Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Прямые суммы дистрибутивных модулей, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 12, 137–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:19:34

УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Прямые суммы дистрибутивных модулей

Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется *полудистрибутивным* модулем. Доказано, что первичный радикал кольца эндоморфизмов конечной прямой суммы дистрибутивных модулей содержит все односторонние нильидеалы кольца эндоморфизмов этого модуля. Полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, разлагающееся в прямую сумму дистрибутивных правых идеалов, является конечным прямым произведением первичных колец.

Библиография: 12 названий.

Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и, за исключением особо оговоренных случаев, с ненулевой единицей. Слова типа “артиново кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Через $\text{Lat}(M)$ и $\text{End}(M)$ обозначаются, соответственно, решетка всех подмодулей и кольцо эндоморфизмов модуля M . Модуль M называется *дистрибутивным* (*цепным*), если решетка $\text{Lat}(M)$ дистрибутивна (является цепью). Первичный радикал дистрибутивного справа кольца A содержит все правые или левые нильидеалы кольца A (для двусторонних идеалов это доказал автор в [1], а для односторонних нильидеалов — Мазурек и Пучиловский в [2]). Прямая сумма дистрибутивных (цепных) модулей называется *полудистрибутивным* (*полуцепным*) модулем.

Примерами полудистрибутивных колец являются все полупервичные кольца (например, кольца верхнетреугольных матриц над телом), все дистрибутивные кольца (например, все факторкольца прямых произведений тел, все коммутативные кольца Безу и коммутативные кольца единичной слабой глобальной размерности) и кольца матриц над коммутативными полунаследственными кольцами (например, кольцо матриц над кольцом целых чисел).

Данная работа посвящена исследованию полудистрибутивных колец и модулей. Из результатов работы выделим теоремы 1 и 2. В теореме 1, в частности, доказано, что первичный радикал кольца R эндоморфизмов конечной прямой суммы дистрибутивных модулей содержит все односторонние нильидеалы кольца R . Поэтому первичный радикал полудистрибутивного справа кольца содержит все односторонние нильидеалы этого кольца, что перекрывает упомянутый результат Мазурека и Пучиловского. В теореме 2, в частности, доказано, что полудистрибутивное справа полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов разлагается в конечное прямое произведение первичных колец.

Отметим также, что в работе приведен контрпример к некоторым утверждениям работы [3] (см. замечание 6).

Доказательство теорем разбито в работе на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Напомним ряд определений и обозначений. Через $r_A(N)$ обозначается аннулятор в кольце A подмножества N правого модуля M_A , причем индекс может опускаться, когда ясно, какое кольцо имеется в виду. Через $\text{Sing}(M)$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M_A над кольцом A (т.е. множество всех таких элементов $m \in M$, что $r(m)$ — существенный правый идеал кольца A). *Подфактором* называется подмодуль фактормодуля. Модуль M_A называется *несингулярным (сингулярным)*, если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$). Если A — кольцо, то $\text{Sing}(A_A)$ — идеал кольца A , который называется *правым сингулярным идеалом* кольца A . Модуль называется *равномерным*, если любые его два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. *Полуравномерным модулем* называется прямая сумма равномерных модулей. Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным*. Класс конечномерных модулей совпадает с классом существенных расширений конечных прямых сумм равномерных модулей. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Подмодуль N модуля M называется *замкнутым* в модуле M , если N совпадает с любым подмодулем модуля M , являющимся существенным расширением модуля N . Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом. Кольцо A называется *рикартовым справа*, если оно удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:

- (1) все главные правые идеалы проективны как правые A -модули;
- (2) правый аннулятор любого элемента кольца A порождается (как правый идеал) идемпотентом.

Идемпотент e кольца A называется *локальным*, если eAe — локальное кольцо. Полусовершенство кольца A равносильно тому, что его единица разлагается в сумму локальных ортогональных идемпотентов. Кольцо A называется *регулярным (строго регулярным)*, если для любого элемента $a \in A$ найдется такой элемент $b \in A$, что $a = aba$ ($a = a^2b$). Зафиксируем разложение $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ единицы кольца A в сумму ортогональных идемпотентов e_i . Кольцо A называется *кусочно целостным (относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$)*, если оно удовлетворяет следующим трем эквивалентным условиям (см. [4]):

- (1) для всех e_i и e_k каждый ненулевой гомоморфизм $e_i A \rightarrow e_k A$ является мономорфизмом;
- (2) для всех e_i каждый ненулевой гомоморфизм $e_i A \rightarrow A_A$ является мономорфизмом;
- (3) $ab \neq 0$ для всех ненулевых элементов $a \in e_j A e_i$, $b \in e_i A e_k$ и для любых e_i, e_j, e_k .

Поскольку (3) симметрично, то (1) и (2) можно заменить на их левосторонние аналоги. Собственный идеал B кольца A будем называть *вполне первичным (первичным; несингулярно первичным; несингулярно полупервичным; кусочно целостным относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$)*, если A/B — область (первичное кольцо; несингулярное справа первичное кольцо; несингулярное справа полупервичное кольцо; кусочно целостное относительно естественных образов $\{e_1, \dots, e_n\}$ в A/B кольцо). Несингулярно первичный (вполне первичный; несингулярно по-

лупервичный) идеал кольца A , не содержащий других несингулярно первичных (вполне первичных; несингулярно полупервичных) идеалов кольца A , называется *минимальным несингулярно первичным идеалом* (*минимальным вполне первичным идеалом*; *минимальным несингулярно полупервичным идеалом*). В полупервичном кольце A правый и левый аннуляторы любого идеала совпадают; поэтому идеал кольца A называется *аннуляторным идеалом*, если он является правым или левым аннулятором некоторого идеала кольца A . Будем говорить, что индекс кольца A не превосходит натурального числа n , если $a^n = 0$ для любого нильпотентного элемента $a \in A$. Модуль M будем для краткости называть *нильпотентно-инвариантным*, если каждый его нильпотентный эндоморфизм переводит в себя все подмодули модуля M . Модуль M_A называется *вполне первичным*, если $r(m) = r(M)$ для любого ненулевого элемента $m \in M$. Если B – идеал кольца A , то $(A/B)_A$ – вполне первичный модуль $\iff B$ – вполне первичный идеал кольца A .

§ 1. Кольца эндоморфизмов

ЛЕММА 1. Пусть M – нильпотентно-инвариантный модуль, N – подмодуль модуля M , T – множество всех нильпотентных эндоморфизмов модуля M .

- (1) Если $f_i, g_j \in T$, где $1 \leq i, j \leq n$, и $(f_1 f_2 \cdots f_n)(N) = 0$, то $(f_1 g_1 f_2 g_2 \cdots f_n g_n)(N) = 0$.
- (2) Если $f, g \in T$ и $f^m(N) = g^n(N) = 0$, то $(f + g)^{m+n}(N) = 0$.
- (3) Если $f \in T$, T_1 – подкольцо в $\text{End}(M)$, порожденное единицей и множеством T , причем $f^n(N) = 0$, то $(f T_1)^n(N) = 0$.
- (4) Множество T является нильподкольцом кольца $\text{End}(M)$.
- (5) Нилькольцо T совпадает с суммой своих нильпотентных идеалов.
- (6) Первичный радикал P кольца $\text{End}(M)$ содержит все правые нильидеалы и все левые нильидеалы кольца $\text{End}(M)$.
- (7) Если $f \in T$, то $\text{Ker}(f)$ – существенный подмодуль модуля M и $f(M)$ – сингулярный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) проверяется непосредственно; (2) и (3) следуют из (1); (4) следует из (1) и (2); (5) следует из (4) и (3). Докажем (6). Пусть $R \equiv \text{End}(M)$, D – идеал кольца R , порожденный произвольным правым нильидеалом E кольца R . Из равенства $(xy)^{n+1} = x(yx)^n y$ следует, что D – нильидеал кольца R . По (5) $D = \sum_{j \in J} T_j$, где $\{T_j\}_{j \in J}$ – некоторое множество нильпотентных идеалов нилькольца D . Идеал D_j кольца R , порожденный множеством T_j , лежит в P , поскольку является нильпотентным идеалом. (Это вытекает из следующего утверждения [5, лемма 1.1.5]: если D – идеал кольца R , T – нильпотентный идеал кольца (не обязательно с единицей) D , то идеал кольца R , порожденный множеством T , нильпотентен.) Так как $D = \sum_{j \in J} T_j$ и D – идеал кольца R , то $D = \sum_{j \in J} D_j \subseteq P$. Тогда $E \subseteq D \subseteq P$. Аналогично, P содержит все левые нильидеалы кольца R .

