Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, О вполне геодезических вложениях 7-мерных многообразий в 13-мерные многообразия положительной секционной кривизны, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 12, 121–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:26:50

УДК 515.165.7

И. А. Тайманов

**О вполне геодезических вложениях 7-мерных
многообразий в 13-мерные многообразия
положительной секционной кривизны**

В статье построены вполне геодезические вложения бесконечной серии 7-мерных многообразий в 13-мерные многообразия положительной секционной кривизны. Изучена топология этих вложений и обсуждена возможность построения новых многомерных примеров многообразий положительной кривизны.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение, основные результаты

К настоящему времени известно довольно мало примеров замкнутых гладких многообразий, на которых существуют римановы метрики положительной секционной кривизны. Среди нечетномерных односвязных многообразий известные примеры исчерпываются сферами и 7- и 13-мерными многообразиями, построенными Берже [1], Алоффом и Уоллахом [2], Эшенбургом [3], [4] и Базайкиным [5]. На данных многообразиях конкретные примеры таких метрик были построены методами теории групп Ли.

Многообразия Берже и Алоффа–Уоллаха являются однородными, т.е. имеют вид G/H , где G и $H \subset G$ – группы Ли, а многообразия Эшенбурга и Базайкина – пространствами двойных частных, т.е. фактор-пространствами групп Ли G по двусторонним изометрическим действиям некоторых иных групп Ли $H \subset G \times G$. Метод, примененный в [3], [5], впервые был предложен Громоллом и Майером при построении метрики неотрицательной секционной кривизны на экзотической семимерной сфере [6]. Заметим, что построенная ими метрика до сих пор остается единственным известным примером метрики такого типа, хотя попарно не диффеоморфные, но гомеоморфные многообразия положительной секционной кривизны были найдены Креком и Штольцем среди многообразий Алоффа–Уоллаха [7].

Взаимосвязь этих примеров до сих пор не исследовалась, хотя в результате прямых вычислений было обнаружено “странное” совпадение заземленности метрик нормально однородного 13-мерного пространства Берже [1] и однородного 7-мерного пространства Алоффа–Уоллаха $N_{1,1,-1/2}$ (см. [2]). Заземленность метрик (отношение минимальной и максимальной секционных кривизн по двумерным направлениям) на них равна $\frac{16}{29.37}$, как это было установлено Хайнтце для пространства Берже [8] и Хуангом для пространства Алоффа–Уоллаха [9]. Многообразия

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01889).

Эшенбурга и Базайкина являются неоднородными, что затрудняет вычисление защемленностей метрик на них. Среди них выделены такие серии многообразий M_j , что при $j \rightarrow \infty$ защемленности метрик стремятся к $\frac{16}{29 \cdot 37}$ (см. [3], [10]).

В данной статье мы

– построим такую изометрическую инволюцию на 13-мерном пространстве Берже B^{13} , что одна из компонент множества неподвижных точек этой инволюции изометрична многообразию Алоффа–Уоллаха $N_{1,1,-1/2}$. Более того, максимум и минимум секционных кривизн пространства B^{13} достигаются на плоскостях, касательных к данному вполне геодезическому многообразию $N_{1,1,-1/2}$, что и объясняет совпадение их защемленностей (теорема 1);

– построим на каждом 13-мерном пространстве Базайкина изометрическую инволюцию, для которой одна из компонент множества неподвижных точек будет совпадать с “отвечающим” этому 13-мерному пространству 7-мерным многообразием Эшенбурга (теорема 2);

– опишем топологию пространств B^{13} и $N_{1,1,-1/2}$ и обсудим возможность продолжения вложения $N_{1,1,-1/2}$ в B^{13} до башни вполне геодезических вложений (вопрос 2).

Мы избегаем во введении изложения технических деталей, которые однако указывают на большое родство 7-мерных пространств Алоффа–Уоллаха и Эшенбурга и 13-мерных пространств Берже и Базайкина, реализуемое, в частности, вполне геодезическими вложениями. Эти наблюдения и побудили нас сформулировать некоторые предположения (см. вопрос 1).

Автор благодарит У. Абреша и В. Майера, обративших его внимание на интересное совпадение защемленностей для многообразий Берже и Алоффа–Уоллаха. Объяснение этого факта и явилось исходным пунктом этой работы. Автор благодарит рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста.

Обозначения. Прежде, чем переходить к изложению результатов, вкратце остановимся на используемых нами обозначениях.

Мы будем отождествлять группы Ли $U(n)$ с группами, образованными $(n \times n)$ -матрицами A такими, что

$$A \cdot I_n \cdot A^* = I_n,$$

где I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица и $A_{ij}^* = \overline{A_{ji}}$. Мы будем рассматривать группы $SU(n)$ как подгруппы $U(n)$, образованные матрицами с единичным определителем. Под $Sp(2)$ мы будем понимать подгруппу $SU(4)$, состоящую из матриц, удовлетворяющих условию

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}^t = A_{ji}$. Более того, мы будем также рассматривать $Sp(2)$ как подгруппу $SU(5)$, образованную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(5), \quad A \in Sp(2) \subset SU(4).$$

Алгебры Ли этих групп мы тоже будем естественным образом отождествлять с матричными.

Через $T_{\bar{p}}$ мы обозначим подгруппу $U(5)$, образованную диагональными матрицами вида $\text{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}, z^{p_4}, z^{p_5})$, где $|z| = 1$ и $p_1, \dots, p_5$ — неотрицательные целые числа. В случае, когда $\bar{p} = (1, 1, 1, 1, -4)$ или $\bar{p} = (1, 1, 1, 1, 0)$, мы обозначим эти подгруппы через T и T_0 , соответственно.

