Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, Геометрия грассманаова образа локального изометрического погружения n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:28:25

УДК 514

Ю. А. Аминов

Геометрия грассманова образа локального изометрического погружения n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство

В работе получено выражение для тензора кривизны метрики грассманова образа изометрического погружения n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство. Основной результат работы – теорема: *не существует локального изометрического погружения 3-мерного пространства Лобачевского в 5-мерное евклидово пространство класса регулярности C^3 с постоянной кривизной метрики грассманова образа.*

Библиография: 12 названий.

Исследование изометрических погружений n -мерного пространства Лобачевского L^n в евклидово пространство E^{2n-1} проводилось в ряде работ [1]–[6], [8]–[10]. Одновременно в этих работах, а также в [7], изучался грассманов образ погружения. При определенных условиях на этот естественный геометрический объект были выделены различные классы погружений, обладающие интересными свойствами. В работе [2] показано, что метрику погруженной области L^n локально в координатах кривизны можно записать в виде

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i du_i^2, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n \sin^2 \sigma_i = 1.$$

Заметим, что координатные линии u_i касаются главных направлений, а функции σ_i имеют геометрический смысл: длина i -го вектора главной нормальной кривизны равна $\operatorname{ctg} \sigma_i$. В дальнейшем для удобства будем использовать обозначения $H_i = \sin \sigma_i$, $h_i = \cos \sigma_i$. Кроме того, используем коэффициенты Дарбу $\beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial u_i}$ при $i \neq j$. В работе [2] установлено, что следующая система дифференциальных уравнений описывает изометрические погружения пространства Лобачевского L^n в E^{2n-1}

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial H_j}{\partial u_i} &= \beta_{ij} H_i, & \text{b) } \frac{\partial H_i}{\partial u_i} &= - \sum_q \beta_{iq} H_q, & q &\neq i, \\ \text{c) } \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_k} &= \beta_{ik} \beta_{kj}, & \text{d) } \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_j} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u_i} + \sum_q \beta_{iq} \beta_{jq} &= 0, \\ \text{e) } \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u_j} + \sum_q \beta_{qi} \beta_{qj} &= H_i H_j. \end{aligned}$$

Естественно назвать эту систему системой “Лобачевский–Евклид” или кратко системой “LE”. Пожалуй, это будет первым названием, в котором имена Лобачевского и Евклида стоят рядом. Эта система является обобщением известного уравнения $\omega_{uu} - \omega_{vv} = \sin \omega$. Предложенное название удобно еще в том отношении, что

оно индуцирует названия других систем дифференциальных уравнений, описывающих погружения пространств постоянной кривизны в пространства постоянной кривизны.

Грассманов образ погруженной регулярной области является регулярным n -мерным подмногообразием Γ^n в грассмановом многообразии $G_{n-1, 2n-1}$. Грассманово отображение Ψ переносит координаты u_i на Γ^n , и в этих координатах метрика Γ^n записывается в виде (см. [3])

$$dl^2 = \sum_{i=1}^n \cos^2 \sigma_i du_i^2.$$

На основании этого вида ранее было установлено, что грассманово отображение увеличивает площадь любого k -мерного подмногообразия при $k \geq 2$, $n > 2$, расположенного в погруженной области, увеличивает длину любой асимптотической линии. Из этих свойств вытекает следующая

ТЕОРЕМА. *Если грассманов образ Γ^n расположен на замкнутом n -мерном многообразии и если грассманово отображение конечно-кратно, то погружение полного пространства L^n в E^{2n-1} имеет особенности.*

В данной работе мы продолжим изучение внутренних и внешних свойств грассманова образа. Заметим, что не любое риманово пространство допускает n -ортогональную систему координат, поэтому метрика Γ^n не произвольна. Далее, координатные линии u_i на Γ^n являются линиями кривизны на каждой координатной гиперповерхности $u_j = \text{const}$, которые рассматриваются как гиперповерхности в Γ^n . Мы получаем выражение для тензора Λ_{ijki} кривизны метрики грассманова образа в терминах функций H_i, h_i, β_{ij} и с его помощью устанавливаем следующее свойство грассманова отображения: *внешняя геометрия координатных гиперповерхностей сохраняется при этом отображении*. Рассмотрим координатную гиперповерхность F_i , которая задается уравнением $u_i = \text{const}$, и ее грассманов образ $\Psi(F_i)$. Нормали к ним выберем согласованно с помощью грассманова отображения: если ξ – нормаль к F_i , то в качестве нормали к $\Psi(F_i)$ возьмем $\Psi^* \xi$, где Ψ^* – индуцированное отображение касательных пространств. Пусть γ – кривая на F_i и $\tilde{\gamma}$ – ее грассманов образ на $\Psi(F_i)$. Пусть k и $\tilde{k}$ – их нормальные кривизны на гиперповерхностях F_i и $\Psi(F_i)$ по отношению к L^n и Γ^n при указанном выборе нормалей. Полные внешние кривизны, т.е. произведения всех главных кривизн этих гиперповерхностей, обозначим через K_i и $\tilde{K}_i$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Нормальные кривизны координатных гиперповерхностей k и $\tilde{k}$ связаны между собой соотношением*

$$\tilde{k} = -k \left(\frac{ds}{dl} \right)^2 \frac{H_i}{h_i}, \quad (1)$$

где ds и dl – линейные элементы γ и $\tilde{\gamma}$. Полные внешние кривизны F_i и $\Psi(F_i)$ связаны соотношением

$$\tilde{K}_i = (-1)^{n-1} K_i \left(\frac{dV}{d\omega} \right)^2 \left(\frac{H_i}{h_i} \right)^{n-3}, \quad (2)$$

где $dV, d\omega$ – элементы объемов L^n и Γ^n .

Из формулы (1) следует, что если F_i – выпуклая (седловая) гиперповерхность в L^n , то и ее грассманов образ – тоже выпуклая (седловая) гиперповерхность в Γ^n . Из (2) следует, что при $n = 3$ отношение $\tilde{K}_i/K_i$ не зависит от i и равно квадрату отношения элементов объемов прообраза и образа.

Естественно возникает вопрос: может ли метрика грассманова образа иметь постоянную кривизну. Имеет место следующий основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. *Не существует локального изометрического погружения L^3 в E^5 класса регулярности C^3 с постоянной кривизной метрики грассманова образа.*

Во второй части работы мы исследуем внешнюю геометрию $\Gamma^3 \subset E^{10}$. Так как существует стандартное вложение $G_{2,5}$ в единичную сферу S^9 , то мы имеем следующие включения

$$\Gamma^3 \subset G_{2,5} \subset S^9 \subset E^{10}.$$

Нормальное пространство N к подмногообразию $\Gamma^3 \subset E^{10}$ в каждой точке $p \in \Gamma^3$ мы разбиваем на три подпространства

$$N = N_1 + N_2 + N_3,$$

где N_1 – нормальное подпространство к $\Gamma^3 \subset G_{2,5}$, N_2 – нормальное подпространство к $G_{2,5} \subset S^9$, N_3 – нормальное подпространство к $S^9 \subset E^{10}$. Подпространства N_1 и N_2 имеют размерности равные 3 и N_3 – одномерно. Распределения пространств N_1 , N_2 снабжаются нормальными связностями ∇^i . Рассматриваются тензоры кривизны этих нормальных связностей $T_{\tau\sigma/ke}^i$, $i = 1, 2$. Вводятся матрицы кривизны нормальных связностей ∇^i

$$T^i = \begin{pmatrix} T_{23|23}^i & T_{31|32}^i & T_{21|23}^i \\ T_{31|32}^i & T_{31|31}^i & T_{12|13}^i \\ T_{21|23}^i & T_{12|13}^i & T_{12|12}^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для грассманова образа Γ^3 изометрического погружения $L^3 \subset E^5$ матрица кривизны нормальной связности ∇^1 совпадает с нормированной матрицей кривизны метрики грассманова образа dl^2 , а матрица кривизны связности ∇^2 имеет диагональный вид*

$$T^2 = \begin{pmatrix} H_2 H_3 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 H_3 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 H_2 \end{pmatrix}.$$

Разбиение нормального пространства N к $\Gamma^3 \subset E^{10}$ позволило выявить некоторую двойственность во внешнем поведении Γ^3 . При некотором специальном выборе базисов в N_1 и в N_2 коэффициенты кручения $\varepsilon_{ki|e}$ базиса в N_1 и коэффициенты кручения $\sigma_{ik|e}$ базиса в N_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ki|k} &= \bar{\beta}_{ik}, \quad \varepsilon_{ki|j} = 0, \\ \sigma_{ki|k} &= \beta_{ik}, \quad \sigma_{ki|j} = 0, \end{aligned} \quad k \neq i \neq j,$$

где $\bar{\beta}_{ik}$, β_{ik} – коэффициенты Дарбу метрик dl^2 и ds^2 соответственно. Эта двойственность проявляется и в выражениях тензоров кривизн нормальных связностей. Тензор кривизны T^1 представлен в терминах тензора кривизны метрики dl^2 грассманаова образа Γ^3 , а тензор кривизны T^2 выражается в терминах кривизны метрики ds^2 погружения L^3 в E^5 . Отметим также, что образами линий кривизны u_i на грассмановом образе Γ^3 являются асимптотические линии подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$.

Заметим, что теория изометрических погружений пространств Лобачевского L^n в E^{2n-1} входит важной составной частью в общую теорию изометрических погружений римановых пространств. При этом, хотя и получен ряд важных и интересных результатов по погружениям многомерных римановых пространств в работах Дж. Неша, Н. Кейпера, В. А. Рохлина, М. Громова и других математиков, но при этом ввиду большой коразмерности погружения не возникают обычные связи между внутренними свойствами погруженного пространства и внешними свойствами полученного подмногообразия. С точки зрения установления таких связей интересно изучение погружений в пространства наименьших из возможных размерностей, как в случае погружений L^n в E^{2n-1} .

В заключение я хочу поблагодарить профессора К. Тененблат за полезные обсуждения работы.

