Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 29–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:52:08

УДК 517.52

М. И. Дьяченко

Сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией

В работе изучаются сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций из классов Ватермана. Основным результатом статьи является ниже-следующий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть некоторое $\varepsilon > 0$ и последовательность $\Lambda_\varepsilon = \left\{ \frac{n^{3/4}}{(\ln(n+1))^{1/2+\varepsilon}} \right\}_{n=1}^\infty$. Тогда, если функция $f(x, y) \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$, а

$$\begin{aligned} I_r(f) &= \sup_{x, y \in T} \sup_{u, v \in [-1, 1]} J_r(f) \\ &= \sup_{x, y \in T} \sup_{u, v \in [-1, 1]} \sum_{r-1 < |(m, n)| \leq r+1} |a_{m, n}(\psi_{x, y, u, v})| \leq C \end{aligned}$$

при $r \geq 1$, где

$$\psi_{x, y, u, v}(s, t) = \psi(s, t) = f(x+t, y+s)w(t)w(s)e^{-i(tu+sv)}, \quad w(\tau) = \frac{\tau}{2 \sin(\theta/2)},$$

то при любом $R \geq 1$ выполняется неравенство

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{(x, y) \in T^2} |S_R(f, x, y)| \leq C(f, \varepsilon).$$

Рассматриваются также вопросы сходимости по кругам рядов Фурье характеристических функций выпуклых множеств на плоскости.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Целью настоящей статьи является получение ряда новых результатов о поведении сферических сумм двойных рядов Фурье функций из классов Ватермана [1]. Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{Z}$ — это множество всех целых чисел, $T^2 = [-\pi, \pi)^2$. Все рассматриваемые ниже функции будут предполагаться 2π -периодическими по каждой переменной. Для функций $f(x, y) \in L(T^2)$ через

$$\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a_{m, n} e^{i(mx+ny)}$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № NCJ300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00094).

будет обозначаться их двойной ряд Фурье, а через

$$S_r(f, x, y) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}, |(m, n)| \leq r} a_{m, n} e^{i(mx + ny)},$$

где $r \geq 1$, — частичные сферические суммы этого ряда.

Если $1 \leq p \leq \infty$ и $f(x, y) \in L_p(T^2)$ ($L_\infty(T^2) \equiv C(T^2)$), то через $\omega(f, \delta_1, \delta_2)_p$, $\omega_1(f, \delta_1)_p$ и $\omega_2(f, \delta_2)_p$, где $\delta_1, \delta_2 > 0$, будут обозначаться смешанный и частные модули непрерывности функции $f(x, y)$ в пространстве $L_p(T^2)$, соответственно, т.е., например,

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|t| \leq \delta_1, |h| \leq \delta_2} \|f(x, y) - f(x+t, y) - f(x, y+h) + f(x+t, y+h)\|_{L_p(T^2)}.$$

Нам также понадобится определение классов Ватермана $\Lambda BV(T^2)$. Вначале определим соответствующий одномерный класс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi$, т.е. Λ является монотонно неубывающей последовательностью положительных чисел такой, что

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-1} = \infty,$$

и $f(x) - 2\pi$ -периодическая функция. Тогда говорят, что $f(x)$ принадлежит *классу Ватермана* $\Lambda BV(T)$, если

$$\Lambda V_T f(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k} \equiv \sup_{a \in \mathbb{R}} \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \frac{|f(\beta_k) - f(\alpha_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где Γ — система неперекрывающихся интервалов $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ из $T + a = [-\pi + a, \pi + a)$.

В двумерном случае соответствующее определение таково.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть последовательность $\Lambda \in \Phi$ и $f(x, y)$ является 2π -периодической по каждой переменной и измеримой на T^2 функцией. Тогда говорят, что $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$ в том и только в том случае, когда:

1. ограничения $f(x, -\pi), f(-\pi, y) \in \Lambda BV(T)$;
2. величина

$$\Lambda V_{T^2} f(x, y) = \sup_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \sup_{\Gamma_1, \Gamma_2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{|f(I_k \times J_r)|}{\lambda_k \lambda_r} < \infty,$$

где

$$f(I_k \times J_r) = f(\alpha_k, \gamma_r) - f(\alpha_k, \delta_r) - f(\beta_k, \gamma_r) + f(\beta_k, \delta_r)$$

для всех k и r , а Γ_1 и Γ_2 — суть две системы неперекрывающихся интервалов $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ и $\{J_r = (\gamma_r, \delta_r)\}_{r=1}^m$ из $T + a$ и $T + b$, соответственно. Если $\Lambda \equiv 1$, то соответствующий класс обозначаем $BV(T^2)$.

Отметим, что поскольку любая функция из класса Ватермана очевидно ограничена, для $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$ можно определить величину

$$\Lambda V f = \Lambda V_{T^2} f(x, y) + \Lambda V_T f(-\pi, y) + \Lambda V_T f(x, -\pi) + \sup_{T^2} |f(x, y)|.$$

Всюду ниже через C будут обозначаться положительные абсолютные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), через $C(f)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от функции $f(x, y)$ и т. д.

Сферические суммы рядов Фурье функций, имеющих ограниченную в том или ином смысле вариацию, изучались рядом авторов. Так, К. Чандрасекхаран и С. Минакхисундарам [2] установили, что если $f(x, y) = \varphi(x)g(y)$, где функции $\varphi(x)$, $g(y)$ имеют ограниченную вариацию, то сферические частичные суммы ее ряда Фурье сходятся всюду. Б.И. Голубов [3] доказал сходимость всюду средних Бохнера–Рисса критического порядка рядов Фурье функций из несколько более широкого класса, чем $BV(T^2)$. Автором [4] было показано, что если функция $f(x, y) \in BV(T^2)$, то, в частности, ее ряд Фурье сферически сходится всюду. Им же [5] установлено, что сферические частичные суммы рядов Фурье функций из класса $\Lambda_0 BV(T^2)$, где $\Lambda_0 \equiv \{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены постоянной, зависящей лишь от величины $\Lambda_0 V f$. При этом, если $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, где $\lambda_j = o(\sqrt{j})$ при $j \rightarrow \infty$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ сферически сходится всюду.

Отметим, что основным методом исследования в данной статье является разработанный В. А. Юдиным [6] метод замены сумм $S_r(f, x, y)$ на

$$S'_r(f, x, y) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} a'_{m, n} e^{i(mx + ny)},$$

где $a'_{m, n} = a_{m, n}$, если $I_{m, n} = [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}] \times [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}] \subset B_r = \{(x, y) : |(x, y)| \leq r\}$, и

$$a'_{m, n} = a'_{m, n}(r, x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{T+x} \int_{T+y} f(t, s) \frac{\xi_{x, y}(I_{m, n} \cap B_r)}{\xi_{x, y}(I_{m, n})} e^{-i(mt + ns)} dt ds$$

в противном случае, где $\xi_{x, y}(E) = \iint_E e^{-i(t-x)u} e^{-i(s-y)v} du dv$.

Во втором параграфе будут изучаться свойства модифицированных ядер Дирихле $D'_r(x, y)$ и интегралов от таких ядер, где

$$S'_r(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{T^2} f(x + t, y + s) D'_r(t, s) dt ds.$$

Основными результатами этого параграфа являются нижеследующие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(u, v) \in (0, \pi)^2$. Тогда при любом $R \geq 1$ справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^\pi \int_v^\pi D'_R(x, y) dx dy \right| \leq \frac{C}{R \max(u, v) + 1} \\ & \left| \int_u^\pi \int_v^\pi D'_R(x, y) dx dy \right| \leq \frac{C}{(R \max(u, v) + 1)^{1/2} (R \min(u, v) + 1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют такие положительные постоянные C_1 – C_6 , что при любом $R \geq C_1$ и при любых $u \in [C_2/\sqrt{R}, C_3]$, $v \in [C_4u, C_5]$ таких, что $|\sin(\rho - \pi/4)| > 1/5$, где $\rho = R\sqrt{u^2 + v^2}$, справедливо неравенство*

$$\left| \int_u^\pi \int_v^\pi D'_R(x, y) dx dy \right| \geq \frac{C_6}{R^{3/2}u\sqrt{v}}.$$

Из предложения 2 видно, что оценка (1) не может быть улучшена сразу для всех R , u и v .

Третий параграф статьи посвящен приложению результатов § 2 к изучению поведения сферических частичных сумм рядов Фурье функций двух переменных из классов Ватермана. Основными результатами здесь являются нижеследующие.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть некоторое $\varepsilon > 0$ и последовательность*

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ \frac{n^{3/4}}{(\ln(n+1))^{1/2+\varepsilon}} \right\}_{n=1}^\infty.$$

Тогда, если функция $f(x, y) \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$, а

$$I_r(f) = \sup_{x, y \in T} \sup_{u, v \in [-1, 1]} J_r(f) = \sup_{x, y \in T} \sup_{u, v \in [-1, 1]} \sum_{r-1 < |(m, n)| \leq r+1} |a_{m, n}(\psi_{x, y, u, v})|$$

при $r \geq 1$, где

$$\psi_{x, y, u, v}(s, t) = \psi(s, t) = f(x+t, y+s)w(t)w(s)e^{-i(tu+sv)}, \quad w(\tau) = \frac{\tau}{2 \sin(\tau/2)},$$

то при любом $R \geq 1$ выполняется неравенство

$$\sup_{(x, y) \in T^2} |S_R(f, x, y)| \leq C I_{R+1}(f) + C(\varepsilon) \Lambda_\varepsilon V f.$$

Отсюда, если

$$I_r(f) \leq C \tag{2}$$

при всех r , то

$$\sup_{R \geq 1} \sup_{(x, y) \in T^2} |S_R(f, x, y)| \leq C(f, \varepsilon).$$

В частности, если $\Lambda_0 \equiv \{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$ и $f(x, y) \in \Lambda_0 BV(T^2)$, то $I_r(f) \leq C \Lambda_0 V f$ при всех r .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$, где последовательность Λ_ε была определена в теореме 1, $I_r(f) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, точка $(x_0, y_0) \in T^2$ и существуют четыре конечных предела $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$ по соответствующим координатным квадрантам. Тогда ряд Фурье функции $f(x, y)$ сферически сходится в точке (x_0, y_0) к среднему арифметическому этих пределов.*

Ранее, в статье [5] автором было показано, что указанные в теореме 2 пределы существуют в любой точке, если $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, где

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-2} = \infty.$$

Заметим, что из одного результата Ш. А. Алимова и В. А. Ильина [7], которые установили, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f(x, y) \in \text{Lip}(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ с неограниченными сферическими частичными суммами, вытекает, что в теореме 1 нельзя вместо Λ_ε взять какую-либо последовательность вида $\{n^{3/4+\varepsilon}\}_{n=1}^\infty$ с $\varepsilon > 0$. Вопрос о нахождении наиболее широкого класса $\Lambda BV(T^2)$, для которого верно утверждение теоремы 1, остается пока открытым. Неясно также, не вытекает ли условие (2) из того, что $f(x, y) \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$. Представляется весьма вероятным, что дело обстоит именно так. Отметим, также, что метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет получить и соответствующий принцип локализации для сферических частичных сумм двойных рядов Фурье функций из классов Ватермана.

