Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 12, 57–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 11:55:52

УДК 511.36

В. В. Зудилин

Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций

В работе установлены оценки снизу многочленов и линейных форм от значений E -функций в рациональной точке, зависящие от всех коэффициентов. Приведены следствия для обобщенных гипергеометрических E -функций.

Библиография: 9 названий.

Введение

История вопроса. Важным направлением теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел является исследование поведения величины

$$|h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m|, \quad h_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (0.1)$$

для заданных действительных $\xi_1, \dots, \xi_m$, $m \geq 1$, и ее оценка снизу в зависимости от целых $h_1, \dots, h_m$. Как следует из теоремы Дирихле (см., например, [1, гл. 1, §2, теорема 4]) для любого действительного $H \geq 1$ существуют целые числа $h_1, \dots, h_m$ такие, что

$$|h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| < H^{-m+1}, \quad 0 < \max_{1 \leq j \leq m} \{|h_j|\} \leq H.$$

Тем самым, теорема Дирихле отвечает на вопрос, сколь малым может быть величина (0.1) в зависимости от

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{|h_j|\}.$$

При этом абсолютно не учитывается структура чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$. Из метрических соображений [2, гл. I, теорема 12] следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ существует постоянная $C = C(\bar{\xi}, \varepsilon) > 0$ такая, что для произвольных целых $h_1, \dots, h_m$, не равных нулю одновременно, справедливо неравенство

$$|h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| > C(H_1 \dots H_m)^{-1} H (\log H)^{-m+1-\varepsilon},$$

где

$$H_j = \max\{1, |h_j|\}, \quad j = 1, \dots, m, \quad H = \max\left\{e, \max_{1 \leq j \leq m} \{H_j\}\right\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00181).

Однако, в настоящее время не известно ни одного набора чисел $\bar{\xi}$, для которого выполнялось бы такое неравенство.

Методы теории трансцендентных чисел позволяют при специальном выборе $\bar{\xi}$ получать оценки снизу величины (0.1) вида

$$|h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| > CH^{-m+1-\varepsilon}.$$

В то же время, в ряде работ, связанных, например, с оценками отклонения равномерно распределенных последовательностей, возникает необходимость в оценках снизу модулей линейных форм (0.1), причем оценках, зависящих от всех коэффициентов. Впервые, по всей видимости, подобный результат был получен А. Бейкером для значений экспоненты [3]:

$$|h_1e^{\alpha_1} + \dots + h_me^{\alpha_m}| > C(H_1 \dots H_m)H^{1-\gamma/\sqrt{\log \log H}}.$$

Для этих целей он несколько уточнил метод, предложенный К. Л. Зигелем [4], но серьезного обобщения схема Бейкера так и не получила (попытка сделать это содержится в работе [5]).

Задача оценки снизу линейных форм от действительных чисел может быть естественным образом обобщена. Именно, можно исследовать поведение величины

$$|P(\xi_1, \dots, \xi_m)|, \quad P \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m], \quad (0.2)$$

в зависимости от коэффициентов многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ (например, его высоты $H = H(P)$) и его степени $d = \deg P$.

Упомянутый выше метод Зигеля позволяет проводить эти исследования в случае, когда в качестве чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ рассматриваются значения в алгебраической точке $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ аналитических функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^{\nu}, \quad f_{j,\nu} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (0.3)$$

составляющих в совокупности решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} y_l = \sum_{j=1}^m Q_{lj} y_j, \quad l = 1, \dots, m, \quad (0.4)$$

$$Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l, j = 1, \dots, m,$$

первого порядка. При этом коэффициенты в рядах Тейлора функций (0.3) удовлетворяют некоторым дополнительным арифметическим условиям, определяющим класс E -функций, и точка α не является особой точкой системы (0.4). Метод Зигеля был существенно усилен в работах А. Б. Шидловского, который, в частности, доказал критерий алгебраической независимости значений E -функций. Подробную историю этого вопроса можно найти в его монографии [1]. Сразу отметим, что в дальнейшем будет рассматриваться только случай $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, поскольку все оценки, полученные в нем, имеют свои естественные аналоги для произвольного конечного расширения поля рациональных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{\nu}}{\nu!} z^{\nu}, \quad f_{\nu} \in \mathbb{Q}, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+,$$

называется E -функцией, если для некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|f_{\nu}| < C^{\nu+1}$ при $\nu \in \mathbb{Z}^+$ и существует последовательность натуральных чисел $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_n f_{\nu} \in \mathbb{Z}$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < C^n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Данное определение несколько отличается от классического определения Зигеля. Однако, все известные E -функции (в смысле Зигеля) с рациональными коэффициентами рядов Тейлора, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяют этому определению. В частности, это относится ко всем целым гипергеометрическим функциям с рациональными параметрами (см. [1, гл. 5, §1]).

В 1984 году Г. В. Чудновский [7] предложил оригинальную конструкцию, позволяющую получать оценки снизу линейных форм от значений E -функций (0.3), каждая из которых удовлетворяет своему линейному однородному дифференциальному уравнению произвольного порядка:

$$|h_1 f_1(\alpha) + \dots + h_m f_m(\alpha)| > C(H_1 \dots H_m)^{-1} H^{1-\varepsilon}.$$

При этом на совокупность этих уравнений накладывалось очень жесткое ограничительное условие, схожее с условием Зигеля. Кроме этого, Чудновскому не удалось корректно осуществить переход от линейных приближающих функциональных форм, названных им *градуированными приближениями Паде*, к линейным числовым формам. В целом, метод Чудновского являлся непосредственным развитием метода Зигеля–Шидловского. Дальнейшая реализация конструкции градуированных приближений Паде в работе [8] привела к доказательству точных по порядку оценок меры иррациональности значений E -функций (0.3):

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\log \log |q|)^{-1/(m+1)}}, \quad l = 1, \dots, m,$$

с легко проверяемым условием на совокупность рассматриваемых функций.

В настоящей работе с помощью новых идей в методе Зигеля–Шидловского конструкция градуированных приближений Паде реализована в полном объеме для получения оценок снизу величин (0.1) и (0.2). При этом условие, накладываемое на совокупность рассматриваемых функций, является более простым по сравнению с условием Чудновского и во многих случаях проверено. Это позволяет получить следствия для конкретных обобщенных гипергеометрических функций.

Основные результаты. Будем говорить, что *система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка* (0.4) *лежит в классе* $\mathbf{W}^0$, если функции, входящие в некоторую фундаментальную матрицу решений $(\psi_{jl})_{j,l=1,\dots,m}$ системы (0.4), однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Отметим, что в этом случае “некоторую фундаментальную матрицу решений” можно заменить на “произвольную фундаментальную матрицу решений”, поскольку все такие матрицы отличаются матричным множителем с постоянными коэффициентами.

ТЕОРЕМА I. Пусть совокупность E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $m \geq 2$, удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений (0.4) из класса $\mathbf{W}^0$, $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ – неособая точка этой системы и $d \in \mathbb{N}$. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma = \gamma(f_1, \dots, f_m; \alpha, d)$ и $C = C(f_1, \dots, f_m; \alpha, d)$ такие, что для любого однородного многочлена $P \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ степени d выполняется неравенство

$$|P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))| > C \cdot |h_1 \dots h_w|^{-1} H^{1-\gamma(\log \log H)^{-1/(m^2-m+2)}},$$

$$H = \max_{1 \leq i \leq w} \{|h_i|\} \geq 3,$$

где $h_1, \dots, h_w$ – все ненулевые коэффициенты многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$.

Из теоремы I непосредственно вытекает результат об оценке снизу линейных форм от значений E -функций.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть совокупность E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $m \geq 2$, удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений (0.4) из класса $\mathbf{W}^0$, $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ – неособая точка этой системы. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma = \gamma(f_1, \dots, f_m; \alpha)$ и $C = C(f_1, \dots, f_m; \alpha)$ такие, что

$$|h_1 f_1(\alpha) + \dots + h_m f_m(\alpha)| > C \cdot (H_1 \dots H_m)^{-1} H^{1-\gamma(\log \log H)^{-1/(m^2-m+2)}},$$

$$h_i \in \mathbb{Z}, \quad H_i = \max\{1, |h_i|\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad H = \max_{1 \leq i \leq m} \{H_i\} \geq 3.$$

На самом деле, теорема I является частным случаем некоторого более общего утверждения, которое и будет доказываться ниже. Для его формулировки нам понадобится дополнительное понятие. В дальнейшем будет рассматриваться система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, распадающаяся на m подсистем:

$$\frac{d}{dz} y_{il} = \sum_{j=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)} y_{ij}, \quad l = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \geq 2. \quad (0.5)$$

$$Q_{lj}^{(i)} = Q_{lj}^{(i)}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad l, j = 1, \dots, m_i,$$

Если $\alpha \in \mathbb{C}$ – неособая точка системы (0.5), то она является неособой точкой и для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} a_{ij} = - \sum_{l=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)} a_{il}, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (0.6)$$

сопряженной к системе (0.5). Поэтому существует набор аналитических в некоторой окрестности точки $z = \alpha$ функций

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(z), \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (0.7)$$

удовлетворяющих системе (0.6), такой, что

$$\varphi_{ij}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1, \\ 0 & \text{при } j = 2, \dots, m_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m. \quad (0.8)$$

Если функции (0.7) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то будем говорить, что система (0.5) принадлежит классу $\mathbf{W}^0(\alpha)$.