(7). Пусть N – такой подмодуль модуля M , что $N \cap \text{Ker}(f) = 0$. Допустим, что $N \neq 0$. Так как M – нильпотентно-инвариантный модуль, то $0 \neq f^n(N) \subseteq N$ для всех n , что противоречит нильпотентности эндоморфизма f . Поэтому M –

существенное расширение модуля $\text{Ker}(f)$. Тогда $M/\text{Ker}(f)$ – сингулярный модуль, откуда $f(M)$ – сингулярный модуль.

ЛЕММА 2. Пусть M – несингулярный нильпотентно-инвариантный модуль.

Тогда $\text{End}(M)$ – редуцированное кольцо. Если, кроме того, $\text{End}(M)$ – первичное кольцо, то $\text{End}(M)$ – область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Редуцированность $\text{End}(M)$ следует из леммы 1(7). Второе утверждение следует из того, что редуцированное первичное кольцо является областью (см. [5, с. 288]).

ЛЕММА 3. Пусть e – ненулевой идемпотент кольца A .

- (1) Пусть M_A – правый A -модуль. Правилom $\varphi(N) = Ne$ задается сюръективный решеточный гомоморфизм $\varphi: \text{Lat}(M) \rightarrow \text{Lat}((Me)_{eAe})$, причем если $M_A = \bigoplus_{j \in J} M_j$, то $Me_{eAe} = \bigoplus_{j \in J} M_j e$.
- (2) Если F – идеал кольца A , $e \in A \setminus F$, $h: A \rightarrow A/F$ – естественный эпиморфизм, то существует естественный кольцевой изоморфизм $h(e)h(A)h(e) \rightarrow eAe/eFe$.
- (3) Если N – идеал кольца eAe , то $N = e(ANA)e$.
- (4) Если A – кольцо с условием максимальности для правых (левых) аннуляторов, то eAe – кольцо с условием максимальности для правых (левых) аннуляторов.
- (5) Если A/F – факторкольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то eAe/eFe – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов.
- (6) Если модуль M_A дистрибутивен (полудистрибутивен; нётеров; имеет размерность Крулля), то модуль $(Me)_{eAe}$ дистрибутивен (полудистрибутивен; нётеров; имеет размерность Крулля).
- (7) Если модуль eA дистрибутивен (полудистрибутивен; нётеров; имеет размерность Крулля), то кольцо eAe дистрибутивно справа (полудистрибутивно справа; нётерово справа; имеет правую размерность Крулля).
- (8) Если P – первичный радикал кольца A , то ePe – первичный радикал кольца eAe .
- (9) Если F – первичный идеал кольца A , не содержащий e , то eFe – собственный первичный идеал кольца eAe .
- (10) Если A – полупервичное (первичное; простое) кольцо, то eAe – полупервичное (первичное; простое) кольцо.
- (11) Пусть F, G – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца A и идемпотент e не лежит в $F + G$. Тогда eFe, eGe – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца eAe и $eFe + eGe \neq eAe$.
- (12) Если n – натуральное число и все n -порожденные правые идеалы кольца A проективны, то все n -порожденные правые идеалы кольца eAe проективны.
- (13) Пусть A – первичное кольцо. Тогда
 eAe – область
 $\iff$ любой ненулевой эндоморфизм правого идеала eA является мономорфизмом

$\Longleftrightarrow$ любой ненулевой эндоморфизм каждого левого идеала Ae является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1), (2) и (3) проверяются непосредственно; (4) следует из того, что $r_{eAe}(B) = eAe \cap r_A(B)$ для любого подмножества B в eAe . (5) следует из (2) и (4); (6) следует из (1); (7) следует из (6).

(8). Первичный радикал P кольца A совпадает со множеством всех строго нильпотентных в A элементов. (Элемент a кольца A называется *строго нильпотентным* в A , если все члены любой такой последовательности $\{a_n\}$, что $a_1 = a$, $a_{n+1} \in a_n A a_n$, равны нулю, начиная с некоторого номера.) Все элементы из ePe строго нильпотентны в A , поскольку $ePe \subseteq P$. Остается доказать, что если $a \in A$ и $eaе$ строго нильпотентный в eAe элемент, то элемент $eaе$ строго нильпотентен в A . Это вытекает из того, что если $a_1 = eaе$, $a_{n+1} \in a_n A a_n$, то все элементы a_n лежат в eAe .

(9). Пусть F – первичный идеал. Так как $e \in A \setminus F \subseteq A \setminus eFe$, то $eFe \neq eAe$. Допустим, что eFe не является первичным идеалом кольца eAe . Тогда из (3) вытекает существование таких идеалов M, N кольца A , что $eMeNe \subseteq eFe \subseteq F$. Тогда идеал $(AeA)M(AeA)N(AeA)$ лежит в первичном идеале F . Поэтому либо $M \subseteq F$, либо $N \subseteq F$. Тогда либо $eMe \subseteq eFe$, либо $eNe \subseteq eFe$.

Пункт (10) следует из (3), (8) и (9).

(11). Так как $e \in A \setminus (F + G)$, то $eFe + eGe \neq eAe$. По (9) eFe и eGe – первичные идеалы кольца eAe . Допустим, что $eFe \subseteq eGe$. Тогда идеал $(AeA)F(AeA)$ лежит в первичном идеале G , и получаем противоречие. Аналогично, невозможно включение $eFe \supseteq eGe$.

(12). Пусть $B = \sum_{i=1}^n b_i eAe$ – n -порожденный правый идеал кольца eAe , $\overline{B} \equiv B + BA(1 - e)$. Тогда $\overline{B} = \sum_{i=1}^n b_i A$ – n -порожденный правый идеал кольца A . Пусть F_A – прямая сумма n экземпляров модуля eA . Через e_i обозначим элемент-строку модуля F , у которого на i -м месте стоит элемент e , а на остальных местах – нули. Существует такой эпиморфизм $h: F \rightarrow \overline{B}$, что $h(e_i) = b_i$ для всех i . Так как по условию $\overline{B}_A$ – проективный модуль, то существует такой мономорфизм $g: \overline{B} \rightarrow F$, что hg тождественно действует на $\overline{B}$. Тогда $F = \text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(h)$. Домножая это равенство на e , получаем равенство $(eAe)^{(n)} = \text{Im}(g)e \oplus \text{Ker}(h)e$. Так как $\text{Im}(g)e = B$, то B_{eAe} – проективный модуль.

(13). Достаточно доказать первую эквивалентность. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем $\Rightarrow$. Так как eAe можно естественно отождествить с $\text{End}(eA)$, то достаточно привести к противоречию следующее утверждение: существуют такие ненулевые элементы $a = eaе \in eAe$ и $b = eb \in eA$, что $eaeb = 0$. Тогда $(eaе)(ebAе) = 0$. Так как eAe – область и $eaе \neq 0$, то $ebAе = 0$. Тогда $AebAеA = 0$. Поскольку A первично, то либо $eb = 0$, либо $e = 0$, что невозможно.

ЛЕММА 4. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов, P – первичный радикал кольца A , N – правый идеал кольца A , M_A – правый A -модуль.

- (1) Если N – правый нильидеал кольца A , то $e_i N e_i$ – правый нильидеал кольца $e_i A e_i$ для любого i .
- (2) Если $e_i N e_i = 0$ для всех i , то $N^n = 0$.
- (3) Если для любого i правый идеал $e_i N e_i$ кольца $e_i A e_i$ лежит в первичном радикале P_i кольца $e_i A e_i$, то N лежит в P .