В четвертом параграфе обсуждается вопрос о поведении сферических частичных сумм рядов Фурье характеристических функций выпуклых множеств $A \subset T^2$. Ранее автором [8] изучалась аналогичная задача для прямоугольных частичных сумм и были, в частности, получены такие результаты.

ТЕОРЕМА А. Пусть выпуклое замкнутое невырожденное множество $A \subset (-\pi, \pi)^2$. Тогда двойной тригонометрический ряд Фурье характеристической функции $X_A(x, y)$ сходится по Прингстейму к 1 в любой внутренней точке A , к нулю в любой точке множества $T^2 \setminus A$ и к $\frac{1}{2}$ в каждой точке границы δA , в которой существует касательная к δA , не параллельная ни одной из осей координат. Сходимость по кубам имеет место в каждой точке.

ТЕОРЕМА Б. Пусть выпуклое замкнутое невырожденное множество $A \subset (-\pi, \pi)^2$, и его граница имеет касательную в каждой точке. Тогда множество расходимости по Прингстейму двойного ряда Фурье характеристической функции $X_A(x, y)$ состоит на T^2 не более, чем из восьми, и не менее, чем из четырех точек (все возможности реализуются).

Основным результатом четвертого параграфа является нижеследующий.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выпуклое замкнутое невырожденное множество $A \subset (-\pi, \pi)^2$. Тогда двойной тригонометрический ряд Фурье характеристической функции $X_A(x, y)$ сходится по кругам всюду на T^2 . Точнее, он сходится к 1 в любой внутренней точке A и к нулю на $T^2 \setminus A$. Далее, если в точке $(x_0, y_0) \in \delta A$ односторонние касательные к δA образуют угол $\alpha \in (0, \pi]$, то $S_R(X_A, x_0, y_0) \rightarrow \alpha/(2\pi)$ при $R \rightarrow \infty$. В частности, в любой точке границы, где есть касательная, ряд Фурье сферически сходится к $\frac{1}{2}$.

Там же будет показано, что уже в трехмерном случае подобный результат неверен. Так, сферические частичные суммы ряда Фурье характеристической функции трехмерного единичного шара не сходятся в начале координат, а в пространствах большей размерности аналогичные величины вообще не являются ограниченными (см. [4]).

§2. Вспомогательные результаты

Пусть, как и во введении, при $R \geq 1$ ядро

$$D'_R(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m, n} e^{-i(mx+ny)},$$

где $\alpha_{m, n} = 1$, если $I_{m, n} \subset B_R$, и $\alpha_{m, n} = \frac{\xi(I_{m, n} \cap B_R)}{\xi(I_{m, n})}$ в противном случае, а

$$\xi(E) = \iint_E e^{-itx} e^{-isy} dt ds.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \xi(I_{m, n}) &= \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} e^{-itx} dt \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{-isy} ds \\ &= \frac{4e^{-imx} e^{-iny} \sin(x/2) \sin(y/2)}{xy} = \frac{e^{-imx} e^{-iny}}{w(x)w(y)}, \end{aligned}$$

где

$$w(\tau) = \frac{\tau}{2 \sin(\tau/2)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 4D'_R(x, y) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m, n} w(x)w(y) \xi(I_{m, n}) = w(x)w(y) \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \xi(I_{m, n} \cap B_R) \\ &= w(x)w(y) \iint_{B_R} e^{-itx} e^{-isy} dt ds \\ &= w(x)w(y) \iint_{B_R} e^{i(tx+sy)} dt ds = w(x)w(y) D''_R(x, y). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть $R \geq 1$, точка $(x, y) \in T^2$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1/R$. Тогда

$$D''_R(x, y) = \sqrt{8\pi} \frac{R^2}{(rR)^{3/2}} \left(\sin\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8rR} \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\beta_R(x, y)}{(rR)^2} \right),$$

причем существует такая абсолютная постоянная C , что $|\beta_R(x, y)| \leq C$ для всех R, x и y , удовлетворяющих условию леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $D''_R(x, y)$ является преобразованием Фурье характеристической функции шара радиуса R . Как известно (см. [9, с. 154]), преобразование Фурье радиальной функции является радиальной функцией. Поэтому, с учетом асимптотики функций Бесселя (см. [10, с. 222 и 229]), будем иметь

$$\begin{aligned} D''_R(x, y) &= \iint_{B_R} e^{itr} dt ds = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - t^2} e^{itr} dt \\ &= 4R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \cos(rRu) du = \frac{2\pi R^2}{Rr} J_1(Rr) \\ &= \sqrt{8\pi} \frac{R^2}{(rR)^{3/2}} \left(\sin\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8rR} \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{(Rr)^2}\right) \right) \end{aligned}$$

при $R \rightarrow \infty$. Но это эквивалентно утверждению леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $R \geq 1$, $(u, v) \in (0, \pi)^2$ и $v \geq u$. Тогда

$$\left| \int_v^\pi D'_R(u, y) dy \right| \leq \frac{CR}{(Rv)^{3/2}}, \quad \left| \int_u^\pi D'_R(x, v) dx \right| \leq \frac{CR}{R^{3/2}uv^{1/2}}$$

и

$$\left| \int_u^\pi D'_R(x, v) dx \right| \leq \frac{CR}{Rv + 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последняя оценка была установлена автором в статье [5]. Докажем два первых неравенства. Благодаря второй теореме о среднем достаточно доказать их для интеграла от $D''_R(u, v)$. Вначале установим первую из них. Обозначая $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, будем иметь

$$\left| \int_v^\pi D''_R(u, y) dy \right| \leq CR^2 \left(\left| \int_v^\pi \frac{\sin(Rr - \pi/4)}{(Rr)^{3/2}} dy \right| + \int_v^\pi \frac{dy}{(Rr)^{5/2}} \right).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_v^\pi \frac{\sin(Rr - \pi/4)}{(Rr)^{3/2}} dy \right| \\ & \leq \left| - \int_v^\pi \frac{r}{Ry(Rr)^{3/2}} dy \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) \right| \\ & \leq \frac{|\cos(R(u^2 + v^2)^{1/2} - \pi/4)|}{vR^{5/2}(u^2 + v^2)^{1/4}} \\ & \quad + \frac{C}{R^{5/2}} + \left| \frac{1}{R^{5/2}} \int_v^\pi \cos\left(Rr - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{y^2 r^{1/2}} + \frac{1}{2r^{5/2}} \right) dy \right| \\ & \leq \frac{C}{R(Rv)^{3/2}}. \end{aligned}$$

В то же время, ясно, что

$$\int_v^\pi \frac{dy}{(Rr)^{5/2}} \leq \frac{1}{R^{5/2}} \int_v^\pi \frac{dy}{y^{5/2}} \leq \frac{C}{R(Rv)^{3/2}},$$

откуда и вытекает первое утверждение следствия 1.

Доказательство второго неравенства проходит по той же схеме. Здесь полагаем $r = \sqrt{v^2 + x^2}$. Далее, например,

$$\int_u^\pi \frac{dx}{(Rr)^{5/2}} \leq \frac{1}{R^{5/2}v^{1/2}} \int_u^\pi \frac{dx}{x^2} \leq \frac{C}{R^{5/2}uv^{1/2}}.$$

Аналогичные изменения вносятся и во все остальные оценки. Таким образом, следствие 1 полностью доказано.

ЛЕММА 2. Пусть $R \geq 1$ и $(u, v) \in (0, \pi)^2$. Тогда справедливы оценки

$$\left| \int_u^\pi \int_v^\pi D_R''(x, y) dx dy \right| \leq \frac{C}{R \max(u, v) + 1}, \quad (3)$$

и

$$\left| \int_u^\pi \int_v^\pi D_R''(x, y) dx dy \right| \leq \frac{C}{(R \max(u, v) + 1)^{1/2} (R \min(u, v) + 1)}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (3) была установлена автором в работе [5]. Если $Ru < 1$ или $Rv < 1$, то неравенство (4) вытекает из оценки (3). Поэтому будем считать, что $Ru \geq 1$ и $Rv \geq 1$. Воспользовавшись леммой 1, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_u^\pi \int_v^\pi D_R''(x, y) dx dy \\ &= CR^2 \left(\int_u^\pi \int_v^\pi \frac{\sin(Rr - \pi/4)}{(rR)^{3/2}} dx dy \right. \\ & \quad \left. + C_1 \int_u^\pi \int_v^\pi \frac{\cos(Rr - \pi/4)}{(rR)^{5/2}} dx dy + \int_u^\pi \int_v^\pi \frac{\beta_R(x, y)}{(rR)^{7/2}} dx dy \right) \\ &= CR^2(I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Ясно, что

$$|I_3| \leq CR^{-2} \int_{uR}^{\pi R} \int_{vR}^{\pi R} \frac{d\tau d\xi}{(\tau^2 + \xi^2)^{7/4}} = CR^{-2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{7/2}},$$

где $0 < \varphi_1 < \pi/4 < \varphi_2 < \pi/4$ и при любом $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ имеем $\rho_2(\varphi) \geq \rho_1(\varphi) \geq R\sqrt{u^2 + v^2}$. Поэтому

$$|I_3| \leq CR^{-2} \frac{\pi}{2} \int_{R\sqrt{u^2 + v^2}}^\infty \frac{d\rho}{\rho^{5/2}} \leq \frac{C}{R^2(R \max(u, v) + 1)^{3/2}}. \quad (6)$$

Далее, используя вторую теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} |I_2| &= \left| \int_u^\pi \int_v^\pi \frac{\cos(Rr - \pi/4)}{(rR)^{5/2}} dx dy \right| \\ &\leq R^{-2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left| \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{\rho \cos(\rho - \pi/4)}{\rho^{5/2}} d\rho \right| d\varphi \\ &\leq \frac{\pi}{2} R^{-2} \max_{\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]} \left| \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{\rho \cos(\rho - \pi/4)}{\rho^{5/2}} d\rho \right| \\ &\leq CR^{-2} \frac{1}{(R\sqrt{u^2 + v^2})^{3/2}} \leq \frac{C}{R^2(R \max(u, v) + 1)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Затем, интегрируя по частям, установим, что

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_u^\pi \int_v^\pi \frac{\sin(Rr - \pi/4)}{(rR)^{3/2}} dx dy = R^{-2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{\sin(\rho - \pi/4)}{\rho^{1/2}} d\rho d\varphi \\
 &= R^{-2} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\cos(\rho_1(\varphi) - \pi/4)}{\rho_1(\varphi)^{1/2}} - \frac{\cos(\rho_2(\varphi) - \pi/4)}{\rho_2(\varphi)^{1/2}} \right) d\varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{\cos(\rho - \pi/4)}{\rho^{3/2}} d\rho d\varphi \right) \\
 &= R^{-2} (I_{1,1} - I_{1,2}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично оценке (7),

$$|I_{1,2}| \leq \frac{C}{R^2(R \max(u, v) + 1)^{3/2}}. \tag{9}$$

Для изучения величины $I_{1,1}$ введем следующие параметры. Пусть $\varphi_0 = \arctg(v/u)$ и $\rho_0 = R\sqrt{u^2 + v^2}$. Заметим, что при $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$ имеем $\rho_1(\varphi) = \frac{\rho_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi}$, а при $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_2$ имеем $\rho_1(\varphi) = \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi}$. Далее, при $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi/4$ величина $\rho_2(\varphi) = \frac{R\pi}{\cos \varphi}$, а при $\pi/4 \leq \varphi \leq \varphi_2$ параметр $\rho_2(\varphi) = \frac{R\pi}{\sin \varphi}$.