§ 2. Многообразие положительной секционной кривизны размерностей 7 и 13

Прежде всего, напомним известные примеры 7- и 13-мерных односвязных многообразий, допускающих метрики положительной секционной кривизны.

1) 7-мерные многообразия.

1.1) 7-мерное пространство Берже [1].

Это пространство изометрично фактор-пространству $\text{Sp}(2)/\text{SU}(2)$, где группа $\text{Sp}(2)$ оснащена стандартной двусторонне инвариантной метрикой, а вложение $\text{SU}(2) \subset \text{Sp}(2)$, в свою очередь, не является стандартным. Мы не будем обсуждать это пространство и будем рассматривать его как исключительное с точки зрения наших конструкций.

1.2) Пространства Алоффа–Уоллаха [2].

Обозначим через $T_{k,l}$ подгруппу $\text{SU}(3)$, образованную диагональными матрицами вида $\text{diag}(z^k, z^l, z^{-(k+l)})$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = U(2)$ группы $\text{SU}(3)$, заданную следующим образом:

$$G_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in U(2),$$

и обозначим через g_1 ее алгебру Ли. Через $f_{k,l}$ обозначим алгебру Ли группы $T_{k,l}$, вложенную в алгебру Ли группы $\text{SU}(3)$. Можно заметить, что $f_{k,l}$ порождена диагональными матрицами $\text{diag}(2\pi\sqrt{-1}k, 2\pi\sqrt{-1}l, -2\pi\sqrt{-1}(k+l))$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ двусторонне инвариантную метрику Киллинга на группе $\text{SU}(3)$.

Определим однородную метрику на фактор-пространстве $N_{k,l} = \text{SU}(3)/T_{k,l}$ следующей формулой:

$$\langle x, y \rangle = (1+t)\langle x_1, y_1 \rangle_0 + \langle x_2, y_2 \rangle_0, \quad (1)$$

где $x_i, y_i \in V_i$ и $f_{k,l}^\perp = V_1 \oplus V_2$ — ортогональное разложение, $V_1 = f_{k,l}^\perp \cap g_1$ и $V_2 = g_1^\perp$. Полученное риманово многообразие обозначим через $N_{k,l,t}$.

Алофф и Уоллах показали, что если целые числа k и l одного и того же знака, то при $-1 < t < 0$ эти многообразия $N_{k,l,t}$ имеют положительную секционную кривизну.

1.3) Пространства Эшенбурга [3], [4].

Эти пространства обобщают пространства Алоффа–Уоллаха и имеют вид $T_{k_1, k_2, k_3} \backslash \text{SU}(3)/T_{l_1, l_2, l_3}$, где $T_{k_1, k_2, k_3} = \text{diag}(z^{k_1}, z^{k_2}, z^{k_3})$, $|z| = 1$. Для надлежащим образом выбранных троек целых чисел (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_2, l_3) мы получаем свободное действие на группе $\text{SU}(3)$, фактор-пространство которого допускает метрику положительной секционной кривизны. Эти многообразия содержат первые известные примеры многообразий положительной секционной кривизны, которые негомеоморфны однородным.

2) 13-мерные многообразия.

2.1) 13-мерное пространство Берже [1].

Это многообразие B^{13} изометрично фактор-пространству $SU(5)/(Sp(2) \times T)$, где $SU(5)$ наделено двусторонне инвариантной метрикой Киллинга.

2.2) Пространства Базайкина [5].

Эти пространства $M_{\overline{P}}^{13}$ имеют вид $T_{\overline{P}} \setminus U(5)/(Sp(2) \times T_0)$ и обобщают на 13-мерный случай пространства Эшенбурга. Если пространства Эшенбурга в некотором смысле можно рассматривать как “деформации” пространства Алоффа–Уоллаха, то пространства Базайкина, по аналогии, можно рассматривать как “деформации” пространства Берже B^{13} .

Если для всех подстановок $\tau \in S_5$ выполняются следующие условия:

- а) $p_{\tau(1)} + p_{\tau(2)} - p_{\tau(3)} - p_{\tau(4)}$ взаимно просто с $p_{\tau(5)}$;
- б) $p_{\tau(1)} + p_{\tau(2)} + p_{\tau(3)} > p_{\tau(4)} + p_{\tau(5)}$;
- в) $p_{\tau(1)} + p_{\tau(2)} + p_{\tau(3)} + p_{\tau(4)} > 3p_{\tau(5)}$;
- г) $3(p_{\tau(1)} + p_{\tau(2)}) > p_{\tau(3)} + p_{\tau(4)} + p_{\tau(5)}$,

то многообразие $M_{\overline{P}}^{13} = T_{\overline{P}} \setminus U(5)/(Sp(2) \times T_0)$ допускает метрику положительной секционной кривизны.

Мы также заметим, что эти метрики могут быть выбраны индуцированными из метрики на $U(5)$ при факторизации, и при этом метрика на $U(5)$ может быть выбрана левоинвариантной по отношению к действию всей группы $U(5)$ и правоинвариантной по отношению к действию подгруппы $U(4) \times U(1)$, образованной блочными матрицами с 4×4 - и 1×1 -блоками. В дальнейшем мы будем считать, что эти многообразия оснащены такими метриками, построенными в [5].

