Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, Об образе в $H^2(Q^3; \mathbb{R})$ множества предсимплектических форм с данным ядром, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 73–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:50:51

УДК 514.756.4

Б. С. Кругликов

Об образе в $H^2(Q^3; \mathbb{R})$ множества предсимплектических форм с данным ядром

В работе определяется новый инвариант Ω 1-распределения $\mathcal{J}$ замкнутого трехмерного многообразия Q^3 как область во вторых когомологиях $H^2(Q^3; \mathbb{R})$, порожденная всеми ограничениями симплектических форм ω с $Q^3 \times \mathbb{R}$ на $Q^3 = Q^3 \times \{0\}$ таких, что ядро ограничения $\omega|_{Q^3}$ совпадает с заданным 1-распределением $\mathcal{J}$, т.е. распределение $\mathcal{J}$ является характеристическим. В работе приводится вычисление этого инварианта в случаях, когда распределение $\mathcal{J}$ неинтегрируемо, боттовски нерезонансно интегрируемо и резонансно интегрируемо.

Библиография: 16 названий.

Рассмотрим симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) и связное ориентируемое замкнутое подмногообразие $Q^{2n-1} \subset M^{2n}$. В каждом касательном пространстве $T_x Q \subset T_x M$ форма ω имеет одномерное ядро $l_x \subset T_x Q$. Объединение всех этих ядер называется *характеристическим распределением* $\mathcal{J}(Q) = \text{Ker}(\omega|_Q)$. Изучение периодических траекторий и других инвариантов характеристического распределения гиперповерхностей дает важную информацию о симплектическом многообразии (см., например, [1], [2]). В этой статье изучается зависимость ω в окрестности Q^{2n-1} и $[\omega|_Q] \in H^2(Q; \mathbb{R})$ от $\mathcal{J}$ для $n = 2$.

Рассмотрим сперва вопрос об ω . В силу теоремы Дарбу–Венштейна–Гивенталля (см. [2]–[4]), $\omega|_Q$ задает ω в окрестности Q с точностью до диффеоморфизма, тождественного на Q^{2n-1} . Поэтому вопрос редуцируется к определмости $\omega|_Q$ (далее будем писать просто ω) по $\mathcal{J} = \text{Ker}(\omega|_Q)$. 1-распределение $\mathcal{J}$ порождено гамильтоновым векторным полем $\text{sgrad}_\omega H$, где гамильтониан H таков, что Q^{2n-1} является регулярной поверхностью уровня: $Q^{2n-1} = \{H = 0\}$, $dH(x) \neq 0$, $x \in Q$.

Далее рассматриваем случай $n = 2$. Так как трансверсаль к $\mathcal{J}$ двумерна, ограничение на нее ω будет симплектической формой – формой объема и поэтому любая другая 2-форма $\tilde{\omega}$ на Q с ядром $\mathcal{J}$ имеет вид $\tilde{\omega} = a\omega$. Условие максимальной невырожденности $\tilde{\omega}$ имеет вид $a \neq 0$, а условие замкнутости – следующее: $0 = d\tilde{\omega} = da \wedge \omega$, т.е. a является интегралом распределения $\mathcal{J}$. Назовем такую функцию a *допустимой*. Будем считать $\mathcal{J}$ аналитическим распределением. Возможны две ситуации: оно интегрируемо и неинтегрируемо (в лиувиллевом смысле). Во втором случае (например, иррациональная обмотка тора T^3) мы получаем $a = \text{const}$, т.е. ω восстанавливается по $\mathcal{J}$ с точностью до умножения на постоянную функцию. Рассмотрим первый случай. Интегрируемость $\mathcal{J}$ обозначает существование такой функции F (интеграла), что $\{H, F\}(x) = d\{H, F\}(x) = 0$ для $x \in Q^3$, где скобка Пуассона определяется формой ω . Мы будем разбирать здесь лишь случай хорошей интегрируемости, т.е. такой, для которого интеграл F можно выбрать боттовским, оставляя патологии в стороне (любое симплектическое

многообразие допускает полный гладкий инволютивный набор функций (см. замечание А. В. Браилова в гл. 5, [5]). Пусть также система $\text{sgrad}_\omega H$ – нерезонансная. Таким образом, мы находимся в ситуации, изученной в [5], [6], и можем сопоставить (Q, F, ω) тонкий топологический инвариант $W^*(Q)$ – слово-молекулу.