ТЕОРЕМА II. Пусть совокупность E -функций

$$f_{il}(z), \quad l = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (0.9)$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений (0.5) из класса $\mathbf{W}^0(\alpha)$. Для произвольного однородного многочлена $P = P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ степени $d \in \mathbb{N}$ введем множество мультииндексов U таким образом, что

$$P(y_1, \dots, y_m) = \sum_{\bar{u} \in U} h_{\bar{u}} y_1^{u_1} \cdots y_m^{u_m}, \quad (0.10)$$

$$h_{\bar{u}} \neq 0, \quad |\bar{u}| = u_1 + \cdots + u_m = d, \quad \bar{u} \in U;$$

при этом функции

$$F_{\bar{u}}(z) = f_{11}^{u_1}(z) f_{21}^{u_2}(z) \cdots f_{m1}^{u_m}(z), \quad \bar{u} \in U, \quad (0.11)$$

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда существуют положительные постоянные γ и C , зависящие только от совокупности функций (0.9), числа d и неособой точки $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, такие, что справедливо неравенство

$$|P(f_{11}(\alpha), f_{21}(\alpha), \dots, f_{m1}(\alpha))| > C \prod_{\bar{u} \in U} |h_{\bar{u}}|^{-1} H^{1-\gamma(\log \log H)^{-1/(m_1+\cdots+m_m-m+2)}},$$

$$H = \max_{\bar{u} \in U} \{|h_{\bar{u}}|\} \geq 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Для совокупности функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ из теоремы I рассмотрим m “роллированных” копий

$$f_{il}(z) \equiv \begin{cases} f_{i-l+1}(z), & \text{если } i-l \geq 0, \\ f_{i-l+1+m}(z), & \text{если } i-l < 0, \end{cases} \quad i, l = 1, \dots, m,$$

каждая из которых удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений, полученной из системы (0.4) некоторой перестановкой индексов. Отметим сразу, что поскольку исходные функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$, входят в некоторую фундаментальную систему решений системы (0.4) из класса $\mathbf{W}^0$, они однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Пусть

$$\psi_{lj}(z), \quad l, j = 1, \dots, m, \quad (0.12)$$

— элементы фундаментальной матрицы решений системы (0.4), превращающейся в единичную матрицу в точке $z = \alpha$:

$$\psi_{lj}(\alpha) = \delta_{lj}, \quad l, j = 1, \dots, m. \quad (0.13)$$

При этом функции (0.12) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, поскольку система (0.4) лежит в классе $\mathbf{W}^0$. Тогда элементы обратной матрицы

$$(\tilde{\psi}_{lj}(z))_{l,j=1,\dots,m} = (\psi_{lj}(z))_{l,j=1,\dots,m}^{-1},$$

как рациональные функции от (0.12), также однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, и, кроме того, согласно (0.13) для них выполнены условия нормировки в точке $z = \alpha$:

$$\tilde{\psi}_{lj}(\alpha) = \delta_{lj}, \quad l, j = 1, \dots, m.$$

Остается заметить, что однородно алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ функции

$$\varphi_{ij}(z) = \begin{cases} \tilde{\psi}_{i,j+i-1}, & \text{если } j+i-1 \leq m, \\ \tilde{\psi}_{i,j+i-1-m}, & \text{если } j+i-1 > m, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, m,$$

удовлетворяют совокупности сопряженных систем и условиям (0.8), т.е. система для функций (0.9) лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$. Функции (0.11) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ ввиду алгебраической независимости функций $f_i(z) \equiv f_{i1}(z)$, $i = 1, \dots, m$. Для завершения доказательства теоремы I применим теорему II.

Приложения. В качестве иллюстрации применения теоремы II мы воспользуемся классическим результатом Зигеля [4] для значений функции

$$K_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! (\lambda+1)_\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

$$(\lambda+1)_0 = 1, \quad (\lambda+1)_\nu = (\lambda+1) \cdots (\lambda+\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющей линейному однородному уравнению второго порядка

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}y' + y = 0.$$

ТЕОРЕМА III. Пусть

$$\lambda_i \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}, \quad \lambda_i \neq \frac{2\mu-1}{2}, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\lambda_{i_1} \pm \lambda_{i_2} \notin \mathbb{Z}, \quad i_1, i_2 = 1, \dots, m, \quad i_1 \neq i_2,$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \xi_{j_1}^2 \neq \xi_{j_2}^2, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n, \quad j_1 \neq j_2.$$

Тогда существуют положительные постоянные C и γ , зависящие только от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ и натурального числа d , и обладающие следующим свойством: для произвольного (не обязательно однородного) многочлена P от переменных y_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, имеющего целые коэффициенты и степень d , справедливо неравенство

$$\left| P|_{y_{ij}=K_{\lambda_i}(\xi_j)} \right| > C |\Pi|^{-1} H^{1-\gamma} (\log \log H)^{-1/(mn+2)},$$

где Π – произведение всех ненулевых коэффициентов многочлена P , $H \geq 3$ – его высота.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $y_1 = K_\lambda(\xi z)$, $y_2 = K'_\lambda(\xi z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi^2 & -\frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая сопряженная система имеет вид

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^2 \\ -1 & \frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (0.14)$$

Если $a_1(z), a_2(z)$ – любое решение системы (0.14), то функция $\varphi(z) = a_1(z/\xi^2)$ вместе со своей производной $\psi(z) = \varphi'(z) = a_2(z/\xi^2)$ составляет решение системы

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\xi^2} & \frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Такую функцию $\varphi(z)$ с условиями $\varphi(\xi^2) = a_1(1) = 1$, $\varphi'(\xi^2) = a_2(1) = 0$ обозначим через $\varphi_{\lambda,\xi}(z)$.

Воспользуемся теперь леммой 1 [1, гл. 9, § 1]: при заданном в условии теоремы выборе параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_n$ функции

$$\varphi_{\lambda_i, \xi_j}(z), \quad \varphi'_{\lambda_i, \xi_j}(z), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Но это означает, что система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции

$$f_0(z) = 1, \quad f_{ij,1}(z) = K_{\lambda_i}(\xi_j z), \quad f_{ij,2}(z) = K'_{\lambda_i}(\xi_j z), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$. Для завершения доказательства теоремы III применим теорему II.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие принадлежности системы (0.6) классу $\mathbf{W}^0(\alpha)$ для заданной неособой точки $z = \alpha$ слабее условия нормальности Зигеля для этой системы.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Ранг числовых линейных форм специального вида. Обозначим через $\mathbb{M}$ модуль линейных форм от переменных $y_1, \dots, y_m$ над кольцом $\mathbb{C}[z]$. Таким образом, элементы $R \in \mathbb{M}$ имеют вид

$$R = \sum_{k=1}^m P_k(z) y_k, \quad P_k(z) \in \mathbb{C}[z], \quad k = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'_l = \sum_{j=1}^m Q_{lj} y_j, \quad Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l, j = 1, \dots, m. \quad (1.1)$$

Выберем многочлен $T = T(z)$ для системы (1.1) таким образом, что $TQ_{lj} \in \mathbb{C}[z]$, $l, j = 1, \dots, m$.

Определим на $\mathbb{M}$ дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=1}^m Q_{lj} y_j \right) \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad (1.2)$$

связанный с системой дифференциальных уравнений (1.1). Если $R \in \mathbb{M}$, то очевидно, что и $TDR \in \mathbb{M}$. Следовательно, $TD: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$. Кроме того [1, гл. 3, § 4], если $y_1, \dots, y_m$ есть произвольное решение системы (1.1), то

$$DR = \frac{d}{dz} R = R'.$$

Рассмотрим произвольную линейную форму из $\mathbb{M}$

$$R^{[0]} = \sum_{k=1}^m P_k^{[0]}(z) y_k, \quad P_k^{[0]}(z) \in \mathbb{C}[z], \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

и положим

$$R^{[n+1]} = TDR^{[n]}, \quad n \geq 0. \quad (1.4)$$

Пользуясь приведенным выше рассуждением, убеждаемся в том, что $R^{[n]} \in \mathbb{M}$, $n \geq 1$, иными словами,

$$R^{[n]} = \sum_{k=1}^m P_k^{[n]}(z) y_k, \quad P_k^{[n]}(z) \in \mathbb{C}[z], \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

С помощью определения (1.2) оператора D и равенства (1.4) находим следующие рекуррентные формулы:

$$P_k^{[n+1]}(z) = T(z) \left(\frac{d}{dz} P_k^{[n]}(z) + \sum_{l=1}^m P_l^{[n]}(z) Q_{lk}(z) \right), \quad n \geq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

Будем пользоваться обозначением $\Omega = \{1, \dots, m\}$.

В этом пункте мы докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть для заданной линейной формы (1.3) из $\mathbb{M}$ ранг над $\mathbb{C}(z)$ квадратной матрицы

$$(P_k^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,m-1; k \in \Omega}, \quad (1.6)$$

где входящие в нее многочлены определяются согласно формулам (1.5), равен в точности $\tilde{m}$. Для произвольного подмножества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$, положим

$$\Delta(\tilde{\Omega}; z) = \det(P_k^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1; k \in \tilde{\Omega}}.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — неособая точка системы (1.1), т.е. $T(\alpha) \neq 0$, и известно, что

$$\max_{\tilde{\Omega}} \left\{ \text{ord}_{z=\alpha} \Delta(\tilde{\Omega}; z) \right\} = q,$$

где максимум берется по всевозможным множествам $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$, для которых $\Delta(\tilde{\Omega}; z) \neq 0$. Тогда ранг над $\mathbb{C}$ числовой матрицы

$$(P_k^{[n]}(\alpha))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}+q-1; k \in \Omega}$$

равен в точности $\tilde{m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, в дальнейшем понадобится не сформулированное утверждение, а только механизм его доказательства. Несмотря на это, предложение 1.1 представляется нам содержательным и весьма полезным как обобщение одной леммы Зигеля (см. [1, гл. 3, § 7, лемма 10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7 [1, гл. 3, § 4] фундаментальную систему решений

$$(y_{k\eta}(z))_{k \in \Omega; \eta=1, \dots, m} \quad (1.7)$$

для (1.1) можно выбрать таким образом, что формы $R^{[0]}, R^{[1]}, R^{[2]}, \dots$ обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ каждого из $m - \tilde{m}$ решений $y_{1\eta}, \dots, y_{m\eta}$, $\eta = \tilde{m} + 1, \dots, m$. Отметим сразу, что все функции, входящие в матрицу (1.7), аналитичны в точке $z = \alpha$, поскольку она не является особой точкой системы (1.1).

Для результата подстановки функций $y_{1\eta}, \dots, y_{m\eta}$, $\eta = 1, \dots, m$, вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ в форму $R^{[n]} \in \mathbb{M}$ введем обозначение

$$R_\eta^{[n]} = R_\eta^{[n]}(z) = \sum_{k \in \Omega} P_k^{[n]}(z) y_{k\eta}(z), \quad n \geq 0, \quad \eta = 1, \dots, \omega. \quad (1.8)$$

Тогда согласно выбору матрицы (1.7)

$$R_\eta^{[n]}(z) \equiv 0, \quad n \geq 0, \quad \eta = \tilde{m} + 1, \dots, m. \quad (1.9)$$

Введем в рассмотрение следующие функции, аналитичные в точке $z = \alpha$:

$$\Lambda(z) = \det(y_{k\eta}(z))_{k \in \Omega; \eta=1, \dots, m},$$

$$\lambda(\tilde{\Omega}; z) = \det(y_{k\eta}(z))_{k \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; \eta=\tilde{m}+1, \dots, m}, \quad \tilde{\Omega} \subset \Omega, \quad \text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$$

(в случае $\tilde{m} = m$ считаем $\lambda(\Omega; z) \equiv 1$).