§ 3. Изометрическая инволюция на 13-мерном пространстве Берже. Теорема 1

Перейдем теперь к нашей основной конструкции.

Положим

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и определим следующее отображение:

$$\sigma: U(5) \rightarrow U(5) : A \rightarrow S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Следующие утверждения очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство $\sigma(G) = G$ для $G = SU(5)$, $Sp(2)$, $T_{\overline{P}}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение σ^2 – тождественно, т.е. σ является инволюцией.*

Матрица S задает элемент группы $SU(5)$. При построении 13-мерного пространства Берже метрика на $SU(5)$ берется двусторонне инвариантной [1], а при

построении пространств Базайкина метрика на $U(5)$ берется левоинвариантной по отношению к действию всей группы $U(5)$ и правоинвариантной по отношению к действию подгруппы $U(4) \times U(1)$ (см. [5]). Так как $S \in SU(5) \cap U(4) \times U(1) \subset U(5)$, то инволюция $X \rightarrow S \cdot X \cdot S^{-1}$ является изометрией на группах $SU(5)$ и $U(5)$, оснащенных указанными выше метриками. Согласно предложению 1 эта инволюция сохраняет слои римановых субмерсий $SU(5) \rightarrow B^{13}$ и $U(5) \rightarrow M_P^{13}$ и потому верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Инволюция σ порождает изометрические инволюции на пространствах B^{13} и M_P^{13} .*

Рассмотрим сначала действие этой инволюции на пространстве Берже B^{13} .

ТЕОРЕМА 1. *Подмногообразие $W^7 \subset B^{13}$, определенное как компонента множества неподвижных точек инволюции $\sigma: B^{13} \rightarrow B^{13}$, содержащая орбиту единицы группы $SU(5)$, является вполне геодезическим подмногообразием пространства Берже B^{13} и изометрично многообразию Алоффа–Уоллаха $N_{1,1,-1/2}$. При этом секционная кривизна пространства Берже B^{13} достигает своих минимальных и максимальных значений на плоскостях, касательных к W^7 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Топология множества неподвижных точек инволюции $\sigma: SU(5) \rightarrow SU(5)$ и определение W^7 . Прямыми вычислениями легко показать, что если матрица $X \in U(5)$ неподвижна под действием инволюции σ , то она имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $X_1 \in U(2)$ и $X_2 \in U(3)$. Обозначим множество неподвижных точек инволюции $\sigma: SU(5) \rightarrow SU(5)$ через $F(\sigma)$ (оно выделяется условием $\det X_1 \cdot \det X_2 = 1$).

Мы определим многообразие W^7 как образ $F(\sigma) \subset SU(5)$ при факторизации

$$F(\sigma) \subset SU(5) \rightarrow SU(5)/(Sp(2) \times T).$$

2) Действие σ на касательном пространстве к $1 \in SU(5)$. Мы отождествим касательное пространство к единице группы $SU(5)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(5)$ и рассмотрим ортогональное разложение

$$\mathfrak{su}(5) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{h}$ – касательное пространство к подгруппе $Sp(2) \times T$.

Действие инволюции σ на $\mathfrak{su}(5)$ обозначим тем же символом. Так как $\sigma: \mathfrak{su}(5) \rightarrow \mathfrak{su}(5)$ получается ограничением действия $\text{Ad}_S: \mathfrak{u}(5) \rightarrow \mathfrak{u}(5)$ на подгруппу $\mathfrak{su}(5) \subset \mathfrak{u}(5)$, то оно является изометрией по отношению к форме Киллинга, что, впрочем, можно проверить и прямым вычислением.

Из предложения 1 следует, что

$$\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Так как нас интересует структура множества неподвижных точек при действии на фактор-пространстве B^{13} , то мы ограничимся изучением действия инволюции на $\mathbf{h}^\perp$.

Выберем базис в $\mathbf{h}^\perp$ следующим образом. Обозначим через E_{kl} , где $1 \leq k, l \leq 5$, (5×5) -матрицу $(\delta_{ak}\delta_{bl})_{1 \leq a, b \leq 5}$. Введем матрицы $Q_{kl} = E_{kl} - E_{lk}$, $R_{kl} = \sqrt{-1}(E_{kl} + E_{lk})$ и $P_k = \sqrt{-1}(E_{kk} - E_{55})$.

Следующие матрицы задают ортонормированный базис в $\mathbf{h}^\perp$ (см. [8]):

$$\begin{aligned} M_j &= \sqrt{2}Q_{j5}, \quad M_{j+4} = \sqrt{2}R_{j5}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ M_9 &= Q_{12} - Q_{34}, \quad M_{10} = Q_{14} - Q_{23}, \\ M_{11} &= R_{12} + R_{34}, \quad M_{12} = R_{14} - R_{23}, \quad M_{13} = P_1 - P_2 + P_3 - P_4. \end{aligned}$$

Так как σ действует на $\mathbf{h}^\perp$ изометрически и инволютивно, то существует разложение

$$\mathbf{h}^\perp = V^+ \oplus V^-$$

такое, что

$$\sigma|_{V^\pm} = \pm 1.$$

С помощью прямых вычислений, которые мы опускаем, можно показать, что

$$\sigma(M_k) = \begin{cases} M_k & \text{при } k = 3, 4, 7, 8, 9, 11, 13, \\ -M_k & \text{при } k = 1, 2, 5, 6, 10, 12. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\dim V^+ = 7$ и V^+ порождено векторами $M_3, M_4, M_7, M_8, M_9, M_{11}$ и M_{13} .

