1, 2, \dots, l-1$. В частности, функция $z_{l-1}(t)$ имеет не более одной перемены знака внутри интервала $(0, 1)$. Поскольку $\dot{z}_l(t) = z_{l-1}(t)$, отсюда следует, что функция $z_l(t)$ имеет не более двух нулей при $t \in [0, 1]$. Если $z_l(0) \neq 0$, то $z_l(1) = -\nu^l z_l(0) \neq 0$ и у функции $z_l(t)$ имеется ровно одна перемена знака внутри интервала $(0, 1)$. Если $z_l(0) = 0$, то $z_l(1) = 0$, и тогда $z_l(t) \neq 0$ при $t \in (0, 1)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для автомодельной траектории имеем

$$z_{m-1}(0) \neq 0, \quad z_{m-1}(1) \neq 0.$$

Действительно, если $z_{m-1}(0) = 0$, то в силу леммы 1 функция $z_{m-1}(t)$ не меняет знак внутри интервала $(0, 1)$. Тогда $z_m(t)$ строго монотонна на $(0, 1)$ и не может одновременно обратиться в нуль при $t = 0$ и $t = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если для некоторого k , $1 \leq k \leq m$, в (2.14) имеем $z_k(0) = 0$, то $z_{k-1}(0) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 1 остается справедливым для функций $z(t) = e^{tM} z(0) + w(t)$, начальные условия которых удовлетворяют (2.14) вместо (2.9). Доказательство леммы дословно переносится на этот случай; единственное изменение состоит в том, что теперь $z_k(1) = -a\nu^k z_k(0)$ вместо $z_k(1) = -\nu^k z_k(0)$, что при $a > 0$ не влияет на соотношение знаков координат $z_k(1)$ и $z_k(0)$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Параметр $\mu = \nu^2$ любого автомодельного решения системы (2.2) или (2.3) удовлетворяет уравнению (2.12). Обратно, любое решение $\nu \in (0, 1)$ уравнения (2.12) определяет по формулам (2.8) с $\mu = \nu^2$, $\tau = \nu$

начальную точку некоторого автомодельного решения либо системы (2.2), либо системы (2.3).

Чтобы для данного решения ν уравнения (2.12) определить, какое именно из двух условий, $u(t) = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn} z_m(t)$ или $u(t) = (-1)^m \operatorname{sgn} z_m(t)$, выполнено на соответствующем решении системы (2.5) (см. замечание 1), следует определить знак функции $z_m(t)$ при малых $t \in (0, 1)$. Этот знак совпадает со знаком производной $\dot{z}_m(t) = z_{m-1}(t)$. Следовательно, $u(t) = (-1)^{m+1} \operatorname{sgn} z_m(t)$, если в (2.9) $z_m(0) = 0$, $(-1)^{m+1} z_{m-1}(0) > 0$, и $u(t) = (-1)^m \operatorname{sgn} z_m(t)$, если в (2.9) $z_m(0) = 0$, $(-1)^{m+1} z_{m-1}(0) < 0$. Таким образом, проблема отыскания числа автомодельных решений систем (2.2) и (2.3) допускает следующую алгебраическую формулировку.

ЗАДАЧА 1. *Даны функции*

$$\mathcal{D}_k(\nu) = \sum_{\beta=0}^k \frac{(-1)^k C_k^\beta}{1 + \nu^\beta}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Требуется определить число решений $\nu \in (0, 1)$ системы

$$\mathcal{D}_m(\nu) = 0, \quad \mathcal{D}_{m-1}(\nu) < 0 \quad (3.2)$$

(для уравнения (2.2)) и системы

$$\mathcal{D}_m(\nu) = 0, \quad \mathcal{D}_{m-1}(\nu) > 0 \quad (3.3)$$

(для уравнения (2.3)).