Ниже, для определенности, будем считать, что $\pi/4 \leq \varphi_0 < \pi/2$ (т.е., что $v \geq u$). Случай $0 < \varphi_0 < \pi/4$ рассматривается совершенно аналогично. Тогда

$$\begin{aligned}
 I_{1,1} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \frac{\cos(\rho_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\rho_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi})^{1/2}} d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \frac{\cos(\rho_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} - \frac{\pi}{4})}{(\frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi})^{1/2}} d\varphi \\
 &\quad - \int_{\varphi_1}^{\pi/4} \frac{\cos(\frac{R\pi}{\cos \varphi} - \frac{\pi}{4})}{(\frac{R\pi}{\cos \varphi})^{1/2}} d\varphi - \int_{\pi/4}^{\varphi_2} \frac{\cos(\frac{R\pi}{\sin \varphi} - \frac{\pi}{4})}{(\frac{R\pi}{\sin \varphi})^{1/2}} d\varphi \\
 &= S_1 + S_2 - S_3 - S_4.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что по предположению $\varphi_0 \in [\pi/4, \pi/2)$, а, следовательно, $0 < \cos \varphi_0 \leq \sqrt{2}/2$. Делая замену переменной

$$\theta = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}, \quad d\theta = \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\theta}{\cos \varphi_0} \sqrt{\theta^2 - \cos^2 \varphi_0} d\varphi,$$

и применяя вторую теорему о среднем, получим

$$|S_2| = \frac{\cos \varphi_0}{\rho_0^{1/2}} \left| \int_1^b \frac{\cos(\rho_0 \theta - \pi/4)}{\theta^{3/2} \sqrt{\theta^2 - \cos^2 \varphi_0}} d\theta \right| \leq \frac{C}{\rho_0^{3/2}}, \tag{11}$$

где число $b > 1$.

Делая замену переменной

$$\theta = \frac{\pi}{\cos \varphi}, \quad d\theta = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{\theta^2 - \pi^2} d\varphi,$$

получим, что

$$S_3 = \frac{\pi}{R^{1/2}} \int_{\pi/\cos \varphi_1}^{\pi\sqrt{2}} \frac{\cos(R\theta - \pi/4)}{\theta^{3/2}\sqrt{\theta^2 - \pi^2}} d\theta.$$

Учитывая, что $\cos \varphi_1 = \pi/\sqrt{\pi^2 + v^2}$, при $\theta \in [\pi/\cos \varphi_1, \pi\sqrt{2}]$ имеем

$$\sqrt{\theta^2 - \pi^2} \geq \sqrt{\pi^2 + v^2 - \pi^2} = v.$$

Поэтому по второй теореме о среднем получаем

$$|S_3| \leq \frac{C}{R^{3/2}v} \leq \frac{C}{(Rv+1)^{3/2}} = \frac{C}{(R\max(u, v)+1)^{3/2}}. \quad (12)$$

Аналогично предыдущей оценке устанавливается, что

$$|S_4| = \frac{\pi}{R^{1/2}} \left| \int_{\pi/\sin \varphi_2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{\cos(R\theta - \pi/4)}{\theta^{3/2}\sqrt{\theta^2 - \pi^2}} d\theta \right| \leq \frac{C}{R^{3/2}u}, \quad (13)$$

а, следовательно,

$$|S_4| \leq \frac{C}{(Ru+1)(Rv+1)^{1/2}} = \frac{C}{(R\min(u, v)+1)(R\max(u, v)+1)^{1/2}}. \quad (14)$$

Перейдем к оценке величины S_1 . Делая замену переменной, будем иметь

$$S_1 = \frac{\sin \varphi_0}{\rho_0^{1/2}} \int_1^a \frac{\cos(\rho_0\theta - \pi/4)}{\theta^{3/2}\sqrt{\theta^2 - \sin^2 \varphi_0}} d\theta, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}}{\frac{v}{\sqrt{v^2 + \pi^2}}} = \sqrt{\frac{v^2 + \pi^2}{v^2 + u^2}}.$$

Применяя вторую теорему о среднем, получим, что

$$|S_1| \leq \frac{\sin \varphi_0}{\rho_0^{1/2}} \frac{C}{\rho_0 \cos \varphi_0} \leq \frac{C}{\rho_0^{1/2} Ru} \leq \frac{C}{(Ru+1)(Rv+1)^{1/2}}. \quad (16)$$

Теперь оценка (4) вытекает из формул (5)–(12), (14) и (16). Тем самым, лемма 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве леммы 2 было фактически установлено (см. (5)–(13) и (15)), что в условиях леммы 2 при $u \leq v$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_u^\pi \int_v^\pi D_R''(x, y) dx dy \\ &= A \frac{\sin \varphi_0}{\rho_0^{1/2}} \int_1^a \frac{\cos(\rho_0\theta - \pi/4)}{\theta^{3/2}\sqrt{\theta^2 - \sin^2 \varphi_0}} d\theta + \frac{\gamma_1(R, u, v)}{R^{3/2}u} + \frac{\gamma_2(R, u, v)}{\rho_0^{3/2}}, \end{aligned}$$

где A – положительная абсолютная постоянная, $a = \sqrt{\frac{v^2 + \pi^2}{v^2 + u^2}}$ и найдется абсолютная постоянная C такая, что $|\gamma_1(R, u, v)| \leq C$ и $|\gamma_2(R, u, v)| \leq C$ при всех $R \geq 1$ и $u, v \geq 1/R$.

ТЕОРЕМА В (двумерный вариант второй теоремы о среднем). Пусть $w(x, y)$ – неотрицательная монотонная в смысле Харди функция на $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, т.е.

1. функции $w(x, \gamma)$ и $w(\alpha, y)$ монотонны на соответствующих интервалах;
2. для любого прямоугольника $I' = [a, b] \times [c, d] \subseteq I$ имеем $w(I') \geq 0$.

Тогда для любой непрерывной функции $f(x, y)$ на I такой, что для некоторого C_1 и любой точки $(u, v) \in I$ имеем

$$\left| \int_u^\beta \int_v^\delta f(x, y) dx dy \right| \leq C_1,$$

выполняется оценка

$$\left| \iint_I w(x, y) f(x, y) dx dy \right| \leq 4C_1 \max_I w(x, y).$$

Доказательство теоремы В практически не отличается от доказательства второй теоремы о среднем в одномерном случае.

Теперь предложение 1 сразу следует из леммы 2 и теоремы В.

Перейдем к доказательству предложения 2. Вначале установим, что при предположениях и обозначениях леммы 2 имеет место равенство

$$\begin{aligned} Q &= \int_1^a \frac{\cos(\rho_0 \theta - \pi/4)}{\theta^{3/2} \sqrt{\theta^2 - \sin^2 \varphi_0}} d\theta \\ &= -\frac{\sin(\rho_0 - \pi/4)}{\rho_0 \cos \varphi_0} + \frac{\gamma_3(R, u, v)}{\rho_0} + \frac{\gamma_4(R, u, v)}{\rho_0^2 (1 - \sin \varphi_0)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где найдется такая постоянная C , что $|\gamma_j(R, u, v)| \leq C$ при $j = 3, 4$, любом $R \geq 1$ и любых $1 \geq v \geq u \geq 1/R$.

Для упрощения записи положим $\beta = \sin \varphi_0$. Поскольку (см. доказательство леммы 2) $a = \sqrt{\frac{v^2 + \pi^2}{v^2 + u^2}}$, а $v \leq 1$, то $a \geq \sqrt{\frac{1 + \pi^2}{2}}$, в то время как $\beta \leq 1$. Поэтому по второй теореме о среднем

$$\left| Q - \int_1^2 \frac{\cos(\rho_0 \theta - \pi/4)}{\theta^{3/2} \sqrt{\theta^2 - \sin^2 \varphi_0}} d\theta \right| \leq \frac{2}{\rho_0}. \quad (18)$$

Далее, если функция

$$\varphi(\theta) = \left(-\frac{1}{\theta^{3/2}} + 1 \right) \frac{1}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} = \frac{\theta^{3/2} - 1}{\theta^{3/2} \sqrt{\theta^2 - \beta^2}},$$

то $0 \leq \varphi(\theta) \leq \frac{3(\sqrt{\theta} - 1)}{\sqrt{\theta} - 1} \leq 3$ при $\theta \in (1, 2]$, а производная

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) &= \frac{3(\theta^2 - \beta^2) - 2(\theta^{3/2} - 1)\theta^2}{2\theta^{5/2}(\theta^2 - \beta^2)^{3/2}} \\ &\geq \frac{3(\theta^2 - 1) - 2(\theta^2 - 1)\theta^2}{2\theta^{5/2}(\theta^2 - \beta^2)^{3/2}} \geq \frac{(\theta^2 - 1)(3 - 2\theta^2)}{2\theta^{5/2}(\theta^2 - \beta^2)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

при $\theta \in (1, \sqrt{3/2})$. Кроме того, на отрезке $[\sqrt{3/2}, 2]$ функция $\varphi'(\theta)$ ограничена. Отсюда, применяя вторую теорему о среднем и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_1^2 \cos\left(\rho_0\theta - \frac{\pi}{4}\right) \varphi(\theta) d\theta \right| &\leq \left| \int_1^{\sqrt{3/2}} \right| + \left| \int_{\sqrt{3/2}}^2 \right| \\ &\leq \max_{\theta \in [1,2]} \varphi(\theta) \frac{2}{\rho_0} + \frac{2}{\rho_0} \max_{\theta \in [1,2]} \varphi(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0} \left| \int_{\sqrt{3/2}}^2 \sin\left(\rho_0\theta - \frac{\pi}{4}\right) \varphi'(\theta) d\theta \right| \leq \frac{C}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta - \beta} \sqrt{1 + \beta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{\theta + \beta} - \sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2} \sqrt{1 + \beta}}.$$

Здесь снова имеем

$$0 \leq \psi(\theta) \leq \frac{\theta^2 - 1}{\sqrt{\theta^2 - \beta^2}} \leq \sqrt{\theta^2 - 1} \leq \sqrt{3}$$