ЛЕММА 1.2. Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное подмножество $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ такое, что $\text{Card } \mathcal{N} = \tilde{m}$, и $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$. Тогда справедливо тождество

$$\det(P_k^{[n]}(z))_{n \in \mathcal{N}; k \in \tilde{\Omega}} \cdot \Lambda(z) = \det(R_\eta^{[n]}(z))_{n \in \mathcal{N}; \eta=1, \dots, \tilde{m}} \cdot \lambda(\tilde{\Omega}; z). \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По правилу умножения матриц и согласно обозначениям (1.8) имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P_k^{[n]}(z) \\ \delta_{ik} \end{pmatrix}_{n \in \mathcal{N}, i \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; k \in \Omega} (y_{k\eta}(z))_{k \in \Omega; \eta=1, \dots, m} \\ &= \begin{pmatrix} R_\eta^{[n]}(z) \\ y_{i\eta}(z) \end{pmatrix}_{n \in \mathcal{N}, i \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; \eta=1, \dots, m}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где через δ_{ik} обозначен символ Кронекера. Ввиду равенств (1.9) находим

$$\begin{aligned} & \det \left(R_{\eta}^{[n]}(z) \right)_{n \in \mathcal{N}, i \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; \eta=1, \dots, m} \\ &= \det \left(R_{\eta}^{[n]}(z) \right)_{n \in \mathcal{N}; \eta=1, \dots, \tilde{m}} \cdot \det \left(y_{i\eta}(z) \right)_{i \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; \eta=\tilde{m}+1, \dots, m}, \end{aligned}$$

а кроме того,

$$\det \left(\begin{array}{c} P_k^{[n]}(z) \\ \delta_{ik} \end{array} \right)_{n \in \mathcal{N}, i \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; k \in \Omega} = \det \left(P_k^{[n]}(z) \right)_{n \in \mathcal{N}; k \in \tilde{\Omega}}.$$

Поэтому после перехода от матриц к определителям равенство (1.11) примет вид (1.10).

ЛЕММА 1.3. *Если для $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$, выполнено $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$, то $\Delta(\tilde{\Omega}; z) \neq 0$. Если при этом*

$$\text{ord}_{z=\alpha} \Delta(\tilde{\Omega}; z) = p,$$

то ранг числовой матрицы

$$\left(P_k^{[n]}(\alpha) \right)_{n=0,1, \dots, \tilde{m}+p-1; k \in \tilde{\Omega}} \quad (1.12)$$

равен $\tilde{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, \tilde{m} - 1\}$ согласно тождеству леммы 1.2 имеем

$$\Delta(\tilde{\Omega}; z) \cdot \Lambda(z) = \det \left(R_{\eta}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1, \dots, \tilde{m}-1; \eta=1, \dots, \tilde{m}} \cdot \lambda(\tilde{\Omega}; z). \quad (1.13)$$

Если предположить, что $\lambda(\tilde{\Omega}; z) \neq 0$ и в то же время $\Delta(\tilde{\Omega}; z) \equiv 0$, то получим, что $\det \left(R_{\eta}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1, \dots, \tilde{m}-1; \eta=1, \dots, \tilde{m}} \equiv 0$. Отсюда и из равенства (1.13) заключаем, что $\Delta(\tilde{\Omega}; z) \equiv 0$ для любого множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$, иными словами, что ранг матрицы

$$\left(P_k^{[n]}(z) \right)_{n=0,1, \dots, \tilde{m}-1; k \in \Omega} \quad (1.14)$$

меньше $\tilde{m}$. С другой стороны, ранг матрицы (1.6) равен $\tilde{m}$ и по лемме 6 [1, гл. 3, § 4] ранг матрицы (1.14) также равен $\tilde{m}$. Полученное противоречие означает, что в случае $\lambda(\tilde{\Omega}; z) \neq 0$ имеем $\Delta(\tilde{\Omega}; z) \neq 0$.

Перейдем к доказательству второй части леммы. Для заданного множества $\tilde{\Omega}$ положим $\Delta(z) = \Delta(\tilde{\Omega}; z)$ и перепишем равенство (1.13) в виде

$$\Delta(z) \cdot \chi(z) = \det \left(R_{\eta}^{[n]}(z) \right)_{n=0,1, \dots, \tilde{m}-1; \eta=1, \dots, \tilde{m}}, \quad (1.15)$$

где $\chi(z) = \Lambda(z)/\lambda(\tilde{\Omega}; z)$ – аналитическая в точке $z = \alpha$ функция, поскольку $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$. Перепишем формулы (1.4) для функций (1.8):

$$R_{\eta}^{[n+1]}(z) = T(z) \frac{d}{dz} R_{\eta}^{[n]}(z), \quad n \geq 0, \quad \eta = 1, \dots, \tilde{m}. \quad (1.16)$$

Пользуясь соотношениями (1.15), (1.16), правилом дифференцирования определителя по строкам и тождеством леммы 1.2, получаем

$$\begin{aligned} \left(T(z) \frac{d}{dz}\right)^p (\Delta(z)\chi(z)) &= \left(T(z) \frac{d}{dz}\right)^p \det(R_{\eta}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1;\eta=1,\dots,\tilde{m}} \\ &= \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\tilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\tilde{m}-1} \geq 0}} \frac{p!}{\nu_0! \dots \nu_{\tilde{m}-1}!} \det(R_{\eta}^{[n+\nu_n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1;\eta=1,\dots,\tilde{m}} \\ &= \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\tilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\tilde{m}-1} \geq 0}} \frac{p!}{\nu_0! \dots \nu_{\tilde{m}-1}!} \det(P_k^{[n+\nu_n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1;k \in \tilde{\Omega}} \cdot \chi(z). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отметим, что последнее тождество в случае $\tilde{m} = m$ было доказано в дипломной работе В. В. Титенко в 1987 году. Функция $\chi(z)$ в точке $z = \alpha$ аналитична и принимает ненулевое значение; по условию $T(\alpha) \neq 0$. Поэтому, если p – точный порядок нуля в точке $z = \alpha$ многочлена $\Delta(z)$, то подстановка $z = \alpha$ в тождество (1.17) с последующим делением обеих частей на $\chi(\alpha)$ даст соотношение

$$0 \neq T^p(\alpha) \Delta^{(p)}(\alpha) = \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\tilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\tilde{m}-1} \geq 0}} \frac{p!}{\nu_0! \dots \nu_{\tilde{m}-1}!} \det(P_k^{[n+\nu_n]}(\alpha))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1;k \in \tilde{\Omega}}.$$

Отсюда следует, что для некоторого набора $\nu_0, \dots, \nu_{\tilde{m}-1}$, $\nu_0 + \dots + \nu_{\tilde{m}-1} = p$, неотрицательных целых чисел выполнено

$$\det(P_k^{[n+\nu_n]}(\alpha))_{n=0,1,\dots,\tilde{m}-1;k \in \tilde{\Omega}} \neq 0,$$

а это, в свою очередь, означает, что ранг числовой матрицы (1.12) в точности равен $\tilde{m}$.

Вернемся теперь к доказательству предложения 1.1.

Если предположить, что для любого множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{m}$, выполнено $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) = 0$, то согласно определению миноров $\lambda(\tilde{\Omega}; z)$ столбцы числовой матрицы $(y_{k\eta}(\alpha))_{k \in \tilde{\Omega}; \eta = \tilde{m}+1, \dots, m}$ линейно зависимы. Это, однако, противоречит тому, что матрица (1.7) является фундаментальной матрицей решений системы (1.1), для которой точка $z = \alpha$ является неособой. Поэтому $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$, по крайней мере, для одного такого $\tilde{\Omega}$. Остается воспользоваться леммой 1.3 и тем фактом, что $p \leq q$.

Лемма Галочкина. Излагаемое ниже утверждение является одним из ключевых моментов описываемого в работе метода. Его любезно предоставил автору А. И. Галочкин.

ЛЕММА 1.4 (А. И. Галочкин). Пусть

$$\Delta(z) = \sum_{\nu=p}^s \frac{\Delta_\nu}{\nu!} z^\nu, \quad \Delta_\nu \in \mathbb{Z}, \quad |\Delta_\nu| \leq \delta, \quad \nu = p, p+1, \dots, s,$$

$$s = \deg \Delta(z), \quad p = \operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) \geq 2, \quad q = \operatorname{ord}_{z=\alpha} \Delta(z), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| \leq \frac{p - \sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}}.$$

Тогда

$$q \leq \frac{2 \log(s\delta)}{\log p}. \quad (1.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|\xi| = p$ имеем

$$|\Delta(\xi)| \leq (s - p + 1) \frac{\delta}{p!} p^p,$$

где использовано неравенство

$$\frac{p^\nu}{\nu!} \leq \frac{p^p}{p!} \quad \text{при } \nu \geq p.$$

Поскольку

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=p} \frac{z^p (z - \alpha)^q}{\xi^p (\xi - \alpha)^q} \frac{\Delta(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

а также

$$\frac{s - p + 1}{p - 1} \leq \frac{s}{p},$$

при $|z| = 1$ получаем

$$\begin{aligned} |\Delta(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi|=p} \frac{(1 + |\alpha|)^q}{p^p (p - |\alpha|)^q} \frac{s - p + 1}{p - 1} \frac{\delta}{p!} p^p d\xi \leq s\delta \left(\frac{1 + |\alpha|}{p - |\alpha|} \right)^q \frac{1}{p!} \\ &\leq s\delta \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right)^q \frac{1}{p!}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\Delta_p = \frac{p!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\Delta(z)}{z^{p+1}} dz,$$

откуда

$$|\Delta_p| \leq p! \cdot \max_{|z|=1} |\Delta(z)| \leq s\delta p^{-q/2}.$$

С другой стороны, число Δ_p является целым и отлично от нуля, т.е. $|\Delta_p| \geq 1$, откуда

$$p^{q/2} \leq s\delta,$$

что после логарифмирования дает неравенство (1.18). Лемма доказана.