Пользуясь неособостью Q^3 мы можем выбрать ненулевое сечение $\text{sgrad}_\omega H$ 1-расслоения $\mathcal{J}$ над Q . Условие “ a есть интеграл $\mathcal{J}$ ” эквивалентно записывается в виде $a = a(F)$ локально около каждого тора Лиувилля, или, более общим образом, a есть функция, получаемая из функции $a: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ при помощи проекции на фактор по лиувиллеву слоению $Q \xrightarrow{\pi} Q/\mathcal{L} = \Gamma$. Итак, ω определяется по $\mathcal{J}$ в интегрируемом случае с точностью до умножения на π^*a , где $a: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – произвольная функция, поднятие которой гладкое.

Последний случай, резонансный, допускает еще больше свободы. А именно, легко видеть, что в этом случае ω восстанавливается по $\mathcal{J}$ с точностью до умножения на π^*a , где $\pi: Q \xrightarrow{S^1} L^2$ – проекция слоения Q^3 траекториями на базу. Как и выше, a – произвольная функция на L^2 , поднятие которой гладкое. В [7] показано, что любое слоение Зейферта может быть представлено как слоение Q^3 траекториями гамильтонова векторного поля; выбирая дополнительный интеграл, мы сопоставляем Q^3 инвариант Фоменко $W(Q) \simeq \Gamma$, т.е. $W^*(Q)$ без меток, которые восстанавливаются из условия резонансности. Любой такой инвариант, в том числе и включающий звездочки и бутылки Клейна, реализуется на резонансных системах (см. замечание 3 в конце цитированной работы).

Зададимся теперь вопросом об образе отображения $\omega \mapsto [\omega|_Q] \in H^2(Q; \mathbb{R})$, $\omega \in \{\text{Ker } \omega|_Q = \mathcal{J}\}$, который мы обозначим через $\Omega(\mathcal{J})$. Ограничимся теми же основными случаями, что и выше.

Неинтегрируемость.

В этом случае, очевидно,

$$\Omega(\mathcal{J}) = \begin{cases} \langle [\omega] \rangle \setminus \{0\}, & [\omega] \neq 0, \\ 0, & [\omega] = 0, \end{cases}$$

где через $\langle v \rangle$ обозначено линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^k$, натянутое на вектор $v \in \mathbb{R}^k$.

Боттовская нерезонансная интегрируемость.

Из формулы универсальных коэффициентов и двойственности Пуанкаре:

$$H^2(Q; \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_2(Q; \mathbb{R}); \mathbb{R}), \quad H^2(Q; \mathbb{R}) \simeq H_2(Q; \mathbb{R}) \simeq H_1(Q; \mathbb{R}).$$

Поэтому сперва опишем $H_1(Q; \mathbb{R})$, $Q = \{H = 0\}$. Рассмотрим букву на слово-молекуле, отличную от A и бутылки Клейна. Если она не содержит звездочек, то соответствующий ей особый слой лиувиллева слоения является произведением $K \times S^1$, где K – граф с вершинами кратности 4. Зафиксируем структуру произведения и выберем базис $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k_i}}$ в $H_1(K; \mathbb{R})$, где i нумерует вершины, отличные от A и бутылки Клейна, $i = 1, \dots, l$. Добавив элемент γ_i , соответствующий критической окружности S^1 , получаем базис в $H_1(K \times S^1; \mathbb{R})$. Если же звездочки есть, то соответствующим особым слоем является $(K/\sigma) \tilde{\times}_\sigma S^1 = K \times I / ((x, 0) \sim (\sigma(x), 1))$, где σ есть инволюция на K , неподвижные точки которой суть вершины (кратности 4), называемые звездочками, и в их окрестности она есть отражение в “морсовских” координатах (см. [5], [6]). Выберем базис $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k_i}}$ в $H_1(K/\sigma; \mathbb{R})$ и, аналогично сделанному выше, добавим к нему