- (4) Если для любого i первичный радикал кольца $e_i A e_i$ содержит все правые нильидеалы (все левые нильидеалы) кольца $e_i A e_i$, то P содержит все правые нильидеалы (все левые нильидеалы) кольца A .
- (5) Если для любого i кольцо $e_i A e_i$ полупервично, то $P^n = 0$.
- (6) Если $i \in \{1, \dots, n\}$ и $ae_i \in Ae_i$, то для включения $ae_i \in \text{Sing}(A_A)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой существенный подмодуль B_i модуля $e_i A$, что $ae_i B_i = 0$.
- (7) Если a – элемент кольца A , то для включения $a \in \text{Sing}(A_A)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого e_i существовал такой существенный подмодуль B_i модуля $e_i A$, что $ae_i B_i = 0$.
- (8) A – несингулярно справа кольцо $\iff$ для любого идемпотента e_i верно, что $aB \neq 0$ для каждого ненулевого элемента $a \in Ae_i$ и для любого существенного подмодуля B модуля $e_i A$.
- (9) Любой правый модуль X_A над кольцом A является как абелева группа прямой суммой правых $e_i A e_i$ -модулей Xe_i .
- (10) Если F и G – подмодули модуля M_A , то $F + G = \sum_{i=1}^n (Fe_i + Ge_i)$, $F \cap G = \sum_{i=1}^n Fe_i \cap Ge_i$.
- (11) Дистрибутивность модуля M_A равносильна дистрибутивности всех $e_i A e_i$ -модулей Me_i .
- (12) A – кусочно целостное (относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$) кольцо $\iff ab \neq 0$ для всех ненулевых элементов $a \in Ae_i$, $b \in e_i A$ и для каждого e_i .
- (13) Пусть F – первичный идеал кольца A . Тогда F – кусочно целостный идеал $\iff$ для любого $e_i \in A \setminus F$ идеал $e_i F e_i$ кольца $e_i A e_i$ является вполне первичным.
- (14) Пусть F – первичный идеал кольца A , причем все правые идеалы $(e_i A + F)/F$ кольца A/F равномерны. Тогда

F – несингулярно первичный идеал

$\iff F$ – кусочно целостный идеал

$\iff$ для любого $e_i \in A \setminus F$ идеал $e_i F e_i$ кольца $e_i A e_i$ является вполне первичным

$\iff$ хотя бы для одного $e_i \in A \setminus F$ идеал $e_i F e_i$ кольца $e_i A e_i$ является вполне первичным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) проверяется непосредственно.

(2). Так как $e_i N e_i = 0$ для всех i и N – правый идеал, то $N e_i N \subseteq N$ и $e_j N e_i N e_j = 0$ для всех i, j . Тогда $N = \sum_{i \neq j} e_i N e_j$ и $N^n = \left(\sum_{i \neq j} e_i N e_j \right)^n = 0$.

(3). Пусть $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. Из леммы 3(2), (8) и из условия следует, что $h(e_i)h(N)h(e_i) \subseteq h(P_i) = h(e_i)h(P)h(e_i) = 0$ для всех i . По примененному к $h(A)$ и $h(N)$ пункту (2) $h(N)$ – нильпотентный правый идеал полупервичного кольца $h(A)$. Поэтому $h(N) \subseteq h(P)$, $N \subseteq P$.

(4), (5). Пункт (4) следует из (3) и его левостороннего аналога; (5) следует из (2) и из леммы 3(8).

(6). Пусть $B_i \equiv r(ae_i) \cap e_i A$. Если $ae_i \in \text{Sing}(A_A)$, то B_i – существенный подмодуль в $e_i A$, причем $ae_i B_i = 0$. Необходимость доказана. Докажем достаточность. По условию найдется такой существенный подмодуль B_i модуля $e_i A$, что $B_i \subseteq r(ae_i)$. Пусть $D \equiv B_i \oplus \sum_{j \neq i} e_j A$. Тогда D – существенный правый идеал кольца A , лежащий в $r(ae_i)$. Поэтому $ae_i \in S$.

(7), (8), (9), (10), (11), (12). Пункт (7) следует из (6) и того, что $a = \sum_{i=1}^n ae_i$; (8) следует из (7); (9) и (12) проверяются непосредственно; (10) следует из (9); (11) следует из (10).

(13). По лемме 3(2) можно считать, что $F = 0$ и A – первичное кольцо. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Допустим, что существуют e_i и ненулевые $a = ae_i \in Ae_i$, $b = e_ib \in e_iA$ такие, что $ae_ib = 0$. Для любого $d \in A$ правилом $f_d(e_ix) = e_idae_ix$ задается эндоморфизм f_d модуля e_iA . Так как $ae_ib = 0$, то все f_d не являются мономорфизмами. По лемме 3(13) все эндоморфизмы f_d являются нулевыми. Поэтому $e_iAae_iA = 0$. Так как A – первично, то либо $e_iA = 0$, либо $aA = ae_iA = 0$. Получено противоречие. По (12) A – кусочно целостное кольцо.

(14). По лемме 3(2) можно считать, что $F = 0$ и A – первичное кольцо. Первая эквивалентность вытекает из следующих фактов [4]: кусочно целостные кольца являются несингулярными; полуравномерные справа несингулярные справа кольца являются кусочно целостными. Вторая эквивалентность следует из (13). Докажем третью эквивалентность. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. По (13) и по лемме 3(13) достаточно доказать, что для любого j каждый эндоморфизм f модуля e_jA , обладающий ненулевым ядром, тождественно равен нулю. Допустим, что $f(e_jA) \equiv N \neq 0$. Поскольку A – первичное кольцо, то $Ne_iA \neq 0$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм $h: e_iA \rightarrow N$. Поскольку A первично, то $e_iAh(e_iA) \neq 0$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм $g: h(e_iA) \rightarrow e_iA$. Тогда gh – ненулевой эндоморфизм модуля e_iA . Так как e_iA – проективный модуль и $h(e_iA) \subseteq N \subseteq f(e_jA)$, то существует такой гомоморфизм $t: e_iA \rightarrow e_jA$, что $h = ft$. Тогда $t \neq 0$, поскольку $h \neq 0$. Так как e_jA – равномерный модуль, то $M \equiv \text{Ker}(f) \cap t(e_iA) \neq 0$. Поэтому $t^{-1}(M) \neq 0$, причем $(gh)(t^{-1}(M)) = (gft)(t^{-1}(M)) = 0$. По лемме 3(13) $gh \equiv 0$, и получаем противоречие.

ЛЕММА 5. Пусть M_R – модуль над кольцом R , $\text{End}(M) \equiv A$, P – первичный радикал кольца A , N – правый идеал кольца A , причем $M_R = \bigoplus_{i=1}^n M_i$.

- (1) Найдется такое разложение $1 = e_1 + \dots + e_n$ единицы кольца A в сумму ортогональных идемпотентов, что $M_i = e_i(M)$ и для любого i существует естественный кольцевой изоморфизм $\text{End}(M_i) \cong e_iAe_i$.
- (2) Пусть для любого i естественный образ в кольце $\text{End}(M_i)$ правого идеала e_iNe_i кольца e_iAe_i лежит в первичном радикале P_i кольца $\text{End}(M_i)$. Тогда N лежит в P .
- (3) Пусть для любого i первичный радикал кольца $\text{End}(M_i)$ содержит все правые нильидеалы (все левые нильидеалы) кольца $\text{End}(M_i)$. Тогда P содержит все правые нильидеалы (все левые нильидеалы) кольца A .
- (4) Если для любого i кольцо $\text{End}(M_i)$ полупервично, то $P^n = 0$.
- (5) Если A – риккартово справа или слева кольцо и все кольца $\text{End}(M_i)$ являются нормальными, то $P^n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) проверяется непосредственно, а (2), (3) и (4) следуют из (1) и леммы 4. Докажем (5). По лемме 3(12) все кольца $\text{End}(M_i)$ являются риккартовыми справа или слева нормальными кольцами. Тогда, как непосредственно проверяется, все кольца $\text{End}(M_i)$ являются редуцированными и, в частности, полупервичными. Теперь применяем (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M_R – модуль, разлагающийся в конечную прямую сумму n нильпотентно-инвариантных модулей $M_1, \dots, M_n$, P – первичный радикал кольца $\text{End}(M)$.