3) Многообразие W^7 как компонента множества неподвижных точек инволюции $\sigma: B^{13} \rightarrow B^{13}$.

ЛЕММА 1. Многообразие W^7 — однородное риманово многообразие (с метрикой, индуцированной вложением $W^7 \subset B^{13}$), вполне геодезично вложенное в B^{13} . Причем W^7 диффеоморфно многообразию Алоффа–Уоллаха $N_{1,1}$ и является компонентой множества неподвижных точек инволюции $\sigma: B^{13} \rightarrow B^{13}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Прежде всего покажем, что W^7 является многообразием.

Подмногообразие $F(\sigma)$ состоит из матриц вида (2). Если умножение справа на матрицу из $g \in \text{Sp}(2) \times T$ переводит матрицу вида (2) в матрицу такого же вида, то g имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} A \cdot z & 0 & 0 \\ 0 & \overline{A} \cdot z & 0 \\ 0 & 0 & z^{-4} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $A \in \text{U}(2)$, $|z| = 1$.

Легко заметить, что любую матрицу из $F(\sigma)$ умножением справа на матрицу вида (3) можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $A \in \text{SU}(3)$.

Группа матриц вида (3) содержит подгруппу, образованную матрицами $\text{diag}(1, 1, z^2, z^2, z^{-4})$, $|z| = 1$. Эта подгруппа действует на множестве матриц вида (4) правыми умножениями, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с точками пространства W^7 .

Легко заметить, что W^7 диффеоморфно $N_{1,1} = \text{SU}(3)/T_{1,1}$.

Так как метрика на $\text{SU}(5)$ при построении B^{13} выбирается двусторонне инвариантной, то подгруппа $\text{SU}(3) \subset \text{SU}(5)$, образованная матрицами вида (4), также оснащена двусторонне инвариантной метрикой. Она изометрически действует на W^7 умножениями слева, и мы заключаем, что риманово многообразие W^7 является однородным.

Нам осталось доказать, что W^7 является компонентой множества неподвижных точек инволюции $\sigma: B^{13} \rightarrow B^{13}$.

Из приведенных выше вычислений действия σ на касательном пространстве к единице группы $\text{SU}(5)$ следует, что в окрестности единицы группы $\text{SU}(5)$ (а точнее, в окрестности ее $(\text{Sp}(2) \times T)$ -орбиты) подмногообразие W^7 выделяется как множество неподвижных точек σ . Действие инволюции $\sigma: \text{SU}(5) \rightarrow \text{SU}(5)$ коммутирует с умножениями слева на матрицы вида (2) и любая точка $x \in W^7$ представима такой матрицей согласно определению пространства W^7 . Отсюда заключаем, что W^7 выделяется условием $\sigma(x) = x \in B^{13}$ в окрестности любой своей точки, что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что так как многообразие W^7 является компонентой множества неподвижных точек изометрической инволюции, то оно является вполне геодезическим подмногообразием. Лемма 1 доказана.

4) Однородная метрика на W^7 .

ЛЕММА 2. Риманово многообразие W^7 изометрично многообразию Алоффа–Уоллаха $N_{1,1,-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Прежде всего заметим, что

$$M_9 = -2Q_{34} + v_1, \quad M_{11} = 2R_{34} + v_2, \quad M_{13} = 2(P_3 - P_4) + v_3,$$

где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{h} \subset \mathfrak{su}(5)$ и отображение $\mathrm{SU}(5) \rightarrow B^{13}$ является римановой субмерсией, отсюда следует, что $(M_3, M_4, M_7, M_8, 2Q_{34}, 2R_{34}, 2(P_3 - P_4))$ образуют ортонормированный базис в касательном пространстве к W^7 в точке, отвечающей $(\mathrm{Sp}(2) \times T)$ -орбите единицы группы $\mathrm{SU}(5)$.

В то же время известно, что $(M_3, M_4, M_7, M_8, \sqrt{2}Q_{34}, \sqrt{2}R_{34}, \sqrt{2}(P_3 - P_4))$ образуют ортонормированный (с точностью до умножения на постоянную) базис в подалгебре V_1 (см. (1)) для $k = l = 1$.

Отсюда мы заключаем, что вложение $W^7 \rightarrow B^{13}$ индуцирует на W^7 метрику Алоффа–Уоллаха (1) с $t = -\frac{1}{2}$. Лемма 2 доказана.

5) *Кривизна пространства W^7 . Защемленность метрики.* Мы воспользуемся формулами, полученными в [8]. Так как риманово многообразие W^7 однородно, то достаточно посчитать кривизны в одной его точке. Мы рассмотрим точку, отвечающую $(\mathrm{Sp}(2) \times T)$ -орбите единицы группы $\mathrm{SU}(5)$.

С помощью формул из [8] мы находим кривизну в направлении, заданном плоскостью, натянутой на касательные векторы M_3 и M_7 :

$$K(M_3, M_7) = \frac{29}{4}.$$

Более того, в [8] доказано, что $\frac{29}{4}$ является наибольшим возможным значением секционной кривизны пространства B^{13} .

Рассмотрим матрицу

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Так как $F \in \mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SU}(5)$, то действие $\xi: X \rightarrow F \cdot X \cdot F^{-1}$ порождает изометрию пространства B^{13} .

Пусть

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{12}{37}} (M_7 + M_8) + \sqrt{\frac{13}{37}} M_{11}, \\ Y &= \sqrt{\frac{12}{37}} (M_3 - M_4) + \sqrt{\frac{13}{37}} M_9. \end{aligned}$$

Легко заметить, что $X, Y \in V^+ \subset \mathbf{h}^\perp$ и потому задают касательные векторы к пространству W^7 .