слой γ_i . В “звездном” случае цикл γ , представляемый стандартным слоем слоения Зейферта окрестности буквы-атома, гомологичен удвоенному циклу $\hat{\gamma}$, представляемому критической окружностью буквы, $\gamma \sim 2\hat{\gamma}$, что не существенно, можно брать любую, так как коэффициентами является поле $\mathbb{R}$. Выбранные α_* и γ_* образуют базис в $H_1(K \widetilde{\times}_\sigma S^1; \mathbb{R})$. Если обозначить через $N = \sum_{i=1}^l (k_i + 1)$ общее количество перечисленных образующих, то m_1 ребер, соединяющих буквы, отличные от A , дадут $2m_1$ соотношений на них, а m_2 ребер, входящих или выходящих из A или бутылок Клейна, добавят еще $x \in [1, m_2]$ соотношений (каждое дает ровно одно, но среди них могут быть зависимые), так что

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} H_1(Q; \mathbb{R}) &= N - 2m_1 - x = N - 2(l - 1 + \operatorname{rk} H_1(\Gamma)) - x \\ &= \sum_{i=1}^l (k_i - 1) + 2 - x - 2 \operatorname{rk} H_1(\Gamma). \end{aligned}$$

Выберем из $\{\alpha_{ij}, \gamma_i\}$ базис $f_1, \dots, f_r$ и возьмем двойственный по Пуанкаре (относительно индекса пересечения) к нему базис в $H_2(Q; \mathbb{R})$: $e_1, \dots, e_r$. Домножая f_i на целые числа, мы можем считать, что классы e_j представляются поверхностями. Напомним, что мы рассматриваем элементы из $H^2(Q; \mathbb{R})$ как элементы из $\operatorname{Hom}(H_2(Q; \mathbb{R}); \mathbb{R})$ и, таким образом, получаем базис $\hat{e}^1, \dots, \hat{e}^r$ в $H^2(Q; \mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим векторы $v_1, \dots, v_m$ в $\mathbb{R}^k$, образующие набор максимального ранга k . Определим $S_m(v, \varkappa)$, $\varkappa \in \{0, 1\}^m$, как множество

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \text{ если } \varkappa_i = 1 \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ если } \varkappa_i = 0 \end{array} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Иными словами, мы имеем проекцию $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ на все $\mathbb{R}^k$ и берем образ $\pi(V')$ некоторого $V' = (\mathbb{R}_+)^l \times \mathbb{R}^{m-l}$ в качестве S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $\langle T \rangle$ образ лагранжевых торов при отображении $L \mapsto [L] \in H_2(Q; \mathbb{R})$ и через $\langle T \rangle^*$ — подпространство $\operatorname{Ann}(\langle T \rangle) \subset H^2(Q; \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 1. $\Omega(\mathcal{I}) = (-S \cup S) \cap \langle T \rangle^*$, где $S = S_m(v, \varkappa)$ при некотором выборе векторов $v_1, \dots, v_m$ в $\mathbb{R}^k = H^2(Q; \mathbb{R})$ и чисел $\varkappa_i$. Здесь $m = m_1 + m_2$ — число ребер графа Γ .

ТЕОРЕМА 2. Если система такова, что на любом ребре молекулы $|\operatorname{ind}| \geq 2$, то $\Omega(\mathcal{I}) = \langle T \rangle^*$.

Определение индекса ind интегрируемой гамильтоновой системы на ребре $T^2 \times I$ молекулы см. в [8]. По другому, эквивалентному, определению, данному в [9], индексом системы называется индекс Маслова (или алгебраическое число поворотов) пути, проходимого концом вектора $\operatorname{sgrad}_\omega H$ в базисе $\partial/\partial\varphi_1, \partial/\partial\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — глобальные угловые координаты на торах T^2 ребра $T^2 \times I$. Здесь уместно отметить, что согласно [9] молекула с индексом, не превосходящим -2 на ребре A -(седловая буква), или с индексом, не превосходящим -6 на ребре (седло)-(седло), не бордантна вниз нулю. Поэтому часть систем из теоремы 2 нельзя заклеить слева (терминология из [10]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства будет видно, как вычислять $\Omega(\mathcal{J})$ для любой заданной системы. Более того, в доказательстве ниже содержится метод построения $\Omega(\mathcal{J})$ (или же S) по траекторному инварианту $W^{*t}(Q, v)$ интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, найденному в работах [8], [11], [12].