§ 4. Функции $\mathcal{D}_k(\nu)$ и конечные разности

Напомним следующее понятие численного анализа. Первой конечной разностью функции $f(x)$ в точке x с шагом h называется функция

$$\Delta^1 f(x, h) = f(x + h) - f(x).$$

Рекуррентно определяется разность произвольного порядка

$$\Delta^{k+1} f(x, h) = \Delta^k f(x + h, h) - \Delta^k f(x, h), \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначив через δ_h оператор сдвига на h аргумента функции $f(x)$, $\delta_h f(x) = f(x + h)$, запишем действие оператора Δ^1 в виде $\Delta^1 f = (\delta_h - 1)f$. Тогда $\Delta^k = (\delta_h - 1)^k$ и по формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta^k f = \sum_{\beta=0}^k C_k^\beta (-1)^{k-\beta} (\delta_h^\beta) f.$$

Окончательно,

$$\Delta^k f(x, h) = \sum_{\beta=0}^k (-1)^{k-\beta} C_k^\beta f(x + \beta h).$$

Хорошо известна формула

$$\Delta^k f(x, h) = \underbrace{\int_0^h \cdots \int_0^h}_k f^{(k)}(x + t_1 + \cdots + t_k) dt_1 \dots dt_k. \quad (4.1)$$

При $k = 1$ (4.1) сводится к очевидному соотношению

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^h f'(x + t) dt.$$

При $k > 1$ (4.1) легко доказывается по индукции. Прямым следствием (4.1) является соотношение

$$\Delta^k f(x, h) = f^{(k)}(\xi) h^k, \quad (4.2)$$

где $\xi \in (x, x + kh)$. Далее, дифференцируя (4.1) по h , получаем

$$\frac{\partial}{\partial h} \Delta^k f(x, h) = k \underbrace{\int_0^h \cdots \int_0^h}_{k-1} f^{(k)}(x + h + t_1 + \cdots + t_{k-1}) dt_1 \dots dt_{k-1}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial}{\partial h} \Delta^k f(x, h) = k \frac{\partial}{\partial x} \Delta^{k-1} f(x + h, h). \quad (4.3)$$

Применим теперь аппарат конечных разностей к решению задачи 1. Сравнивая выражение для $\Delta^k f(x, h)$ с (3.1), приходим к выводу, что

$$\mathcal{D}_k(\nu) = (-1)^k \Delta^k f^\nu(x, h), \quad x = 0, \quad h = 1,$$

где $f^\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \nu^x}$. Нас интересуют те $\nu \in (0, 1)$, для которых

$$\Delta^m f^\nu(0, 1) = 0, \quad (-1)^{m-1} \Delta^{m-1} f^\nu(0, 1) < 0, \quad (4.4)$$

в случае (3.2) и

$$\Delta^m f^\nu(0, 1) = 0, \quad (-1)^{m-1} \Delta^{m-1} f^\nu(0, 1) > 0, \quad (4.5)$$

в случае (3.3). Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Тогда $f^\nu(x) = f_0(x \ln(1/\nu))$. Полагая $h = \ln(1/\nu)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta^k f^\nu(0, 1) &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^{k-\beta} C_k^\beta f^\nu(\beta) \\ &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^{k-\beta} C_k^\beta f_0(h\beta) = \Delta^k f_0(0, h). \end{aligned}$$

Соотношения (4.4) и (4.5) эквивалентны, соответственно, соотношениям

$$\Delta^m f_0(0, h) = 0, \quad (-1)^{m-1} \Delta^{m-1} f_0(0, h) < 0; \quad (4.6)$$

$$\Delta^m f_0(0, h) = 0, \quad (-1)^{m-1} \Delta^{m-1} f_0(0, h) > 0. \quad (4.7)$$

Задача 1 свелась к отысканию числа решений $h > 0$ систем (4.6) и (4.7).