1. Тензор кривизны метрики грассманова образа погружения L^n в E^{2n-1}

Обозначим через Λ_{ijke} тензор кривизны метрики dl^2 . По формуле (37.4) из книги Эйзенхарта [11] мы имеем

$$\Lambda_{kikk} = h_k h_i \left\{ \frac{\partial \bar{\beta}_{ki}}{\partial u_k} + \frac{\partial \bar{\beta}_{ik}}{\partial u_i} + \sum_q \bar{\beta}_{qi} \bar{\beta}_{qk} \right\}.$$

Используя соотношение $H_i^2 + h_i^2 = 1$, мы находим связь $\bar{\beta}_{ij} = -\beta_{ij} \frac{H_i H_j}{h_i h_j}$. Кроме того, нетрудно найти

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{H_i H_k}{h_i h_k} \right) = \frac{\beta_{ki}}{h_i h_k} \left(\frac{H_k^2}{h_i^2} - \frac{H_i^2}{h_k^2} \right) - \sum_q^{(i,k)} \beta_{kq} \frac{H_i H_q}{h_i h_k^3}.$$

Аналогичные выражения получим для производных по u_i , заменив i на k . Учитывая уравнения е) системы “LE” и предыдущие соотношения между коэффициентами Дарбу метрик ds^2 и dl^2 , мы получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{kikk} = h_k h_i \left\{ - \left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} \right) \frac{H_i H_k}{h_i h_k} - \beta_{ki} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{H_i H_k}{h_i h_k} \right) \right. \\ \left. - \beta_{ik} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{H_i H_k}{h_i h_k} \right) + \sum_q^{(i,k)} \beta_{kq} \beta_{qi} \frac{H_i H_k H_q^2}{h_i h_k h_q^2} \right\}, \end{aligned}$$

где (i, k) над знаком суммы обозначает пропуск индексов k и i при суммировании. Окончательно находим

$$\begin{aligned} \Lambda_{k i i k} = & -H_i^2 H_k^2 + \left\{ \sum_q^{(i, k)} \beta_{q i} \beta_{q k} \frac{H_i H_k}{h_q^2} + \sum_q^{(i, k)} \beta_{k i} \beta_{k q} \frac{H_i H_q}{h_k^2} \right. \\ & \left. + \sum_q^{(i, k)} \beta_{i k} \beta_{i q} \frac{H_k H_q}{h_i^2} \right\} + (\beta_{k i}^2 - \beta_{i k}^2) \left(\frac{H_i^2}{h_k^2} - \frac{H_k^2}{h_i^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

При $n = 3$ выражение в фигурных скобках не зависит от индексов k и i и мы его обозначим через T

$$T = \beta_{12} \beta_{13} \frac{H_2 H_3}{h_1^2} + \beta_{21} \beta_{23} \frac{H_1 H_3}{h_2^2} + \beta_{31} \beta_{32} \frac{H_1 H_2}{h_3^2}.$$

Далее, рассмотрим компоненту тензора Римана метрики dl^2 при различных индексах h, i, k

$$\begin{aligned} \Lambda_{h i i k} = & h_h h_i \left\{ \frac{\partial \bar{\beta}_{h i}}{\partial u_k} - \bar{\beta}_{h k} \bar{\beta}_{k i} \right\} \\ = & - \left(\beta_{h k} \beta_{k i} \frac{H_h H_i}{h_k^2} + \beta_{k h} \beta_{h i} \frac{H_i H_k}{h_h^2} + \beta_{h i} \beta_{k i} \frac{H_h H_k}{h_i^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Остальные компоненты тензора Римана равны нулю в силу ортогональности координат. Итак, все компоненты тензора кривизны метрики грассманова образа выражены в терминах H_i и их первых производных. Это позволяет сразу сделать некоторые заключения. Покажем, например, что возможно выбрать такие начальные данные погружения L^3 в E^5 , что метрика dl^2 будет иметь постоянную кривизну вдоль одной координатной линии. Как показано в работе [3], в качестве начальных данных системы “LE” в случае погружения L^3 в E^5 мы можем взять следующие шесть функций: $\beta_{12}^0(0, u_2, 0)$, $\beta_{21}^0(0, u_2, 0)$ — на линии u_2 и $\beta_{13}^0(0, 0, u_3)$, $\beta_{31}^0(0, 0, u_3)$, $\beta_{23}^0(0, 0, u_3)$, $\beta_{32}^0(0, 0, u_3)$ — на линии u_3 . Мы положим, что все эти функции $\beta_{ij}^0 \equiv 0$. Тогда и функции $\beta_{12}(0, 0, u_3)$, $\beta_{21}(0, 0, u_3)$ будут тождественно равны нулю, так как имеют место уравнения

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32} = 0, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31} = 0,$$

и, кроме того, в точке $(0, 0, 0)$ мы имеем $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$. Поэтому на координатной линии u_3 при $i \neq k$ компоненты тензора Римана $\Lambda_{i j j k} = 0$ и $\Lambda_{i k i k} = H_i^2 H_k^2$. Следовательно, кривизна Γ^3 для площадки, проходящей через координатные линии u_i, u_k , которую мы обозначим через $\Lambda_{i k}$, имеет вид

$$\Lambda_{i k} = \left(\frac{H_i H_k}{h_i h_k} \right)^2.$$

Если мы накладываем условие постоянства кривизны, то

$$\frac{H_i H_k}{h_i h_k} = \frac{H_i H_j}{h_i h_j}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \sigma_k = \operatorname{tg} \sigma_j$ и $H_1 = H_2 = H_3 = 1/\sqrt{3}$. Значения H_i можно выбрать только в точке $(0, 0, 0)$. Тогда в этой точке все кривизны равны $\Lambda_{ik} = 1/4$. Но принимая во внимание уравнение

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_3} = \beta_{3i} H_3 = 0,$$

получим, что вдоль всей u_3 -линии $H_i = \operatorname{const}$ и следовательно, вдоль всей этой линии секционная кривизна $\Lambda_{12} = \Lambda_{23} = \Lambda_{31}$ постоянна и равна $1/4$. Нетрудно показать, используя найденные выражения для тензора кривизны Λ_{ijke} , что в одной точке кривизна Λ_{ik} может принимать любые значения.

Рассмотрим некоторые общие свойства грасманова отображения, связанные с метриками ds^2 и dl^2 . Пусть k_{ij} и $\tilde{k}_{ij}$ – нормальные кривизны гиперповерхности $u_i = \operatorname{const}$ в направлении координатной линии u_j . Мы имеем согласно [11, с. 191, упр. 3]

$$k_{ij} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial u_i} = -\frac{\beta_{ij}}{H_j}, \quad \tilde{k}_{ij} = -\frac{\bar{\beta}_{ij}}{h_j} = -k_{ij} \left(\frac{H_j}{h_j} \right)^2 \frac{H_i}{h_i}.$$

Рассмотрим последние симметрические функции главных кривизн гиперповерхности $u_i = \operatorname{const}$ в L^n и в Γ^n , которые обозначим через K_i и $\tilde{K}_i$ соответственно. Используя предыдущие соотношения между k_{ij} и $\tilde{k}_{ij}$, получим

$$K_i = \prod_{\alpha \neq i} k_{i\alpha},$$

$$\tilde{K}_i = \prod_{\alpha \neq i} \tilde{k}_{i\alpha} = (-1)^{n-1} K_i \left(\frac{H_1 \cdots H_n}{h_1 \cdots h_n} \right)^2 \left(\frac{H_i}{h_i} \right)^{n-3}.$$

Поэтому, если n – нечетное, то знаки кривизн K_i и $\tilde{K}_i$ совпадают, если n – четное, то они противоположны. Если $n = 3$, то отношение внешних кривизн координатных гиперповерхностей

$$\frac{\tilde{K}_i}{K_i} = \left(\frac{dV}{d\omega} \right)^2 = \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{h_1 h_2 h_3} \right)^2$$

равно отношению элементов объемов и, следовательно, не зависит от i .

Рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma \subset F_i$ на гиперповерхности $u_i = \operatorname{const}$. Нормальная кривизна k этой кривой вычисляется по формуле Эйлера $k = \sum_j^{(i)} k_{ij} \cos^2 \varphi_j$, причем $\sum_j^{(i)} \cos^2 \varphi_j = 1$. Пусть $\tilde{\gamma}$ – образ этой кривой на $\Psi(F_i)$ и $\tilde{k}$ – ее нормальная кривизна. По формуле Эйлера мы имеем $\tilde{k} = \sum_j^{(i)} \tilde{k}_{ij} \cos^2 \alpha_j$, где $\sum_j^{(i)} \cos^2 \alpha_j = 1$. Мы заметим, что соответствие между точками погруженной области L^3 и их грасмановым образом задается с помощью равенства координат u_1, u_2, u_3 . Следовательно, дифференциалы du_i для точек кривых γ и $\tilde{\gamma}$ равны между собой. Следовательно,

$$\cos \varphi_j = \frac{H_j du_j}{\sqrt{\sum_q^{(i)} H_q^2 du_q^2}}, \quad \cos \alpha_j = \frac{h_j du_j}{\sqrt{\sum_q^{(i)} h_q^2 du_q^2}},$$

где знак (i) над знаком суммы обозначает пропуск индекса i . Следовательно, для нормальных кривизн

$$k = \sum_j^{(i)} k_{ij} H_j^2 \frac{du_j^2}{ds^2}, \quad \tilde{k} = \sum_j^{(i)} \tilde{k}_{ij} h_j^2 \frac{du_j^2}{dl^2} = -k \left(\frac{ds}{dl} \right)^2 \frac{H_i}{h_i}.$$

Если кривая γ – асимптотическая линия поверхности F_i , то $\tilde{\gamma}$ тоже асимптотическая линия на образе этой гиперповерхности. Так как координатные гиперповерхности F_i составляют n -ортогональную систему в Γ^n , то линии u_i являются линиями кривизны. Несколько огрубляя, можно сказать: внешняя геометрия координатных гиперповерхностей кривизны при грассмановом отображении сохраняется. Теорема 1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству основного результата работы.