Чтобы применить формулы из [8], перейдем к другой паре векторов

$$\begin{aligned} X_0 &= \xi(X) = \sqrt{\frac{12}{37}} \left(\frac{M_1 + M_7}{\sqrt{2}} + \frac{M_4 + M_6}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{13}{37}} M_9, \\ Y_0 &= \xi(Y) = \sqrt{\frac{12}{37}} \left(\frac{M_3 - M_5}{\sqrt{2}} - \frac{M_2 - M_8}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{13}{37}} M_{10}, \end{aligned}$$

к которым и применим лемму 2 работы [8]. Прямыми вычислениями получаем, что кривизна B^{13} в направлении, заданном касательными векторами X и Y , равна $\frac{4}{37}$:

$$K(X, Y) = K(X_0, Y_0) = \frac{4}{37}.$$

В [8] доказано, что это значение является минимальным среди возможных значений секционных кривизн пространства B^{13} .

Отсюда немедленно следует, что зашмеленностиметрик на B^{13} и $W^7 = N_{1,1,-1/2}$ совпадают и равны $\frac{16}{29 \cdot 37} = \frac{16}{1073}$.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Изометрические инволюции на пространствах Базайкина. Теорема 2

С помощью аналогичных рассуждений можно доказать следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Компонента множества неподвижных точек инволюции $\sigma: M_{\overline{P}}^{13} \rightarrow M_{\overline{P}}^{13}$, содержащая $T_P \times (\mathrm{Sp}(2) \times T_0)$ -орбиту единицы группы $\mathrm{U}(5)$, является вполне геодезическим подмногообразием $W_{\overline{P}}^7$, изометричным пространству Эшенбурга $T_{2p_3, 2p_4, 2p_5} \setminus \mathrm{SU}(3)/T_{2p_1-P, 2p_2-P, 1}$, где $P = p_1 + \dots + p_5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и в случае действия инволюции на пространстве Берге, в окрестности единицы группы $\mathrm{U}(5)$ компонента множества неподвижных точек инволюции задается элементами вида (2). Так как эти элементы образуют подмногообразие $F(\sigma)$, то искомая компонента $W_{\overline{P}}^7$ состоит из $\mathrm{U}(1) \times (\mathrm{U}(4) \times \mathrm{U}(1))$ -орбит точек подмногообразия $F(\sigma)$.

Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 1, показывают, что

$$W_{\overline{P}}^7 = \left(\begin{pmatrix} z^{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & z^{p_4} & 0 \\ 0 & 0 & z^{p_5} \end{pmatrix} \setminus \mathrm{U}(3) / \begin{pmatrix} w \cdot z^{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & w \cdot z^{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$|z| = |w| = 1.$$

Так как $W_{\overline{P}}^7$ являются компонентами множеств неподвижных точек изометрических инволюций (согласно предложению 3), то они являются вполне геодезическими подмногообразиями $M_{\overline{P}}^{13}$ и, в частности, имеют положительную секционную кривизну.

Так как пространства $M_{\overline{P}}^{13}$ неоднородны (за исключением случая, когда $p_1 = \dots = p_5 = 1$), то задача сравнения зашмеленностей метрик на $W_{\overline{P}}^7$ и $M_{\overline{P}}^{13}$ не сводится к локальным вычислениям в одной точке, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.

Сравним пространства $W_{\overline{P}}^7$ с пространствами Алоффа–Уоллаха и Эшенбурга.

Так как пятерка чисел $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ удовлетворяет условиям а)–г), входящим в определение пространств $M_{\bar{p}}^{13}$ (см. § 2, п. 2.2), то она, в частности, удовлетворяет условию а). Отсюда немедленно следует, что сумма $P = p_1 + \dots + p_5$ нечетна.

Заменим $z = \exp(\varphi)$ на $u = \exp(\varphi/2)$, а w на $v \cdot u^{-P}$. В этих обозначениях пространство $W_{\bar{p}}^7$ имеет вид:

$$W_{\bar{p}}^7 = \begin{pmatrix} u^{2p_3} & 0 & 0 \\ 0 & u^{2p_4} & 0 \\ 0 & 0 & u^{2p_5} \end{pmatrix} \setminus \text{U}(3) / \begin{pmatrix} v \cdot u^{2p_1-P} & 0 & 0 \\ 0 & v \cdot u^{2p_2-P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $|u| = |v| = 1$. Действие двумерного тора $T^2(u, v) = T(u) \times T(v)$, где $T(u) = \{|u| = 1\}$, $T(v) = \{|v| = 1\}$, на $\text{U}(3)$ не будет свободным, а будет иметь ядро $\mathbb{Z}_2 = ((1, 1), (-1, -1))$, т.е. свободным будет действие тора $T^2(u, v)/\mathbb{Z}_2$.

Фактор-пространство $\Gamma = \text{U}(3)/T(v)$ диффеоморфно фактор-пространству $\text{SU}(3)$ по правому действию группы $\mathbb{Z}_2$, порожденному элементом

$$\gamma = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SU}(3).$$

Так как P нечетно, то действие элемента γ совпадает с действием элемента $\tilde{\gamma} \in T(u)$, отвечающего значению $u = -1$. С этим совпадением и связано наличие ядра у действия $T^2(u, v)$ на $\text{U}(3)$.