§ 5. Системы нулей производных функции $f_0(x)$

Формула (4.2) наталкивает на мысль свести вопрос о числе нулей конечной разности $\Delta^k f_0(x, h)$ к вопросу о числе нулей k -й производной функции $f_0(x)$. Число нулей $f_0^{(k)}(x)$ при произвольном $k \in \mathbb{N}$ устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 2. *Для любого $k \geq 1$ функция $f_0^{(k)}(x)$ имеет $k-1$ нуль. При четном $k = 2l$ имеется $l-1$ положительных, $l-1$ отрицательных нулей и один нуль в точке $x = 0$. При нечетном $k = 2l + 1$ имеется l положительных и l отрицательных нулей. Все нули простые: если $f_0^{(k)}(x) = 0$, то $f_0^{(k+1)}(x) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f_0(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси и принимает значения в интервале от 0 до 1. Отметим, что

$$f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = f_0(x) - f_0^2(x) > 0.$$

Представим $f_0^{(k)}(x)$ как функцию от $f_0(x)$. Пусть $f_0^{(k)}(x) = g_k(f_0(x))$, где функции $g_k(f)$ подлежат определению. Тогда

$$f_0^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} g_k(f_0(x)) = \frac{dg_k}{df} \Big|_{f_0(x)} \cdot \frac{df_0}{dx} = \frac{dg_k}{df} \cdot f_0(1 - f_0),$$

то есть

$$g_{k+1}(f) = g_k'(f) \cdot f \cdot (1 - f). \quad (5.1)$$

Поскольку $g_0(f) = f$, отсюда следует, что

- 1) $g_k(f)$ — многочлен от f степени $k + 1$;
- 2) $g_k(0) = g_k(1) = 0$;
- 3) все корни многочлена $g_k(f)$ лежат на $[0, 1]$; они вещественны, различны и их число равно степени $k + 1$ многочлена $g_k(f)$.

В пояснении нуждается только пункт 3). Докажем его индукцией по k . При $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что при всех $k \leq l$ утверждение 3) доказано. Между любыми двумя нулями гладкой функции есть точка, в которой ее производная обращается в нуль. Так как по предположению у $g_l(f)$ имеется $l + 1$ нуль, то в силу (5.1) у многочлена $g_{l+1}(f)$ имеется не менее l различных вещественных корней, чередующихся с корнями многочлена $g_l(f)$; все эти корни лежат внутри интервала $(0, 1)$. Присоединив к ним краевые точки $f = 0$ и $f = 1$, получим максимально возможное число корней многочлена $g_{l+1}(f)$, равное $l + 2$. Тем самым утверждение 3) доказано.

Чтобы выяснить, как распределены корни многочлена $g_k(f)$ на интервале $(0, 1)$, выразим $g_k(\cdot)$ через $p = f - \frac{1}{2}$. Имеем $g_1(p) = p^2 - \frac{1}{4}$, $g_{k+1}(p) = \frac{d}{dp}g_k(p) \cdot (p^2 - \frac{1}{4})$. Легко видеть, что многочлен $g_k(p)$ при четном $k = 2l$ есть нечетная функция, а при нечетном $k = 2l + 1$ — четная. Так как из $p > 0$ следует, что $x > 0$, а из $p < 0$ следует, что $x < 0$, получаем утверждение леммы о расположении корней функции $f_0^{(k)}(x)$ на полуосях $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{N}(k)$ число положительных корней функции $f_0^{(k)}(x)$. Следующая таблица показывает зависимость $\mathcal{N}(k)$ от k при нескольких первых значениях параметра k .

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{N}(k)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5	...

В общем случае $\mathcal{N}(k) = [(k+1)/2] - 1$. Наша цель — показать, что число положительных корней уравнения $\Delta^k f_0(0, h) = 0$ также равно $\mathcal{N}(k)$.

Обозначим через ξ_α^k , $\alpha = 1, \dots, k-1$, корни уравнения $f_0^{(k)}(x) = 0$, занумерованные в порядке возрастания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из леммы 2 следует, что для любой пары соседних значений индексов $p = k$ и $p = k+1$ корни ξ_α^p расположены на числовой прямой с чередованием, $\xi_\alpha^{k+1} < \xi_\alpha^k < \xi_{\alpha+1}^k$, $\alpha = 1, \dots, k-1$. При этом

$$f_0^{(k+1)}(\xi_\alpha^k) \cdot f_0^{(k+1)}(\xi_{\alpha+1}^k) < 0$$

для любой пары соседних корней $\xi_\alpha^k, \xi_{\alpha+1}^k$.