ТЕОРЕМА 2. *Не существует локального изометрического погружения L^3 в E^5 с постоянной кривизной метрики грассманова образа.*

Рассмотрим матрицу кривизны метрики dl^2

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{2323} & \Lambda_{3132} & \Lambda_{2123} \\ \Lambda_{3132} & \Lambda_{1313} & \Lambda_{1213} \\ \Lambda_{2123} & \Lambda_{1213} & \Lambda_{1212} \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Если матрица кривизны Λ диагональная, то найдутся такие функции $\alpha_i = \alpha_i(u_i)$ и функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, что коэффициенты метрики $H_i^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$.*

Заметим, что Д. Ф. Егоров исследовал поверхности и триортогональные системы в E^3 с указанным условием на коэффициенты метрики. Он назвал их метриками потенциального типа [12]. Если матрица кривизны имеет диагональный вид, то, используя (4), мы имеем следующую систему уравнений для величин $y_k = H_i H_j / h_k^2$, $i \neq j \neq k$,

$$\begin{aligned} \beta_{21} \beta_{13} y_1 + \beta_{12} \beta_{23} y_2 + \beta_{23} \beta_{13} y_3 &= 0, \\ \beta_{31} \beta_{12} y_1 + \beta_{12} \beta_{32} y_2 + \beta_{32} \beta_{13} y_3 &= 0, \\ \beta_{21} \beta_{31} y_1 + \beta_{32} \beta_{21} y_2 + \beta_{23} \beta_{31} y_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как H_i отличны от нуля, то детерминант матрицы коэффициентов этой системы равен нулю, что нам дает

$$\beta_{21} \beta_{13} \beta_{32} - \beta_{31} \beta_{12} \beta_{23} = 0. \tag{6}$$

Так как $\beta_{13} \beta_{32} = \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3}$ и $\beta_{23} \beta_{31} = \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3}$, то это уравнение можно переписать в виде

$$\beta_{21} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{12} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3}. \tag{6'}$$

Предположим, что ни один из коэффициентов β_{ij} не равен тождественно нулю. Случаи, когда один из этих коэффициентов равен нулю, мы рассмотрим ниже.

Из последнего уравнения следует, что найдется такая функция двух аргументов $f_{12}(u_1, u_2)$, что

$$\beta_{12} = f_{12}(u_1, u_2)\beta_{21}. \quad (7)$$

С помощью уравнений (6') получим

$$\beta_{31} = f_{31}(u_3, u_1)\beta_{13}, \quad \beta_{23} = f_{23}\beta_{32}, \quad f_{12}f_{23}f_{31} = 1.$$

Следовательно,

$$f_{12} = \frac{1}{f_{23}(u_2, u_3)f_{31}(u_3, u_1)}.$$

Левая часть этого уравнения зависит от u_1, u_2 , а правая часть при фиксированном u_3 есть произведение двух функций, одна из которых есть функция от u_2 , а вторая от u_1 . Поэтому можно записать $f_{12} = \varphi_{12|1}(u_1)\varphi_{12|2}(u_2)$ и в общем случае

$$f_{ij} = \varphi_{ij|i}(u_i)\varphi_{ij|j}(u_j).$$

Имеем

$$\varphi_{12|1}(u_1)\varphi_{12|2}(u_2)\varphi_{23|3}(u_3)\varphi_{23|2}(u_2)\varphi_{31|3}(u_3)\varphi_{31|1}(u_1) = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_{12|1}(u_1)\varphi_{31|1}(u_1) &= c_1, \\ \varphi_{12|2}(u_2)\varphi_{23|2}(u_2) &= c_2, \\ \varphi_{23|3}(u_3)\varphi_{31|3}(u_3) &= c_3, \end{aligned}$$

причем $c_1c_2c_3 = 1$. Для упрощения записи мы обозначим

$$\varphi_{12|1} = \varphi_1(u_1), \quad \varphi_{12|2} = \varphi_2(u_2) \quad \varphi_{31|3} = \varphi_3(u_3).$$

Выражения для f_{ij} мы перепишем в виде

$$\begin{aligned} f_{12} &= \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2), \\ f_{31} &= \frac{\varphi_3(u_3)c_1}{\varphi_1(u_1)}, \\ f_{23} &= \frac{c_2c_3}{\varphi_2(u_2)\varphi_3(u_3)} = \frac{1}{c_1\varphi_2(u_2)\varphi_3(u_3)}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к уравнениям (7), мы получим

$$\beta_{12} = f_{12}\beta_{21} = \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\beta_{21}.$$

Это уравнение переписывается в такой форме:

$$\frac{1}{\varphi_1 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \frac{\varphi_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial u_2}.$$

Введем новые переменные

$$\alpha_1 = \int \varphi_1(u_1) du_1, \quad \alpha_2 = \int \frac{du_2}{\varphi_2(u_2)}.$$

Тогда можем записать

$$\frac{\partial H_2^2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H_1^2}{\partial \alpha_2}.$$

Далее, рассмотрим уравнение

$$\beta_{31} = f_{31}\beta_{13} = \frac{\varphi_3(u_3)c_1\beta_{13}}{\varphi_1(u_1)},$$

которое перепишем в виде

$$\frac{1}{c_1\varphi_3} \frac{\partial H_1^2}{\partial u_3} = \frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial H_3^2}{\partial u_1}.$$

Введем новую переменную

$$\alpha_3 = \int \varphi_3 c_1 du_3.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial H_3^2}{\partial \alpha_1}.$$

Наконец, рассмотрим уравнение

$$\beta_{23} = f_{23}\beta_{32} = \frac{\beta_{32}}{\varphi_2\varphi_3c_1},$$

которое можно переписать так

$$\frac{\partial H_3^2}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial H_2^2}{\partial \alpha_3}.$$

Итак, вектор $\{H_1^2, H_2^2, H_3^2\}$ является соленоидальным, и поэтому найдется функция Φ такая, что

$$H_i^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть Φ_i, Φ_{ij} означают производные функции Φ по координатам α_i . Найдем выражения β_{ij} с помощью этих производных и функций H_i . Положим $\gamma_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_i}$. Имеем, например,

$$\beta_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} = \frac{\gamma_1 \Phi_{21}}{2H_1 H_2}.$$

Аналогичные выражения получаются и для других коэффициентов

$$\beta_{ij} = \frac{\gamma_i \Phi_{ij}}{2H_i H_j}. \quad (8)$$

Условие диагональности матрицы Λ сводится к одному уравнению

$$\frac{\Phi_{13}\Phi_{12}}{H_1^2 h_1^2} + \frac{\Phi_{21}\Phi_{23}}{H_2^2 h_2^2} + \frac{\Phi_{31}\Phi_{32}}{H_3^2 h_3^2} = 0. \quad (9)$$

Заметим, что уравнение $\sum H_i^2 = 1$ можно записать в виде

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 1. \quad (10)$$

Введем новые координаты x, y, z , которые связаны с α_i следующими формулами

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= x + y + z, & x &= (\alpha_2 + \alpha_3)/2, \\ \alpha_2 &= x - y + z, & y &= (\alpha_1 - \alpha_2)/2, \\ \alpha_3 &= x + y - z, & z &= (\alpha_1 - \alpha_3)/2.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (10) можем переписать в виде: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1$. Следовательно, найдется такая функция $\varphi(y, z)$ двух аргументов, что $\Phi = x + \varphi(y, z)$.

Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = \frac{\varphi_y + \varphi_z}{2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = \frac{1 - \varphi_y}{2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} = \frac{1 - \varphi_z}{2}.$$

Поэтому первые и вторые производные функции Φ не зависят от x . Это обстоятельство мы используем в дальнейшем. Условие постоянства кривизны метрики dl^2 требует также определенного вида диагональных элементов матрицы Λ . Используем (3). Должна существовать такая постоянная Λ_0 — кривизна метрики грассмана образа, что для диагональных элементов выполняются равенства

$$H_i^2 H_k^2 - T + (\beta_{ik}^2 - \beta_{ki}^2) \left(\frac{H_i^2}{h_k^2} - \frac{H_k^2}{h_i^2} \right) = \Lambda_0 h_i^2 h_k^2.$$

Обозначим $d_j = \Lambda_0 h_i^2 h_k^2 - H_i^2 H_k^2$, $\theta_i = \gamma_i^2$, $x_i = \Phi_{jk}$, где индексы i, j, k различные. Пусть $\mu_i = \frac{1}{4} H_i^2 h_i^2$. Выражение T переписывается в следующем виде

$$T = \theta_1 x_2 x_3 \mu_1 + \theta_2 x_1 x_3 \mu_2 + \theta_3 x_1 x_2 \mu_3.$$

В дальнейшем удобно использовать такие обозначения

$$\begin{aligned}\lambda_i &= -x_j x_k \mu_i, \\ B_1 &= x_1^2 (\mu_2 - \mu_3), \quad B_2 = x_2^2 (\mu_3 - \mu_1), \quad B_3 = x_3^2 (\mu_1 - \mu_2).\end{aligned}$$

Тогда система уравнений на диагональные элементы матрицы Λ записывается таким образом

$$\begin{aligned}\theta_1 (\lambda_1 - B_3) + \theta_2 (\lambda_2 + B_2) + \theta_3 \lambda_3 &= d_3, \\ \theta_1 (\lambda_1 + B_2) + \theta_2 \lambda_2 + \theta_3 (\lambda_3 - B_2) &= d_2, \\ \theta_1 \lambda_1 + \theta_2 (\lambda_2 - B_1) + \theta_3 (\lambda_3 + B_1) &= d_1.\end{aligned} \tag{11}$$

ЛЕММА 2. Если система уравнений (12) выполнена, то функции θ_i имеют вид $\theta_i = s\alpha_i + \rho_i$, где s и ρ_i постоянные.