Представление функции $g(z)$ в виде степенного ряда

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{\nu}}{\nu!} z^{\nu}, \quad g_{\nu} \in \mathbb{C}, \quad (1.19)$$

назовем *нормальным разложением функции*, а числа $g_{\nu}, \nu \in \mathbb{Z}^+$, — *коэффициентами в нормальном разложении функции*. Если при этом функция $g(z)$ является многочленом, т.е. степенной ряд (1.19) содержит лишь конечное количество слагаемых, то будем полагать

$$\|g(z)\| = \max_{\nu} \{|g_{\nu}|\}.$$

ЛЕММА 1.5 [8]. Для многочлена $g(z)$ справедливы следующие неравенства:

- а) $\|g'(z)\| \leq \|g(z)\|$;
- б) $\|g_1(z) + g_2(z)\| \leq \|g_1(z)\| + \|g_2(z)\|$;
- в) $\|g_1(z)g_2(z)\| \leq \binom{\deg g_1(z) + \deg g_2(z)}{\deg g_1(z)} \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\|$.

Приведем теперь необходимое в дальнейшем следствие из леммы 1.4.

ЛЕММА 1.6. Пусть для функции

$$\Delta(z) = \det(P_{nk}(z))_{n,k=1,\dots,\tilde{m}},$$

где многочлены $P_{nk}(z) \in \mathbb{C}[z]$ имеют целые коэффициенты в нормальном разложении и удовлетворяют условиям

$$\deg P_{nk}(z) \leq d, \quad \|P_{nk}(z)\| \leq H, \quad n, k = 1, \dots, \tilde{m},$$

известно, что

$$\operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) \geq p,$$

число p достаточно велико, точка $z = \alpha$ фиксирована. Тогда

$$\operatorname{ord}_{z=\alpha} \Delta(z) < \frac{2\tilde{m}}{\log p} (\log H + 2d(1 + \log \tilde{m})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскрывая $\Delta(z)$ как определитель, по лемме 1.5 получим

$$\begin{aligned} \|\Delta(z)\| &\leq \sum_{\sigma \in S_{\tilde{m}}} \|P_{1\sigma(1)}(z) P_{2\sigma(2)}(z) \cdots P_{\tilde{m}\sigma(\tilde{m})}(z)\| \leq \tilde{m}! \cdot \frac{(\tilde{m}d)!}{(d!)^{\tilde{m}}} \cdot H^{\tilde{m}} \\ &\leq \tilde{m}^{\tilde{m}} \cdot \frac{(\tilde{m}d)^{\tilde{m}d}}{(d/e)^{\tilde{m}d}} \cdot H^{\tilde{m}} = \tilde{m}^{\tilde{m}(d+1)} e^{\tilde{m}d} H^{\tilde{m}}. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться леммой 1.4 и тем фактом, что $\deg \Delta(z) \leq \tilde{m}d < e^{\tilde{m}d}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{z=\alpha} \Delta(z) &\leq \frac{2 \log(\deg \Delta(z) \cdot \|\Delta(z)\|)}{\log p} < \frac{2 \log(\tilde{m}^{\tilde{m}(d+1)} e^{2\tilde{m}d} H^{\tilde{m}})}{\log p} \\ &\leq \frac{2\tilde{m}}{\log p} (\log H + 2d(1 + \log \tilde{m})), \end{aligned}$$

что и требовалось.

§ 2. Градуированные приближения Паде

Для доказательства теоремы II воспользуемся упомянутой выше конструкцией работы [7].

Обозначим через $T(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных коэффициентов системы (0.5):

$$T(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad T(z)Q_{lj}^{(i)}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad l, j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.1)$$

Системы приближающих функциональных форм, строящиеся ниже, будут зависеть от натуральных параметров $M_{\bar{u}}$, $\bar{u} \in U$. Положим

$$M = \max_{\bar{u} \in U} \{M_{\bar{u}}\}, \quad N = \lceil (\log M)^{1/(m_1+m_2+\dots+m_m-m+2)} \rceil > d, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \sum_{\bar{u} \in U} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{u_i} \frac{m_i - 1}{N + m_i - v} \asymp \frac{1}{N}, \quad \min_{\bar{u} \in U} \{M_{\bar{u}}\} \geq 3\varepsilon M,$$

при этом будем считать M достаточно большим. (Здесь и далее квадратными скобками мы обозначаем целую часть числа.) Буквы C с нижними индексами и M со штрихами будем использовать для обозначения положительных постоянных, зависящих только от функций (0.9), системы (0.5), чисел α и d . Положим также $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$, где $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im_i})$, $i = 1, \dots, m$, и $\bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_1, \dots, \bar{\kappa}_m)$ — мультииндекс, где $\bar{\kappa}_i = (\kappa_{i1}, \dots, \kappa_{im_i})$, $i = 1, \dots, m$, причем все компоненты κ_{ij} мультииндекса неотрицательны, а если в некоторой сумме встретилось слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_{ij} < 0$, то считаем это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Для экономии места в формулах будем писать

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m_i}} a_{ij}^{\kappa_{ij}}, \quad |\bar{\kappa}_i| = \sum_{j=1}^{m_i} \kappa_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Введем множества

$$\Omega_{\bar{u}} = \Omega_{\bar{u}}(N) = \{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}_i| = N - u_i, \quad i = 1, \dots, m\}, \quad \bar{u} \in U,$$

$$\Omega = \Omega(N) = \bigcup_{\bar{u} \in U} \Omega_{\bar{u}}, \quad \Theta = \Theta(N) = \{\bar{s} : |\bar{s}_i| = N, \quad i = 1, \dots, m\};$$

соответствующими маленькими буквами обозначим количества элементов в них [1, гл. 2, § 7, лемма 7]:

$$\omega_{\bar{u}} = \text{Card } \Omega_{\bar{u}} = \prod_{i=1}^m \binom{N + m_i - 1 - u_i}{m_i - 1}, \quad \bar{u} \in U,$$

$$\omega = \text{Card } \Omega = \sum_{\bar{u} \in U} \omega_{\bar{u}}, \quad \theta = \text{Card } \Theta = \prod_{i=1}^m \binom{N + m_i - 1}{m_i - 1}.$$

Искомые линейные формы имеют вид

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\bar{u}}(z; \bar{a}) \prod_{i=1}^m (a_{i1} f_{i1}(z) + \dots + a_{im_i} f_{im_i}(z))^{N-u_i}, \quad (2.3)$$

где многочлены $P_{\bar{u}}(z; \bar{a})$ однородны по каждой компоненте $\bar{a}_i, i = 1, \dots, m$, и имеют вид

$$P_{\bar{u}}(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z), \quad \bar{u} \in U. \quad (2.4)$$

Функциональную линейную форму (2.3) можно представить в виде

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z), \quad (2.5)$$

где

$$R_{\bar{s}}(z) = \sum_{\bar{u} \in U} \sum_{\substack{\bar{r}=(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m) \\ |\bar{r}_i|=u_i, i=1, \dots, m}} \prod_{i=1}^m \frac{u_i!}{r_{i1}! \dots r_{im_i}!} P_{\bar{s}-\bar{r}}(z) \bar{f}^{\bar{r}}(z), \quad \bar{s} \in \Theta. \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.1. Для натуральных $M_{\bar{u}}, \bar{u} \in U$, и выбранных согласно (2.2) чисел M, N и ε существуют многочлены $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Q}[z], \bar{\kappa} \in \Omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) не все они тождественно равны нулю;
- 2) $\deg P_{\bar{\kappa}} < M$ для всех $\bar{\kappa} \in \Omega$;
- 3) $\text{ord}_{z=0} P_{\bar{\kappa}} \geq M - M_{\bar{u}}$ для всех $\bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \bar{u} \in U$;
- 4) коэффициенты в нормальном разложении этих многочленов являются целыми числами, ограниченными по модулю величиной $C_0^{M/\varepsilon}$;
- 5) порядок нуля в точке $z = 0$ каждой из линейных функциональных форм (2.6) не ниже

$$K = \left[\sum_{\bar{u} \in U} \frac{\omega_{\bar{u}}}{\theta} M_{\bar{u}} - \varepsilon M \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ЛЕММЫ ПРОВОДИТСЯ ПО ТОЙ ЖЕ СХЕМЕ, ЧТО И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1 [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\bar{u}}}{\theta} &= \prod_{i=1}^m \frac{\binom{N+m_i-1-u_i}{m_i-1}}{\binom{N+m_i-1}{m_i-1}} = \prod_{i=1}^m \frac{(N+m_i-1-u_i)!}{(N+m_i-1)!} \cdot \frac{N!}{(N-u_i)!} \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{(N-u_i+1) \dots (N-1)N}{(N+m_i-u_i) \dots (N+m_i-2)(N+m_i-1)} \\ &= \prod_{i=1}^m \prod_{v=1}^{u_i} \left(1 - \frac{m_i-1}{N+m_i-v} \right) > 1 - \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{u_i} \frac{m_i-1}{N+m_i-v}, \quad \bar{u} \in U, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} K &= \left[\sum_{\bar{u} \in U} \frac{\omega_{\bar{u}}}{\theta} M_{\bar{u}} - \varepsilon M \right] = \left[\sum_{\bar{u} \in U} M_{\bar{u}} - \sum_{\bar{u} \in U} \left(1 - \frac{\omega_{\bar{u}}}{\theta} \right) M_{\bar{u}} - \varepsilon M \right] \\ &> \left[\sum_{\bar{u} \in U} M_{\bar{u}} - \sum_{\bar{u} \in U} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{u_i} \frac{m_i - 1}{N + m_i - v} M - \varepsilon M \right] = \left[\sum_{\bar{u} \in U} M_{\bar{u}} - 2\varepsilon M \right]. \end{aligned}$$

Последнее неравенство дает “более наглядное” представление величины K .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве дополнения к лемме 2.1 требует обоснования факт $R(z; \bar{a}) \not\equiv 0$ для построенной формы $R(z; \bar{a})$. Среди всех мультииндексов $\bar{s} \in \Theta$ таких, что в наборе

$$P_{\bar{s}-\bar{r}}(z), \quad |\bar{r}_i| = u_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

есть хотя бы один ненулевой многочлен, выберем $\bar{s}'$ с наибольшей возможной суммой $s'_{11} + s'_{21} + \dots + s'_{m1}$. Тогда

$$R_{\bar{s}'}(z) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\bar{s}' - u_1 \bar{e}_{11} - u_2 \bar{e}_{21} - \dots - u_m \bar{e}_{m1}}(z) f_{11}^{u_1}(z) f_{21}^{u_2}(z) \cdots f_{m1}^{u_m}(z) \not\equiv 0$$

ввиду линейной независимости функций (0.11) над $\mathbb{C}(z)$ и согласно выбору $\bar{s}' \in \Theta$. Отсюда и вытекает, что $R(z; \bar{a}) \not\equiv 0$. (Через $\bar{e}_{ij}$ мы обозначаем мультииндекс, у которого на месте с номером ij стоит единица, а на остальных местах — нули.)