при $\theta \in (1, 2]$. Затем,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \beta} \psi'(\theta) &= \frac{\frac{1}{2}(\theta^2 - \beta^2) - \theta(\theta + \beta - \sqrt{1 + \beta} \sqrt{\theta + \beta})}{(\theta^2 - \beta^2)^{3/2} \sqrt{\theta + \beta}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \theta\beta + \theta\sqrt{1 + \beta} \sqrt{\theta + \beta}}{(\theta^2 - \beta^2)^{3/2} \sqrt{\theta + \beta}} \\ &= \frac{\theta(1 + \beta)^{1/2} - \frac{1}{2}(\theta + \beta)^{3/2}}{(\theta^2 - \beta^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\tau(\theta) = \theta(1 + \beta)^{1/2} - \frac{1}{2}(\theta + \beta)^{3/2}$. Так как число $\beta \in (0, 1]$, то

$$\tau(1) = (1 + \beta)^{1/2} - \frac{1}{2}(1 + \beta)^{3/2} = (1 + \beta)^{1/2} \frac{1}{2}(1 - \beta) \geq 0.$$

Кроме того, функция

$$\tau'(\theta) = (1 + \beta)^{1/2} - \frac{3}{4}(\theta + \beta)^{1/2}$$

монотонно убывает на $[1, 2]$. Поскольку

$$\tau(2) = 2(1 + \beta)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 + \beta)^{3/2},$$

а

$$\begin{aligned} 4(1 + \beta) - \frac{1}{4}(2 + \beta)^3 &= 4 + 4\beta - 2 - 3\beta - \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta^3 \\ &= 2 + \beta - \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta^3 \\ &\geq 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0 \end{aligned}$$

при $\beta \in [0, 1]$, число $\tau(2) > 0$ при всех β . Отсюда вытекает, что $\tau(\theta) > 0$ при всех β , а потому функция $\psi(\theta)$ монотонно возрастает на $[1, 2]$.

Снова применяя вторую теорему о среднем получаем, что

$$\left| \int_1^2 \cos\left(\rho_0\theta - \frac{\pi}{4}\right) \psi(\theta) d\theta \right| \leq \frac{2\sqrt{3}}{\rho_0}. \quad (20)$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} Y &= \int_1^2 \frac{\cos(\rho_0\theta - \pi/4)}{\sqrt{\theta - \beta}} d\theta = \int_0^1 \frac{\cos(\rho_0\tau + \rho_0 - \pi/4)}{\sqrt{\tau + 1 - \beta}} d\tau \\ &= \cos\left(\rho_0 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^1 \frac{\cos \rho_0\tau}{\sqrt{\tau + 1 - \beta}} d\tau - \sin\left(\rho_0 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^1 \frac{\sin \rho_0\tau}{\sqrt{\tau + 1 - \beta}} d\tau \\ &= \cos\left(\rho_0 - \frac{\pi}{4}\right) Y_1 - \sin\left(\rho_0 - \frac{\pi}{4}\right) Y_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначая $\lambda = 1 - \beta$, будем иметь

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{\cos(\rho_0\lambda(\tau/\lambda))}{\sqrt{(\tau/\lambda) + 1}} d\tau = \sqrt{\lambda} \int_0^{1/\lambda} \frac{\cos(\rho_0\lambda\xi)}{\sqrt{\xi + 1}} d\xi \\ &= \frac{1}{\rho_0\sqrt{\lambda}} \int_0^{1/\lambda} \frac{1}{\sqrt{\xi + 1}} d \sin(\rho_0\lambda\xi) \\ &= \frac{1}{\rho_0\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \rho_0}{\sqrt{(1/\lambda) + 1}} + \frac{1}{2\rho_0\sqrt{\lambda}} \int_0^{1/\lambda} \frac{\sin(\rho_0\lambda\xi)}{(\xi + 1)^{3/2}} d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая, что по второй теореме о среднем

$$\left| \int_0^{1/\lambda} \frac{\sin(\rho_0\lambda\xi)}{(\xi + 1)^{3/2}} d\xi \right| \leq \frac{2}{\rho_0\lambda}$$

и что $0 < \lambda < 1$, получаем

$$|Y_1| \leq \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2\lambda^{3/2}}. \quad (22)$$

Действуя аналогично, будем иметь

$$Y_2 = \frac{1}{\rho_0\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \rho_0}{\rho_0\sqrt{\lambda} \sqrt{(1/\lambda) + 1}} - \frac{1}{2\rho_0\sqrt{\lambda}} \int_0^{1/\lambda} \frac{\cos(\rho_0\lambda\xi)}{(\xi + 1)^{3/2}} d\xi,$$

то есть

$$Y_2 = \frac{1}{\rho_0\sqrt{\lambda}} + Y_2', \quad (23)$$

где

$$|Y_2'| \leq \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2\lambda^{3/2}}. \quad (24)$$

Из формул (18)–(24) вытекает, что

$$Q = -\frac{\sin(\rho_0 - \pi/4)}{\rho_0\sqrt{1 + \beta}\sqrt{1 - \beta}} + Q' = -\frac{\sin(\rho_0 - \pi/4)}{\rho_0 \cos \varphi_0} + Q',$$

где

$$|Q'| \leq \frac{C}{\rho_0} + \frac{C}{\rho_0^2(1 - \sin \varphi_0)^{3/2}}.$$

Тем самым, равенство (17) установлено.

Далее, интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} I(R, u, v) &= 4 \int_u^\pi \int_v^\pi D'_R(x, y) dx dy = \int_u^\pi \int_v^\pi w(x)w(y)D''_R(x, y) dx dy \\ &= - \int_u^\pi w(x) \int_v^\pi w(y) dy \int_y^\pi D''_R(x, \xi) d\xi dx \\ &= w(v) \int_u^\pi w(x) \int_v^\pi D''_R(x, \xi) d\xi dx \\ &\quad + \int_u^\pi \int_v^\pi w(x) \int_y^\pi D''_R(x, \xi) d\xi w'(y) dy dx \\ &= w(u)w(v) \int_u^\pi \int_v^\pi D''_R(x, y) dx dy \\ &\quad + w(v) \int_u^\pi w'(x) \int_x^\pi \int_v^\pi D''_R(t, \xi) dt d\xi dx \\ &\quad + w(u) \int_v^\pi w'(y) \int_u^\pi \int_y^\pi D''_R(t, \xi) dt d\xi dy \\ &\quad + \int_u^\pi w'(x) \int_v^\pi w'(y) \int_x^\pi \int_y^\pi D''_R(t, \xi) dt d\xi dx dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{25}$$

Известно, что функция $w(x)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$ и что $w'(0) = 0$. Поэтому для некоторого $C > 0$ имеем $|w'(t)| \leq Ct$ при $t \in [0, \pi]$. Используя предложение 1, получим, что

$$|I_4| \leq \frac{C}{R^{3/2}} \int_u^\pi \int_v^\pi \frac{xy}{\sqrt{\max(x, y)} \min(x, y)} dx dy \leq \frac{C}{R^{3/2}}. \tag{26}$$

Далее, при $v \geq u$ имеем

$$|I_3| \leq \frac{C}{R^{3/2}} \int_v^\pi \frac{y}{u\sqrt{y}} dy \leq \frac{C}{R^{3/2}u} \tag{27}$$

и

$$|I_2| \leq \frac{C}{R^{3/2}} \left(\int_u^v \frac{x}{x\sqrt{v}} dx + \int_v^\pi \frac{x}{v\sqrt{x}} dx \right) \leq \frac{C}{R^{3/2}v} \leq \frac{C}{R^{3/2}u}. \tag{28}$$

Возвращаясь к обозначениям равенства (17), заметим, что если $u \geq C/\sqrt{R}$ и $v \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \rho_0(1 - \sin \varphi_0) &= R\sqrt{u^2 + v^2} \left(1 - \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \\ &= R(\sqrt{u^2 + v^2} - v) = \frac{Ru^2}{\sqrt{u^2 + v^2} + v} \geq \frac{Ru^2}{3v} \geq \frac{C^2}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что можно зафиксировать столь большое C_2 , что при $u \geq C_2/\sqrt{R}$ получим

$$\left| \frac{\gamma_4(R, u, v)}{\rho_0^2(1 - \sin \varphi_0)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{40\rho_0 \cos \varphi_0}. \quad (29)$$

Теперь возьмем C_5 настолько малым, чтобы (см. (26)–(28)) при $v \leq C_5$ мы имели бы

$$\max_{i=2,3,4} |I_i| \leq \frac{A}{120R^{3/2}u\sqrt{v}}, \quad (30)$$

а также (см. замечание 1), чтобы

$$\left| \frac{\gamma_1(R, u, v)}{R^{3/2}u} \right| \leq \frac{A}{200R^{3/2}u\sqrt{v}}, \quad (31)$$

где A – постоянная из замечания 1. Далее, фиксируем C_4 так, чтобы при $v \geq C_4u$ выполнялись оценки

$$\left| \frac{\gamma_2(R, u, v)}{\rho_0^{3/2}} \right| \leq \frac{A}{200R^{3/2}u\sqrt{v}} \quad (32)$$

и

$$\left| \frac{\gamma_3(R, u, v)}{\rho_0} \right| \leq \frac{1}{40\rho_0 \cos \varphi_0}, \quad (33)$$

где снова A – постоянная из замечания 1.

Наконец, если $2C_3 \leq C_5/C_4$, а константа C_1 настолько велика, что $2C_2/\sqrt{C_1} \leq C_3$, то при R, u и v , удовлетворяющих условиям предложения 2, получим (см. замечание 1, (17), (25) и (29)–(33))

$$\begin{aligned} \left| \int_u^\pi \int_v^\pi D'_R(x, y) dx dy \right| &\geq \frac{A}{\rho_0^{1/2}} \left(\frac{|\sin(\rho_0 - \pi/4)|}{\rho_0 \operatorname{ctg} \varphi_0} - \frac{2 \sin \varphi_0}{40\rho_0 \cos \varphi_0} \right) \\ &\quad - \frac{2A}{200R^{3/2}u\sqrt{v}} - \frac{3A}{120R^{3/2}u\sqrt{v}} \\ &\geq \frac{A}{R^{3/2}u\sqrt{v}} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20} - \frac{1}{100} - \frac{1}{40} \right) \\ &= \frac{C_6}{R^{3/2}u\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

Таким образом, предложение 2 установлено полностью.

§3. Поведение сферических частичных сумм рядов Фурье функций из классов Ватермана

Доказательство теоремы 1 проведем по схеме, являющейся модификацией предложенной автором в статье [5].