- (1) Первичный радикал P содержит все правые нильидеалы и все левые нильидеалы кольца $\text{End}(M)$.
- (2) Если M – несингулярный модуль, то $P^n = 0$ и все $\text{End}(M_i)$ являются редуцированными кольцами.
- (3) Если M – несингулярный модуль и $\text{End}(M)$ – первичное кольцо, то все кольца $\text{End}(M_i)$ являются областями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из лемм 1(6) и 5(3); (2) следует из лемм 2 и 5(4); (3) следует из лемм 2, 3(10) и 5(1).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть единица кольца A является суммой таких ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все $e_i A$ – нильпотентно-инвариантные правые A -модули.

- (1) Первичный радикал P кольца A содержит все правые нильидеалы и все левые нильидеалы кольца A .
- (2) Если A – несингулярное справа кольцо, то $P^n = 0$ и все кольца $e_i A e_i$ являются редуцированными.
- (3) Если A – несингулярное справа первичное кольцо, то все кольца $e_i A e_i$ являются областями.

Следствие 1 вытекает из предложения 1.

ЛЕММА 6. Пусть M_A – дистрибутивный модуль.

- (1) Если $F, G \in \text{Lat}(M)$ и $F \cap G = 0$, то $\text{Hom}(F, G) = 0$.
- (2) Кольцо эндоморфизмов любого подфактора модуля M является нормальным кольцом, причем $\text{Hom}(F/(F \cap G), G/(F \cap G)) = 0$ для любых подмодулей F и G модуля M .
- (3) Если $F \in \text{Lat}(M)$, $f \in \text{End}(M)$, n – натуральное число, причем $f^n(F) \subseteq F$, то $f(F) \subseteq F$.
- (4) Модуль M – нильпотентно-инвариантный.
- (5) Пусть все простые подфакторы модуля M изоморфны (это так, например, если факторкольцо $A/J(A)$ изоморфно кольцу матриц над телом). Тогда M – цепной модуль.
- (6) Пусть M обладает лишь конечным числом неизоморфных простых подфакторов (это так, например, если A – полулокальное кольцо). Тогда M – конечномерный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) доказан в предложении 1.1 из [6, §4.1]; (2) следует из (1) и дистрибутивности всех подфакторов модуля M .

(3). Индукция по n . При $n = 1$ все ясно. Докажем утверждение для $n = 2$. Пусть $G \equiv \{m \in M \mid f(m) \in F\}$, $h: M \rightarrow M/(F \cap G)$ – естественный эпиморфизм и $f^2(F) \subseteq F$. Тогда $f(F) \subseteq G$, $h(F) \cap h(G) = 0$, причем f индуцирует гомоморфизм $\bar{f}: h(F) \rightarrow h(G)$. По (1) $\bar{f}(h(F)) = 0$. Поэтому $f(F) \subseteq F \cap G \subseteq F$. Пусть $n > 2$ и утверждение верно для всех чисел, меньших n . Если $g \equiv f^2$, то $g^{n-1} \equiv 0$. По предположению индукции $f^2(F) = g(F) \subseteq F$. Так как для $n = 2$ утверждение доказано, то $f(F) \subseteq F$.

Пункт (4) следует из (3).

(5). Допустим противное. Тогда M обладает подфактором $S \oplus T$, где S и T — простые модули, которые по условию изоморфны. Так как $S \oplus T$ — дистрибутивный модуль, то получено противоречие с (1).

(6). Допустим противное. Тогда M обладает подфактором $\bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$, где все T_i — простые модули, среди которых по условию лишь конечное число неизоморфных. Поэтому модуль M обладает подфактором $S \oplus T$, где S и T — изоморфные простые модули. Так как $S \oplus T$ — дистрибутивный модуль, то получено противоречие с (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть M_A — конечная прямая сумма n дистрибутивных модулей $M_1, \dots, M_n$.

Тогда первичный радикал P кольца $\text{End}(M)$ содержит все правые или левые нильидеалы кольца $\text{End}(M)$.

Если, кроме того, либо M — несингулярный модуль, либо $\text{End}(M)$ — риккартово справа или слева кольцо, то $P^n = 0$.

Теорема 1 следует из предложения 1, леммы 6(2) и леммы 5(5).

Примерами модулей M_A , к которым применима теорема 1, являются кольца эндоморфизмов полупростых модулей, кольца верхнетреугольных матриц над телами, любые факторкольца конечных прямых произведений колец матриц над дедекиндовыми кольцами и кольцо, построенное в замечании 6.

§ 2. Полудистрибутивные кольца

ЛЕММА 7. Пусть M — такой ненулевой правый идеал кольца A , что M_A — дистрибутивный модуль.

- (1) Если $m, n \in M$ и $mA \cap nA = 0$, то $mA \cap nA = 0$.
- (2) Если A — первичное кольцо, то M_A — равномерный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). Пусть $a \in A$. Правилем $f(nx) = max$ задается гомоморфизм $f: nA \rightarrow maA$. По лемме 6(1) $f \equiv 0$, $ma \cap nA = 0$. Поэтому $mA \cap nA = 0$; (2) следует из (1).

ЛЕММА 8. Пусть единица кольца A является суммой ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ и все правые A -модули $e_i A$ дистрибутивны.

- (1) Если A — первичное кольцо, то все $e_i A$ — равномерные правые A -модули и, следовательно, A — полуравномерное справа кольцо, у которого правая размерность Голди равна n .
- (2) Пусть F — такой идеал кольца A , что A/F — несингулярное справа первичное кольцо. Тогда для любого $e_i \in A \setminus F$ факторкольцо $e_i A e_i / e_i F e_i$ является областью.
- (3) Пусть A — первичное кольцо и все кольца $e_i A e_i$ являются телами. Тогда все $e_i A$ — минимальные правые идеалы кольца A и, следовательно, кольцо A изоморфно кольцу матриц размера $n \times n$ над телом.
- (4) Если A — простое кольцо, то оно изоморфно кольцу матриц размера $n \times n$ над телом.
- (5) Если A — регулярное первичное кольцо, то A изоморфно кольцу матриц размера $n \times n$ над телом.

- (6) Пусть B – идеал кольца A , $h: A \rightarrow A/B$ – естественный эпиморфизм. Тогда факторкольцо A/B является прямой суммой дистрибутивных правых идеалов $h(e_i A)$, некоторые из которых могут быть нулевыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 7(2); (2) вытекает из следствия 1(3), лемм 3(2) и 6(4).

(3). Пусть $N = e_i N$ – ненулевой подмодуль в $e_i A$, $A_{ij} \equiv e_i A e_j$. Достаточно доказать, что $N e_j = A_{ij}$ для любого j . Из первичности кольца A следует, что $N e_j \neq 0$. Из леммы 6(1) вытекает, что ненулевые дистрибутивные векторные пространства над телами являются одномерными. Поэтому из леммы 3(6) следует, что A_{ij} – одномерное векторное пространство над телом $e_j A e_j$. Поэтому $0 \neq N e_j = A_{ij}$.

(4). Зафиксируем одно из колец $e_i A e_i \equiv R$. По (3) достаточно доказать, что R – тело. По лемме 3(7), (10) R – дистрибутивное справа простое кольцо. Достаточно доказать, что произвольный максимальный правый идеал M кольца R является идеалом. Допустим противное. Найдутся такие элементы $x \in R$, $t \in M$, что $xt \in R \setminus M$. Пусть $F \equiv \{a \in R \mid xa \in M\}$, $G \equiv \{a \in R \mid (1+x)a \in M\}$. Тогда $x \in R \setminus M$. Поэтому F – максимальный правый идеал. Так как $xt \in R \setminus M$, то $t \in M \setminus F$. Поэтому $F \neq M$, $F + M = R$. Так как $(1+x)t - t = xt \in R \setminus M$, то $1+x \in R \setminus M$. Поэтому G – максимальный правый идеал. Так как $(1+x)t \in R \setminus M$, то $t \in M \setminus G$. Поэтому $G \neq M$, $G + M = R$. Пусть $b \in F \cap G$. Тогда $b = (1+x)b - xb \in M$. Поэтому $F \cap G \subseteq M$. Из правой дистрибутивности кольца R следует, что $R = (F + M) \cap (G + M) = F \cap G + M = M$. Получено противоречие.