Для разложения построенной согласно лемме 2.1 формы $R(z; \bar{a})$ в формы того же вида введем линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left(\sum_{l=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)}(z) a_{il} \right) \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \right),$$

связанный с совокупностью систем линейных однородных дифференциальных уравнений (0.6). Тогда

$$\begin{aligned} D \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f_{ij}(z) &= \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial z}(z) - \sum_{j=1}^{m_i} \left(\sum_{l=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)}(z) a_{il} \right) f_{ij}(z) \\ &= \sum_{l=1}^{m_i} a_{il} \frac{\partial f_{il}}{\partial z}(z) - \sum_{l=1}^{m_i} a_{il} \sum_{j=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)}(z) f_{ij}(z) \\ &= \sum_{l=1}^{m_i} a_{il} \left(f'_{il}(z) - \sum_{j=1}^{m_i} Q_{lj}^{(i)}(z) f_{ij}(z) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Поэтому функциональные формы вида (2.3) после применения к ним оператора D и умножения на $T(z)$ переходят в формы того же вида (с другими коэффициентами-многочленами $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$).

Положим

$$\begin{aligned} P_{\bar{\kappa}}^{[0]}(z) &= P_{\bar{\kappa}}(z), & \bar{\kappa} \in \Omega, \\ R_{\bar{s}}^{[0]}(z) &= R_{\bar{s}}(z), & \bar{s} \in \Theta, \end{aligned}$$

где $P_{\bar{\kappa}}(z)$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, и $R_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} \in \Theta$, — построенные в лемме 2.1 многочлены и отвечающие им функции (2.6),

$$R^{[0]}(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}^{[0]}(z).$$

Тогда функциональные формы

$$R^{[n]}(z; \bar{a}) = (T(z)D)^n R^{[0]}(z; \bar{a}), \quad n \geq 0,$$

имеют вид

$$R^{[n]}(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\bar{u}}^{[n]}(z; \bar{a}) \prod_{i=1}^m (a_{i1}f_{i1}(z) + \dots + a_{im_i}f_{im_i}(z))^{N-u_i}, \quad n \geq 0,$$

и входящие в них многочлены от z удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} P_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z) &= T(z) \left(\frac{d}{dz} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{l,j=1}^{m_i} (\kappa_{ij} - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}^{(i)}(z) P_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{il} + \bar{e}_{ij}}^{[n]}(z) \right), \\ n &\geq 0, \quad \bar{\kappa} \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и отвечающие каждой функциональной форме

$$R^{[n]}(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s} \in \Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}^{[n]}(z), \quad n \geq 0,$$

многочлены $R_{\bar{s}}^{[n]}(z)$, $\bar{s} \in \Theta$, $n \geq 0$, от функций (0.9):

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n+1]}(z) &= T(z) \left(\frac{d}{dz} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{l,j=1}^{m_i} (s_{ij} - \delta_{lj} + 1) Q_{lj}^{(i)}(z) R_{\bar{s} - \bar{e}_{il} + \bar{e}_{ij}}^{[n]}(z) \right), \\ n &\geq 0, \quad \bar{s} \in \Theta. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если ввести обозначение

$$t = \max \left\{ \deg T, \max_{i,l,j} \{ \deg T Q_{lj}^{(i)} \} \right\},$$

то из леммы 2.1 и соотношений (2.8), (2.9) имеем:

$$\deg P_{\bar{\kappa}}^{[n]} < M + tn, \quad n \geq 0, \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\text{ord}_{z=0} P_{\bar{\kappa}}^{[n]} \geq M - M_{\bar{u}} - n, \quad n \geq 0, \quad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in U, \tag{2.11}$$

$$\text{ord}_{z=0} R_{\bar{s}}^{[n]} \geq K - n, \quad n \geq 0, \quad \bar{s} \in \Theta. \tag{2.12}$$

ЛЕММА 2.2. а) Коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)$, $n \geq 0$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, являются целыми числами. Кроме того, справедливы оценки

$$\max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\| \} \leq (C_1 N)^n \frac{(M + tn - 1)!}{(M - 1)!} \cdot C_0^{M/\varepsilon}, \quad n \geq 0, \quad (2.13)$$

откуда при $n < C_2 \varepsilon M$

$$\max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\| \} < M^{C_3 \varepsilon M}. \quad (2.14)$$

б) При $n < C_2 \varepsilon M$ выполняются неравенства

$$|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| < M^{C_4 \varepsilon M - K}, \quad \bar{s}^* = N(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{21} + \dots + \bar{e}_{m1}). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Первая часть утверждения вытекает из соотношений (2.8) и выбора (2.1) многочлена $T(z)$. Положим

$$C_5 = \left(1 + \sum_{i=1}^m m_i^2 \right) \cdot \max \left\{ \|T\|, \max_{i,l,j} \{ \|TQ_{lj}^{(i)}\| \} \right\}$$

и воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.8) и неравенствами леммы 1.5:

$$\max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n+1]}(z)\| \} \leq \binom{M + t(n+1) - 1}{t} \cdot C_5 N \cdot \max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\| \}, \quad n \geq 0,$$

откуда простая индукция по n дает оценку

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\| \} &\leq \left(\frac{C_5 N}{t!} \right)^n \frac{(M + tn - 1)!}{(M - 1)!} \cdot \max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[0]}(z)\| \} \\ &\leq \left(\frac{C_5 N}{t!} \right)^n \frac{(M + tn - 1)!}{(M - 1)!} \cdot C_0^{M/\varepsilon}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

а значит, справедливы оценки (2.13). Неравенства (2.14) получаются из (2.13) с учетом

$$\frac{(M + tn - 1)!}{(M - 1)!} \cdot N^n < (2M)^{tn} \cdot M^n, \quad C_0^{M/\varepsilon} = o(M^{\varepsilon M}) \quad \text{при } M \rightarrow \infty$$

и $n < C_2 \varepsilon M$.

б) Пусть $P_{\bar{\kappa}, \nu}^{[n]}$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, — коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)$, $n \geq 0$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, соответственно; $R_{\bar{s}^*, \mu}^{[n]}$, $\mu \in \mathbb{Z}^+$, — коэффициенты в нормальном разложении форм $R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z)$, $n \geq 0$; $F_{\bar{u}, \nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, $\bar{u} \in U$, — коэффициенты в нормальном разложении функций (0.11). Тогда согласно формуле (2.6)

$$R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\bar{s}^* - u_1 \bar{e}_{11} - u_2 \bar{e}_{21} - \dots - u_m \bar{e}_{m1}}^{[n]}(z) F_{\bar{u}}(z), \quad n \geq 0,$$

и значит,

$$R_{\bar{s}^*, \mu}^{[n]} = \sum_{\bar{u} \in U} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} P_{\bar{s}^* - u_1 \bar{e}_{11} - u_2 \bar{e}_{21} - \dots - u_m \bar{e}_{m1}, \nu}^{[n]} F_{\bar{u}, \mu - \nu}, \quad \mu \in \mathbb{Z}^+, \quad n \geq 0. \quad (2.16)$$

При этом

$$R_{\bar{s}^*, \mu}^{[n]} = 0, \quad \mu < K - n, \quad n < C_2 \varepsilon M.$$

Поэтому, если в соотношении (2.16) воспользоваться оценками (2.14) и определением E -функций для совокупности (0.11), то получаем (при $\mu \geq K - n$)

$$|R_{\bar{s}^*, \mu}^{[n]}| \leq \text{Card } U \cdot \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \max_{\bar{\kappa} \in \Omega} \{ \|P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\| \} C^{\mu+1} < C_6^{\mu+1} M^{C_3 \varepsilon M},$$

откуда

$$|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| = \left| \sum_{\mu \geq K-n} \frac{R_{\bar{s}^*, \mu}^{[n]} \alpha^{\mu}}{\mu!} \right| < M^{C_3 \varepsilon M} \sum_{\mu \geq K-n} \frac{|\alpha|^{\mu}}{\mu!} C_6^{\mu+1}.$$

Пользуясь неравенством

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \geq K-n} \frac{|\alpha|^{\mu}}{\mu!} C_6^{\mu+1} &\leq \frac{|\alpha|^{K-n} C_6^{K-n+1}}{(K-n)!} \sum_{\mu \geq K-n} \frac{(C_6 |\alpha|)^{\mu-K+n}}{(\mu-K+n)!} \\ &= \frac{|\alpha|^{K-n} C_6^{K-n+1}}{(K-n)!} e^{C_6 |\alpha|} \\ &< (C_6 |\alpha|)^{\text{Card } U \cdot M} \left(\frac{e}{K-n} \right)^{K-n} e^{C_6 |\alpha|} \\ &< (C_6 |\alpha|)^{\text{Card } U \cdot M} \left(\frac{e}{M} \right)^K e^{C_6 |\alpha|} \\ &< e^{C_6 |\alpha|} (C_6 |\alpha| e)^{\text{Card } U \cdot M} M^{-K}, \end{aligned}$$

поскольку $M < K - n \leq K < \text{Card } U \cdot M$, получаем

$$|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| < M^{C_3 \varepsilon M} e^{C_6 |\alpha|} (C_6 |\alpha| e)^{\text{Card } U \cdot M} M^{-K}.$$

Последняя оценка с учетом

$$e^{C_6 |\alpha|} (C_6 |\alpha| e)^{\text{Card } U \cdot M} = o(M^{\varepsilon M}) \quad \text{при } M \rightarrow \infty$$

дает (2.15).

§3. Числовые приближающие формы

В настоящем параграфе осуществляется традиционный для метода Зигеля–Шидловского переход от построенных функциональных к числовым приближающим формам. Однако, для этих целей используется новая схема рассуждений.