Будем рассматривать систему (11) как систему для определения функций θ_i . Коэффициенты уравнений, входящих в эту систему, и правые части не зависят от x . Поэтому, дифференцируя по x , получим

$$\begin{aligned}\theta'_1 (\lambda_1 - B_3) + \theta'_2 (\lambda_2 + B_2) + \theta'_3 \lambda_3 &= 0, \\ \theta'_1 (\lambda_1 + B_2) + \theta'_2 \lambda_2 + \theta'_3 (\lambda_3 - B_2) &= 0, \\ \theta'_1 \lambda_1 + \theta'_2 (\lambda_2 - B_1) + \theta'_3 (\lambda_3 + B_1) &= 0.\end{aligned}$$

Введем пять векторов

$$l_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_1 = \begin{pmatrix} -B_3 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} B_3 \\ 0 \\ -B_1 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы коэффициентов системы имеет выражение

$$\Delta = [\lambda_1 l_0 + l_1, \lambda_2 l_0 + l_2, \lambda_3 l_0 + l_3] = \lambda_1 [l_0 l_2 l_3] + \lambda_2 [l_1 l_0 l_3] + \lambda_3 [l_1 l_2 l_0] + [l_1 l_2 l_3].$$

Легко найти

$$[l_0 l_2 l_3] = [l_1 l_0 l_3] = [l_1 l_2 l_0] = -(B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_1), \quad [l_1 l_2 l_3] = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta = -(B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Так как уравнение (9) можно переписать в виде $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, то $\Delta = 0$. Так как определитель Δ равен нулю, то можем взять только первые два уравнения

$$\begin{aligned} \theta'_1(\lambda_1 - B_3) + \theta'_2(\lambda_2 + B_3) + \theta'_3 \lambda_3 &= 0, \\ \theta'_1(\lambda_1 + B_2) + \theta'_2 \lambda_2 + \theta'_3(\lambda_3 - B_2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \mu \begin{bmatrix} \lambda_2 + B_3, & \lambda_3 \\ \lambda_2, & \lambda_3 - B_2 \end{bmatrix}, \quad \theta'_2 = \mu \begin{bmatrix} \lambda_3, & \lambda_1 - B_3 \\ \lambda_3 - B_2, & \lambda_1 + B_2 \end{bmatrix}, \\ \theta'_3 &= \mu \begin{bmatrix} \lambda_1 - B_3, & \lambda_2 + B_3 \\ \lambda_1 + B_2, & \lambda_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где μ – некоторое число. Имеем

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \mu(\lambda_3 B_3 - \lambda_2 B_2 - B_2 B_3), \quad \theta'_2 = \mu(\lambda_3 B_2 + \lambda_1 B_2 + \lambda_3 B_3 - B_2 B_3), \\ \theta'_3 &= \mu(-\lambda_2 B_3 - \lambda_1 B_3 - \lambda_2 B_2 - B_2 B_3). \end{aligned}$$

Используя равенство $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, находим $\theta'_1 = \theta'_2 = \theta'_3$. Но функции θ_i зависят от различных аргументов. Поэтому $\theta'_i = c$, где c – некоторая постоянная. Следовательно,

$$\theta_1 = c(x + y + z) + \rho_1, \quad \theta_2 = c(x - y + z) + \rho_2, \quad \theta_3 = c(x + y - z) + \rho_3,$$

где ρ_i – некоторые постоянные. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если метрика грассманова образа имеет постоянную кривизну, то при грассмановом отображении отношение элементов объемов образа к прообразу постоянно.

Вернемся к системе (11). Так как ее определитель матрицы коэффициентов равен нулю, то система (11) имеет решение только в том случае, когда ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы коэффициентов. Рассмотрим миноры третьего порядка расширенной матрицы. Имеем, например,

$$\Delta_1 = [\lambda_2 l_0 + l_2, \lambda_3 l_0 + l_3, d].$$

Более подробно выпишем следующие определители

$$\begin{aligned} [l_0 l_3 d] &= -B_2 d_1 + B_1 d_3 + B_2 d_3 - B_1 d_2, & [l_2 l_0 d] &= B_1(d_3 - d_2) + B_3(d_1 - d_2), \\ [l_2 l_3 d] &= -(B_2 B_3 d_1 + B_1 B_3 d_2 + B_1 B_2 d_3). \end{aligned}$$

Используя уравнение $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, запишем выражение

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \lambda_1 B_1(d_2 - d_3) + \lambda_2 B_2(d_3 - d_1) + \lambda_3 B_3(d_1 - d_2) \\ &\quad - (B_2 B_3 d_1 + B_1 B_3 d_2 + B_1 B_2 d_3) = 0. \end{aligned}$$

Выражение в правой части симметрично относительно индексов 1, 2, 3. Прямая проверка показывает, что уравнения $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ имеют тот же вид. Величины B_i можно выразить через λ_i в следующем виде

$$B_i = -\frac{\lambda_j \lambda_k k_i}{\lambda_i}, \quad i \neq j \neq k,$$

где

$$k_1 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_3)}{\mu_2 \mu_3}, \quad k_2 = \frac{\mu_2(\mu_3 - \mu_1)}{\mu_1 \mu_3}, \quad k_3 = \frac{\mu_3(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}.$$

Отсюда следует, что

$$B_2 B_3 = \lambda_1^2 k_2 k_3, \quad B_3 B_1 = \lambda_2^2 k_1 k_3, \quad B_1 B_2 = \lambda_3^2 k_1 k_2.$$

Поэтому уравнение $\Delta_1 = 0$ переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (d_2 - d_3)k_1 \lambda_2 \lambda_3 + (d_3 - d_1)k_2 \lambda_1 \lambda_3 + (d_1 - d_2)k_3 \lambda_1 \lambda_2 \\ &\quad + \lambda_1^2 k_2 k_3 d_1 + \lambda_2^2 k_1 k_3 d_2 + \lambda_3^2 k_1 k_2 d_3 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Левая часть этого уравнения является квадратичным выражением относительно λ_i . Входящие сюда величины k_i имеют достаточно простой вид. После ряда элементарных преобразований получим

$$k_1 h_1^2 = H_3^2 - H_2^2, \quad k_2 h_2^2 = H_1^2 - H_3^2, \quad k_3 h_3^2 = H_2^2 - H_1^2.$$

Воспользуемся уравнением $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Тогда уравнение (12) преобразуется к виду квадратного уравнения на λ_2, λ_3

$$A \lambda_2^2 + B \lambda_2 \lambda_3 + C \lambda_3^2 = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= k_3(d_2 - d_1 + k_2 d_1 + k_1 d_2), \\ B &= 2k_2 k_3 d_1 + k_1(d_2 - d_3) - k_2(d_3 - d_1) - k_3(d_1 - d_2), \\ C &= k_2(d_1 - d_3 + k_3 d_1 + k_1 d_3). \end{aligned}$$

После некоторых элементарных, но довольно сложных преобразований, используя выражения k_i и d_i , мы найдем

$$\begin{aligned} A &= 2(H_1^2 - H_2^2)^2 H_3^4 / t, \\ B &= -4H_2^2 H_3^2 (H_1^2 - H_3^2)(H_2^2 - H_1^2) / t, \\ C &= 2(H_1^2 - H_3^2)^2 H_2^4 / t, \end{aligned}$$

где $t = (h_1 h_2 h_3)^2$.

Заметим, что все члены, содержащие Λ_0 , взаимно уничтожаются. Итак, уравнение (13) переписывается в таком виде

$$(\lambda_2(H_2^2 - H_1^2)H_3^2 - \lambda_3(H_1^2 - H_3^2)H_2^2)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -\frac{(H_1^2 - H_3^2)H_2^2}{(H_1^2 - H_2^2)H_3^2}.$$

Вспоминая обозначение λ_i , можем записать

$$\frac{\beta_{12}H_3^3}{\beta_{13}H_2^3} = -\frac{H_1^4 - H_3^4}{H_1^4 - H_2^4}.$$

Здесь индекс 1 выделен, но так как система (11) симметрична относительно всех индексов, то имеют место общие уравнения

$$\frac{\beta_{ij}H_k^3}{\beta_{ik}H_j^3} = -\frac{H_i^4 - H_k^4}{H_i^4 - H_j^4}. \quad (14)$$

Но эти уравнения эквивалентны условию постоянства отношения элементов объемов при грассмановом отображении прообраза к образу. Действительно, пусть

$$\left(\frac{H_1 H_2 H_3}{h_1 h_2 h_3} \right)^2 = \rho^2 = \text{const},$$

где ρ — некоторая постоянная. Отсюда имеем

$$(H_1 H_2 H_3)^2 = \rho^2 (H_1^2 H_2^2 + H_2^2 H_3^2 + H_3^2 H_1^2 + H_1^2 H_2^2 H_3^2).$$

После деления правой и левой частей на $(H_1 H_2 H_3)^2$ получим

$$\sum_i \frac{1}{H_i^2} = \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) = \text{const}.$$

Продифференцируем, например, по координате u_1 и используем уравнения системы “LE”

$$\frac{-(\beta_{12}H_2 + \beta_{13}H_3)}{H_1^3} + \frac{\beta_{12}H_1}{H_2^3} + \frac{\beta_{13}H_1}{H_3^3} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\beta_{12}H_3^3}{\beta_{13}H_2^3} = -\frac{H_1^4 - H_3^4}{H_1^4 - H_2^4}.$$

Аналогичные уравнения получаются при дифференцировании по u_2, u_3 . Итак, полученные нами уравнения (14) совпадают с условиями постоянства отношения элементов объемов. Лемма 3 доказана.