Пункт (5) следует из (1) и из того, что конечномерное справа регулярное кольцо является артиновым; (6) следует из того, что $e_i B \subseteq B$ и, следовательно, $B = \bigoplus_{i=1}^n (B \cap e_i A)$.

ЛЕММА 9. Для модуля M_A над кольцом A равносильны условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) для любых элементов m, n модуля M найдутся такие элементы a, b, c, d кольца A , что $1 = a + b$, $ma = nc$, $nb = md$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $f = m + n$, $T \equiv mA \cap nA$. Так как $fA = fA \cap mA + fA \cap nA$, то найдутся такие элементы b, d кольца A , что $fb \in mA$, $fd \in nA$, $f = fb + fd$. Тогда $nb = fb - mb \in T$, $md = fd - nd \in T$. Пусть $a \equiv 1 - b$, $z \equiv a - d = 1 - b - d$. Тогда $1 = a + b$, $fz = f - fb - fd = 0$. Поэтому $ma = md + mz = md + fz - nz = md - nz$, причем $nz = -mz \in T$. Тогда $ma \in T$, откуда a и b – искомые элементы.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $F, G, H \in \text{Lat}(M)$, $f \in F \cap (G + H)$. Надо доказать включение $f \in F \cap G + F \cap H$. Пусть $f = m + n$, $m \in G$, $n \in H$. По условию найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $ma \in nA$, $nb \in mA$. Тогда $fb = mb + nb \in fA \cap mA \subseteq F \cap G$, $fa = ma + na \in fA \cap nA \subseteq F \cap H$, $f = fb + fa \in F \cap G + F \cap H$.

ЛЕММА 10. Пусть F и G – не сравнимые по включению вполне первичные подмодули дистрибутивного модуля M_A . Тогда $F + G = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_F: M \rightarrow M/F$ и $h_G: M \rightarrow M/G$ – естественные эпиморфизмы, $f \in F \setminus G$, $g \in G \setminus F$. По лемме 9 найдутся такие элементы $a, b \in A$,

что $1 = a + b$, $fa = gc \in G$, $gb = fd \in F$. Тогда $a \in r(h_G(f)) = r(h_G(M))$, откуда $Ma \subseteq G$. Аналогично, $Mb \subseteq F$. Поэтому $M = Ma + Mb \subseteq G + F \subseteq M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – полудистрибутивное справа кольцо, разлагающееся в прямую сумму n дистрибутивных правых идеалов $e_1A, \dots, e_nA$, где $e_i^2 = e_i \in A$.

- (1) Если M – максимальный идеал кольца A , то факторкольцо A/M изоморфно кольцу матриц над телом размера $t \times t$, где $t \leq n$.
- (2) Если B – пересечение некоторого множества максимальных идеалов кольца A , то индекс факторкольца A/B не превосходит n .
- (3) Пусть F – первичный идеал кольца A . Тогда
 - F – несингулярно первичный идеал
 - $\iff F$ – кусочно целостный идеал
 - $\iff$ для любого $e_i \in A \setminus F$ идеал e_iFe_i кольца e_iAe_i является вполне первичным
 - $\iff e_iFe_i$ – вполне первичный идеал кольца e_iAe_i хотя бы для одного $e_i \in A \setminus F$.
- (4) Пусть все левые идеалы Ae_i дистрибутивны, F – первичный идеал кольца A . Тогда F – несингулярно первичный идеал $\iff A/F$ – несингулярное слева кольцо.
- (5) Пусть F и G – несингулярно первичные идеалы кольца A . Тогда либо $F + G = A$, либо идеалы F и G сравнимы по включению.
- (6) Каждый собственный несингулярно первичный идеал F кольца A содержит ровно один минимальный несингулярно первичный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 8(4), (6).

(2). Так как индекс кольца матриц размера $t \times t$ над телом не превосходит t , то утверждение следует из (1) и из того, что класс колец, индекс которых не превосходит t , замкнут относительно перехода к подпрямым произведениям.

(3), (4). Пункт (3) следует из лемм 4(14) и 7(2); (4) следует из (3).

(5). Допустим, что $F + G \neq A$. Найдется $e_i \equiv e \in A \setminus (F + G)$. По лемме 3(7) eAe – дистрибутивное справа кольцо. По (3) eFe , eGe – вполне первичные идеалы кольца eAe . Так как $e \in A \setminus (F + G)$, то $eAe \neq eFe + eGe$. Так как $eFe + eGe \neq eAe$, то по лемме 10 можно считать, что вполне первичные идеалы eFe , eGe дистрибутивного справа кольца eAe сравнимы по включению. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $eFe \subseteq eGe$. Так как G – первичный идеал, причем $e \in A \setminus G$ и $eFe \subseteq G$, то $F \subseteq G$.

(6). В силу (5) и леммы Порна достаточно доказать, что если $G = \bigcap_{j \in J} G_j$ – пересечение убывающей цепи лежащих в F несингулярно первичных идеалов G_j , то G – несингулярно первичный идеал. Так как все идеалы G_j первичны, то G – первичный идеал. Пусть $e_i \equiv e \in A \setminus F$. По (3) все eG_je – вполне первичные идеалы кольца eAe . Тогда $eGe = \bigcap_{j \in J} eG_je$ – вполне первичный идеал. По (3) G – несингулярно первичный идеал.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – полудистрибутивное справа регулярное кольцо, разлагающееся в прямую сумму n дистрибутивных правых идеалов.

- (1) Пусть M – первичный идеал кольца A . Тогда факторкольцо A/M изоморфно кольцу матриц над телом размера $t \times t$, где $t \leq n$, и, в частности, M – максимальный идеал.

- (2) Индекс любого факторкольца кольца A не превосходит n .
 (3) Максимальное правое кольцо частных Q кольца A является его максимальным левым кольцом частных и изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над строго регулярными кольцами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 8(5),(6); (2) следует из предложения 2(2) и того, что любой идеал регулярного кольца является пересечением первичных идеалов; (3) следует из (2) и того, что утверждение пункта (3) верно для любого регулярного кольца ограниченного индекса (см. [7, теоремы 7.18, 7.20 и следствие 7.4]).

ЛЕММА 11. Пусть единица кольца A является суммой ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, причем все кольца $e_i A e_i$ дистрибутивны справа.

- (1) Пусть F и G – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца A , причем для любого i кольца $e_i A e_i / e_i F e_i$ и $e_i A e_i / e_i G e_i$ являются либо областями, либо нулевыми кольцами. Тогда $F + G = A$.
 (2) Пусть F и G – не сравнимые по включению несингулярно первичные идеалы кольца A . Тогда $F + G = A$.
 (3) Первичный радикал P кольца A содержит все правые нильидеалы и все левые нильидеалы кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). Допустим противное. Так как $1 \in A \setminus (F + G)$, то найдется идемпотент $e_i \in A \setminus (F + G)$. Из условия и из леммы 3(11) следует, что $e_i F e_i$, $e_i G e_i$ – не сравнимые по включению вполне первичные идеалы дистрибутивного справа кольца $e_i A e_i$ и $e_i F e_i + e_i G e_i \neq e_i A e_i$. Получено противоречие с леммой 10.

(2). Зафиксируем идемпотент e_i . По (1) достаточно доказать, что $e_i A e_i / e_i F e_i$ является либо областью, либо нулевым кольцом. Пусть $e_i A e_i / e_i F e_i \neq 0$. Тогда $e_i \in A \setminus F$. Пусть $h: A \rightarrow A/F$ – естественный эпиморфизм. По лемме 8(2) $e_i A e_i / e_i F e_i$ – область.

(3). Зафиксируем идемпотент e_i . Пусть P_i – первичный радикал кольца $e_i A e_i \equiv R_i$. Так как R_i – дистрибутивное справа кольцо, то по теореме 1 все правые или левые нильидеалы кольца R_i лежат в P_i . По лемме 4(4) P содержит все правые или левые нильидеалы кольца A .

ЛЕММА 12. Пусть R – полупервичное кольцо с условием максимальности для аннуляторных идеалов.