Теперь легко заметить, что фактор-пространство $\Gamma/T(u)$ диффеоморфно фактор-пространству группы $\text{SU}(3)$ по двустороннему действию $T(u)$, задаваемому формулой

$$X \rightarrow \text{diag}(u^{2p_3}, u^{2p_4}, u^{2p_5}) \cdot X \cdot \text{diag}(u^{2p_1-P}, u^{2p_2-P}, 1).$$

Из того, что пятерка чисел $(p_1, \dots, p_5)$ удовлетворяет условию а), и из нечетности P следует, что это действие свободно.

Таким образом, мы показали, что

$$W_{\bar{p}}^7 = T_{2p_3, 2p_4, 2p_5} \setminus \text{SU}(3) / T_{2p_1-P, 2p_2-P, 1}, \quad (5)$$

где $P = p_1 + \dots + p_5$.

Здесь следует напомнить определение метрик на пространствах Эшенбурга и Базайкина.

При построении пространств Эшенбурга метрика на группе $\text{U}(3)$ имеет вид:

$$\langle x, y \rangle = t \langle x_1, y_1 \rangle_0 + \langle x_2, y_2 \rangle_0,$$

где $x_i, y_i \in V_i$, $\text{u}(3) = V_1 \oplus V_2$ – ортогональное разложение, V_1 – касательная алгебра к диагонально вложенной подгруппе $K = \text{U}(2) \times \text{U}(1)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ – двусторонне-инвариантная метрика Киллинга, $t \in \mathbb{R}$. При построении пространств Базайкина метрика на $\text{U}(5)$ выбирается аналогичным образом, только подгруппа K имеет вид $\text{U}(4) \times \text{U}(1)$ (вложение также диагонально).

В [4] и [5] было показано, что при $t = \frac{1}{2}$ метрики полученные на пространствах двойных частных имеют положительную секционную кривизну. Очевидно, что параметр t может варьироваться, однако пределы вариаций, при которых положительность секционной кривизны сохраняется, не оценивались.

Как и при доказательстве леммы 2, из (5) выводится, что если метрика на $M_{\overline{p}}^{13}$ отвечает значению $t = t_0$, то метрика на $W_{\overline{p}}^7$ отвечает значению $t = t_0/2$.

Теорема 2 доказана.

В простейшем случае, когда $p_1 = 1, p_2 = \dots = p_5 = q$, где $q > 1$, мы получаем пространство диффеоморфное (но не изометричное) однородному многообразию $N_{2q-1,1}$.

Следующий вопрос представляется интересным.

Вопрос 1. *Существует ли соответствие между 7-мерными пространствами Алоффа–Уоллаха и Эшенбурга и 13-мерными пространствами Базайкина, которое реализуется вполне геодезическими вложениями?*

Если такое соответствие существует лишь для каких-то семейств многообразий, то как устроены эти семейства?

Если такое соответствие существует, то реализуется ли оно вполне геодезическими вложениями, сохраняющими заземленности метрик?

§ 5. Топология многообразий Алоффа–Уоллаха $N_{1,1}$ и Берже B^{13} .

Башни вполне геодезических вложений

Рассмотрим топологическое строение пространств $W^7 = N_{1,1,-1/2}$ и B^{13} .

Пусть

$$\widehat{G} (\approx \mathrm{SU}(2)) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \mathrm{SU}(3), \quad A \in \mathrm{SU}(2).$$

Можно заметить, что $\mathrm{SU}(3)/T_{1,1} = W^7$ и $\mathrm{SU}(3)/\widehat{G} = S^5$. Группа $T_{1,1}$ действует на $S^5 = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \mid z_i \in \mathbb{C}\}$ умножениями:

$$(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (\lambda^{-2} z_1, \lambda^{-2} z_2, \lambda^{-2} z_3),$$

где $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda^{-2}) \in T_{1,1}$. Более того, действия $T_{1,1}$ и $\widehat{G}$ на $\mathrm{SU}(3)$ коммутируют.

Рассмотрим расслоение

$$\mathrm{SU}(3) \rightarrow \mathbb{CP}^2. \quad (6)$$

Его слой диффеоморфен группе $\mathrm{U}(2)$, которую можно представить следующим образом. Пусть

$$\widehat{Q} = \mathrm{SU}(2) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Обозначим через $\widehat{Q}_1$ фактор-пространство $\widehat{Q}/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ -действие имеет вид:

$$(X, t) \rightarrow (-X, t + \pi), \quad X \in \mathrm{SU}(2).$$

Это фактор-пространство диффеоморфно слою расслоения (6). Оно расслаивается над S^1 обычным образом:

$$(X, t) \rightarrow t \in S^1 = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}.$$

В этих обозначениях действие $T_{1,1}$ на слоях расслоения (6) имеет вид

$$(X, t) \rightarrow (\exp(\sqrt{-1}\pi\varphi) \cdot X, t + \varphi), \\ \text{diag}(\exp(\sqrt{-1}\pi\varphi), \exp(\sqrt{-1}\pi\varphi), \exp(-2\sqrt{-1}\pi\varphi)) \in T_{1,1}.$$

Отсюда выводим, что

- 1) $S^5/T_{1,1} = \text{SU}(3)/\widehat{G} \times T_{1,1} = \mathbb{CP}^2$;
- 2) эти действия порождают расслоение

$$W^7 = \text{SU}(3)/T_{1,1} \xrightarrow{\mathbb{RP}^3} \mathbb{CP}^2; \quad (7)$$