В работе [3] мы ввели и рассмотрели класс изометрических погружений, для которых коэффициенты H_i зависят от меньшего числа параметров $t_1, t_2, \dots, t_m$, $m < n$, которые в свою очередь зависят от $u_1, \dots, u_n$. Эти погружения естественно назвать *функционально вырожденными*. В частности, при $n = 3$ для функционально вырожденных погружений существует функция $t = t(u_1, u_2, u_3)$ такая, что

$$H_i = H_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы установили, таким образом, что условие постоянства кривизны метрики dl^2 влечет свойство функциональной вырожденности погружения. Как показано в работе [3], в этом случае из уравнения с) системы “LE” вытекает, что найдутся такие функции двух аргументов, что $\beta_{ij} = c_{ij}H_k$, $i \neq j \neq k$. Функции $c_{ij}(u_i, u_j)$ будем называть производящими. Из системы “LE” вытекает, что эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений.

$$c_{ki}c_{ij} + c_{ik}c_{kj} + c_{ij}c_{kj} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial u_j} + \frac{\partial c_{ji}}{\partial u_i} = 0, \quad (16)$$

$$Q + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial c_{ji}}{\partial u_j} \right) \frac{H_k}{H_i H_j} = 0, \quad (17)$$

где $Q = c_{12}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{32} - 1$. Принимая во внимание (8), получим

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_{21}} = \frac{c_{12}}{c_{21}} = \frac{\gamma_1(u_1)}{\gamma_2(u_2)}. \quad (18)$$

Из уравнений (16) следует, что найдется такая функция $A_{12}(u_1, u_2)$, что

$$c_{12} = \frac{\partial A_{12}}{\partial u_1}, \quad c_{21} = -\frac{\partial A_{12}}{\partial u_2}.$$

Перепишем уравнение (18) в таком виде

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Если ввести новые переменные ξ, η такие, что

$$\xi = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \eta = \alpha_1 - \alpha_2,$$

тогда

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial \xi} = 0.$$

Следовательно, $A_{12} = A_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)$. Поэтому

$$c_{12} = \gamma_1 A'_{12}, \quad c_{21} = \gamma_2 A'_{12}.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} c_{31} &= \gamma_3 A'_{31}, & c_{13} &= \gamma_1 A'_{31}, \\ c_{23} &= \gamma_2 A'_{23}, & c_{32} &= \gamma_3 A'_{23}. \end{aligned}$$

Можно найти явный вид функций A_{ij} . Среди уравнений (15) имеются только два независимых

$$\begin{aligned} c_{13}c_{32} + c_{31}c_{12} + c_{12}c_{32} &= 0, \\ c_{12}c_{23} + c_{21}c_{13} + c_{13}c_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Перепишем первое из них в таком виде

$$\gamma_1 \gamma_3 (A_{31u_1} A_{23u_3} + A_{31u_3} A_{12u_1} - A_{12u_1} A_{23u_3}) = 0.$$

После сокращения на $\gamma_1 \gamma_3$ получим

$$A_{12u_1} = -\frac{A_{31u_1} A_{23u_3}}{A_{31u_3} - A_{23u_3}}.$$

Заметим, что $A_{31} = A_{31}(\alpha_3 - \alpha_1)$. Уравнение переписывается через производные по α_i

$$A'_{12} = -\frac{A'_{31}(\alpha_3 - \alpha_1)A'_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)}{A'_{31}(\alpha_3 - \alpha_1) + A'_{23}(\alpha_2 - \alpha_3)}. \quad (19)$$

Положим

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \tau, \quad \alpha_3 - \alpha_1 = \nu.$$

Тогда $\alpha_2 - \alpha_1 = \tau + \nu$. Уравнение (19) переписывается в таком виде

$$-\frac{1}{A'_{12}(-\tau - \nu)} = \frac{1}{A'_{23}(\tau)} + \frac{1}{A'_{31}(\nu)}. \quad (20)$$

Обозначим

$$-\frac{1}{A'_{12}(-\tau - \nu)} = c(\tau + \nu), \quad \frac{1}{A'_{23}(\tau)} = a(\tau), \quad \frac{1}{A'_{31}(\nu)} = b(\nu).$$

В этих обозначениях наше уравнение приобретает вид

$$c(\tau + \nu) = a(\tau) + b(\nu).$$

Дифференцируя сначала по τ , а потом по ν , получим $c'' = 0$. Итак,

$$c = m_{12}(\tau + \nu) - a_{12},$$

где m_{12} , a_{12} постоянные. Значит

$$A'_{12} = \frac{1}{m_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) + a_{12}}.$$

Аналогичным образом находим

$$A'_{23} = \frac{1}{m_{23}(\alpha_2 - \alpha_3) + a_{23}}, \quad A'_{31} = \frac{1}{m_{31}(\alpha_3 - \alpha_1) + a_{31}}.$$

Уравнение (20) дает нам $m_{12} = m_{23} = m_{31}$. Обозначим $m_{12} = m$. Кроме того, имеет место следующее уравнение на постоянные a_{ij} :

$$a_{12} + a_{23} + a_{31} = 0.$$

Итак, имеем явное выражение для функций A_{ij}

$$A_{ij}(t) = \int \frac{dt}{mt + a_{ij}}.$$

Введем обозначение $N_{ij} = m(\alpha_i - \alpha_j) + a_{ij}$. Тогда можем записать

$$c_{12}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{32} = \frac{\theta_1}{N_{12}N_{31}} + \frac{\theta_2}{N_{12}N_{23}} + \frac{\theta_3}{N_{31}N_{23}}. \quad (21)$$

Но выражения функций θ_i даются леммой 2. Введем следующие постоянные χ_i , $i = 1, 2, 3$, и μ

$$\chi_i = \varepsilon^{ijk} (m(\rho_k - \rho_j) + ca_{jk}), \quad \mu = \rho_1 a_{23} + \rho_2 a_{31} + \rho_3 a_{12}.$$

Тогда можем переписать

$$c_{12}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{32} = [\alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \alpha_3 \chi_3 + \mu] / N_{12}N_{23}N_{31}.$$

Далее, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{12}}{\partial u_1} &= [-mc(\alpha_1 + \alpha_2) + ca_{12} - 2m\rho_1] / 2N_{12}^2, \\ \frac{\partial c_{21}}{\partial u_2} &= [mc(\alpha_1 + \alpha_2) + ca_{12} + 2m\rho_2] / 2N_{12}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial c_{21}}{\partial u_2} = \frac{ca_{12} + m(\rho_2 - \rho_1)}{(m(\alpha_1 - \alpha_2) + a_{12})^2}.$$

Аналогично установим

$$\frac{\partial c_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial c_{13}}{\partial u_1} = \frac{ca_{31} + m(\rho_1 - \rho_3)}{(m(\alpha_3 - \alpha_1) + a_{31})^2}.$$

С помощью уравнений (17) находим

$$\frac{H_2}{H_3} = \sqrt{\frac{ca_{12} - m(\rho_1 - \rho_2)}{ca_{31} + m(\rho_1 - \rho_3)}} \frac{N_{31}}{N_{12}}, \quad \frac{H_1}{H_3} = \sqrt{\frac{ca_{12} + m(\rho_2 - \rho_1)}{ca_{23} + m(\rho_3 - \rho_2)}} \frac{N_{23}}{N_{12}}.$$

Подставив выражения H_3 и H_1 через H_2 в уравнение (17), мы получим явное выражение функции H_2

$$H_2 = a_2 N_{31} / P,$$

где $a_2 = \text{const}$, $P = \sum_i \alpha_i \chi_i + \mu - N_{12} N_{23} N_{31}$ ($m \neq 0$, так как иначе $H_i/H_j = \text{const}$, что невозможно). Аналогично найдем

$$H_1 = a_1 N_{23}/P, \quad H_3 = a_3 N_{12}/P,$$

где a_i — некоторые постоянные. Так как должно выполняться равенство $\sum_i H_i^2 = 1$, то

$$a_1^2 N_{23}^2 + a_2^2 N_{31}^2 + a_3^2 N_{12}^2 = P^2.$$

Но правая часть является полиномом шестой степени по переменным α_i , а выражение в левой части — полином лишь второй степени, поэтому равенство невозможно. Итак, мы доказали теорему в общем случае.

Перейдем теперь к рассмотрению исключительного случая, когда один из коэффициентов β_{ij} равен нулю. Пусть, например, $\beta_{12} \equiv 0$. Тогда одно из уравнений системы “LE” дает

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32} = 0.$$

Следовательно, мы имеем две возможности.

- а) Либо $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$. Тогда семейство поверхностей кривизны $u_1 = \text{const}$ составлено из вполне геодезических поверхностей, т.е. из плоскостей Лобачевского.
- б) Либо $\beta_{12} = \beta_{32} = 0$. В этом случае семейство линий кривизны с параметром u_2 состоит из геодезических линий пространства Лобачевского.

Рассмотрим случай а). Условие диагональности матрицы Λ сводится к одному уравнению

$$\beta_{21} \beta_{31} \frac{H_2 H_3}{h_1^2} + \beta_{32} \beta_{21} \frac{H_1 H_3}{h_2^2} + \beta_{23} \beta_{31} \frac{H_1 H_2}{h_3^2} = 0.$$

Мы можем предполагать, что β_{31} и β_{21} не равны тождественно нулю. Условие постоянства кривизны метрики dl^2 дает еще три уравнения

$$\begin{aligned} -T + (\beta_{32}^2 - \beta_{23}^2) \sigma_{32} &= d_1, \\ -T + \beta_{31}^2 \sigma_{31} &= d_2, \\ -T + \beta_{21}^2 \sigma_{21} &= d_3. \end{aligned}$$

Обозначим $\sigma_{ij} = \left(\frac{H_i^2}{h_j^2} - \frac{H_j^2}{h_i^2} \right)$, $x_2 = \beta_{21}^2$, $x_3 = \beta_{31}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{32} H_1 h_1^2}{\beta_{31} H_2 h_2^2} &= t_3, \quad \frac{\beta_{23} H_1 h_1^2}{\beta_{21} H_3 h_3^2} = t_2, \quad \alpha_2 = \left(\frac{H_3 h_3}{h_1 h_2} \right)^2, \quad \alpha_3 = \left(\frac{H_2 h_2}{h_1 h_3} \right)^2, \\ b_2 &= \left(\frac{H_3 h_3^2}{H_1 h_1^2} \right)^2, \quad b_3 = \left(\frac{H_2 h_2^2}{H_1 h_1^2} \right)^2. \end{aligned}$$

В новых обозначениях система переписывается в виде

$$\begin{aligned} t_2 + t_3 + 1 &= 0, \\ -(x_2 t_2 \alpha_2 + x_3 t_3 \alpha_3) + (x_3 t_3^2 b_3 - x_2 t_2^2 b_2) \sigma_{32} &= d_1, \\ x_2 t_2 \alpha_2 + x_3 (t_3 \alpha_3 - \sigma_{31}) &= -d_2, \\ x_2 (t_2 \alpha_2 - \sigma_{21}) + x_3 t_3 \alpha_3 &= -d_3. \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим подсистему из последних двух уравнений. Ее дискриминант равен

$$\Delta = t_2\alpha_2\sigma_{31} + t_3\alpha_3\sigma_{21} - \sigma_{21}\sigma_{31}.$$