- (1) Существуют такие минимальные первичные идеалы $F_1, \dots, F_n$ кольца A , что $F_1 \cap \dots \cap F_n = 0$, но никакое пересечение менее чем n идеалов F_i не равно нулю.
 (2) Если R – несингулярное справа кольцо, то все A/F_i – несингулярные справа кольца.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из того, что R – подпрямое произведение конечного числа первичных колец [5, с. 273, 274].

(2). Пусть $F_1, \dots, F_n$ – минимальные первичные идеалы из пункта (1). Будем считать, что $n > 1$, поскольку при $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $F \equiv F_1$, $B \equiv F_2 \cap \dots \cap F_n \neq 0$, $h: A \rightarrow A/F$ – естественный эпиморфизм. Достаточно доказать, что $h(A)$ – несингулярное справа кольцо. Пусть D – такой правый идеал кольца A , что D содержит идеал F и $h(B) \cap h(D) = 0$. Тогда

$h(D)h(B) \subseteq H(D) \cap h(B) = 0$. Так как $h(A)$ – первичное кольцо, то $h(D) = 0$. Поэтому $h(B)$ – существенный правый идеал кольца $h(A)$. Тогда достаточно доказать, что $h(B)_{h(A)}$ – несингулярный модуль. Пусть b – такой элемент идеала B , что $r_{h(A)}(h(b))$ – существенный правый идеал кольца $h(A)$, E – такой правый идеал кольца A , что $h(E) = h(B) \cap r_{h(A)}(h(b))$ и $F \subseteq E \subseteq B \oplus F$. Так как $h(B)$ – существенный правый идеал кольца $h(A)$, то $h(E)$ – существенный правый идеал кольца $h(A)$. Поэтому E – существенный правый идеал, причем $bE \subseteq B \cap F = 0$. Так как A – несингулярное справа кольцо, то $b = 0$, $h(b) = 0$.

ЛЕММА 13. Пусть $F_1, \dots, F_n$ – такие идеалы кольца A , что $F_1 \cap \dots \cap F_n = 0$ и $F_i + F_j = A$ для всех $i \neq j$. Тогда $A \cong \prod_{i=1}^n A/F_i$.

Лемма 13 (“Китайская теорема об остатках”) хорошо известна и проверяется непосредственно. При доказательстве используется следующее замечание: если F, G, H – идеалы кольца A и $F + G = F + H = A$, то $A = F + G \cap H$, поскольку $A = (F + G)(F + H) \subseteq F + GH$.

ЛЕММА 14 [8, с. 56, лемма 2.5]. Если A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то $\text{Sing}(A_A)$ – нильпотентный идеал.

ЛЕММА 15. Пусть A – полупервичное кольцо, удовлетворяющее либо условию максимальности для правых аннуляторов, либо условию максимальности для левых аннуляторов. Тогда A – несингулярное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай условия максимальности для левых аннуляторов. Левая несингулярность кольца A следует из леммы 13. Допустим, что правый сингулярный идеал B кольца A не равен нулю. Кольцо A удовлетворяет условию минимальности для правых аннуляторов. Поэтому найдутся такие элементы $b_1, \dots, b_n \in B$, что $r(B) = r(b_1, \dots, b_n) = r(b_1) \cap \dots \cap r(b_n)$. Тогда $r(B)$ – существенный правый идеал, поскольку все правые идеалы $r(b_i)$ являются существенными. Поэтому $D \equiv B \cap r(B) \neq 0$ и $D^2 = 0$, что противоречит полупервичности кольца A .

ЛЕММА 16 (см. [9, лемма 9.12]). Пусть A – конечномерное справа полупервичное кольцо. Тогда A – несингулярное справа кольцо $\iff A$ – правое кольцо Голди.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – полудистрибутивное справа несингулярное справа полупервичное кольцо с условием максимальности для аннуляторных идеалов. Тогда A – конечное прямое произведение первичных правых колец Голди $A_1, \dots, A_n$, причем каждое кольцо A_i разлагается в конечную прямую сумму таких дистрибутивных равномерных правых идеалов $e_{i1}A, \dots, e_{im(i)}A$, что $e_{ij}^2 = e_{ij}$, а все кольца $e_{ij(i)}A_i e_{ij(i)}$ являются дистрибутивными справа областями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 12 существуют такие минимальные первичные идеалы $F_1, \dots, F_n$ кольца A , что $F_1 \cap \dots \cap F_n = 0$ и все A/F_i – несингулярные справа первичные кольца. По лемме 8(1) все A/F_i – конечномерные справа кольца, являющиеся по лемме 16 правыми кольцами Голди. По лемме 11(2) $F_i + F_j = A$ для всех $i \neq j$. По лемме 12 $A \cong \prod_{i=1}^n A/F_i$. Теперь к первичным кольцам A/F_i применяем лемму 8(1).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A – полудистрибутивное справа кольцо, являющееся подпрямым произведением конечного числа первичных колец $A_1, \dots, A_n$. Тогда A – конечномерное справа полупервичное кольцо. Следовательно, если A – несингулярное справа кольцо, то A – правое кольцо Голди.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме 8(1) все кольца A_i конечномерны справа, причем подпрямое произведение конечного числа конечномерных справа колец является конечномерным справа кольцом, то A – конечномерное справа кольцо. Кроме того, подпрямое произведение первичных колец является полупервичным кольцом. Далее применим лемму 16.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – полудистрибутивное справа полупервичное кольцо либо с условием максимальности для правых аннуляторов, либо с условием максимальности для левых аннуляторов.

Тогда A – конечное прямое произведение первичных правых колец Голди, разлагающихся в конечную прямую сумму дистрибутивных равномерных правых идеалов.

Теорема 2 следует из предложений 1(3), 3 и леммы 15.

Примерами колец A , к которым применима теорема 2, являются конечные прямые произведения колец матриц над дедекиндовыми кольцами (например, над кольцами целых алгебраических чисел).

СЛЕДСТВИЕ 4. Полудистрибутивное справа полупервичное кольцо, обладающее правой или левой размерностью Крулля, разлагается в конечное прямое произведение несингулярных первичных колец.

Следствие 4 вытекает из теоремы 2, леммы 15 и того, что полупервичное кольцо с правой (левой) размерностью Крулля является правым (левым) кольцом Голди [10, следствие 3.4].

СЛЕДСТВИЕ 5. Для первичного идеала M полудистрибутивного справа кольца A равносильны условия:

- (1) M – несингулярно первичный идеал;
- (2) A/M – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;
- (3) A/M – кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов;
- (4) A/M – правое кольцо Голди.

В следствии 5 импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (2) $\Rightarrow$ (1) вытекают из леммы 15, импликация (1) $\Rightarrow$ (4) – из следствия 3, а импликации (4) $\Rightarrow$ (3) и (4) $\Rightarrow$ (2) – из того, что по теореме Голди первичное правое кольцо Голди является правым порядком в простом артиновом кольце.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть единица кольца A разлагается в сумму таких ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все правые идеалы $e_i A$ равномерны.

- (1) $\text{Sing}(A_A)$ совпадает со множеством всех элементов $a \in A$, таких что для любого e_i найдется такой ненулевой элемент $b \in e_i A$, что $ab = 0$.
- (2) Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in Ae_i$. Тогда $a \in \text{Sing}(A_A) \iff$ существует такой ненулевой элемент $b \in e_i A$, что $ab = 0$.
- (3) A – несингулярное справа кольцо $\iff$ для любого идемпотента e_i верно, что $ab \neq 0$ для каждого ненулевого элемента $a = ae_i \in Ae_i$ и для любого ненулевого элемента $b = e_i b \in e_i A$.

- (4) A – несингулярное справа кольцо $\iff$ для любых идемпотентов e_i, e_j, e_k верно, что $ab \neq 0$ для каждого ненулевого элемента $a = e_j a e_i \in e_j A e_i$ и для любого ненулевого элемента $b = e_i b e_k \in e_i A e_k$.
- (5) Пусть A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, $a \in A e_i$ и существует такой ненулевой элемент $b \in e_i A$, что $ab = 0$. Тогда идеал кольца A , порожденный элементом a , является нильпотентным.