Прежде чем доказывать теоремы, посмотрим какие ориентации индуцирует ω на некоторых поверхностях около букв-атомов. Любая ориентируемая гиперболическая особенность лиувиллева слоения (буква-атом без звездочек) устроена локально как произведение S^1 на крестик, изображенный на рис. 1. Обозначим проекцию вдоль этой S^1 в окрестности критической буквы γ через τ .

Рис. 1

Скажем, что ненулевая 2-форма на ориентированной поверхности индуцирует положительную ориентацию, если она индуцирует данную ориентацию, и отрицательную в противном случае.

ЛЕММА. Симплектическая форма ω индуцирует ориентацию различных знаков на $\tau^{-1}(\Sigma_2)$ в окрестности γ по разные стороны от нее, и одинаковую для $\tau^{-1}(\Sigma_1)$; Σ_i изображены на рис. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. [8], [9]), что угловой функцией $\text{ang}(t)$ называется угол вектора $\text{sgrad}_\omega H$ в базисе $\partial/\partial\varphi_1, \partial/\partial\varphi_2$, где φ_1, φ_2 — глобальные угловые координаты на торах ребра, t задает их параметризацию, функцией вращения называется $\rho(t) = \text{tg ang}(t)$. Параметризацию ребра задает дополнительный интеграл F , причем согласно [13] его можно выбрать таким образом, что траектории гамильтонова векторного поля $\text{sgrad}_\omega F$ на (двумерной и симплектической) трансверсали к особому слою вблизи него с гамильтонианом и симплектической формой, являющимися ограничениями функции F и формы ω на трансверсаль, имеют периоды $\Pi_{\omega,i}(F) = \rho_i(F)$ в подходящих координатах на торах ребра, где i нумерует концы трансверсали, т.е. подходящие к букве ребра. Поскольку вблизи особого

слоя $\Pi_\omega(F) \sim \Lambda \ln |F|$, $\Pi_\omega(0) = \infty$ (см. [8]), $\rho(F)$ монотонна по F . Знак монотонности зависит от ориентации, задаваемой $(\partial/\partial\varphi_1, \partial/\partial\varphi_2)$ (или от коориентации $\partial/\partial t$). Она задается выбором направления на Σ_i на рис. 1, так как критический слой γ ориентирован. Легко видеть, что знак монотонности ρ при указанном выборе ориентации меняется при проходе через γ на Σ_2 и не меняется на Σ_1 . Это значит, что $\text{sgrad}_\omega H$ направлен в разные стороны на $\tau^{-1}(\Sigma_2)$ в различных компонентах $\tau^{-1}(\Sigma_2) \setminus \gamma$ локально около γ , а потому симплектическая форма ω индуцирует на них различную ориентацию. С Σ_2 ситуация противоположная.

Утверждение леммы можно обосновать еще следующим нестрогим, но наглядным рассуждением. Две (ориентированных) компоненты $\tau^{-1}(\Sigma_2) \setminus \gamma$ в окрестности γ выглядят одинаково, если ориентация на них не индуцируется одновременно никакой единой ориентацией на $\tau^{-1}(\Sigma_2)$. Если же индуцировать ориентации, т.е. сменить ориентацию на одной из компонент, то вектор $\text{sgrad}_\omega H$ задает различные коориентации на компонентах, т.е. он совершает перегиб при проходе через γ . Что касается Σ_1 , возмутим ее до Σ'_1 , как на рис. 1. Если трансверсальное сечение — общего положения, то векторное поле $\text{sgrad}_\omega H$ будет трансверсально $\tau^{-1}(\Sigma'_1)$ в точках пересечения с особым слоем лиувиллева слоения, проходящим через γ . Поэтому это же будет верно и в окрестности, т.е. ориентация сохраняется.