Далее находим

$$x_2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} d_2 & t_3\alpha_3 - \sigma_{31} \\ d_3 & t_3\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} t_2\alpha_2 & d_2 \\ t_2\alpha_2 - \sigma_{21} & d_3 \end{vmatrix}.$$

Подставив эти выражения во второе уравнение системы (22), получим одно уравнение на t_2, t_3 . Положим $\gamma = (h_2h_3)^2/H_1^2h_1^2$. Тогда получим

$$t_3t_2^2\alpha_2\alpha_3\sigma_{32}\gamma(d_2 - d_3) + t_3^2t_2\alpha_2\alpha_3\sigma_{32}\gamma(d_2 - d_3) + t_2^2\alpha_2\sigma_{32}\gamma d_3\sigma_{31} \\ + t_3^2\alpha_3\sigma_{23}\gamma d_2\sigma_{21} + t_2\alpha_2d_3\sigma_{31} + t_3d_2\alpha_3\sigma_{21} - d_1(t_2\alpha_2\sigma_{31} + t_3\alpha_3\sigma_{21} - \sigma_{21}\sigma_{31}) = 0.$$

Так как имеет место уравнение $t_2 + t_3 + 1 = 0$, то сделав замену $t_2 = -1 - t_3$, получим для t_3 уравнение второй степени

$$t_3^2\gamma\sigma_{32}[\alpha_2\alpha_3(d_2 - d_3) + \alpha_2\sigma_{31}d_3 - \alpha_3\sigma_{21}d_2] \\ + t_3[\alpha_2\alpha_3(d_2 - d_3)\sigma_{32}\gamma + 2\alpha_2\gamma\sigma_{32}\sigma_{31}d_3 - \alpha_2d_3\sigma_{31} + \alpha_3d_2\sigma_{21} - d_1(\alpha_3\sigma_{21} - \alpha_2\sigma_{31})] \\ + \alpha_2\gamma\sigma_{32}\sigma_{31}d_3 - \alpha_2\sigma_{31}d_3 + d_1\alpha_2\sigma_{31} + d_1\sigma_{21}\sigma_{31} = 0.$$

После длинных преобразований получим, что уравнение переписывается в простом виде

$$[t_3H_1^2(H_2^2 - H_3^2) + (H_1^2 - H_3^2)H_2^2]^2 = 0.$$

Следовательно,

$$t_3 = -\frac{(H_1^2 - H_3^2)H_2^2}{(H_2^2 - H_3^2)H_1^2}.$$

Но это есть условие постоянства отношения элементов объемов при грассмановом отображении.

Итак, как и в общем случае, изометрическое погружение $L^3 \subset E^5$ является функционально вырожденным. Так же, как и в общем случае, мы воспользуемся производящими функциями $c_{ij}(u_i, u_j)$ такими, что $\beta_{ij} = c_{ij}H_k$. В нашем случае $c_{12} = c_{13} = 0$. Уравнения (16) сводятся к таким:

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial c_{31}}{\partial u_1} = 0.$$

Поэтому $c_{21} = c_{21}(u_2)$, $c_{31} = c_{31}(u_3)$. Используя условие постоянства отношения элементов объемов, получим

$$\frac{c_{23}}{c_{21}} = -\frac{(H_2^4 - H_1^4)H_3^4}{(H_2^4 - H_3^4)H_1^4}, \quad \frac{c_{32}}{c_{31}} = -\frac{(H_3^4 - H_1^4)H_2^4}{(H_3^4 - H_2^4)H_1^4}.$$

Таким образом, c_{23} и c_{32} можно выразить через c_{21} , c_{31} и H_i . Найдем выражения c_{21} и c_{31} через H_i . Обозначим

$$a_2 = \frac{H_3^6(H_2^4 - H_1^4)}{h_2^2H_1^2(H_3^4 - H_2^4)}, \quad a_3 = \frac{H_2^6(H_3^4 - H_1^4)}{h_3^2H_1^2(H_2^4 - H_3^4)}.$$

Тогда два последних уравнения системы (22) записываются в виде

$$\begin{aligned} -c_{21}^2 a_2 - c_{31}^2 a_3 + c_{31}^2 H_2^2 \sigma_{31} &= d_2, \\ -c_{21}^2 a_2 - c_{31}^2 a_3 + c_{21}^2 H_3^2 \sigma_{21} &= d_3. \end{aligned}$$

Дискриминант этой системы для c_{21}^2 и c_{31}^2 равен

$$a_2 H_2^2 \sigma_{31} + a_3 H_3^2 \sigma_{21} - H_2^2 H_3^2 \sigma_{31} \sigma_{21} = 0.$$

Поэтому для существования решения необходимо выполнение уравнения

$$a_3(d_3 - d_2) - d_3 H_2^2 \sigma_{31} = 0.$$

После подстановки выражений a_i и d_i получим

$$\Lambda_0 = - \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{h_1 h_2 h_3} \right)^2.$$

В работе [6] установлено, что в случае а) имеет место первый интеграл

$$\beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 + h_1^2 = c_0^2 = \text{const}.$$

Поэтому для определения c_{21} и c_{31} имеем систему

$$\begin{aligned} c_{21}^2 (a_2 - H_3^2 \sigma_{21}) + c_{31}^2 a_3 &= -d_3, \\ c_{21}^2 H_3^2 + c_{31}^2 H_2^2 &= c_0^2 - h_1^2. \end{aligned}$$

Дискриминант этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 - H_3^2 \sigma_{21} & a_3 \\ H_3^2 & H_2^2 \end{vmatrix} = \frac{H_2^4 H_3^2 (H_2^2 H_3^2 - H_1^4)}{H_1^2 h_3^2 (H_3^2 - H_2^2)}.$$

При нахождении c_{21} и c_{31} используем соотношение для Λ_0 . Тогда получим

$$\begin{aligned} c_{21}^2 &= -1 + c_0^2 \frac{H_2^2 (H_3^4 - H_1^4)}{H_3^2 h_1^2 (H_2^2 H_3^2 - H_1^4)}, \\ c_{31}^2 &= -1 + c_0^2 \frac{H_3^2 (H_2^4 - H_1^4)}{H_2^2 h_1^2 (H_2^2 H_3^2 - H_1^4)}. \end{aligned}$$

Найдем теперь выражение Q

$$Q = c_{21} c_{23} + c_{31} c_{32} - 1 = \frac{H_2^4 - H_1^4}{H_3^4 - H_2^4} \cdot \frac{H_3^4}{H_1^4} c_{21}^2 - \frac{H_3^4 - H_1^4}{H_3^4 - H_2^4} \cdot \frac{H_2^4}{H_1^4} c_{31}^2 - 1.$$

После подстановки выражений c_{21}^2 и c_{31}^2 получим $Q = 0$. Но из уравнений (17) тогда следует, что $c_{21} = \text{const}$, $c_{31} = \text{const}$. Вместе с условием $H_1 H_2 H_3 / h_1 h_2 h_3 = \text{const}$ это дает, что $H_i = \text{const}$, что невозможно.

Рассмотрим случай б). В дальнейшем нам будет удобно считать, что семейство координатных линий u_1 состоит из геодезических линий, т.е. выполняются уравнения $\beta_{21} = \beta_{31} \equiv 0$. Допустим $\beta_{23}^2 + \beta_{32}^2 \neq 0$. Тогда из уравнений (5) получим одно уравнение

$$\beta_{12} \frac{H_3}{h_2^2} + \beta_{13} \frac{H_2}{h_3^2} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \ln \operatorname{tg} \sigma_2 \operatorname{tg} \sigma_3 = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \sigma_2 \operatorname{tg} \sigma_3 = c$, где c не зависит от u_1 . Воспользуемся обозначениями $\sin \sigma_2 = \cos \sigma \sin \gamma$, $\sin \sigma_3 = \cos \sigma \cos \gamma$. Тогда получим

$$\sin^2 \gamma \cos^2 \gamma = \varepsilon \frac{\sin^2 \sigma}{\cos^4 \sigma}, \quad (23)$$

где ε — постоянное число. В работе [3] в § 5 подробно исследован случай погружения L^3 в E^5 с условием, что семейство линий кривизны u_1 состоит из геодезических линий. Доказано, что $\gamma = \eta(u_1) + \omega(u_2, u_3)$, где ω удовлетворяет уравнению “синус Гордона”, η выражается через σ :

$$\cos \eta = \frac{c_0^2 + c_2 \cos^2 \sigma}{\cos^2 \sigma \sqrt{c_0^2 + c_1^2}},$$

где c_i постоянные. Далее, введем обозначение $1/\cos^2 \sigma = u$. Тогда $\cos \eta = d_0 u + d_1$, где d_i постоянные. Зафиксируем u_2, u_3 и положим

$$\cos \omega \cos \eta = P_1, \quad \sin \omega \sin \eta = \sqrt{P_2}.$$

Имеем

$$\cos^2 \gamma = (P_1 - \sqrt{P_2})^2.$$

Уравнение (23) записывается так

$$\begin{aligned} & - (P_1^4 + 6P_1^2 P_2 + P_2^2) + 2P_1(2P_1^2 + 2P_2 - 1)\sqrt{P_2} \\ & = \varepsilon \left(\frac{P_1}{ad_0} - \frac{d_1}{d_0} \right) \left(\frac{P_1}{ad_0} - \frac{d_1}{d_0} - 1 \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $a = \cos \omega$, $b = \sin \omega$. Полиномы P_1 и P_2 связаны между собой $P_2 = b^2 - \lambda^2 P_1^2$, где $\lambda = b/a$. Это уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} & 4P_1^2 [2(1 - \lambda^2)P_1^2 + 2b^2 - 1]^2 [b^2 - \lambda^2 P_1^2] \\ & = \left[P_1^4 (1 - 6\lambda^2 + \lambda^4) + P_1^2 \left(6b^2 - 2\lambda^2 b^2 + \frac{\varepsilon}{(ad_0)^2} \right) \right] - \varepsilon P_1 a_1 + a_2, \end{aligned}$$

где a_i постоянные. Пусть $\lambda \neq 1$. В левой части коэффициент при старшей, 8-ой степени P_1 равен $-16(1 - \lambda^2)^2 \lambda^2$, а в правой части этот коэффициент $(1 - 6\lambda^2 + \lambda^4)^2$ положителен, что невозможно. Случай $\lambda = 1$ тоже приводит к противоречию, так как в этом случае либо приравниваются полиномы разных степеней, либо полиномы с разными коэффициентами.