Пункт (1) замечания 1 вытекает из леммы 4(7), равенств $a = a e_i, b = e_i b$ и того, что все ненулевые подмодули равномерного модуля являются существенными; (2) следует из (1); (3) следует из (1) и из леммы 4(8); (4) вытекает из (3) и того, что если $a e_i \neq 0, e_i b \neq 0$, то $e_j a e_i \neq 0, e_i b e_k \neq 0$ для некоторых e_j, e_k ; (5) следует из (2) и из леммы 14.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть единица кольца A разлагается в сумму таких ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все правые идеалы $e_i A$ и все левые идеалы $A e_i$ равномерны. Равносильны условия:

- (1) A – несингулярное справа кольцо;
- (2) A – несингулярное слева кольцо;
- (3) для любых идемпотентов e_i, e_j, e_k верно, что $ab \neq 0$ для каждого ненулевого элемента $a = e_j a e_i \in e_j A e_i$ и для любого ненулевого элемента $b = e_i b e_k \in e_i A e_k$.

Замечание 2 вытекает из замечания 1(3), (4) и симметричности условия (3).

ЛЕММА 17. Пусть $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ – разложение единицы полусовершенного кольца A в сумму локальных ортогональных идемпотентов.

- (1) Если M – правый A -модуль, то дистрибутивность модуля M равносильна тому, что $M e_i$ является цепным правым модулем над кольцом $e_i A e_i$ для любого e_i .
- (2) Правая полудистрибутивность кольца A равносильна тому, что $e_j A e_i$ является цепным правым модулем над кольцом $e_i A e_i$ для любых e_i и e_j .

Пункт (1) леммы 17 следует из лемм 4(11) и 6(5); (2) следует из (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 1 вытекает, что первичный радикал P полудистрибутивного справа кольца A содержит все правые или левые нильидеалы кольца A , причем если A – несингулярное справа кольцо, то P – нильпотентный идеал.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Кольцо матриц второго порядка над кольцом целых чисел дает пример первичного нётерова полудистрибутивного PI-кольца, не являющегося ни полупростым справа, ни дистрибутивным справа.

При анализе возможных гипотез о строении полудистрибутивных колец полезно иметь в виду замечание 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Существует такая 5-мерная алгебра A над полем F с F -базисом $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$, что

- (1) e_{11}, e_{22}, e_{33} – локальные ортогональные идемпотенты, $1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$;
- (2) $e_{22}A$ и $e_{33}A$ – простые проективные правые A -модули, изоморфные модулям $e_{12}A$ и $e_{13}A$, соответственно;
- (3) ${}_A A = A e_{11} \oplus A e_{22} \oplus A e_{33}$, где $A e_{11}$ – простой проективный левый A -модуль, а $A e_{22}$ и $A e_{33}$ – цепные левые A -модули, являющиеся существенными расширениями простых неизоморфных модулей $A e_{12}$ и $A e_{13}$, соответственно;

- (4) $e_{11}A$ – неразложимый неравномерный проективный дистрибутивный локальный A -модуль, у которого все собственные ненулевые подмодули исчерпываются простыми проективными неизоморфными модулями $e_{12}A$, $e_{13}A$ и полупростым проективным модулем $e_{12}A \oplus e_{13}A$;
- (5) $e_{12}A$ – замкнутый подмодуль дистрибутивного модуля $e_{11}A$, не являющийся прямым слагаемым модуля $e_{11}A$;
- (6) каждый неразложимый инъективный правый A -модуль является циклическим цепным модулем;
- (7) каждый неразложимый правый A -модуль является либо простым модулем, либо циклическим инъективным цепным модулем, либо циклическим проективным дистрибутивным модулем;
- (8) A – полудистрибутивная справа полупцепная слева наследственная конечномерная F -алгебра (и, в частности, несингулярное полудистрибутивное кольцо), не являющаяся полуравномерным справа кольцом, причем каждый правый A -модуль является полудистрибутивным и разлагается в прямую сумму полупростого модуля, инъективного полупцепного модуля и проективного полудистрибутивного модуля.

Нужный пример дает подалгебра A алгебры всех верхнетреугольных матриц третьего порядка над полем F , у которой F -базисом служат матричные единицы $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$. Доказательство замечания 5 может быть проведено элементарными рассуждениями и стандартными методами теории конечномерных алгебр над полем.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В утверждениях 2.4 и 2.5 [3] делается попытка доказать следующее: если M_A – дистрибутивный несингулярный конечномерный модуль над полудистрибутивным справа полусовершенным кольцом A , то M – полуравномерный модуль, у которого каждый замкнутый подмодуль выделяется прямым слагаемым. В следствии 2.6 [3] утверждается, что полудистрибутивное справа несингулярное справа полусовершенное кольцо является полуравномерным справа. Из замечания 6 (см. пункты (4), (5) и (8)) следует, что все эти утверждения не верны. Ошибка содержится в последнем предложении доказательства утверждения 2.4 [3].

ЛЕММА 18. *Каждый модуль над полулокальным кольцом, разлагающийся в конечную прямую сумму дистрибутивных модулей, является конечномерным модулем.*

Лемма 18 вытекает из леммы 6(6) и того, что конечная прямая сумма конечномерных модулей является конечномерным модулем.

ЛЕММА 19. *Пусть A – полудистрибутивное справа полулокальное кольцо.*

- (1) *Каждый циклический правый A -модуль является конечномерным модулем.*
- (2) *Каждое несингулярное справа факторкольцо кольца A является правым кольцом Голди с условием максимальнойности для левых аннуляторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 18. Так как подкольцо кольца с условием максимальнойности для правых (левых) аннуляторов само обладает этим свойством, то пункт (2) следует из пункта (1) и того, что максимальное правое кольцо частных несингулярного справа конечномерного справа кольца – полупростое артиново.

ЛЕММА 20. Пусть A – полупервичное кольцо.

- (1) Пусть существует идеал B кольца A , разлагающийся в прямую сумму идеалов $M_1, \dots, M_n$ кольца A , причем $r(B) = 0$, и все идеалы $r(M_i)$ являются первичными идеалами кольца A . Тогда A – подпрямое произведение конечного числа первичных колец и удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных идеалов.
- (2) Если ненулевой идеал M кольца A не содержит прямой суммы никаких двух ненулевых идеалов кольца A , то $r(M)$ – первичный идеал.

Пункт (1) леммы 20 следует из [5, §1 гл. 4, теорема 3 и лемма 4]; (2) проверяется непосредственно.

ЛЕММА 21. Пусть A – полупервичное кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов.

- (1) A – подпрямое произведение конечного числа первичных колец и удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных идеалов.
- (2) Пусть сумма любых двух не сравнимых по включению первичных идеалов кольца A равна A . Тогда A – конечное прямое произведение первичных колец.

Пункт (1) леммы 21 следует из леммы 20; (2) следует из (1) и леммы 13.

ЛЕММА 22. Пусть A – полупервичное PI-кольцо.

- (1) A – несингулярное кольцо.
- (2) Если A – полудистрибутивное справа кольцо с условием максимальности для аннуляторных идеалов, то A – конечное прямое произведение первичных несингулярных колец.

Пункт (1) леммы 22 доказан, например, в [11, следствие 6.1.31]; (2) следует из (1) и предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть единица кольца A является суммой таких ненулевых ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что во всех кольцах $e_i A e_i$ любые два первичных идеала либо сравнимы по включению, либо дают в сумме кольцо $e_i A e_i$. (Это так, например, если решетка идеалов каждого кольца $e_i A e_i$ является цепью.)

- (1) Сумма любых двух не сравнимых по включению первичных идеалов кольца A равна A .
- (2) Пусть A – полупервичное кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда A – конечное прямое произведение первичных колец.
- (3) Пусть A – полупервичное кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда A – кусочно целостное относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ кольцо $\iff e_i A e_i$ – область для любого e_i .
- (4) Пусть F – полупервичный идеал кольца A , причем факторкольцо A/F не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов. Тогда F – кусочно целостный относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ идеал $\iff e_i F e_i$ – вполне первичный идеал кольца $e_i A e_i$ для любого $e_i \in A \setminus F$.