§ 6. Структура множества нулей конечных разностей $\Delta^k f_0(x, h)$

Из (4.1) следует, что

$$\Delta^k f(x, h) = h^k \delta^k f(x, h),$$

где

$$\delta^k f(x, h) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{k} f^{(k)}(x + ht_1 + \dots + ht_k) dt_1 \dots dt_k.$$

Обозначим $\Xi^k = \{(x, h) \mid \delta^k f_0(x, h) = 0, h \geq 0\}$. Из (4.2) следует, что $\delta^k f_0(x, h) = f_0^{(k)}(\xi)$, где $\xi \in (x, x + kh)$, так что при малых h решения уравнения $\delta^k f_0(x, h) = 0$ могут существовать лишь в окрестности точек ξ_α^k , $\alpha = 1, \dots, k-1$. При малых h имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \delta^k f_0(x, h) &= f_0^{(k+1)}(x) \int_0^1 \dots \int_0^1 (t_1 + \dots + t_k) dt_1 \dots dt_k + O(h) \\ &= \frac{k}{2} f_0^{(k+1)}(x) + O(h). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta^k f_0(x, h) = f_0^{(k+1)}(x) + O(h).$$

Так как все корни функций $f_0^{(k)}(x)$ некрatны, из теоремы о неявной функции следует, что в полосе $0 \leq h < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество Ξ^k представляет собой совокупность из $k - 1$ гладкой кривой вида $h = h_\alpha^k(x)$, $\alpha = 1, \dots, k - 1$. При этом

$$h_\alpha^k(\xi_\alpha^k) = 0, \quad \frac{d}{dx} h_\alpha^k(\xi_\alpha^k) = -\frac{2}{k} < 0,$$

т. е. функции $h_\alpha^k(x)$ монотонно убывают. В следующем предложении доказывается, что на всей полуплоскости $h \geq 0$ множество Ξ^k устроено аналогично и состоит из $k - 1$ гладкой кривой. Доказательство основано на оценке сверху числа решений уравнения $\Delta^k f_0(x, h) = 0$ и на том, что ограничение функции $\Delta^k f_0(x, h)$ на Ξ^{k-1} не обращается в нуль и потому сохраняет знак вдоль каждой непрерывной ветви Ξ^{k-1} ; эти знаки различны для любой пары соседних ветвей из Ξ^{k-1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество Ξ^k состоит из $k - 1$ непересекающейся кривой Γ_α^k вида $h = h_\alpha^k(x)$, $\alpha = 1, \dots, k - 1$. Функции $h_\alpha^k(x)$ определены при $x \in (-\infty, \xi_\alpha^k)$, класса C^ω и монотонно убывают; $h_\alpha^k(\xi_\alpha^k) = 0$.*

Доказательство предложения 2 разобьем на несколько этапов. Сначала нам потребуется следующая асимптотическая оценка.

ЛЕММА 3. *При любом $h > 0$ имеем*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn} \Delta^k f_0(x, h) = (-1)^{k+1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn} \Delta^k f_0(x, h) = 1.$$

Доказательство. Пусть $h > 0$ фиксировано, а $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^k f_0(x, h) &= \sum_{\beta=0}^k \frac{(-1)^{k-\beta} C_k^\beta}{1 + e^{-x-\beta h}} \\ &= \sum_{\beta=0}^k (-1)^{k-\beta} C_k^\beta (1 - e^{-x-\beta h}) + o(e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \sum_{\beta=0}^k (-1)^{k-\beta} C_k^\beta e^{-\beta h} + o(e^{-x}) \\ &= (-1)^{k+1} e^{-x} (1 - e^{-h})^k + o(e^{-x}). \end{aligned}$$