Отметим, вначале, что

$$\begin{aligned}
& \|S_{R-1}(f) - S'_R(f)\|_{C(T^2)} \\
& \leq \sup_{x, y \in T} \sum_{R-1 < |(m, n)| \leq R+1} \frac{1}{(2\pi)^2} \\
& \quad \times \left| \int_{T+x} \int_{T+y} f(t, s) w(t-x) w(s-y) \iint_{B_R \cap I_{m, n}} e^{-i((t-x)u + (s-y)v)} du dv dt ds \right| \\
& \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \sup_{x, y \in T} \iint_{[-1, 1]^2} \sum_{R-1 < |(m, n)| \leq R+1} \left| \int_T \int_T f(t+x, s+y) \right. \\
& \quad \times w(t) w(s) e^{-i(tu+sv)} e^{-itm} e^{-isn} dt ds \left. \right| du dv \\
& \leq C I_R(f),
\end{aligned}$$

откуда видно, что теорему можно доказывать для сумм $S'_R(f, x, y)$. Далее, не ограничивая общности, проведем оценки только в точке $(0, 0)$, т.е. докажем, что

$$|S'_R(f, 0, 0)| \leq C(\varepsilon) \Lambda_\varepsilon V f.$$

Мы можем также предположить, что на T^2 $f(x, y) \neq 0$ только в тех точках, где $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Фиксируем некоторое $R > 1$. Подберем ν так, что $2^{\nu-1} < R \leq 2^\nu$. Введем в рассмотрение множества

$$A_0 = \left[0, \frac{\pi}{R}\right]^2, \quad A_s = \left[0, \frac{\pi}{R} 2^s\right] \times \left[\frac{\pi}{R} 2^{s-1}, \frac{\pi}{R} 2^s\right]$$

при $s = 1, 2, \dots, \nu-1$,

$$A_\nu = [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{R} 2^{\nu-1}, \pi\right]; \quad B_s = \left[\frac{\pi}{R} 2^{s-1}, \frac{\pi}{R} 2^s\right] \times \left[0, \frac{\pi}{R} 2^{s-1}\right]$$

при $s = 1, 2, \dots, \nu-1$ и $B_\nu = \left[\frac{\pi}{R} 2^{\nu-1}, \pi\right] \times \left[0, \frac{\pi}{R} 2^{\nu-1}\right]$.

Тогда

$$\begin{aligned}
S'_R(f, 0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{s=0}^{\nu} \iint_{A_s} f(x, y) D'_R(x, y) dx dy + \sum_{s=1}^{\nu} \iint_{B_s} f(x, y) D'_R(x, y) dx dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{s=0}^{\nu} I_s + \sum_{s=1}^{\nu} I'_s \right). \tag{34}
\end{aligned}$$

Проведем дальнейшие оценки для I_s (величины I'_s оцениваются аналогично). Фиксируем $s \in [1, \nu]$ (в дальнейшем считаем $s < \nu$, так как при $s = \nu$ лишь несколько усложняется запись).

Введем в рассмотрение точки $x_k = \frac{\pi\sqrt{k}\sqrt{2^s}}{R}$ при $k = 0, 1, \dots, 2^s$ и $y_l = \frac{\pi l}{R}$ при $l = 2^{s-1}, \dots, 2^s$. Пусть одномерные отрезки $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ при $k = 1, \dots, 2^s$ и $\Delta'_l = [y_{l-1}, y_l]$ при $l = 2^{s-1} + 1, \dots, 2^s$, а двумерные отрезки $\Delta_{k,l} = \Delta_k \times \Delta'_l$. Теперь определим функцию

$$g_s(x, y) = \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} f(x_k, y_l) X_{\Delta_{k,l}}(x, y).$$

Рассмотрим вначале выражение

$$\begin{aligned} S'_R(g_s, 0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} f(x_k, y_l) \iint_{\Delta_{k,l}} D'_R(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{k=2}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} f(\Delta_{k,l}) \int_{x_{k-1}}^{x_{2^s}} \int_{y_{l-1}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \right. \\ &\quad + \sum_{k=2}^{2^s} (f(x_k, y_{2^{s-1}+1}) - f(x_{k-1}, y_{2^{s-1}+1})) \int_{x_{k-1}}^{x_{2^s}} \int_{y_{2^{s-1}}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dy dx \\ &\quad + \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} (f(x_1, y_l) - f(x_1, y_{l-1})) \int_{y_{l-1}}^{y_{2^s}} \int_0^{x_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \\ &\quad \left. + f(x_1, y_{2^{s-1}+1}) \iint_{A_s} D'_R(x, y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \end{aligned} \tag{35}$$

Из предложения 1 вытекает, что для любых $k > 1$ и l имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_{k-1}}^{x_{2^s}} \int_{y_{l-1}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \right| \\ &\leq \left| \int_{x_{k-1}}^{\pi} \int_{y_{l-1}}^{\pi} \right| + \left| \int_{x_{2^s}}^{\pi} \int_{y_{l-1}}^{\pi} \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{\pi} \int_{y_{2^s}}^{\pi} \right| + \left| \int_{x_{2^s}}^{\pi} \int_{y_{2^s}}^{\pi} \right| \\ &\leq \frac{C}{R^{3/2} x_{k-1} \sqrt{y_{l-1}}} \leq \frac{C}{\sqrt{2^s} \sqrt{k} \sqrt{l}} \leq \frac{1}{s^{1+2\varepsilon}} \frac{C}{\lambda_k \lambda_l}, \end{aligned}$$

где $\lambda_k = \frac{k^{3/4}}{(\ln(k+1))^{1/2+\varepsilon}}$. Поэтому

$$|F_1| \leq \frac{C}{s^{1+2\varepsilon}} \sum_{k=2}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} \frac{|f(\Delta_{k,l})|}{\lambda_k \lambda_l} \leq \frac{C \Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}. \tag{36}$$

Далее, поскольку согласно предложению 1 имеем

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_{2^s}} \int_{y_{2^{s-1}}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \right| \leq \frac{C}{R y_{2^{s-1}}} \leq \frac{C}{2^{s-1}} \leq \frac{C}{2^{s/4}} \frac{1}{\lambda_k},$$

то

$$|F_2| \leq \frac{C}{2^{s/4}} \sum_{k=2}^{2^s} |f(x_k, y_{2^{s-1}+1}) - f(x_{k-1}, y_{2^{s-1}+1})| \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{2^{s/4}}. \quad (37)$$

Аналогично,

$$|F_3| \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{2^{s/4}}. \quad (38)$$

Наконец, очевидно, что

$$|F_4| \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{2^s}. \quad (39)$$

Из оценок (35)–(39) вытекает, что

$$|S'_R(g_s, 0, 0)| \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}. \quad (40)$$

Теперь рассмотрим величину

$$\begin{aligned} I_s - S'_R(g_s, 0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \iint_{\Delta_{k,l}} (f(x, y) - f(x_k, y_l)) D'_R(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \iint_{\Delta_{k,l}} f((x, x_k) \times (y, y_l)) D'_R(x, y) dx dy \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \iint_{\Delta_{k,l}} (f(x_k, y) - f(x_k, y_l)) D'_R(x, y) dx dy \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \iint_{\Delta_{k,l}} (f(x, y_l) - f(x_k, y_l)) D'_R(x, y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} (G_1 + G_2 + G_3). \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что из леммы 1 сразу следует, что на A_s выполняется оценка

$$|D'_R(x, y)| \leq \frac{CR^2}{2^{\frac{3}{2}s}}.$$

Поэтому

$$|G_1| \leq \frac{CR^2}{2^{\frac{3}{2}s}} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \iint_{\Delta_{k,l}} |f((x, x_k) \times (y, y_l))| dx dy. \quad (42)$$

Отметим, что $\Delta_{k,l} = \Delta_k \times \Delta'_l$, где $\Delta_k = \left[\frac{\pi\sqrt{2^s}\sqrt{k-1}}{R}, \frac{\pi\sqrt{2^s}\sqrt{k}}{R} \right]$. Учитывая, что $|\Delta_k| \leq \frac{C\sqrt{2^s}}{R\sqrt{k}}$, и обозначая через $\Delta'_1 = \left[0, \frac{\pi}{R} \right]$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\iint_{\Delta_{k,l}} |f((x, x_k) \times (y, y_l))| dx dy \\ &= \int_0^{|\Delta_k|} \int_{\Delta'_1} |f((x_{k-1} + x, x_k) \times (y_{l-1} + y, y_l))| dx dy \\ &\leq \frac{C\sqrt{2^s}}{\sqrt{k}} \int_{\Delta'_1} \int_{\Delta'_1} |f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1} + y, y_l))| dx dy, \end{aligned}$$

где $\mu_k = |\Delta_k|/|\Delta'_1|$. Поэтому (см. (42))

$$\begin{aligned}
|G_1| &\leq \frac{CR^2}{2^s} \int_{\Delta'_1} \int_{\Delta'_1} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \frac{|f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1} + y, y_l))|}{\sqrt{k}} dx dy \\
&\leq \frac{CR^2}{s^{1+2\varepsilon}} \\
&\quad \times \sup_{(x,y) \in \Delta'_1 \times \Delta'_1} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \frac{|f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1} + y, y_l))|}{\lambda_k \lambda_l} (\text{mes } \Delta'_1)^2 \\
&\leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned}
G_2 &= \sum_{k=2}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \int_{\Delta'_1} f((x_{k-1}, x_k) \times (y, y_l)) \int_{x_{k-1}}^{x_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \\
&\quad + \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \int_{\Delta'_1} (f(x_1, y) - f(x_1, y_l)) \int_0^{x_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \\
&= G_{2,1} + G_{2,2}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Отметим, что из следствия 1 вытекает, что при $(u, y) \in \Delta_{k,l}$, $k > 1$, имеем

$$\left| \int_u^{x_{2^s}} D'_R(x, y) dx \right| \leq \frac{CR}{\sqrt{k} \sqrt{2^s} \sqrt{l}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|G_{2,1}| &\leq \frac{CR}{\sqrt{2^s}} \int_{\Delta'_1} \sum_{k=2}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \frac{|f(\Delta_k \times (y_{l-1} + y, y_l))|}{\sqrt{k} \sqrt{l}} dy \\
&\leq \frac{C}{s^{1+2\varepsilon}} \sup_{y \in \Delta'_1} \left(\sum_{k=2}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \frac{|f(\Delta_k \times (y_{l-1} + y, y_l))|}{\lambda_k \lambda_l} \right) \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{45}$$

и, аналогично, используя последнюю оценку следствия 1,

$$\begin{aligned}
|G_{2,2}| &\leq CR \sup_{y \in \Delta'_1} \left(\sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} \frac{|f(x_1, y_{l-1} + y) - f(x_1, y_l)|}{l} \right) \int_{\Delta'_1} dy \\
&\leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{2^{s/4}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Сходным образом,

$$\begin{aligned}
G_3 &= \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} \int_{\Delta_k} f((x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)) \int_{y_{l-1}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2^s} \int_{\Delta_k} (f(x, y_{2^{s-1}+1}) - f(x_k, y_{2^{s-1}+1})) \int_{y_{2^{s-1}}}^{y_{2^s}} D'_R(x, y) dx dy \\
&= G_{3,1} + G_{3,2}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Применяя следствие 1, получим, что

$$|G_{3,1}| \leq \frac{CR}{2^{\frac{3}{2}s}} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} \int_{\Delta_k} |f((x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))| dx.$$