В случае, когда γ является окружностью с неориентируемой сепаратрисной диаграммой, т.е. на букве-атоме есть звездочки, ее окрестность в Q^3 устроена как косое произведение (см. [5]): произведение на S^1 с подкручиванием на угол π . Поэтому рис. 1 должен быть профакторизован по инволюции σ отражения относительно центра креста. При этом Σ_2 перейдет в $\sigma(\Sigma_2)$ гомологичную $\hat{\Sigma}_2$, не пересекающую особый слой — крестик — в рассматриваемой окрестности, а на $\sigma(\Sigma_1)$ симплектическая форма ω будет индуцировать, как и ранее, ориентацию одинаковых знаков по разные стороны от γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ. Разберем сперва случай дерева, т.е. когда $H_1(\Gamma) = 0$. Рассмотрим лагранжев тор T^2 . Он является лиувиллевым, т.е. связной неособой поверхностью уровня функции F . Действительно, из лагранжевости следует, что в каждой точке $x \in T^2$ выполнено включение $\mathcal{S}_x = \text{Ker } \omega_x \subset T_x T^2$. Поэтому на торе возникает обмотка. Если эта обмотка всюду плотна, то тор является лиувиллевым. Пусть траектории обмотки замкнуты. Возьмем любую из них и возьмем тор Лиувилля, ее содержащий. Так как система нерезонансна, то сколь угодно близко от этого тора существуют нерезонансные торы, т.е. торы со всюду плотной обмоткой. Поэтому T^2 лежит сколь угодно близко к выбранному лиувиллеву тору, а потому с ним совпадает. Так как в случае дерева любой лиувиллев тор гомологичен нулю, то $\langle T \rangle^* = H^2$.

Будем проводить доказательство на примере молекулы с грубым топологическим инвариантом, изображенным на рис. 2. В $H_1(Q; \mathbb{R})$ мы имеем шесть образующих $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \gamma_1, \gamma_2$, представители которых изображены на рис. 3. Имеем: $\text{rk } H_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Разберем, например, случай $\text{rk } H_1 = 3$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда любые два соотношения зависимы, т.е. все соотношения сводятся к $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 0$. Можно выбрать α_{ij} так, чтобы выполнялось гомологическое равенство $\alpha_{11} + \alpha_{12} \sim \alpha_{22} - \alpha_{21}$. Тогда H_2 порождено тремя образующими e_1, e_2, e_3 , двойственными образующим $f_1 = \alpha_{11}, f_2 = \alpha_{11} + \alpha_{12}, f_3 = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} = \alpha_{22}$ в $H_1(Q; \mathbb{R})$ и изображенными на рис. 4. Поясним, что понимается под e_1 (мы будем обозначать через e_* и образующую, и представи-

Рис. 2

Рис. 3

тель). $\gamma_1 \sim 0$ как вдоль ребра (11), так и вдоль ребра (12), т.е. существуют диски $D_{11} \subset (11)$ и $D_{12} \subset (12)$ с $\partial D_{11} = \partial D_{12} = \gamma_1$. Тогда $e_1 = D_{11} \cup_{\gamma_1} D_{12}$. Аналогичный смысл придается e_2 и e_3 . В силу леммы форма ω индуцирует различные ориентации на D_{11} и D_{12} вблизи от γ_1 . Зададим ориентацию на e_i с помощью стрелок (см. рис. 4): если стрелка исходит из вершины A , то в ее окрестности выбираем ориентацию на e_i , совпадающую с ориентацией, индуцируемой ω (около буквы A поверхности e_i трансверсальны ядру $\mathcal{J}$). Мы можем менять “размеры” D_{11} и D_{12} , умножая на допустимую функцию $\hat{a} = \pi^* a$, $a \neq 0$. Ее можно подобрать так, что

$$(\hat{a}\omega)(e_1) = \int_{e_1} \hat{a}\omega = c,$$

где $c \in \mathbb{R}$ — любое наперед заданное число. Аналогичные рассуждения справедливы и для поверхности e_2 в окрестности γ_2 . Но на e_3 в окрестности γ_2 форма ω

Рис. 4

индуцирует ориентацию одинаковых знаков, так что можно гарантировать лишь, что

$$(\hat{a}\omega)(e_3) = c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где c – любое. Обозначим через $(a\omega)_i^j$ часть $(a\omega)(e_i)$, отвечающую интегрированию по j -му ребру. Имеем:

$$\begin{aligned} (a\omega)_1 &= x - y, \\ (a\omega)_2 &= x + z - t, \\ (a\omega)_3 &= s + t, \end{aligned} \quad (*)$$