- 3) из вычисления групп когомологий пространства W^7 (см. [3]) следует, что трансгрессия d_4 в спектральной последовательности расслоения (7) задается следующей формулой:

$$d_4: E_4^{0,3} = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} E_4^{4,0} = \mathbb{Z} \quad (8)$$

и

$$H^4(W^7) = \mathbb{Z}_3. \quad (9)$$

Пусть

$$\tilde{G} (\approx \text{SU}(4)) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \text{SU}(5), \quad A \in \text{SU}(4).$$

Можно заметить, что $\text{SU}(5)/\text{Sp}(2) \times T = B^{13}$ и $\text{SU}(5)/\tilde{G} = S^9$. Группа T действует на $S^9 = \{z_1^2 + \dots + z_5^2 = 1 \mid z_i \in \mathbb{C}\}$ умножениями:

$$(z_1, \dots, z_5) \rightarrow (\lambda^{-4}z_1, \dots, \lambda^{-4}z_5),$$

где $\text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda^{-4}) \in T$. Более того, действия T и $\tilde{G}$ на $\text{SU}(5)$ коммутируют.

Рассмотрим расслоение

$$\text{SU}(5)/\text{Sp}(2) \rightarrow \mathbb{CP}^4. \quad (10)$$

Пусть

$$\tilde{Q} = \text{SU}(4)/\text{Sp}(2) \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}).$$

Обозначим через $\tilde{Q}_1$ фактор-пространство $\tilde{Q}/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ -действие имеет вид:

$$(X, t) \rightarrow \left(\sqrt{-1} X, t + \frac{\pi}{2} \right), \quad X \in \text{SU}(4)/\text{Sp}(2).$$

Это фактор-пространство диффеоморфно слою расслоения (10). Оно расслаивается над S^1 обычным образом:

$$(X, t) \rightarrow t \in S^1 = \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} \mathbb{Z}.$$

В этих обозначениях действие T на слоях расслоения (10) имеет вид:

$$(X, t) \rightarrow (\exp(\sqrt{-1} \pi \varphi) \cdot X, t + \varphi), \\ \text{diag}(\exp(\sqrt{-1} \pi \varphi), \dots, \exp(\sqrt{-1} \pi \varphi), \exp(-4\sqrt{-1} \pi \varphi)) \in T.$$

Отсюда выводим, что

- 1) $S^5/T = \text{SU}(5)/\tilde{G} \times T = \mathbb{CP}^4$;
- 2) эти действия порождают расслоение

$$B^{13} \xrightarrow{\mathbb{RP}^5} \mathbb{CP}^4; \quad (11)$$

- 3) из вычислений групп когомологий пространства B^{13} (см. [5]) следует, что трансгрессия d_6 в спектральной последовательности расслоения (11) задается следующей формулой

$$d_6: E_6^{0,5} = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 5} E_6^{6,0} = \mathbb{Z} \quad (12)$$

и

$$H^6(B^{13}) = \mathbb{Z}_5. \quad (13)$$

Подобие формул (6)–(9) для W^7 и формул (10)–(13) для B^{13} и теорема 1 дают нам основание поставить следующий вопрос.

ВОПРОС 2. *Верно ли, что для каждого положительного целого числа k существует пространство Γ_k такое, что*

- 1) *существует расслоение*

$$\Gamma_k \xrightarrow{\mathbb{RP}^{2k+1}} \mathbb{CP}^{2k}; \quad (14)$$

- 2) *трансгрессия d_{2k+2} в спектральной последовательности расслоения (14) имеет вид:*

$$d_{2k+2}: E_{2k+2}^{0,2k+1} = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times (2k+1)} H^{2k+2}(\mathbb{CP}^{2k}) \quad (15)$$

и

$$H^{2k+2}(\Gamma_k) = \mathbb{Z}_{2k+1}; \quad (16)$$

- 3) *многообразие Γ_k имеет положительную секционную кривизну;*
- 4) $\Gamma_1 = W^7$ и $\Gamma_2 = B^{13}$?

Можно предложить более строгую гипотезу, добавив следующее:

- 5) *пространства Γ_k образуют башню*

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n \rightarrow \Gamma_{n+1} \rightarrow \dots$$

вполне геодезических вложений, сохраняющих заземленности метрик, и, тем самым, заземленности пространств Γ_k равны $\frac{16}{29 \cdot 37}$.

Если такая башня существует, то можно ожидать, что ее свойства похожи на свойства $\mathbb{CP}^n$ - и $\mathbb{HP}^n$ -башен.

§ 6. Заключительные замечания

6.1. Рассмотрим вкратце топологию простейших пространств вида $W_{\bar{p}}^7$ и $M_{\bar{p}}^{13}$. А именно, обозначим через W_p^7 и M_p^{13} пространства такого вида, отвечающие $\bar{p} = (p, p, p, p, 1)$.

Так как левостороннее действие сохраняет орбиты правостороннего действия, то группа $\tilde{T}_p = \text{diag}(z^p, z^p, z)$ действует на пространстве $U(3)/(SU(2) \times \text{diag}(w, w, 1)) = S^5$, где $|z| = |w| = 1$, а группа $T_p = \text{diag}(z^p, z^p, z^p, z^p, z)$ действует на пространстве $U(5)/(SU(4) \times T_0) = S^9$.

Эти действия не являются свободными.