Используя тот же метод, что и при оценке G_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_k} |f((x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))| dx \\ &= \int_0^{|\Delta_k|} |f((x_{k-1} + x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))| dx \\ &\leq \frac{C\sqrt{2^s}}{\sqrt{k}} \int_{\Delta'_1} |f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))| dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |G_{3,1}| &\leq \frac{CR}{2^s} \int_{\Delta'_1} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} \frac{|f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))|}{\sqrt{k}} dx \\ &\leq \frac{C}{s^{1+2\varepsilon}} \sup_{x \in \Delta'_1} \sum_{k=1}^{2^s} \sum_{l=2^{s-1}+2}^{2^s} \frac{|f((x_{k-1} + \mu_k x, x_k) \times (y_{l-1}, y_l))|}{\lambda_k \lambda_l} \\ &\leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |G_{3,2}| &\leq \frac{CR}{2^{\frac{3}{2}s}} \sum_{k=1}^{2^s} \int_{\Delta_k} |f(x, y_{2^{s-1}+1}) - f(x_k, y_{2^{s-1}+1})| dx \\ &\leq \frac{CR}{2^{\frac{3}{2}s}} \sum_{k=1}^{2^s} \sup_{x \in \Delta_k} |f(x, y_{2^{s-1}+1}) - f(x_k, y_{2^{s-1}+1})| \frac{\sqrt{2^s}}{R\sqrt{k}} \\ &\leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{2^{s/2}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Теперь из формул (41) и (43)–(50) следует, что

$$|I_s - S'_R(g_s, 0, 0)| \leq \frac{C\Lambda_\varepsilon V f}{s^{1+2\varepsilon}}$$

при $s \in [1, \nu]$. Поскольку неравенство

$$|I_0| \leq C \sup_{(x,y) \in T^2} |f(x, y)|$$

очевидно, а величины I'_s оцениваются аналогично, мы доказали, что (см. также (34) и (40))

$$|S'_R(f, 0, 0)| \leq C(\varepsilon)\Lambda_\varepsilon V f,$$

а это эквивалентно основному утверждению теоремы 1. Предположим, теперь, что $f(t, s) \in \Lambda_0 BV(T^2)$. Тогда, последовательно рассмотрев произведения функций, убедимся в том, что при любых $x, y \in T$ и любых $u, v \in [-1, 1]$ функция $\psi_{x,y,u,v} \in \Lambda_0 BV(T^2)$, причем $\Lambda_0 V \psi_{x,y,u,v} \leq C \Lambda_0 V f$. Поскольку в статье [5] для произвольной $g(t, s) \in \Lambda_0 BV(T^2)$ было установлено неравенство

$$|a_{m,n}(g)| \leq \frac{C \Lambda_0 V g}{\sqrt{|m|+1} \sqrt{|n|+1}},$$

получаем, что для функции $f(t, s)$ выполняется условие (2). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При доказательстве теоремы 1 было фактически установлено, что $|S'_R(f, 0, 0)| \leq C(\varepsilon) \Lambda_\varepsilon V f$. Кроме того, из доказательства видно, что если $f(x, y) \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$ и для некоторого $\delta > 0$ функция $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in [-\delta, \delta]^2$, то $S'_R(f, 0, 0) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится еще одна лемма.

ЛЕММА А. Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda BV(T^2)$, где

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} = \infty,$$

точка $(x_0, y_0) \in T^2$ и в этой точке существуют четыре предела

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \pm 0, \\ y \rightarrow y_0 \pm 0}} f(x, y) = f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0).$$

Тогда $\Lambda V_{[-\delta, \delta]^2} f \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Эта лемма была доказана А. А. Саакяном [11] для случая $\Lambda \equiv \{n\}_{n=1}^{\infty}$. В общем случае доказательство остается практически тем же.

Теперь установим справедливость теоремы 2. Пусть для определенности $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Прежде всего заметим, что при выполнении ее условий будем иметь

$$\|S_R - S'_R\|_{C(T^2)} \rightarrow 0 \quad (51)$$

при $R \rightarrow \infty$. Далее при любом $\delta > 0$ функцию $f(x, y)$ можно представить в виде следующей суммы $f(x, y) = A + f_1(x, y) + f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) = (f(x, y) - A)X_{[-\delta, \delta]^2}(x, y)$, а $A = \frac{1}{4} \sum f(\pm 0, \pm 0)$. Отметим, что $f_1, f_2 \in \Lambda_\varepsilon BV(T^2)$. Применяя лемму А, замечание 2 и хорошо известный результат о непрерывности одномерной вариации в точках непрерывности функции, получим, что для любого $\gamma > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|S'_R(f_1, 0, 0)| \leq \frac{\gamma}{2}. \quad (52)$$

Наконец, фиксируя δ и воспользовавшись замечанием 2, получим, что при достаточно больших R выполняется оценка

$$|S'_R(f_2, 0, 0)| \leq \frac{\gamma}{2}. \quad (53)$$

Теперь требуемый результат вытекает из формул (51)–(53).

В заключение этого параграфа укажем одно условие, достаточное для выполнения оценки (2).

ЛЕММА 3. Пусть функция $f(x, y) \in L_2(T^2)$ и ее смешанный модуль непрерывности в этом пространстве удовлетворяет неравенству $\omega(f, \delta_1, \delta_2)_2 \leq B\delta_1^{1/4}\delta_2^{1/4}$, а частные модули непрерывности – неравенствам $\omega_i(f, \delta_i)_2 \leq B\delta_i^{1/4}$, при всех $\delta_1, \delta_2 > 0$, $i = 1, 2$, где B – некоторая постоянная. Тогда $I_R(f) \leq C(B + \|f\|_2)$ при $R \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что при всех $x, y \in T$ и при всех $u, v \in [-1, 1]$ модули непрерывности функции $\psi = \psi_{x,y,u,v}$ удовлетворяют таким же неравенствам, как в условии леммы, с постоянными CB . Рассмотрим величину

$$J'_R(\psi) = \sum_{\substack{m \geq n \geq 0, \\ R < |(m,n)| \leq R+1}} |a_{m,n}(\psi)|,$$

поскольку другие суммы оцениваются аналогично. Предположим, что число ν таково, что $2^{\nu-1} \leq R+1 < 2^\nu$. Тогда

$$J'_R(\psi) = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\substack{m \geq n \geq 0, \\ R < |(m,n)| \leq R+1, \\ 2^{k-1} \leq n < 2^k}} |a_{m,n}(\psi)| + 2\|\psi\|_2 = 2\|\psi\|_2 + \sum_{k=0}^{\nu} Y_k.$$

Отметим, что при всех k число слагаемых в сумме Y_k не больше 2^{k+1} . Поэтому

$$Y_k \leq 2^{(k+1)/2} \left(\sum_{\substack{m \geq n \geq 0, \\ R < |(m,n)| \leq R+1, \\ 2^{k-1} \leq n < 2^k}} a_{m,n}^2 \right)^{1/2} \leq 2^{(k+1)/2} \left(\sum_{\substack{m \geq 2^{\nu-2}, \\ n \geq 2^{k-1}}} a_{m,n}^2 \right)^{1/2}.$$

Используя теорему М. К. Потапова о приближении углом (см. [12]), получим, что

$$Y_k \leq C2^{k/2}B2^{-\nu/4}2^{-k/4} = CB2^{-\nu/4}2^{k/4}.$$

Поскольку $\|\psi\|_2 \leq C\|f\|_2$, суммируя по k , устанавливаем справедливость леммы.

§ 4. Ряды Фурье характеристических функций выпуклых множеств

Вначале установим такой результат.

ЛЕММА 4. Существует такая абсолютная постоянная $C > 0$, что для любого выпуклого множества $A \subseteq T^2$ имеем $I_R(X_A) \leq C/\sqrt[3]{R}$ при $R \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что выпуклое $A \subset [0, \pi]^2$. Рассмотрим, вначале, величину

$$J_R(X_A) = \sum_{R < |(m,n)| \leq R+1} |a_{m,n}(X_A)|.$$

Отметим, что при $n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 4\pi^2 |a_{m,n}(X_A)| &= \left| \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} e^{-i(mx+ny)} dy dx \right| \\
 &= \frac{1}{|n|} \left| \int_a^b (e^{-i(mx+n\varphi_1(x))} - e^{-i(mx+n\varphi_2(x))}) dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{|n|} \left| \int_a^b e^{-i(mx+n\varphi_1(x))} dx \right| + \frac{1}{|n|} \left| \int_a^b e^{-i(mx+n\varphi_2(x))} dx \right| \\
 &= a'_{m,n} + a''_{m,n}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Ясно, что

$$a''_{m,n} \leq \frac{C}{|n|} \tag{55}$$

при $n \neq 0$. Заметим для дальнейшего, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ выпуклы (вогнуты) на отрезке $[a, b]$. Известно, что в каждой точке интервала (a, b) у функции $\varphi_2(x)$ существует односторонняя производная, являющаяся монотонной функцией. Кроме того, $\varphi_2(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Ниже через $\varphi'_2(x)$ будем обозначать левую производную $\varphi_2(x)$ при $x \in (a, b]$. Пусть $P_R = \{(m, n) : R < |(m, n)| \leq R + 1\}$. Тогда $P_R = K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 \sqcup K_4$, где $K_1 = N \cap L_1$, $K_2 = N \cap L_2$, $K_3 = M \cap L_1$ и $K_4 = M \cap L_2$, причем $N = \{(m, n) : |n| \geq m\}$, $M = \mathbb{Z}^2 \setminus N$,

$$L_1 = \left\{ (m, n) \in P_R : \text{mes} \left\{ x \in T : \left| \frac{m}{n} + \varphi'_2(x) \right| < \frac{1}{R^{2/3}} \right\} < \frac{1}{R^{1/3}} \right\}$$

и $L_2 = P_R \setminus L_1$.

Отметим, что из монотонности функции $\varphi'_2(x)$ вытекает, что множество

$$E_{m,n} = E_{m,n}(R) = \left\{ x \in T : \left| \frac{m}{n} + \varphi'_2(x) \right| < \frac{1}{R^{2/3}} \right\} = \{\alpha_{m,n,R}, \beta_{m,n,R}\} \subset [a, b]$$

при всех $(m, n) \in P_R$ (точки $\alpha_{m,n,R}$ и $\beta_{m,n,R}$ могут как входить в указанное множество, так и не входить в него).