- (5) Пусть F – полупервичный идеал кольца A , причем факторкольцо A/F не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов и все правые идеалы $(e_i A + F)/F$ кольца A/F равномерны. Тогда

F – несингулярно полупервичный идеал

$\iff F$ – кусочно целостный относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ идеал

$\iff$ для любого $e_i \in A \setminus F$ идеал $e_i F e_i$ кольца $e_i A e_i$ является вполне первичным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) следует из леммы 3(11) и следующего факта: если F и G – такие идеалы кольца A , что $F + G \neq A$, то идеал $F + G$ не содержит хотя бы один идемпотент e_i ; (2) следует из (1) и из леммы 21; (3) следует из (2) и леммы 4(13); (4) следует из (3) и леммы 3(3); (5) следует из (4) и леммы 4(14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – полудистрибутивное справа полусовершенное кольцо, $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ – разложение единицы кольца A в сумму локальных идемпотентов.

- (1) Сумма любых двух не сравнимых по включению первичных идеалов кольца A равна A .
- (2) Если A – полупервичное кольцо, то A – конечное прямое произведение первичных колец.
- (3) Пусть F – полупервичный идеал кольца A . Тогда

F – несингулярно полупервичный идеал

$\iff F$ – кусочно целостный относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ идеал

$\iff$ для любого $e_i \in A \setminus F$ идеал $e_i F e_i$ кольца $e_i A e_i$ является вполне первичным

$\iff A/F$ – правое кольцо Голди.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 17(2) кольцо A удовлетворяет условиям предложения 4. По лемме 19 каждое факторкольцо кольца A является конечномерным справа кольцом. Поэтому утверждение следует из предложения 4 и леммы 16.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть A – полудистрибутивное справа полусовершенное кольцо, $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ – разложение единицы кольца A в сумму локальных идемпотентов, N – пересечение всех несингулярно полупервичных идеалов кольца A . Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) N – наименьший несингулярно полупервичный идеал кольца A .
- (2) N – наименьший кусочно целостный относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ полупервичный идеал кольца A .
- (3) N – наименьший идеал кольца A , факторкольцо кольца A по которому является полупервичным правым кольцом Голди.
- (4) Пусть кольцо A либо обладает правой или левой размерностью Крулля, либо является PI-кольцом. Тогда идеал N совпадает с первичным радикалом кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}$ – множество всех несингулярно полупервичных идеалов.

(1), (2), (3). По предложению 5(3) множество $\mathcal{E}$ совпадает как со множеством всех кусочно целостных относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$ полупервичных идеалов, так

и со множеством всех таких идеалов кольца A , факторкольца кольца A по которым являются полупервичными правыми кольцами Голди. Поэтому достаточно доказать, что N – несингулярно полупервичный идеал. Так как N – пересечение некоторого множества полупервичных идеалов кольца A , то N – полупервичный идеал. Пусть $e_i \in A \setminus N$. По предложению 5(3) достаточно доказать, что $e_i N e_i$ – вполне первичный идеал кольца $e_i A e_i$. Пусть $\mathcal{E} = \{F_j\}_{j \in J}$. Тогда $e_i N e_i = e_i (\bigcap_{j \in J} F_j) e_i = \bigcap_{j \in J} (e_i F_j e_i)$. По предложению 5(3) все идеалы $e_i F_j e_i$ кольца $e_i A e_i$ являются вполне первичными. По лемме 17(2) $e_i A e_i$ – цепное справа кольцо. Поэтому $e_i N e_i$ – пересечение цепи вполне первичных идеалов $e_i F_j e_i$ кольца $e_i A e_i$. Тогда $e_i N e_i$ – вполне первичный идеал кольца $e_i A e_i$.

(4). Пусть F – полупервичный идеал кольца A . Достаточно доказать, что A/F – несингулярное справа кольцо. Если A обладает правой или левой размерностью Крулля, то это вытекает из следствия 4. Каждый полупервичный идеал кольца A является несингулярно полупервичным.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть A – полудистрибутивное справа несингулярное справа полупервичное кольцо, причем кольцо A либо не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, либо является полулокальным кольцом. Тогда A – конечное прямое произведение полуравномерных справа первичных правых колец Голди.

Следствие 6 вытекает из предложения 3, а также лемм 19 и 21.

ЛЕММА 23. Пусть M_A – проективный модуль над несингулярным справа кольцом A .

- (1) Если M – существенное расширение конечнопорожденного модуля N , то M – конечнопорожденный модуль.
- (2) Если M – конечномерный модуль, то M – конечнопорожденный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать надо только (1), поскольку каждый конечномерный модуль является существенным расширением конечной прямой суммы циклических равномерных модулей. Так как M – проективный модуль, то найдутся такие прямые суммы $M \oplus L = \bigoplus_{j \in J} G_j \equiv F$, что $G_j \cong A_A$ для всех j . Поскольку N – конечнопорожденный модуль, то найдется такое конечное множество $D \subseteq J$, что $N \subseteq \bigoplus_{j \in D} G_j \equiv H$. Пусть $f: F \rightarrow \bigoplus_{j \in J \setminus D} G_j$ – проекция с ядром H . Несингулярность модуля A_A влечет несингулярность свободного модуля F . Так как $f(N) = 0$ и M – существенное расширение модуля N , то $f(M) \subseteq \text{Sing}(F) = 0$. Поэтому $M \subseteq H$. Тогда прямое слагаемое M модуля F является прямым слагаемым конечнопорожденного модуля H . Поэтому M – конечнопорожденный модуль.

ЛЕММА 24. Риккартово справа кольцо является несингулярным справа.

Лемма 24 проверяется непосредственно.

ЛЕММА 25. Пусть A – наследственное справа кольцо. Тогда каждый конечномерный правый идеал кольца A является конечнопорожденным. В частности, если A – конечномерное справа кольцо, то A – нётерово справа кольцо.

Лемма 25 вытекает из лемм 23(2) и 24.

ЛЕММА 26. *Наследственное справа полудистрибутивное справа полулокальное кольцо является нётеровым справа кольцом.*

Лемма 26 следует из лемм 19 и 25.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A – наследственное справа полудистрибутивное справа полупервичное кольцо.*

- (1) *Если A не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, то A – конечное прямое произведение нётеровых справа первичных колец.*
- (2) *Если A – полулокальное кольцо, то A – конечное прямое произведение нётеровых справа первичных колец.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). По лемме 23 A – несингулярное справа кольцо. По следствию 6 можно без ограничения общности считать, что A – полуравномерное справа первичное кольцо. Полуравномерное справа кольцо A является конечномерным справа. По лемме 24 A – нётерово справа кольцо.

Пункт (2) следует из (1) и из леммы 25.

Примерами колец A , к которым применима теорема 3, являются наследственные полупервичные кольца (например, конечные прямые произведения колец матриц над кольцами формальных степенных рядов от одной переменной над полями). Другие примеры таких колец приведены, например, в [12].

Список литературы

1. Туганбаев А. А. Кольца с плоскими правыми идеалами и дистрибутивные кольца // Матем. заметки. 1985. Т. 38. №2. С. 218–228.
2. Mazurek R., Puczyłowski E. On nilpotent elements of distributive rings // Comm. Algebra. 1990. V. 18. №2. P. 463–471.
3. Wright Mary H. Right locally distributive rings // Ring Theory (Granville, OH, 1992). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. P. 350–357.
4. Gordon R., Small L. W. Piecewise domains // J. Algebra. 1972. V. 23. №3. P. 553–564.
5. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.
6. Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
7. Goodearl K. R. Von Neumann regular rings. London: Pitman, 1979.
8. Stenström B. Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
9. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
10. Gordon R., Robson J. C. Krull dimension // Mem. Amer. Math. Soc. 1973. V. 133. P. 1–78.
11. Rowen L. H. Ring theory. Student edition. Boston: Academic Press, 1991.
12. Кириченко В. В. Обобщенно однорядные кольца // Матем. сб. 1976. Т. 99. №4. С. 559–581.

Московский энергетический институт
(технический университет)

Поступила в редакцию
23.01.1996