Аналогично, при $x \rightarrow -\infty$

$$\Delta^k f_0(x, h) = e^x (e^h - 1)^k + o(e^x).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Множество Ξ^k состоит из $k - 1$ непересекающейся кривой Γ_α^k вида $x = x_\alpha^k(h)$, $\alpha = 1, \dots, k - 1$, где функции $x_\alpha^k(h)$ вещественно-аналитические при $h \geq 0$; при этом $x_\alpha^k(0) = \xi_\alpha^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по k . Если $k = 1$, $h \geq 0$, то

$$\delta^1 f_0(x, h) = \frac{1}{h}(f_0(x + h) - f_0(x)) > 0.$$

При $k = 2$ прямой подсчет дает, что уравнение $\delta^2 f_0(x, h) = 0$ влечет $x = -h$. Предположим, что утверждение леммы доказано при $k = 1, 2, \dots, l - 1$. В частности, Ξ^{l-1} состоит из $l - 2$ непересекающихся кривых Γ_α^{l-1} требуемого вида, задаваемых уравнениями $x = x_\alpha^{l-1}(h)$, $\alpha = 1, \dots, l - 2$. Зафиксируем $h > 0$ и обозначим $F_h(x) = \Delta^l f_0(x, h)$.

Первый шаг. Оценка сверху. Покажем сначала, что число нулей функции $F_h(x)$ не больше $l - 1$. Положим $a = e^{-x}$, $\nu = e^{-h}$. Тогда $F_h(x) = \mathcal{F}_\nu^l(a)$, где

$$\mathcal{F}_\nu^l(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=0}^l \frac{(-1)^{l-\beta} C_l^\beta}{1 + a\nu^\beta} \quad (6.1)$$

— дробно-рациональная функция от a . Приведя $l + 1$ дробь в (6.1) к общему знаменателю, в числителе получим многочлен от a степени не больше l . Так как при $a = 0$ получаем

$$\mathcal{F}_\nu^l(0) = \sum_{\beta=0}^l (-1)^{l-\beta} C_l^\beta = 0,$$

то число положительных корней функции $\mathcal{F}_\nu^l$ не превосходит $l - 1$.

Второй шаг. Оценка снизу. Покажем теперь, что число перемен знака функции $F_h(x)$ не меньше $l - 1$. Согласно утверждению следствия 3 $\Xi^l \cap \Xi^{l-1} = \emptyset$, т.е. функция $\Delta^l f_0(x, h)$ не обращается в нуль в точках множества Ξ^{l-1} и поэтому сохраняет знак вдоль каждой кривой Γ_α^{l-1} , $\alpha = 1, \dots, l - 2$. Этот знак совпадает со знаком

$$\delta^l f_0(\xi_\alpha^{l-1}, 0) = f_0^{(l)}(\xi_\alpha^{l-1}).$$

В силу замечания 3 знаки производных $f_0^{(l)}$ различны для любой пары соседних корней ξ_α^{l-1} и $\xi_{\alpha+1}^{l-1}$. Тем самым, функция $F_h(x)$ имеет не менее $l - 3$ корней, по одному внутри каждого интервала

$$(x_{\alpha-1}^{l-1}(h), x_\alpha^{l-1}(h)), \quad \alpha = 2, \dots, l - 2.$$

Остается показать, что еще два корня функции $F_h(x)$ лежат на полупрямых $(-\infty, x_1^{l-1}(h))$ и $(x_{l-2}^{l-1}(h), \infty)$. Для этого сравним знаки $F_h(x)$ на кривой Γ_1^{l-1} и в пределе при $x \rightarrow -\infty$ и на кривой Γ_{l-2}^{l-1} и в пределе при $x \rightarrow +\infty$. В силу леммы 3 знак $F_h(x)$ в пределах при $x \rightarrow \pm\infty$ не зависит от выбора $h > 0$, поэтому h можно считать достаточно малым. В этом случае распределение знаков функции $F_h(x)$ такое же, как у функции $f_0^{(l)}(x)$. В силу замечания 3 функция $f_0^{(l)}(x)$ имеет в точности по одному корню на $(-\infty, \xi_1^{l-1})$ и на $(\xi_{l-2}^{l-1}, \infty)$. Тем самым знаки $F_h(x)$ в точках кривой Γ_1^{l-1} и при $x \rightarrow -\infty$ и в точках кривой Γ_{l-2}^{l-1} и при $x \rightarrow \infty$ различны. Это дает требуемую оценку числа корней $F_h(x)$.