Если $(m, n) \in K_1$, то

$$\begin{aligned}
 I(m, n) &= \left| \int_a^b e^{-i(mx+n\varphi_2(x))} dx \right| \\
 &\leq \left| \int_{[a,b] \setminus E_{m,n}} \frac{de^{-i(mx+n\varphi_2(x))}}{m + n\varphi'_2(x)} \right| + \text{mes } E_{m,n} \\
 &= \tilde{I}_{m,n} + \text{mes } E_{m,n} \leq \tilde{I}_{m,n} + R^{-1/3}.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Далее, $[a, b] \setminus E_{m,n} = [a, \alpha_{m,n,R}] \sqcup \{\beta_{m,n,R}, b\} = [a, \alpha] \sqcup \{\beta, b\}$. Мы оценим интеграл только по первому промежутку (второй оценивается аналогично). При этом будем считать, что точки $\alpha, \beta \notin E_{m,n}$ (иначе расширим интервал с сохранением

оценки его меры). Используя теорему об интегрировании по частям в интеграле Римана–Стилтьеса и учитывая монотонность функции $\frac{1}{m + n\varphi'_2(x)}$, получим

$$\begin{aligned}\hat{I}_{m,n} &= \frac{1}{n} \left| \int_a^\alpha \frac{de^{-i(mx+n\varphi_2(x))}}{\frac{m}{n} + \varphi'_2(x)} \right| \\ &\leq \frac{2}{n} \sup_{[a,\alpha]} \left| \frac{1}{\frac{m}{n} + \varphi'_2(x)} \right| + \frac{1}{n} \left| \int_a^\alpha e^{-i(mx+n\varphi_2(x))} d\left(\frac{1}{\frac{m}{n} + \varphi'_2(x)}\right) \right| \\ &\leq \frac{2}{n} R^{2/3} + \frac{1}{n} \left| \frac{1}{\frac{m}{n} + \varphi'_2(a)} - \frac{1}{\frac{m}{n} + \varphi'_2(\alpha)} \right| \leq \frac{4}{n} R^{2/3}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $|(m, n)| > R$ и что $|m| \leq |n|$, имеем $|n| > \frac{\sqrt{2}}{2}R > \frac{1}{2}R$. Поэтому (см. (56))

$$a''_{m,n} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{8}{n} R^{2/3} + R^{-1/3} \right) \leq 34R^{-4/3}.$$

Отсюда

$$\sum_{(m,n) \in K_1} a''_{m,n} \leq |K_1| \frac{34}{R^{4/3}} \leq CR^{-1/3}. \quad (57)$$

Теперь рассмотрим множество K_2 . Произвольно фиксируем $(m_1, n_1) \in K_2$, последовательно выберем максимальную систему точек $\{(m_k, n_k)\}_{k=1}^l$ так, чтобы множества E_{m_k, n_k} попарно не пересекались при $1 \leq k \leq l$. Заметим, что так как $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, то $lR^{-1/3} \leq 2\pi$, откуда $l \leq 10R^{1/3}$.

Определим множества $K_2(1) = \{(m, n) \in K_2 : E_{m,n} \cap E_{m_1, n_1} \neq \emptyset\}$ и $K_2(s) = \{(m, n) \in K_2 : E_{m,n} \cap E_{m_s, n_s} \neq \emptyset\} \setminus \bigcup_{r=1}^{s-1} K_2(r)$ при $s = 2, 3, \dots$. Ясно, что $K_2 = \bigsqcup_{s=1}^l K_2(s)$. Предположим, что $1 \leq s \leq l$ и $(m, n) \in K_2(s)$. Тогда найдется $t \in E_{m,n} \cap E_{m_s, n_s}$. Поэтому

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{m_s}{n_s} \right| \leq \left| \frac{m}{n} - \varphi'_2(t) \right| + \left| \frac{m_s}{n_s} - \varphi'_2(t) \right| < \frac{2}{R^{2/3}}.$$

Отсюда вытекает, что (m, n) лежит в кольцевом секторе

$$\left\{ (r, \varphi) : R \leq r \leq R+1, \frac{m_s}{n_s} - \frac{2}{R^{2/3}} < \operatorname{ctg} \varphi < \frac{m_s}{n_s} + \frac{2}{R^{2/3}} \right\}.$$

Поскольку общее число целочисленных точек в таком секторе не больше, чем $\frac{C}{R^{2/3}}R = CR^{1/3}$, где C – абсолютная постоянная, мы получаем, что

$$|K_2(s)| \leq CR^{1/3}.$$

Поэтому

$$|K_2| \leq CR^{1/3}l \leq CR^{2/3}.$$

Отсюда, учитывая оценку (55), будем иметь

$$\sum_{(m,n) \in K_2} a''_{m,n} \leq |K_2| \frac{2\pi}{|n|} \leq CR^{2/3} \frac{10}{R} = CR^{-1/3}. \quad (58)$$

Поскольку суммы по множествам K_3 и K_4 оцениваются аналогично, из неравенств (57) и (58) вытекает, что

$$\sum_{R < |(m,n)| \leq R+1} a''_{m,n} \leq CR^{-1/3}.$$

Величины $a'_{m,n}$ оцениваются точно так же, а потому (см. (54))

$$J_R(X_A) = \sum_{R < |(m,n)| \leq R+1} |a_{m,n}(X_A)| \leq CR^{-1/3}.$$

Пусть $x_l = \frac{\pi l}{k}$ при $l = 0, 1, \dots, k$ и функция

$$w_k(x) = \sum_{l=1}^k w(x_{l-1}) X_{(x_{l-1}, x_l]}(x) = \sum_{l=1}^{k-1} (w(x_{l-1}) - w(x_l)) X_{(0, x_l]} + w(x_{k-1}).$$

Тогда, пользуясь тем, что при любом l множество $A_l = A \cap (0, x_l] \times [0, \pi]$ выпукло, а функция $w(x)$ монотонна и ограничена на $[0, \pi]$, получим

$$J_R(X_A(x, y) w_k(x)) \leq \sum_{l=1}^{k-1} |w(x_{l-1}) - w(x_l)| J(X_{A_l}) + w(x_{k-1}) J(X_A) \leq CR^{-1/3}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, что

$$J_R(X_A(x, y) w(x)) \leq CR^{-1/3}.$$

Последовательно применяя те же рассуждения, получим, что при любых $u, v \in [-1, 1]$ имеем

$$J_R(X_A(x, y) w(x) w(y) e^{-i(ux+vy)}) \leq CR^{-1/3}.$$

Поскольку аналогичное неравенство очевидно справедливо и для сдвинутой характеристической функции, лемма 4 полностью установлена.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существует такая абсолютная постоянная C , что если выпуклое $A \subset T^2$ и $R \geq 1$, то*

$$\|S_R(X_A)\|_{C(T^2)} \leq C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $X_A(x, y) \in \Lambda_\alpha BV(T^2)$, где $\Lambda_\alpha \equiv \{n^\alpha\}_{n=1}^\infty$, а $\alpha > 1/2$. Поэтому требуемое утверждение вытекает из леммы 4 и теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть выпуклое множество $A \subset T^2$ и $R \geq 1$. Тогда если точка $(x, y) \in T^2 \setminus A$ и*

$$\rho = \text{dist}((x, y), A) = \inf_{(s,t) \in A_1} \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2} > 0,$$

где A_1 есть множество A , 2π -периодически продолженное по каждой переменной, то

$$|S'_R(X_A, x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{R\rho}},$$

где C — абсолютная постоянная. Иными словами, для $S'_R(X_A)$ справедлив принцип локализации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $R\rho \leq 2\pi$, то требуемая оценка вытекает из следствия 2 и леммы 4. Пусть $R\rho \geq 2\pi$. Не ограничивая общности, будем оценивать $S'_R(X_A)$ в точке $(0, 0)$. Будем также считать A замкнутым. Кроме того, поскольку пересечение A с любым прямоугольником снова является выпуклым множеством, достаточно, например, установить требуемую оценку для замкнутого выпуклого $A \subseteq [0, \pi]^2 \setminus [0, \frac{1}{2}\rho]^2$.

Переходя к полярным координатам и используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned}
|4\pi^2 S'_R(0, 0)| &= \left| 4 \iint_A D'_R(s, t) ds dt \right| \\
&= \left| \int_0^{\pi/2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r D''_R(r \cos \varphi, r \sin \varphi) w(r \cos \varphi) w(r \sin \varphi) dr d\varphi \right| \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \left| \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \frac{\sqrt{8\pi} R^2}{(rR)^{3/2}} \sin\left(R\rho - \frac{\pi}{4}\right) w(r \cos \varphi) w(r \sin \varphi) dr \right| d\varphi \\
&\quad + C \int_0^{\pi/2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \frac{R^2}{(rR)^{5/2}} dr d\varphi \\
&\leq C \left(\int_0^{\pi/2} \left| \int_{Rr_1(\varphi)}^{Rr_2(\varphi)} \frac{\sin(\tau - \pi/4)}{\tau^{1/2}} w\left(\frac{\tau \cos \varphi}{R}\right) w\left(\frac{\tau \sin \varphi}{R}\right) d\tau \right| d\varphi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\pi/2} \int_{Rr_1(\varphi)}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} d\varphi \right) \\
&= C(I_1 + I_2). \tag{59}
\end{aligned}$$

Так как $Rr_1(\varphi) \geq R\rho$ для всех $\varphi \in [0, \pi/2]$, ясно, что

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{R\rho}}. \tag{60}$$

Далее, функции $w\left(\frac{\tau \cos \varphi}{R}\right)$ и $w\left(\frac{\tau \sin \varphi}{R}\right)$ монотонны по τ при любом φ и ограничены, а потому, используя вторую теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{Rr_1(\varphi)}^{Rr_2(\varphi)} \frac{\sin(\tau - \pi/4)}{\tau^{1/2}} w\left(\frac{\tau \cos \varphi}{R}\right) w\left(\frac{\tau \sin \varphi}{R}\right) d\tau \right| \\
&\leq C \sup_{[\alpha, \beta] \subseteq [r_1(\varphi), r_2(\varphi)]} \left| \int_{R\alpha}^{R\beta} \frac{\sin(\tau - \pi/4)}{\tau^{1/2}} d\tau \right| \leq \frac{C}{\sqrt{Rr_1(\varphi)}} \leq \frac{C}{\sqrt{R\rho}},
\end{aligned}$$

откуда

$$I_1 \leq \frac{C}{\sqrt{R\rho}}. \tag{61}$$

Из оценок (59)–(61) и вытекает предложение 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть замкнутое выпуклое множество $A \subset (-\pi, \pi)^2$, а A^0 – его внутренность. Тогда ряд Фурье функции $X_A(x, y)$ сходится по кругам к 1 на A^0 и к 0 на $T^2 \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение вытекает из леммы 4 и предложения 3.

Пусть теперь замкнутое невырожденное множество $A \subset (-\pi, \pi)^2$, а точка $(x, y) \in \partial A$, где ∂A — граница множества A . Пусть, также, l_1 и l_2 — односторонние касательные к ∂A в точке (x, y) (их существование вытекает из выпуклости A).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\delta > 0$ — это число, меньшее расстояния от (x, y) до границы T^2 и A_δ — это выпуклое множество, являющееся пересечением круга G_δ с центром в точке (x, y) радиуса δ и того угла, образованного l_1 и l_2 , в котором находится множество A . Тогда $S_R(X_{A_\delta}, x, y) - S_R(X_A, x, y) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $S'_R(X_{A_\delta}, x, y) - S'_R(X_A, x, y) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Не ограничивая общности, будем считать, что $(x, y) = (0, 0)$.