Наконец, рассмотрим случай $\beta_{21} = \beta_{31} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0$. Тогда $H_i = H_i(u_1)$, $i = 1, 2, 3$, где $\gamma = \eta(u_1) + \omega_0$; ω_0 постоянная. Введем параметр

$$t = \int h_1 du_1.$$

Тогда должна выполняться система уравнений

$$\frac{d^2 h_i}{dt^2} = \Lambda_0 h_i, \quad i = 2, 3; \quad \frac{dh_2}{dt} \frac{dh_3}{dt} = \Lambda_0 h_2 h_3.$$

Пусть $\Lambda_0 = a^2 > 0$. Следовательно, $h_i = A_i e^{at} + B_i e^{-at}$. С другой стороны, имеем равенство $h_2^2 + h_3^2 = 1 + \sin^2 \sigma$. Обозначим $\sin \sigma = \rho$. Так как согласно работе [3] σ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sigma_{u_1}^2 = \cos^2 \sigma - \frac{c_0^2}{\cos^2 \sigma} - 2c_1,$$

где c_0 и c_1 постоянные, то можем записать разложение t по параметру ρ

$$t = \int \frac{\sqrt{1 - \rho^2} d\rho}{\sqrt{1 - c_0^2 - 2c_1 + 2(c_1 - 1)\rho^2 + \rho^4}} = \frac{1}{\sqrt{b_1}} \left\{ \rho - \frac{\rho^3}{6} \left(1 + \frac{b_2}{b_1} \right) + \dots \right\},$$

где постоянные $b_1 = 1 - c_0^2 - 2c_1$, $b_2 = 2(c_1 - 1)$. Обозначим

$$L = \sum_{i=2}^3 (A_i^2 + B_i^2), \quad M = A_2^2 + A_3^2 - B_2^2 - B_3^2, \quad N = \sum_{i=2}^3 (A_i^2 + B_i^2).$$

Имеет место равенство

$$L + N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2at)^{2i}}{(2i)!} + M \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2at)^{2i+1}}{(2i+1)!} = 1 + \rho^2,$$

откуда вытекает, что $L = 1$, $M = 0$, $b_1 + b_2 = 0$. Но последнее равенство дает $c_0^2 = -1$, что невозможно.

Аналогичные рассуждения проводятся в случае $\Lambda_0 = -a^2$. При этом используются разложения синуса и косинуса в ряды по степеням t . Если $\Lambda_0 = 0$, то рассуждения даже проще. Имеем в этом случае $h_i = A_i t + B_i$, причем $A_2 A_3 = 0$. Пусть, например, $A_2 = 0$, тогда $h_2 = \text{const}$. Но согласно [3] имеем $\gamma = \eta(u_1) + \omega_0$, где $\omega_0 = \text{const}$, причем η выражается через σ . Поэтому $\gamma = f(\sigma)$. Так как $\cos \sigma \sin \gamma = \text{const}$, то $\sigma = \text{const}$, что невозможно. Итак, теорема 2 полностью доказана.

2. Внешняя геометрия грассманова образа

Напомним некоторые сведения из внешней геометрии подмногообразия $L^3 \subset E^5$. Так как нормальная связность погружения L^3 плоская, то можно выбрать поле базисов нормалей n_1, n_2 с нулевыми коэффициентами кручения. В каждой точке $x \in L^3$ индикатриса нормальной кривизны является треугольником, покрытым несколько раз, причем точка x лежит на пересечении его высот. В координатах кривизны вторые квадратичные формы по отношению к базису нормалей n_1, n_2 имеют вид $\sum_{i=1}^3 L_{ii}^\alpha du_i^2$, $\alpha = 1, 2$. Для исследования внешней геометрии грассманова образа мы должны построить базисы касательного и нормального пространств этого подмногообразия. Пусть τ_i — единичный касательный вектор к $L^3 \subset E^5$, идущий в главном направлении. Пусть k_i — i -ый главный вектор нормальной кривизны

$$k_i = \frac{1}{H_i^2} \{L_{ii}^1 n_1 + L_{ii}^2 n_2\}.$$

Используем выражения для L_{ii}^α из работы [3, § 4]:

$$\begin{aligned} L_{ii}^1 &= \cos \sigma_i \sin \sigma_i \cos \varphi_i, \\ L_{ii}^2 &= \cos \sigma_i \sin \sigma_i \sin \varphi_i. \end{aligned}$$

Тогда единичный вектор ξ_i вдоль k_i имеет вид

$$\xi_i = \cos \varphi_i n_1 + \sin \varphi_i n_2.$$

Кроме того, используем вектор $\eta_i = -\sin \varphi_i n_1 + \cos \varphi_i n_2$, ортогональный к ξ_i и лежащий в нормальной плоскости. Во введении мы уже указали разбиение нормального пространства N к $\Gamma^3 \subset E^{10}$ на три подпространства $N = N_1 + N_2 + N_3$, где N_1 – нормальное подпространство подмногообразия $\Gamma^3 \subset G_{2,5}$, N_2 – нормальное пространство к $G_{2,5} \subset S^9$ и N_3 – нормаль к сфере S^9 . Имеет место

ЛЕММА 4. Бивекторы $\mu_i = [\tau_i \eta_i]$, $i = 1, 2, 3$, составляют базис касательного пространства к Γ^3 , бивекторы $\lambda_i = [\tau_i \xi_i]$, $i = 1, 2, 3$, составляют базис пространства N_1 , бивекторы $\nu_1 = [\tau_2 \tau_3]$, $\nu_2 = [\tau_3 \tau_1]$, $\nu_3 = [\tau_1 \tau_2]$ составляют базис N_2 , единичный бивектор p направлен по прямой N_3 .

Пусть $p = p(u_1, u_2, u_3)$ – радиус-вектор подмногообразия $\Gamma^3 \subset E^{10}$. Для касательных векторов к Γ^3 , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u_i} &= \left[\frac{\partial n_1}{\partial u_i} n_2 \right] + \left[n_1 \frac{\partial n_2}{\partial u_i} \right] = -L_{ii}^1 g^{ii} [r_{u_i} n_2] - L_{ii}^2 g^{ii} [n_1 r_{u_i}] \\ &= - \left[\frac{r_{u_i}}{H_i}, \frac{L_{ii}^2 n_1 - L_{ii}^1 n_2}{H_i} \right] = -[\tau_i \eta_i]. \end{aligned}$$

Следовательно, векторы μ_i действительно составляют базис касательного пространства к Γ^3 . Покажем, что векторы ν_i ортогональны к касательному пространству $G_{2,5}$. Действительно, любую кривую на $G_{2,5}$ с параметром t , проходящую через точку $p = [n_1, n_2]$ при $t = 0$, можно записать в виде

$$p(t) = [a(t)b(t)],$$

причем $a(0) = n_1$, $b(0) = n_2$. Имеем при $t = 0$

$$\frac{dp}{dt} = \left[\frac{da}{dt} n_2 \right] + \left[n_1 \frac{db}{dt} \right].$$

Вычислим скалярное произведение $\frac{dp}{dt}$ с любым из векторов $[\tau_i \tau_j]$. По известной формуле из аналитической геометрии имеем

$$\left(\left[\frac{da}{dt} n_2 \right] [\tau_i \tau_j] \right) = \left(\frac{da}{dt} \tau_i \right) (n_2 \tau_j) - \left(\frac{da}{dt} \tau_j \right) (n_2 \tau_i) = 0.$$

Аналогично, скалярное произведение второго слагаемого в выражении $\frac{dp}{dt}$ с $[\tau_i \tau_j]$ равно нулю. Поэтому векторы ν_1 , ν_2 , ν_3 составляют базис N_2 . Далее, $[\tau_i \xi_i]$ – ортогональные векторы к ν_i и μ_i . Нетрудно также убедиться, что все различные векторы, указанные в лемме, ортогональны друг другу.

В дальнейшем нам понадобятся деривационные формулы для этих базисов, а также переходы от базисов ξ_i, η_i к ξ_j, η_j в нормальной плоскости подмногообразия $L^3 \subset E^5$. Обозначим $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$. Тогда можно найти

$$\begin{aligned}\xi_j &= \cos \varphi_{ji} \xi_i + \sin \varphi_{ji} \eta_i, \\ \eta_j &= -\sin \varphi_{ji} \xi_i + \cos \varphi_{ji} \eta_i.\end{aligned}$$

В работе [3] установлены выражения для синусов углов φ_{ji}

$$\sin \varphi_{ij} = -H_k \varepsilon^{ijk} / h_i h_j,$$

и их производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} &= h_k \sin \varphi_{ki} \beta_{ki} / h_i, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} &= \beta_{ij} h_j \sin \varphi_{ij} / h_i + \beta_{ik} h_k \sin \varphi_{ik} / h_i.\end{aligned}$$

На основании известных разложений Гаусса и Вейнгартена устанавливаются следующие соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_i}{\partial u_j} &= \beta_{ij} \tau_j, & \frac{\partial \tau_i}{\partial u_i} &= -\beta_{ji} \tau_j - \beta_{ki} \tau_k, \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial u_k} &= \eta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} + \frac{H_i H_k}{h_i} \tau_k, & \frac{\partial \xi_i}{\partial u_i} &= \eta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} - h_i \tau_i.\end{aligned}$$

Используя эти соотношения и выражения $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, получим производные векторов λ_i и ν_i