Третий шаг. Из оценки сверху и снизу следует, что число решений уравнения $F_h(x) = 0$ равно $l - 1$. Это означает, что при фиксированном $\nu > 0$ у функции

$\mathcal{F}_\nu^l(a)$ в (6.1) всего имеется l различных вещественных корней, из них $l - 1$ положительный и корень $a = 0$. Так как в числителе соответствующей дроби стоит многочлен степени $l - 1$, все его корни вещественны и просты. Отсюда следует, что $\frac{\partial}{\partial x} F_h(x) \neq 0$ для тех x , для которых $F_h(x) = 0$. Теперь утверждение леммы для $k = l$ следует из теоремы о неявной функции. Лемма доказана.

Чтобы из утверждения леммы 4 вывести утверждение предложения 2, нам осталось показать, что функции $x_\alpha^k(h)$ обратимы.

ЛЕММА 5. *Функции $x_\alpha^k(h)$, определенные в лемме 4, строго монотонно убывают при $h \geq 0$, т.е.*

$$\frac{d}{dh} x_\alpha^k(h) < 0, \quad \alpha = 1, \dots, k - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 4 было показано, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \Delta^k f_0(x, h) \right|_{\Gamma_\alpha^k} \neq 0, \quad \alpha = 1, \dots, k - 1.$$

Нам, очевидно, достаточно убедиться, что при $h > 0$

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} \Delta^k f_0(x, h) \right|_{\Gamma_\alpha^k} \neq 0.$$

Предположим, что для некоторой пары $(x_0, h_0) \in \Gamma_{\alpha_0}^k$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial h} \Delta^k f_0(x_0, h_0) = 0.$$

Тогда в силу (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{k-1} f_0(x_0 + h_0, h_0) = 0$$

при том, что $\Delta^{k-1} f_0(x_0 + h_0, h_0) = \Delta^{k-1} f_0(x_0, h_0)$. То, что это невозможно, будет показано дваприема. Сначала докажем, что обе точки $(x_0 + h_0, h_0)$ и (x_0, h_0) лежат в полосе между кривыми $\Gamma_{\alpha_0-1}^{k-1}$ и $\Gamma_{\alpha_0}^{k-1}$, т.е. $x_{\alpha_0-1}^{k-1}(h_0) < x_0 < x_0 + h_0 < x_{\alpha_0}^{k-1}(h_0)$ (для единообразия обозначений будем полагать $x_0^{k-1}(h) = -\infty$ и $x_{k-1}^{k-1}(h) = \infty$). Затем будет доказано, что функция $F_h(x) = \Delta^{k-1} f_0(x, h)$ имеет ровно один экстремум на любом интервале вида $(x_{\alpha-1}^{k-1}(h), x_\alpha^{k-1}(h))$, $\alpha = 1, \dots, k - 1$, и, следовательно, в точке $x_0 + h_0$, где производная от $F_{h_0}(x)$ обращается в нуль, ее значение $F_{h_0}(x_0 + h_0)$ является единственным на данном интервале максимумом или минимумом и не может быть равно никакому другому значению функции на этом интервале.

Первый шаг. Из леммы 4 следует, что при любом $h > 0$ имеем

$$x_{\alpha-1}^{k-1}(h) < x_\alpha^k(h) < x_\alpha^{k-1}(h), \quad \alpha = 1, \dots, k - 1. \quad (6.2)$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$x_{\alpha-1}^{k-1}(h) < x_{\alpha}^k(h) + h < x_{\alpha}^{k-1}(h). \quad (6.3)$$