Ранг числовых приближающих форм. С каждым $\bar{s} \in \Theta$ удобно связать функцию $\mathcal{J}_{\bar{s}}: U \rightarrow \Omega$, действующую по правилу

$$\mathcal{J}_{\bar{s}}(\bar{u}) = \bar{s} - u_1 \bar{e}_{11} - u_2 \bar{e}_{21} - \dots - u_m \bar{e}_{m1}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U.$$

При этом функция $\mathcal{J}_{\bar{s}}$ определена не обязательно для всех $\bar{u} \in U$, поскольку мультииндекс в правой части ее определения не всегда имеет неотрицательные координаты.

В новых обозначениях многочлены $R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z)$, $n \geq 0$, $\bar{s}^* = N(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{21} + \dots + \bar{e}_{m1})$, от функций $f_{11}(z), f_{21}(z), \dots, f_{m1}(z)$ переписуются в виде

$$R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\mathcal{J}_{\bar{s}^*}(\bar{u})}^{[n]}(z) F_{\bar{u}}(z), \quad n \geq 0. \quad (3.1)$$

Положим

$$\Omega^* = \bigcup_{\bar{u} \in U} \{\mathcal{J}_{\bar{s}^*}(\bar{u})\}, \quad \omega^* = \text{Card } \Omega^* = \text{Card } U.$$

Важным моментом метода Зигеля–Шидловского является доказательство того факта, что функциональный определитель, составленный из построенных форм, в нашем случае – это $\det(P_{\bar{k}}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\omega-1; \bar{k} \in \Omega}$, отличен от нуля. Именно такое утверждение было доказано Чудновским в статье [7] с помощью условия нормальности Зигеля для совокупности систем (0.6). На самом деле, в числовых приложениях нам понадобятся только формы (3.1). Поэтому можно воспользоваться более слабым аналогом указанного утверждения, накладывая менее жесткие (по сравнению с условием нормальности) ограничения (см. по этому поводу замечание к теореме III).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть система линейных однородных дифференциальных уравнений (0.5) лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$, функции (0.11) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и M достаточно велико, $M > M'$. Тогда ранг числовой матрицы

$$(P_{\bar{k}}^{[n]}(\alpha))_{n=0,1,\dots,\omega+[C_7 \varepsilon M]; \bar{k} \in \Omega^*}$$

в точности равен ω^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что ранг совокупности линейных форм $R^{[n]}(z; \bar{a})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, равен $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} \leq \omega$. При этом $\tilde{\omega} \geq 1$, поскольку $R^{[0]}(z; \bar{a}) \neq 0$ (см. по этому поводу замечание 2 к лемме 2.1).

Для произвольного решения

$$a_{ij} = a_{ij}(z), \quad j = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

системы (0.6) набор функций

$$x_{\bar{\kappa}}(z) = \bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) \prod_{i=1}^m (a_{i1}(z)f_{i1}(z) + \dots + a_{im_i}(z)f_{im_i}(z))^{N-u_i}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in U,$$

составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} x_{\bar{\kappa}} = - \sum_{i=1}^m \sum_{l,j=1}^{m_i} \kappa_{ij} Q_{lj}^{(i)}(z) x_{\bar{\kappa} - \bar{e}_{ij} + \bar{e}_{il}}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega, \quad (3.2)$$

порядка ω . Как следует из леммы 7 [1, гл. 3, § 4], существует такая фундаментальная матрица решений $(x_{\bar{\kappa},\eta}(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega; \eta=1, \dots, \omega}$ системы (3.2), что если обозначить

$$R_{\eta}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\eta}(z), \quad n \geq 0, \quad \eta = 1, \dots, \omega,$$

то

$$R_{\eta}^{[n]}(z) \equiv 0, \quad n \geq 0, \quad \eta = \tilde{\omega} + 1, \dots, \omega. \quad (3.3)$$

Положим, следуя обозначениям § 1,

$$\Lambda(z) = \det(x_{\bar{\kappa},\eta})_{\bar{\kappa} \in \Omega; \eta=1, \dots, \omega},$$

$$\lambda(\tilde{\Omega}; z) = \det(x_{\bar{\kappa}',\eta})_{\bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}; \eta=\tilde{\omega}+1, \dots, \omega}, \quad \tilde{\Omega} \subset \Omega, \quad \text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$$

(считаем $\lambda(\Omega; z) = 1$ в случае $\tilde{\omega} = \omega$).

ЛЕММА 3.2. *В случае $M > M'$ существует множество $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$, содержащее Ω^* , такое, что $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{\omega} = \omega$, то достаточно положить $\tilde{\Omega} = \Omega$. Поэтому интересным представляется только случай $\tilde{\omega} < \omega$.

Пусть утверждение леммы неверно и $\lambda(\tilde{\Omega}; \alpha) = 0$ для любого $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega} \supset \Omega^*$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$. Это означает, что ранг числовой матрицы

$$(x_{\bar{\kappa},\eta}(\alpha))_{\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Omega^*; \eta=\tilde{\omega}+1, \dots, \omega}$$

меньше $\omega - \tilde{\omega}$ и существует такая нетривиальная линейная числовая комбинация $(x_{\bar{\kappa}}^*(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega}$ столбцов матрицы

$$(x_{\bar{\kappa},\eta}(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega; \eta=\tilde{\omega}+1, \dots, \omega},$$

что

$$x_{\bar{\kappa}}^*(\alpha) = 0, \quad \bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Omega^*. \quad (3.4)$$

Таким образом, столбец $(x_{\bar{\kappa}}^*(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega}$ является нетривиальным решением системы (3.2), причем согласно (3.3) выполнено

$$\sum_{\bar{\kappa} \in \Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}}^*(z) \equiv 0, \quad n \geq 0. \quad (3.5)$$

Пространство решений системы (3.2), удовлетворяющее условиям (3.4), имеет размерность ω^* . Ту же размерность имеет пространство, порожденное решениями

$$x_{\bar{\kappa}}(z) = A_{\bar{u}} \bar{\varphi}^{\bar{\kappa}}(z), \quad A_{\bar{u}} \in \mathbb{C}, \quad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in U, \quad (3.6)$$

системы (3.2), где участвующие функции (0.7) удовлетворяют системе (0.6) и условиям (0.8). В то же время решения вида (3.6) удовлетворяют условиям (3.4). Поэтому верно и обратное. Таким образом, полученное решение $(x_{\bar{\kappa}}^*(z))_{\bar{\kappa} \in \Omega}$ представимо в виде

$$x_{\bar{\kappa}}^*(z) = A_{\bar{u}} \bar{\varphi}^{\bar{\kappa}}(z), \quad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in U, \quad (3.7)$$

с некоторыми фиксированными постоянными $A_{\bar{u}} \in \mathbb{C}$.

Поскольку решение (3.7) системы (3.2) нетривиально, $A_{\bar{u}'} \neq 0$ для некоторого $\bar{u}' \in U$. С другой стороны,

$$\sum_{\bar{u} \in U} A_{\bar{u}} \sum_{\bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \bar{\varphi}^{\bar{\kappa}}(z) \equiv 0, \quad n \geq 0,$$

согласно (3.5), откуда

$$P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \equiv 0, \quad n \geq 0, \quad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}'}, \quad (3.8)$$

ввиду однородной алгебраической независимости функций (0.7) над $\mathbb{C}(z)$.

Так как $\tilde{\omega} \geq 1$, существуют мультииндексы $\bar{s} \in \Theta$ такие, что среди многочленов

$$P_{\bar{s}-\bar{r}}^{[n]}(z), \quad n \geq 0, \quad |\bar{r}| = u_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

есть ненулевые. Выберем среди таких $\bar{s}$ мультииндекс $\bar{s}'$ с наибольшей суммой $s'_{11} + s'_{21} + \dots + s'_{m1}$. Тогда в каждой форме

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}'}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{u} \in U} \sum_{\substack{\bar{r}=(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m) \\ |\bar{r}_i|=u_i, i=1, \dots, m}} \prod_{i=1}^m \frac{u_i!}{r_{i1}! \dots r_{im_i}!} P_{\bar{s}'-\bar{r}}^{[n]}(z) \bar{f}^{\bar{r}}(z) \\ &= \sum_{\bar{u} \in U} P_{\mathcal{J}_{\bar{s}'}(\bar{u})}^{[n]}(z) f_{11}^{u_1}(z) f_{21}^{u_2}(z) \dots f_{m1}^{u_m}(z), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

участвует не более ω^* многочленов. Через $\tilde{\omega}'$ обозначим ранг совокупности форм (3.9) над $\mathbb{C}(z)$. Ввиду выбора $\bar{s}'$ имеем $\tilde{\omega}' \geq 1$, а согласно (3.8) $\tilde{\omega}' < \omega^*$. Таким образом, для некоторого непустого подмножества

$$\tilde{\Omega}' \subset \Omega' = \bigcup_{\bar{u} \in U} \{\mathcal{J}_{\bar{s}'}(\bar{u})\}, \quad \text{Card } \tilde{\Omega}' = \tilde{\omega}',$$

и рациональных функций

$$D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z), \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}', \quad \bar{\kappa}' \in \Omega' \setminus \tilde{\Omega}',$$

выполняются равенства

$$P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z), \quad n \geq 0, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega' \setminus \tilde{\Omega}'. \quad (3.10)$$

Это означает, что существует $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{Card } \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$, содержащее $\tilde{\Omega}'$, такое, что с рациональными функциями

$$D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z), \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}, \quad (3.11)$$

справедливы равенства

$$R_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z), \quad n \geq 0, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega};$$

при этом

$$D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'} = 0, \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}', \quad \bar{\kappa}' \in \Omega' \setminus \tilde{\Omega}'.$$

Рассуждая также, как и в работе [8, § 3] при доказательстве леммы 3.3, с помощью аналога леммы 3.1 и леммы 3.2 можно показать, что для рациональных функций (3.11) существует представление

$$D_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) = \frac{B_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z)}{B(z)}, \quad B, B_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'} \in \mathbb{C}[z], \quad B \neq 0, \quad (3.12)$$

$$\deg B \leq C_8 \omega N, \quad \deg B_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'} \leq C_8 \omega N, \quad \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \tilde{\Omega},$$

где постоянная C_8 зависит только от совокупности функций (0.9).