В силу предложения 3, так как множество $A \setminus G_\delta$ представляется в виде разности двух выпуклых множеств, каждое из которых находится на расстоянии не меньше $\delta/2$ от точки $(0, 0)$, мы получаем, что

$$S'_R(X_{A \cap G_\delta}, 0, 0) - S'_R(X_A, 0, 0) = S'_R(X_{A \setminus G_\delta}, 0, 0) \rightarrow 0 \quad (62)$$

при $R \rightarrow \infty$.

Отметим, что при любом $\gamma \leq \delta$ имеем $A \cap G_\gamma \subseteq A_\gamma$ и, так как l_1 и l_2 являются односторонними касательными, $\text{mes}(A_\gamma \setminus (A \cap G_\gamma)) = o(\gamma^2)$ при $\gamma \rightarrow +0$, т.е. существует функция $\varphi(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow +0$ такая, что $\text{mes}(A_\gamma \setminus (A \cap G_\gamma)) = \gamma^2 \varphi(\gamma)$.

Пусть нам задано некоторое $\varepsilon \in (0, 1)$. Фиксируем R_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{R_0 \varepsilon^2} < \delta \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon^4} \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} t\right) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in \left(0, \frac{1}{R_0}\right].$$

Пусть $R \geq R_0$. Положим $\gamma_R = \gamma = 1/(R\varepsilon^2) < \delta$. Тогда, так как множество $A \cap (G_\delta \setminus G_\gamma)$ представляется в виде разности двух выпуклых множеств, находящихся на расстоянии не меньше $\gamma/2$ от точки $(0, 0)$, то согласно предложению 3 имеем

$$\sigma_1 = |S'_R(X_{A \cap (G_\delta \setminus G_\gamma)}, 0, 0)| \leq \frac{C}{\sqrt{R \frac{1}{R\varepsilon^2}}} = C\varepsilon. \quad (63)$$

Совершенно аналогично,

$$\sigma_2 = |S'_R(X_{A_\delta \setminus A_\gamma}, 0, 0)| \leq C\varepsilon. \quad (64)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= |S'_R(X_{A \cap G_\gamma}, 0, 0) - S'_R(X_{A_\gamma}, 0, 0)| \\ &\leq \max_{(s, t) \in T^2} |D'_R(s, t)| \text{mes}(A_\gamma \setminus (A \cap G_\gamma)) \leq CR^2 \gamma^2 \varphi(\gamma) \\ &= CR^2 \frac{1}{R^2 \varepsilon^4} \varphi\left(\frac{1}{R\varepsilon^2}\right) < C\varepsilon. \end{aligned} \quad (65)$$

Поскольку

$$|S'_R(X_{A \cap G_\delta}, 0, 0) - S'_R(X_{A_\delta}, 0, 0)| \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

из оценок (62)–(65) вытекает предложение 4.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3. Первая ее часть составляет утверждение уже доказанного следствия 3. Предположим, теперь, что $(x, y) \in \partial A$ и односторонние касательные l_1 и l_2 к ∂A в точке (x, y) образуют угол $\alpha \leq \pi$. Не ограничивая общности, будем считать, что $(x, y) = (0, 0)$.

Если A_1 — это множество, ограниченное l_1 , l_2 и единичной окружностью, то согласно лемме 4 и предложениям 3 и 4

$$S_R(X_A, 0, 0) - S'_R(X_{A_1}, 0, 0) \rightarrow 0 \quad (66)$$

при $R \rightarrow \infty$. Положим

$$S''_R(X_{A_1}, 0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{A_1} D''_R(x, y) dx dy.$$

Докажем, что

$$S'_R(X_{A_1}, 0, 0) - S''_R(X_{A_1}, 0, 0) \rightarrow 0 \quad (67)$$

при $R \rightarrow \infty$.

При $R > 1$ имеем

$$\begin{aligned} & 4\pi^2 |S'_R(X_{A_1}, 0, 0) - S''_R(X_{A_1}, 0, 0)| \\ &= \left| \iint_{A_1} (w(x)w(y) - 1) D''_R(x, y) dx dy \right| \\ &\leq \iint_{A_1 \cap [-R^{-3/4}, R^{-3/4}]^2} |w(x)w(y) - 1| |D''_R(x, y)| dx dy \\ &+ \left| \iint_{A_1 \setminus [-R^{-3/4}, R^{-3/4}]^2} D'_R(x, y) dx dy \right| + \left| \iint_{A_1 \setminus [-R^{-3/4}, R^{-3/4}]^2} D''_R(x, y) dx dy \right| \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (68)$$

Поскольку множество $A_1 \setminus [-R^{-3/4}, R^{-3/4}]^2$ можно разбить не более, чем на два выпуклых множества, находящихся на расстоянии не меньшем, чем $\frac{1}{2}R^{-3/4}$ от точки $(0, 0)$, согласно предложению 3 имеем

$$J_2 \leq \frac{C}{\sqrt{RR^{-3/4}}} = CR^{-1/8}. \quad (69)$$

Из доказательства предложения 3 видно, что и

$$J_3 \leq CR^{-1/8}. \quad (70)$$

Наконец, так как $|w(x)w(y) - 1| \leq CR^{-3/2}$ при $(x, y) \in [0, R^{-3/4}]^2$, мы получаем, что

$$J_1 \leq CR^{-3/2} \max_{(x, y) \in T^2} |D''_R(x, y)| R^{-3/2} \leq \frac{C}{R}. \quad (71)$$

Из оценок (68)–(71) вытекает формула (67).

Как было отмечено при доказательстве леммы 1, функция $\frac{1}{(2\pi)^2} D_R''(x, y)$ зависит только от $r = |(x, y)|$. Обозначим ее через $\psi_R(r)$. Тогда, переходя к полярным координатам, получим

$$S_R''(X_{A_1}, 0, 0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \alpha} \int_0^1 r \psi_R(r) dr d\varphi = \alpha \int_0^1 r \psi_R(r) dr. \quad (72)$$

Предположим, теперь, что $\alpha = 2\pi/n$, где n – натуральное. Пусть A_s при $s = 2, 3, \dots, n$ – это множество A_1 , повернутое на угол $(s-1)\alpha$. Тогда согласно формуле (72) при $2 \leq s \leq n$ имеем

$$S_R''(X_{A_s}, 0, 0) = \alpha \int_0^1 r \psi_R(r) dr = S_R''(X_{A_1}, 0, 0).$$

Отсюда, учитывая, что $n\alpha = 2\pi$ и что множества A_k и A_j при $k \neq j$ не имеют общих внутренних точек, получаем, что

$$n S_R''(X_{A_1}, 0, 0) = \sum_{s=1}^n S_R''(X_{A_s}, 0, 0) = S_R''(X_B, 0, 0), \quad (73)$$

где B – единичный круг. Используя (67) и предложение 3, устанавливаем, что

$$S_R''(X_B, 0, 0) \rightarrow 1 = S_R(1, 0, 0)$$

при $R \rightarrow \infty$. Поэтому (см. (73))

$$S_R''(X_{A_1}, 0, 0) \rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

при $R \rightarrow \infty$. Таким образом (см. (66) и (67)), утверждение теоремы 3 доказано для $\alpha = 2\pi/n$. Очевидным образом, оно остается справедливым и для $\alpha = 2\pi m/n$, где числа m и n – натуральные.

Для завершения доказательства отметим, что фиксируя $\alpha = \pi/2$ и используя формулы (67), (72), следствие 2 и лемму 4, убеждаемся в существовании абсолютной постоянной C такой, что для всех $R > 1$ имеем

$$\left| \int_0^1 r \psi_R(r) dr \right| \leq C.$$

Поэтому, если $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (0, \varepsilon)$, то (см. (72))

$$|S_R''(X_{A_1}, 0, 0)| \leq C\varepsilon.$$

Отсюда и из доказанного выше вытекает утверждение теоремы 3 для произвольного α .

В заключение приведем пример, показывающий, что в трехмерном случае дело обстоит иначе, чем в двумерном. Пусть B – это единичный шар в трехмерном

пространстве, $(m, n, k) \in \mathbb{Z}^3$ и $r = |(m, n, k)| \neq 0$. Тогда, используя радиальность преобразования Фурье, получим, что

$$\begin{aligned} 8\pi^3 a_{m,n,k}(X_B) &= \iiint_B e^{-i(mx+ny+kz)} dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 e^{-irx} \iint_{B_x} dy dz dx = \pi \int_{-1}^1 e^{-irx} (1-x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-x^2) \cos rx dx = \frac{4\pi}{r} \int_0^1 x \sin rx dx \\ &= -\frac{4\pi}{r^2} \cos r + \frac{4\pi}{r^2} \int_0^1 \cos rx dx = -\frac{4\pi}{r^2} \cos r + \frac{4\pi}{r^3} \sin r. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что внутри шаровых слоев $2\pi n - \pi/4 \leq r \leq 2\pi n + \pi/4$, где $n = 1, 2, \dots$, коэффициенты $a_{m,n,k}(X_B) \leq -C/n^2$, в то время, как число точек в таком слое $\geq Cn^2$. Поэтому ряд Фурье для $X_B(x, y, z)$ сферически расходится в точке $(0, 0, 0)$.

Список литературы

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of bounded generalized variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. №1. P. 107–117.
2. *Chandrasekharan K., Minaksisundaram S.* Some results on double Fourier series // *Duke Math. J.* 1947. V. 14. №3. P. 731–753.
3. *Голубов Б. И.* О сходимости сферических средних Рисса кратных рядов и интегралов Фурье от функций ограниченной обобщенной вариации // *Матем. сб.* 1972. Т. 89. №4. С. 630–653.
4. *Дьяченко М. И.* Некоторые проблемы теории кратных рядов Фурье // *УМН.* 1992. Т. 47. №5. С. 97–162.
5. *Dyachenko M. I.* Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // *Anal. Math.* 1995. V. 21. №1. P. 3–21.
6. *Юдин В. А.* Поведение констант Лебега // *Матем. заметки.* 1975. Т. 17. №3. С. 401–405.
7. *Алимов Ш. А., Ильин В. А.* Условия сходимости спектральных разложений, соответствующих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. 1 // *Дифференц. уравнения.* 1971. Т. 7. №4. С. 670–710.
8. *Дьяченко М. И.* Выпуклые множества и кратные ряды Фурье // *Труды МИАН.* 1991. Т. 200. С. 147–156.
9. *Стейн Е. М., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
10. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
11. *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.* 1986. Т. 21. №6. С. 517–527.
12. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углом” // *Труды МИАН.* 1972. Т. 117. С. 256–291.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
14.03.1996