При малых $h \geq 0$ неравенство (6.3) есть следствие (6.2). Преобразование $(x, h) \rightarrow (x + h, h)$ переводит кривую Γ_{α}^k в некоторую непрерывную кривую, назовем ее $\tilde{\Gamma}_{\alpha}^k$. Предположим, что $\tilde{\Gamma}_{\alpha}^k$ пересекает Γ_{α}^{k-1} , например, в точке $(\tilde{x} + \tilde{h}, \tilde{h}) \in \Gamma_{\alpha}^{k-1}$. Тогда $(\tilde{x}, \tilde{h}) \in \Gamma_{\alpha}^k$ и, с одной стороны, $\Delta^k f_0(\tilde{x}, \tilde{h}) = 0$, с другой, $\Delta^{k-1} f_0(\tilde{x} + \tilde{h}, \tilde{h}) - \Delta^{k-1} f_0(\tilde{x}, \tilde{h}) = -\Delta^{k-1} f_0(\tilde{x}, \tilde{h}) = 0$, т.е. в точке $(\tilde{x}, \tilde{h})$ одновременно $\Delta^k f_0 = 0$ и $\Delta^{k-1} f_0 = 0$, что невозможно в силу следствия 3. Следовательно, $\tilde{\Gamma}_{\alpha}^k \cap \Gamma_{\alpha}^{k-1} = \emptyset$ и неравенство (6.3) доказано.

Второй шаг. Рассмотрим производную по x функции $\Delta^{k-1} f_0(x, h)$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta^{k-1} f_0(x, h) = -e^{-x} \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}_{\nu}^l(a),$$

где $\mathcal{F}_{\nu}^l$ определена в (6.1), $l = k - 1$, $a = e^{-x}$, $\nu = e^{-h}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}_{\nu}^l(a) = (-1)^{l+1} \sum_{\beta=0}^l \frac{(-1)^{\beta} C_l^{\beta} \nu^{\beta}}{(1 + a\nu^{\beta})^2}.$$

При фиксированном $\nu > 0$ функция $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}_{\nu}^l(a)$ имеет не более $2l$ корней. Ранее было доказано, что $\mathcal{F}_{\nu}^l(a)$ имеет l различных вещественных корней, из них $l - 1$ положительных и один корень $a = 0$. Отсюда следует, что у $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}_{\nu}^l(a)$ имеется не менее $l - 1$ положительных корней, по одному внутри каждого интервала, на концах которого $\mathcal{F}_{\nu}^l$ обращается в нуль. При $a \rightarrow +\infty$ имеем $\mathcal{F}_{\nu}^l(a) \rightarrow 0$, поэтому еще один корень производной лежит правее наибольшего корня функции $\mathcal{F}_{\nu}^l$.

Чтобы показать, что внутри каждого интервала знакопостоянства $\mathcal{F}_{\nu}^l$ на полуоси $a \geq 0$ имеется в точности 1 корень производной, убедимся, что оставшиеся l корней функции $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{F}_{\nu}^l(a)$ вещественны и лежат на полуоси $a < 0$. Действительно, $\mathcal{F}_{\nu}^l$ имеет $l + 1$ полюс первого порядка в точках $a = -1, -1/\nu, \dots, -1/\nu^l$. Так как сама функция $\mathcal{F}_{\nu}^l$ не обращается в нуль внутри интервалов $(-1/\nu^l, -1/\nu^{l-1}), \dots, (-1/\nu, -1)$, то $\mathcal{F}_{\nu}^l(a)$ имеет по крайней мере по одной точке экстремума внутри каждого из этих интервалов. Тем самым утверждение леммы 5, а вместе с ним и предложение 2, доказаны.

Отметим, что в силу предложения 2 число положительных решений $h_{\alpha}^k(0)$ уравнения $\Delta^k f_0(0, h) = 0$ равно числу положительных корней функции $f_0^{(k)}(x)$, т.е. равно $\mathcal{N}(k) = [(k+1)/2] - 1$. Из замечания 3 следует, что для любой пары соседних точек ξ_{α}^m и $\xi_{\alpha+1}^m$ знаки функций $f_0^{(m-1)}(x)$ в них противоположны. Следовательно, на любых двух соседних кривых Γ_{α}^m и $\Gamma_{\alpha+1}^m$ функция $\Delta^{m-1} f_0$ имеет противоположные знаки. Чтобы определить, сколько решений имеется у системы (4.6), а сколько у системы (4.7) из общего числа в $\mathcal{N}(m)$ решений, следует понять, какому из двух