Таким образом, для некоторого множества $\mathcal{N} \subset \{0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1\}$, $\text{Card } \mathcal{N} = \tilde{\omega}'$, выполнено

$$\Delta(z) = \det(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z))_{n \in \mathcal{N}; \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'} \neq 0,$$

и согласно оценкам (2.10) находим, что

$$\deg \Delta < \tilde{\omega}' M + \omega^2 t. \quad (3.13)$$

Из представления (3.12) и равенств (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} B(z) R_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) B(z) \bar{f}^{\bar{s}' - \bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega' \setminus \tilde{\Omega}'} P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) B(z) \bar{f}^{\bar{s}' - \bar{\kappa}'}(z) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \left(B(z) \bar{f}^{\bar{s}' - \bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}' \in \Omega' \setminus \tilde{\Omega}'} B_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'}(z) \bar{f}^{\bar{s}' - \bar{\kappa}'}(z) \right) \\ &= \sum_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \tilde{x}_{\bar{\kappa}}(z), \quad n \in \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где функции $\tilde{x}_{\bar{\kappa}} \in \mathbb{C}[z, f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1}]$, $\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'$, имеют степень не выше $C_8\omega N$ по z и степень d по группе $f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1}$. Кроме того, $\tilde{x}_{\bar{\kappa}} \not\equiv 0$, $\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'$, поскольку $B(z) \not\equiv 0$, а функции (0.11), входящие в формы $\tilde{x}_{\bar{\kappa}}$, $\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. По теореме 1 [9] (и замечанию к ней на случай алгебраической зависимости функций (0.9)) порядок нуля каждой из функций $\tilde{x}_{\bar{\kappa}}(z)$ в точке $z = 0$ не превосходит

$$C_9(C_8\omega N + 1)d^{m_1+\dots+m_m} < C_{10}\omega N.$$

По построению множество $\tilde{\Omega}'$ пересекается с каждым множеством $\Omega_{\bar{u}}$, $\bar{u} \in U$, не более чем по одному элементу. Положим

$$U' = \{\bar{u} : \tilde{\Omega}' \cap \Omega_{\bar{u}} \neq \emptyset\} \subset U, \quad \text{Card } U' = \tilde{\omega}'.$$

Пусть $\bar{u}^* \in U$ таково, что $M = M_{\bar{u}^*}$. Если $\bar{u}^* \in U'$, то положим $\bar{r} = \tilde{\Omega}' \cap \Omega_{\bar{u}^*}$, в противном случае считаем $\bar{r}$ некоторым элементом множества $\tilde{\Omega}'$. В обоих случаях множество

$$U'' = \{\bar{u} : \tilde{\Omega}' \setminus \{\bar{r}\} \cap \Omega_{\bar{u}} \neq \emptyset\} \subset U', \quad \text{Card } U'' = \text{Card } U' - 1 = \tilde{\omega}' - 1,$$

не содержит $\bar{u}^*$.

Умножим теперь матрицу

$$(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z))_{n \in \mathcal{N}; \bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'},$$

определитель которой равен $\Delta(z)$, справа на матрицу

$$(\tilde{x}_{\bar{\kappa}}(z) \mid \delta_{\bar{\kappa}, \bar{\kappa}'})_{\bar{\kappa} \in \tilde{\Omega}'; \bar{\kappa}' \in \tilde{\Omega}' \setminus \{\bar{r}\}},$$

определитель которой равен $\tilde{x}_{\bar{r}}$. Полученная в результате этого умножения матрица

$$(B(z)R_{\bar{s}'}^{[n]}(z) \mid P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z))_{n \in \mathcal{N}; \bar{\kappa}' \in \tilde{\Omega}' \setminus \{\bar{r}\}}$$

согласно (3.14) будет иметь ненулевой определитель $\Delta(z)\tilde{x}_{\bar{r}}(z)$. В первом столбце этой матрицы стоят функциональные формы, порядок нуля которых в точке $z = 0$ в соответствии с оценками (2.12) не ниже $K - \tilde{\omega}$; порядок нуля в точке $z = 0$ многочленов $P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z)$, $n \in \mathcal{N}$, согласно (2.11) не ниже $M - M_{\bar{u}} - \tilde{\omega}$, $\bar{\kappa}' \in \Omega_{\bar{u}}$, $\bar{\kappa}' \in \tilde{\Omega}' \setminus \{\bar{r}\}$. Поэтому

$$\text{ord}_{z=0} \Delta \tilde{x}_{\bar{r}} \geq K + \sum_{\bar{u} \in U''} (M - M_{\bar{u}}) - \tilde{\omega}' \cdot \tilde{\omega} > K + \sum_{\bar{u} \in U''} (M - M_{\bar{u}}) - \omega^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_{z=0} \Delta &> K + \sum_{\bar{u} \in U''} (M - M_{\bar{u}}) - \omega^2 - \operatorname{ord}_{z=0} \tilde{x}_{\bar{r}} \\
&> K + \sum_{\bar{u} \in U''} (M - M_{\bar{u}}) - \omega^2 - C_{10}\omega N \\
&\geq \operatorname{Card} U'' \cdot M + \sum_{\bar{u} \in U \setminus U''} M_{\bar{u}} - 2\varepsilon M - \omega^2 - C_{10}\omega N \\
&= \tilde{\omega}' M + \sum_{\substack{\bar{u} \in U \setminus U'' \\ \bar{u} \neq \bar{u}^*}} M_{\bar{u}} - 2\varepsilon M - \omega^2 - C_{10}\omega N.
\end{aligned}$$

Сопоставляя последнюю оценку с неравенством (3.13), заключаем, что

$$\sum_{\substack{\bar{u} \in U \setminus U'' \\ \bar{u} \neq \bar{u}^*}} M_{\bar{u}} < 2\varepsilon M + \omega^2(t+1) + C_{10}\omega N < 3\varepsilon M$$

для всех $M > M'$. Суммирование в левой части последнего неравенства происходит по непустому множеству, поскольку $\operatorname{Card} U'' = \tilde{\omega}' - 1 \leq \omega^* - 2 = \operatorname{Card} U - 2$. С другой стороны, $M_{\bar{u}} \geq 3\varepsilon M$ для всех $\bar{u} \in U$ согласно определению параметров построения, что противоречит последнему неравенству.

Тем самым, исходное предположение является ложным, а следовательно, выполнено утверждение леммы 3.2.

Для выбранного в соответствии с леммой 3.2 множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\operatorname{Card} \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}$, обозначим $\Delta(z) = \det(P_{\tilde{\kappa}}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1;\tilde{\kappa} \in \tilde{\Omega}}$. По лемме 1.3 $\Delta(z) \neq 0$. Кроме того, если в матрице, соответствующей определителю $\Delta(z)$, некоторый столбец заменить с помощью невырожденного линейного преобразования на столбец $(R_{\tilde{s}^*}^{[n]}(z))_{n=0,1,\dots,\tilde{\omega}-1}$, то согласно оценкам (2.12) мы получим, что

$$\operatorname{ord}_{z=0} \Delta(z) > K - \tilde{\omega} \geq M. \quad (3.15)$$

Подставляя оценки (2.10), (2.13) и (3.15) в лемму 1.6, получим, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_{z=\alpha} \Delta(z) &< \frac{2\tilde{\omega}}{\log M} \left(\log \left((C_1 N)^{\tilde{\omega}} \frac{(M + t\tilde{\omega} - 1)!}{(M - 1)!} C_0^{M/\varepsilon} \right) + 2(M + t\tilde{\omega} - 1)(1 + \log \tilde{\omega}) \right) \\
&\leq \frac{2\omega}{\log M} \left(\omega \log(C_1 N) + t\omega \log(2M) + \frac{M}{\varepsilon} \log C_0 + 2(M + t\omega)(1 + \log \omega) \right) \\
&\leq \frac{C_{11}\omega M}{\varepsilon \log M} \leq C_7 \varepsilon M, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

поскольку

$$\frac{\omega}{\varepsilon \log M} \asymp \varepsilon$$

в силу выбора (2.2).

Для завершения доказательства предложения 3.1 остается подставить оценку (3.16) в лемму 1.3 и воспользоваться тем, что $\Omega^* \subset \tilde{\Omega}$.

Арифметические свойства числовых форм. В этом пункте мы подытожим полученные результаты и, следуя работе А. Бейкера [3], осуществим доказательство теоремы II.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть система линейных однородных дифференциальных уравнений (0.5) лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$, функции (0.11) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и $M > M'$. Тогда существуют целые числа $\rho_{\bar{u}}^{[n]}$, удовлетворяющие оценкам

$$|\rho_{\bar{u}}^{[n]}| < M^{M_{\bar{u}} + C_{12}\varepsilon M}, \quad n = 1, \dots, \text{Card } U, \quad \bar{u} \in U, \quad (3.17)$$

такие, что для числовых форм

$$\xi^{[n]} = \sum_{\bar{u} \in U} \rho_{\bar{u}}^{[n]} F_{\bar{u}}(\alpha) = \sum_{\bar{u} \in U} \rho_{\bar{u}}^{[n]} f_{11}^{u_1}(\alpha) f_{21}^{u_2}(\alpha) \cdots f_{m1}^{u_m}(\alpha), \quad n = 1, \dots, \text{Card } U, \quad (3.18)$$

справедливы оценки

$$|\xi^{[n]}| < M^{-\sum_{\bar{u} \in U} M_{\bar{u}} + M + C_{13}\varepsilon M}, \quad n = 1, \dots, \text{Card } U, \quad (3.19)$$

и, кроме того,

$$\det(\rho_{\bar{u}}^{[n]})_{n=1, \dots, \text{Card } U; \bar{u} \in U} \neq 0. \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предложением 3.1: существуют целые числа $\nu_1, \dots, \nu_{\omega^*}$, $0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_{\omega^*} \leq \omega + [C_7\varepsilon M] < C_2\varepsilon M$, $\omega^* = \text{Card } U$, такие, что

$$\det(P_{\bar{\kappa}}^{[\nu_n]}(\alpha))_{n=1, \dots, \omega^*; \bar{\kappa} \in \Omega^*} \neq 0.$$

Пусть $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Для целых чисел

$$\rho_{\bar{u}}^{[n]} = b^{M+t\nu_n} (M+t\nu_n)! P_{\mathcal{J}_{\bar{s}^*}(\bar{u})}^{[n]}(\alpha), \quad n = 1, \dots, \omega^*, \quad \bar{u} \in U,$$