Можно заметить, что элементы $\text{diag}(z^p, z^p, z)$ при $z^p = 1$ имеют нетривиальное множество неподвижных точек, а другие элементы $\tilde{T}_p$ действуют свободно. Эти множества неподвижных точек одни и те же для всех корней p -й степени из единицы и диффеоморфны 3-мерной экваториальной сфере в S^5 . Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ -действие на S^5 , задаваемое действием подгруппы $\tilde{T}_p$, образованной корнями p -й степени из единицы ($z^p = 1$). Фактор-пространство $U(3)/(SU(2) \times \text{diag}(w, w, 1))$ относительно этого $\mathbb{Z}_p$ -действия опять диффеоморфно S^5 (это легко представить, рассмотрев S^5 как циклическое p -листное накрытие S^5 , разветвленное по экваториальной 3-мерной сфере). Фактор-группа $\tilde{T}_p/\mathbb{Z}_p$ действует на этом фактор-пространстве свободно, и для каждого p мы получаем отображение

$$W_p^7 \rightarrow \text{diag}(z^p, z^p, z) \backslash U(3)/(SU(2) \times \text{diag}(w, w, 1)) = \mathbb{CP}^2.$$

Почти очевидно, что это отображение задает $\mathbb{RP}^3$ -расслоение, но строгое доказательство требует дополнительной работы.

Недавно Я. В. Базайкин, отвечая на наш вопрос, вычислил порядок группы $H^4(W_p^7)$, который, как оказалось, равен $r_p = (4p - 1)$.

Ситуация в размерности 13 совершенно аналогична 7-мерной, и для каждого p мы получаем отображение

$$M_p^{13} \rightarrow T_p^1 \backslash U(5)/(SU(4) \times T_0) = \mathbb{CP}^4.$$

Это отображение тоже должно являться $\mathbb{RP}^5$ -расслоением.

В [5] было показано, что порядок группы $H^6(M_p^{13})$ равен $s_p = (8p^2 - 4p + 1)$.

Можно заметить очень интересное соотношение

$$s_p = \frac{r_p^2 + 1}{2},$$

которое для $p = 1$ совпадает с (9) и (13).

Можно также задаться вопросом о том, продолжаемы ли эти вложения $W_p^7 \rightarrow M_p^{13}$ до башен вполне геодезических вложений.

6.2. Когда мы обсуждали результаты этой работы с К. Грове, он задал вопрос о существовании таких вложений для четномерных пространств Уоллаха [11]. Существование топологических вложений для них очевидно. Мы можем указать простейший пример инволюции

$$A \rightarrow \hat{S} \cdot A \cdot \hat{S}^{-1},$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_3 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_3 \end{pmatrix},$$

которая порождает инволюцию 12-мерного пространства Уоллаха $\mathrm{Sp}(3)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1))$. Компонента множества неподвижных точек, содержащая орбиту единицы группы $\mathrm{Sp}(3)$, диффеоморфна 6-мерному пространству Уоллаха $\mathrm{SU}(3)/T^2$, где T^2 – максимальный тор группы $\mathrm{SU}(3)$. Тем самым мы получаем вполне геодезическое вложение $\mathrm{SU}(3)/T^2 \rightarrow \mathrm{Sp}(3)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1))$.

В [12] было показано, что максимальные защемленности однородных метрик на всех четномерных пространствах Уоллаха совпадают и равны $\frac{1}{64}$. Поэтому следует ожидать, что это вложение сохраняет защемленность римановой метрики и что для другой пары пространств Уоллаха $(F_4/\mathrm{Spin}(8), \mathrm{Sp}(3)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)))$ такое вложение тоже существует.

Однако, само существование этих пространств обусловлено существованием конечномерных алгебр с делением над полем $\mathbb{R}$, которые согласно теореме Адамса существуют лишь в размерностях 1, 2, 4 и 8. Поэтому не следует ожидать, что башня четномерных пространств Уоллаха может быть продолжена.

6.3. Эта статья является переработанным и расширенным вариантом препринта автора “A remark on positively curved manifolds of dimensions 7 and 13” (см. dg-ga/9511017).

Список литературы

1. *Berger M.* Les varietes homogenes normales simplement connexes a courbure strictment positive // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1961. V. 15. P. 179–216.
2. *Aloff S., Wallach N. R.* An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. V. 81. P. 93–97.
3. *Eschenburg J.-H.* New examples of manifolds with strictly positive curvature // Invent. Math. 1982. V. 66. P. 469–480.
4. *Eschenburg J.-H.* Inhomogeneous spaces of positive curvature // Differential Geom. Appl. 1992. V. 2. P. 123–132.
5. *Базайкин Я. В.* Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. С. 1219–1237.
6. *Gromoll D., Meyer W.* An exotic sphere with nonnegative sectional curvature // Ann. of Math. 1974. V. 100. P. 401–406.
7. *Kreck M., Stolz S.* Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differential Geom. 1991. V. 33. P. 465–486.
8. *Heintze E.* The curvature of $\mathrm{SU}(5)/(\mathrm{Sp}(2) \times S^1)$ // Invent. Math. 1971. V. 13. P. 205–212.
9. *Huang H. M.* Some remarks on the pinching problems // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1981. V. 9. P. 321–340.

10. *Abresch U., Meyer W. T.* Injectivity radius estimates and sphere theorems // Proc. of MSRI (to appear).
11. *Wallach N.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. of Math. 1972. V. 96. P. 277–295.
12. *Валуев Ф. М.* Точные оценки секционных кривизн однородных римановых метрик на пространствах Уоллача // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. С. 248–262.

Институт математики СО РАН

Поступила в редакцию
31.01.1996