неравенств, (4.6) или (4.7), удовлетворяет наибольший корень $h^* = h_{m-1}^m(0)$. Тогда тому же неравенству удовлетворяют каждый первый, третий, пятый и т. д. корень уравнения $\Delta^m f_0(0, h) = 0$, считая от наибольшего, т. е. всего $[(\mathcal{N}(m) + 1)/2]$ корней. На долю оставшегося неравенства придется $[\mathcal{N}(m)/2]$ корней.

Функция $\Delta^{m-1} f_0(0, h)$ не меняет знак при $h \geq h^*$ и из леммы 3 следует, что при $h \gg 1$ имеем $\operatorname{sgn} \Delta^{m-1} f_0(0, h) = (-1)^m$. Тем самым $\operatorname{sgn}(-1)^{m-1} \Delta^m f_0(0, h^*) = (-1)^{m-1}(-1)^m = -1$, т. е. наибольший корень h^* при всех m удовлетворяет (4.6). Мы получили следующий результат.

ЛЕММА 6. Системы (4.6) и (4.7) имеют

$$\left\lfloor \frac{[(m+1)/2]}{2} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \left\lfloor \frac{[(m+1)/2] - 1}{2} \right\rfloor$$

решений, соответственно.

Вернемся теперь к уравнению (2.1). Его автомодельные решения определяются системой (4.6) при $m = 2n$ для четного $n = 2l$ и системой (4.7) при $m = 2n$ для нечетного $n = 2l + 1$. Так как

$$\left\lfloor \frac{[(2n+1)/2]}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \left\lfloor \frac{[(2n+1)/2] - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

в обоих случаях получаем, что число автомодельных решений равно $l = [n/2]$. Доказан основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Число однопараметрических семейств автомодельных решений системы (2.1) с параметрами $\mu \in (0, 1)$ равно $[n/2]$.

В заключение автор благодарит профессора М. И. Зеликина за многочисленные полезные замечания и обстоятельное обсуждение статьи, во многом способствовавшие ее улучшению.

Список литературы

1. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals // Topics in Optimization / ed. G. Leitmann. New York: Acad. Press, 1967. P. 63–103.
2. Kupka I. The ubiquity of Fuller's phenomenon // Nonlinear controllability and optimal control. Monograph textbooks. Pure Appl. Math. / ed. H. Sussman. №133. New York: Dekker, 1990. P. 313–350.
3. Берцанский Я. М. Поведение оптимальных траекторий вблизи терминального участка // Исследования по теории многосвязных систем. М.: ВНИИСИ, 1982. С. 76–88.
4. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.
5. Dorling C. M., Ryan R. E. Minimization of nonquadratic cost functionals for third order saturating system // Internat. J. Control. 1981. V. 34. №2. P. 231–258.
6. Fuller A. T., Grensted P. E. Minimization of integral square error for nonlinear control system of third and higher order // Internat. J. Control. 1965. V. 2. №1. P. 33–73.
7. Fuller A. T. Minimization of nonquadratic performance indices for a system with bounded control // Internat. J. Control. 1985. V. 41. №1. P. 1–37.
8. Marchal C. Chattering arcs and chattering controls // J. Optim. Theory Appl. 1973. V. 11. №5. P. 441–446.

9. *Brunovsky P., Mallet-Paret J.* Switchings of optimal controls and the equation $y^{(4)} + y^\alpha \operatorname{sgn} y = 0$, $0 < \alpha < 1$ // Časopis Pěst. Mat. 1985. V. 110. № 3. P. 302–313.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О неравенствах Колмогорова на полупрямой // Вестн. МГУ. Сер. 1, матем., мех. 1976. № 5. С. 33–41.
11. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
12. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Государственная академия сферы быта и услуг,
г. Москва

Поступила в редакцию
29.11.1995