согласно оценке (2.14) имеем

$$\begin{aligned} |\rho_{\bar{u}}^{[n]}| &< b^{M+t\nu_n} (M+t\nu_n)! \sum_{\mu=\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu_n\}}^{M+t\nu_n-1} \frac{M^{C_3\varepsilon M}}{\mu!} |\alpha|^\mu \\ &< b^{M+tC_2\varepsilon M} |a|^M e^{|\alpha|} (2e)^M (2M)^{(t+1)C_2\varepsilon M} M^{M_{\bar{u}}} \\ &\leq M^{M_{\bar{u}} + C_{12}\varepsilon M}, \quad n = 1, \dots, \omega^*, \quad \bar{u} \in U, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu\}}^{M+t\nu-1} \frac{M^{C_3\varepsilon M}}{\mu!} |\alpha|^\mu &< \frac{|\alpha|^{\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu\}}}{\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu\}!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^\mu}{\mu!} \\
&\leq \frac{|a|^M}{\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu\}!} \cdot e^{|\alpha|}, \\
\frac{(M+t\nu)!}{\max\{0, M-M_{\bar{u}}-\nu\}!} &< \frac{(M+t\nu+\nu)!}{(M-M_{\bar{u}})!} < \frac{(2M)^{M+t\nu+\nu}}{(M-M_{\bar{u}})^{M-M_{\bar{u}}} \cdot e^{-(M-M_{\bar{u}})}} \\
&< \frac{(2M)^{M+t\nu+\nu}}{M^{M-M_{\bar{u}}} \cdot e^{-M}} = (2e)^M (2M)^{(t+1)\nu} M^{M_{\bar{u}}}, \\
\nu &< \frac{M}{t+1}, \quad \bar{u} \in U.
\end{aligned}$$

В последней оценке мы применили неравенство

$$\frac{M^{M-M_{\bar{u}}}}{(M-M_{\bar{u}})^{M-M_{\bar{u}}}} = \left(1 + \frac{M_{\bar{u}}}{M-M_{\bar{u}}}\right)^{M-M_{\bar{u}}} < e^{M_{\bar{u}}}, \quad \bar{u} \in U.$$

Теперь воспользуемся оценкой (2.15) для полученных форм (3.18):

$$\begin{aligned}
|\xi^{[n]}| &= b^{M+t\nu_n} (M+t\nu_n)! |R_{\bar{s}^*}^{[\nu_n]}(\alpha)| < b^{M+tC_2\varepsilon M} (2M)^{M+tC_2\varepsilon M} M^{C_4\varepsilon M-K} \\
&\leq M^{-\sum_{\bar{u} \in U} M_{\bar{u}}+M+C_{13}\varepsilon M}, \quad n = 1, \dots, \omega^*.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ II. Положим

$$\begin{aligned}
C_{14} &= \frac{1}{2} \min_{\bar{u} \in U} \{|F_{\bar{u}}(\alpha)|\}, \\
C_{15} &= \max \left\{ 3, (\omega^* - 2)C_{12} + C_{13} + \frac{1}{\varepsilon(M') \cdot M' \log M'} \log \frac{\omega^*!}{C_{14}} \right\},
\end{aligned}$$

где постоянные M', C_{12}, C_{13} определены в предложении 3.3, $\omega^* = \text{Card } U$ и

$$\varepsilon = \varepsilon(M) \asymp (\log M)^{-1/(m_1+\dots+m_m-m+2)} \quad (3.21)$$

определяется из равенств (2.2). Тогда при всех $M > M'$ будут справедливы неравенства $C_{15} \geq 3$ и

$$\omega^*! M^{(\omega^*-2)C_{12}\varepsilon M + C_{13}\varepsilon M - C_{15}\varepsilon M} \leq C_{14}. \quad (3.22)$$

Для заданной числовой формы

$$r = \sum_{\bar{u} \in U} h_{\bar{u}} F_{\bar{u}}(\alpha), \quad h_{\bar{u}} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \bar{u} \in U, \quad (3.23)$$

обозначим через M наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$M^{(1-C_{15}\varepsilon)M} \geq H = \max_{\bar{u} \in U} \{|h_{\bar{u}}|\} \geq 3. \quad (3.24)$$

Тогда для всех $M > M''$ выполнено $H > M^{M/2}$ и, в частности,

$$\log \log H > \log M + \log \log M - \log 2 > \log M,$$

откуда и из (3.21)

$$\varkappa = \varkappa(H) = (\log \log H)^{-1/(m_1 + \dots + m_m - m + 2)} > C_{16}\varepsilon.$$

Следовательно, при $M > M''$ справедлива оценка

$$M^{\varepsilon M} < H^{2\varepsilon} < H^{2\varkappa/C_{16}}. \quad (3.25)$$

Возьмем $\bar{u}^* \in U$ таким образом, что $H = |h_{\bar{u}^*}|$, и положим $M_{\bar{u}^*} = M$. Целые числа $M_{\bar{u}}$, $\bar{u} \neq \bar{u}^*$, выберем так, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$M_{\bar{u}} \geq \frac{\log |h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M > M_{\bar{u}} - 1, \quad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}, \quad (3.26)$$

откуда, в частности,

$$M_{\bar{u}} \geq \frac{\log |h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M \geq C_{15}\varepsilon M \geq 3\varepsilon M, \quad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}. \quad (3.27)$$

Из условий (3.24) и (3.26) следует, что

$$M \geq \frac{\log H}{\log M} + C_{15}\varepsilon M \geq \frac{\log |h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M > M_{\bar{u}} - 1, \quad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\},$$

откуда

$$M = M_{\bar{u}^*} = \max_{\bar{u} \in U} \{M_{\bar{u}}\}. \quad (3.28)$$

Условия (3.27) и (3.28) обеспечивают выбор (2.2). Кроме того, можно считать $M > M'$ и $M > M''$, поскольку форм (3.23), для которых $M \leq \max\{M', M''\}$, только конечное количество, а значит, для них верна оценка теоремы. Итак, можно воспользоваться предложением 3.3. Формы (3.18) согласно условию (3.20) линейно независимы. Поэтому среди них можно выбрать $m - 1$ форму, для определенности $\xi^{[2]}, \dots, \xi^{[\omega^*]}$, так, что формы $r, \xi^{[2]}, \dots, \xi^{[\omega^*]}$ будут линейно независимы. Из целых коэффициентов этих форм составим определитель

$$\tau = \det \begin{pmatrix} h_{\bar{u}} \\ \rho_{\bar{u}}^{[2]} \\ \vdots \\ \rho_{\bar{u}}^{[\omega^*]} \end{pmatrix}_{\bar{u} \in U},$$

отличный от нуля ввиду линейной независимости форм (3.23) и (3.18). Поскольку $\tau \in \mathbb{Z}$, имеем $|\tau| \geq 1$. В матрице, соответствующей определителю τ , к столбцу с номером $\bar{u}^*$, домноженному на $F_{\bar{u}^*}(\alpha)$, прибавим остальные столбцы с номерами $\bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}$, домноженные на $F_{\bar{u}}(\alpha)$ соответственно. Определитель получившейся матрицы равен $\tau F_{\bar{u}^*}(\alpha)$, а с другой стороны, его можно представить в виде

$$\tau_1 r + \sum_{n=2}^{\omega^*} \tau_n \xi^{[n]},$$

где τ_n – алгебраическое дополнение элемента n -й строки и столбца с номером $\bar{u}^*$ в τ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |\tau_1| \cdot |r| &= \left| \tau F_{\bar{u}^*}(\alpha) - \sum_{n=2}^{\omega^*} \tau_n \xi^{[n]} \right| \geq |\tau| \cdot |F_{\bar{u}^*}(\alpha)| - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| \\ &\geq |F_{\bar{u}^*}(\alpha)| - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| \geq 2C_{14} - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}|. \end{aligned} \quad (3.29)$$

С помощью оценок (3.17) и поскольку

$$|h_{\bar{u}}| \leq M^{M_{\bar{u}} - C_{15}\varepsilon M}, \quad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\},$$

из (3.26), находим

$$\begin{aligned} |\tau_1| &< (\omega^* - 1)! \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} M^{M_{\bar{u}} + C_{12}\varepsilon M}, \\ |\tau_n| &< (\omega^* - 1)! \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} M^{M_{\bar{u}}} \cdot M^{(\omega^* - 2)C_{12}\varepsilon M - C_{15}\varepsilon M}, \quad n = 2, \dots, \omega^*, \end{aligned} \quad (3.30)$$

откуда согласно (3.19) и (3.22) имеем

$$|\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| < (\omega^* - 1)! M^{(\omega^* - 2)C_{12}\varepsilon M - C_{15}\varepsilon M + C_{13}\varepsilon M} \leq \frac{C_{14}}{\omega^*}, \quad n = 2, \dots, \omega^*.$$

Подставляя последнее неравенство в (3.29), имеем

$$|\tau_1| \cdot |r| > 2C_{14} - (\omega^* - 1) \frac{C_{14}}{\omega^*} > C_{14},$$

откуда, используя (3.25), (3.26), (3.30), находим

$$\begin{aligned} |r| &> C_{14} |\tau_1|^{-1} > \frac{C_{14}}{(\omega^* - 1)!} \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} (|h_{\bar{u}}| M^{C_{15}\varepsilon M + 1 + C_{12}\varepsilon M})^{-1} \\ &> \frac{C_{14}}{(\omega^* - 1)!} \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} |h_{\bar{u}}|^{-1} \cdot H^{-2(\omega^* - 1)(C_{15} + 1 + C_{12})\varkappa / C_{16}}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в точности означает оценку теоремы II с $C = C_{14}/(\omega^* - 1)!$ и $\gamma = 2(\omega^* - 1)(C_{15} + 1 + C_{12})/C_{16}$.

Список литературы

1. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
2. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
3. *Baker A.* On some diophantine inequalities involving the exponential function // *Canad. J. Math.* 1965. V. 17. № 4. P. 616–626.
4. *Siegel C. L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // *Abh. Preuss. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 1929–1930. № 1. P. 1–70.
5. *Макаров Ю. Н.* Об оценках меры линейной независимости значений E -функций // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1978. № 2. С. 3–12.
6. *Lang S.* Introduction to Transcendental Numbers. Reading: Addison Wesley Publishing Co., 1966.
7. *Chudnovsky G. V.* On some applications of diophantine approximations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
8. *Зудилин В. В.* О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 4. С. 89–124.
9. *Нестеренко Ю. В.* Оценки числа нулей функций некоторых классов // *Acta Arith.* 1989. Т. 53. № 1. С. 29–46.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ipsun.ras.ru

Поступила в редакцию
14.12.1995