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_k} = \varepsilon^{ijk} \left\{ \frac{H_j \beta_{ik} \mu_k}{h_i h_k} - \frac{\beta_{ki} H_j}{h_i^2} \mu_i - \frac{H_i H_k}{h_i} \nu_j \right\} + \bar{\beta}_{ik} \lambda_k, \quad i \neq k, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_i} = \varepsilon^{ijk} \left\{ -\frac{\mu_i}{h_i^2} (H_k \beta_{ij} - H_j \beta_{ik}) + \frac{\beta_{ji} H_k}{h_i h_j} \mu_j - \frac{\beta_{ki} H_j}{h_i h_k} \mu_k \right\} - \bar{\beta}_{ji} \lambda_j - \bar{\beta}_{ki} \lambda_k, \quad (26)$$

где $\bar{\beta}_{ij}$ – коэффициенты Дарбу метрики dl^2 , ε^{ijk} – символ Кронекера. Нетрудно вычислить производные нормальных векторов ν_i

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_k} = \frac{H_i}{h_j} \mu_j + \frac{H_k H_j}{h_j} \lambda_j + \beta_{ik} \nu_k, \quad i \neq k, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial u_i} = -\beta_{ji} \nu_j - \beta_{ki} \nu_k. \quad (28)$$

Коэффициенты вторых фундаментальных форм Γ^3 по отношению к λ_i обозначим через Ω_{kj}^i . Имеем

$$\Omega_{rs}^i = - \left(\frac{\partial p}{\partial u_r} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_s} \right) = h_r \left(\mu_r \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_s} \right).$$

Пусть $k \neq i$. Мы имеем

$$\Omega_{kk}^i = h_k \left(\mu_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_k} \right) = \varepsilon^{ijk} H_j \beta_{ik} / h_i,$$

где i, j, k различные. Далее,

$$\Omega_{ii}^i = h_i \left(\mu_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_i} \right) = -h_i \varepsilon^{ijk} (H_k \beta_{ij} - H_j \beta_{ik}) / h_i^2.$$

Если индексы i, j и k различные, то используя (25), получим

$$\Omega_{jk}^i = h_j \left(\mu_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_k} \right) = 0.$$

Наконец,

$$\Omega_{ki}^i = h_k \left(\mu_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_i} \right) = -\varepsilon^{ijk} \beta_{ki} H_j / h_i.$$

После этого уже нетрудно записать вторые квадратичные формы для λ_i . Например, вторая квадратичная форма Ω^1 для нормали λ_1 имеет вид

$$\Omega^1 = -\frac{H_3}{h_1} \{ \beta_{12} (du_1^2 + du_2^2) - 2\beta_{21} du_1 du_2 \} + \frac{H_2}{h_1} \{ \beta_{13} (du_1^2 + du_3^2) - 2\beta_{31} du_1 du_3 \}.$$

Следовательно, внешние полные кривизны по отношению к площадке u_i, u_j и нормали λ_1 будут иметь вид

$$\widehat{K}_{12}^1 = \frac{\beta_{12}^2 - \beta_{21}^2}{h_1^2 h_2^2} \cdot \frac{H_3^2}{h_1^2}, \dots, \widehat{K}_{23}^1 = \frac{\beta_{12} \beta_{13} H_2 H_3}{h_1^2 h_2^2 h_3^2}.$$

Обозначим через $\varepsilon_{rs|k}$ коэффициенты кручения базиса λ_i :

$$\varepsilon_{rs|k} = \left(\frac{\partial \lambda_s}{\partial u_k} \lambda_r \right).$$

Пусть индексы r, s, k различные. Используя (25), получим $\varepsilon_{rs|k} = 0$: если индексы r и k не равны, то соответствующий коэффициент кручения равен нулю. Далее, имеем

$$\varepsilon_{ki|k} = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_k} \lambda_k \right) = \bar{\beta}_{ik},$$

т.е. этот коэффициент кручения совпадает с коэффициентом Дарбу метрики dl^2 .

Нормальную связность по отношению к распределению пространств N_1 обозначим через ∇^1 , а ее тензор кривизны через $T_{\tau\sigma|ij}^1$. Имеем

$$T_{\tau\sigma|jk}^1 = \varepsilon_{\tau\sigma|j,k} - \varepsilon_{\tau\sigma|k,j} + \varepsilon_{\rho\tau|j} \varepsilon_{\rho\sigma|k} - \varepsilon_{\rho\tau|k} \varepsilon_{\rho\sigma|j}.$$

Положим, например, $\tau = 1, \sigma = 2, j = 1, k = 2$. Тогда

$$T_{12|12}^1 = \varepsilon_{12|1,2} - \varepsilon_{12|2,1} + \varepsilon_{31|1} \varepsilon_{32|2} - \varepsilon_{31|2} \varepsilon_{32|1} = \frac{\partial \bar{\beta}_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial \bar{\beta}_{12}}{\partial u_1} + \bar{\beta}_{31} \bar{\beta}_{32}.$$

Сравнивая с выражением компоненты тензора кривизны метрики грассманова образа dl^2

$$\Lambda_{1221} = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial \bar{\beta}_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial \bar{\beta}_{12}}{\partial u_1} + \bar{\beta}_{31} \bar{\beta}_{32} \right\},$$

мы заключаем, что $T_{12|12}^1 = \Lambda_{1221}/h_1h_2$. Аналогично,

$$T_{12|13}^1 = \frac{\partial \bar{\beta}_{21}}{\partial u_3} - \bar{\beta}_{31}\bar{\beta}_{23} = \Lambda_{2113}/h_1h_2.$$

Таким образом, матрица кривизны T^1 нормальной связности ∇^1 распределения пространств N^1 совпадает с нормированной матрицей кривизны Λ метрики dl^2 . Это говорит о том, что внутренняя геометрия Γ^3 тесно связана с внешней геометрией подмногообразия $\Gamma^3 \subset G_{2,5}$.

Рассмотрим теперь коэффициенты кручения базиса нормалей ν_i , которые мы обозначим через $\sigma_{rs|k}$. По определению

$$\sigma_{rs|k} = \left(\frac{\partial \nu_s}{\partial u_k} \nu_r \right).$$

Если индексы k, i, j различные, то, используя (27), имеем

$$\sigma_{ki|j} = \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial u_j} \nu_k \right) = 0.$$

Далее, $\sigma_{ki|k} = \beta_{ik}$ при $i \neq k$. Эти коэффициенты кручения соответствуют тензору нормальной связности $T_{\tau\sigma|ij}^2$ по отношению к распределению нормальных пространств N_2 . Выражение $T_{\tau\sigma|ij}^2$ аналогично выражению $T_{\tau\sigma|ij}^1$ с заменой коэффициентов кручения $\varepsilon_{\tau\sigma|i}$ на $\sigma_{\tau\sigma|i}$. Например, получим

$$\begin{aligned} T_{12|12}^2 &= \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \beta_{31}\beta_{32} = H_1H_2, \\ T_{12|13}^2 &= \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} - \beta_{31}\beta_{23} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому матрица кривизны T^2 нормальной связности ∇^2 диагональная,

$$T^2 = \begin{pmatrix} H_2H_3 & 0 & 0 \\ 0 & H_1H_3 & 0 \\ 0 & 0 & H_1H_2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, рассмотрим вторые квадратичные формы по отношению к нормальям ν_i , которые обозначим через A_{kj}^i . Имеем

$$A_{kj}^i = - \left(\frac{\partial p}{\partial u_j} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_k} \right).$$

Если все индексы i, j, k различные, то

$$A_{kj}^i = h_j(\mu_j\mu_j)H_i/h_j = H_i.$$

Если хотя бы два индекса совпадают, то эти коэффициенты равны нулю. Действительно, принимая во внимание (27), (28), имеем

$$\begin{aligned} A_{ki}^i &= - \left(p_{u_i} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_k} \right) = h_i(\mu_i\mu_j) \frac{H_i}{h_j} = 0, \quad i \neq k, \\ A_{kk}^i &= - \left(p_{u_k} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_k} \right) = h_k(\mu_k\mu_j) \frac{H_i}{h_j} = 0, \\ A_{ii}^i &= - \left(p_{u_i} \frac{\partial \nu_i}{\partial u_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому вторая квадратичная форма по отношению к вектору ν_i имеет только один ненулевой коэффициент. Мы можем записать

$$A^1 = 2H_1 du_2 du_3, \quad A^2 = 2H_2 du_1 du_3, \quad A^3 = 2H_3 du_1 du_2.$$

Отсюда следует, что линии кривизны u_i на $L^3 \subset E^5$ при грасмановом отображении переходят в асимптотические линии подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$.

Список литературы

1. Moore J. D. Isometric immeersions of space forms in space forms // Pacific J. Math. 1972. V. 40. P. 157–166.
2. Аминов Ю. А. О погружении областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$ -мерное евклидово пространство // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. №3. С. 521–524.
3. Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$ -мерное евклидово пространство // Матем. сб. 1980. Т. 111. №3. С. 402–433.
4. Tenenblat K., Terng C.-L. A higher dimension generalization of the sine-Gordon equation and its Backlund transformation // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1979. V. 1. P. 589–593.
5. Tenenblat K., Terng C.-L. Backlund theorem for n -dimensional submanifolds of $\mathbb{R}^{2n-1}$ // Ann. of Math. 1980. V. 111. P. 477–490.
6. Аминов Ю. А. Изометрические погружения с плоской нормальной связностью областей n -мерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства. Модель калибровочного поля // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). №3. С. 275–299.
7. Аминов Ю. А. Свойства грасманова образа локального погружения области трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство // Укр. геом. сб. 1984. №27. С. 3–11.
8. Rabelo M. L., Tenenblat K. Toroidal submanifolds of constant non positive curvature // Preprint. Proceedings of conference N. I. Lobachevsky and Modern Geometry. Kazan, Russian.
9. Масальцев Л. А. Псевдосферические конгруэнции Бианки в E^{2n-1} // Матем. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1. №3/4. С. 505–512.
10. Aminov Y., Rabelo M. L. On toroidal submanifolds of constant negative curvature // Матем. физика, анализ, геометрия. 1995. V. 2. №3. P. 502–513.
11. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
12. Егоров Д. Ф. Работы по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1970.

Физико-технический институт
низких температур им. Б. И. Веркина;
Национальная академии наук Украины, Харьков

Поступила в редакцию
06.06.1995