где $x = (a\omega)_1^{12} = (a\omega)_2^{12}$, $y = (a\omega)_1^{11}$, $z = (a\omega)_2^0$, $t = (a\omega)_2^{21} = (a\omega)_3^{21}$, $s = (a\omega)_3^{22}$. Легко видеть, что образующие выше выбираются так, что нижние индексы в $(a\omega)_i^j$ можно опустить. Меняя a , мы можем придать x, y, z, t, s любые положительные значения. Если при некотором выборе a возникает неположительное значение одного из них, мы путем перепараметризации поверхности (умножении на $\hat{a}$) можем сделать его любым. Поэтому в рассматриваемом случае теорема 1 доказана. Действительно, областью значений $x, y, \dots$ в силу вышесказанного является $V' \simeq (\mathbb{R}_+^j \cup \mathbb{R}_-^j) \times \mathbb{R}^{5-j}$ (отрицательная часть появляется при умножении всех $x, \dots$ на -1 , т.е. замене ориентации на выбранных образующих в гомологиях). Уравнения $(*)$ задают проекцию $\pi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\Omega(\mathcal{J}) = \pi(V')$. В условиях теоремы 2 в силу большого количества оборотов угловой функции, отвечающей векторному полю $\text{sgrad}_\omega H$, на любом ребре молекулы симплектическая форма ω индуцирует на части поверхности-представителя для (произвольной) образующей e_i , лежащей на некотором (произвольном) ребре молекулы, как положительную, так и отрицательную ориентацию. Поэтому в силу независимости всегда можно подобрать такую допустимую функцию $\hat{a} = \pi^*a$, что набор $(\hat{a}\omega)(e_i)$ – любой наперед заданный. Другими словами, можно подобрать $\hat{a}$ такую, что набор $\{(\hat{a}\omega)^j\}$ будет любым из $\mathbb{R}^m$, т.е. $\Omega(\mathcal{J}) = \pi(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^k = H^2$. Итак, теоремы в этом случае доказаны.

В случае $\text{rk } H_1 = 2$ соотношения уже не определены однозначно. Рассмотрим, например, следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\sim \alpha_{22} - \alpha_{21}, \quad \alpha_{11} + \alpha_{12} \sim \gamma_2, \quad \gamma_1 \sim 0 \quad \text{в (11) и (12),} \\ \alpha_{22} &\sim 0 \quad \text{в (22),} \quad \alpha_{21} \sim 0 \quad \text{в (21).} \end{aligned}$$

Тогда образующими в $H_1(Q; \mathbb{R})$ можно выбрать α_{12} и γ_2 . Двойственные им образующие будут e_1 и e_2 , изображенные на рис. 5:

$$e_1 \cdot \alpha_{12} = 1, \quad e_1 \cdot \gamma_2 = 0, \quad e_2 \cdot \alpha_{12} = 0, \quad e_2 \cdot \gamma_2 = 1.$$

Поясним, что обозначает e_2 в этом случае. Рассмотрим восьмерку на рис. 3. Она гомологична внешней и паре внутренних окружностей, нарисованных рядом. Внутренние окружности гомологичны в (21) и (22), соответственно, нулю, а одна, вдоль ребра, соединяющего B и B , гомологична γ_1 , которая в свою очередь гомологична нулю вдоль (11). Делая соответствующие заклейки, получаем поверхность e_2 . Рассуждения, подобные проведенным выше, оканчивают доказательство теорем 1 и 2 в этом случае. Аналогично разбираются и случаи других соотношений.

Рис. 5

Пусть теперь мы имеем общий случай, не обязательно дерево. Очевидно, для любой допустимой функции $\hat{a} = \pi^* a$, $(\hat{a}\omega)(T^2) = 0$ для каждого лагранжевого тора, так что $\Omega(\mathcal{J}) \subseteq \langle T \rangle^*$. Чтобы получить обратное включение в случае теоремы 2 и второе включение в случае теоремы 1, выбираем базис в $H_1(Q; \mathbb{R})$ следующим образом: первую его часть составляют прообразы при отображении факторизации $Q \xrightarrow{\pi} \Gamma$ циклов, образующих базис в $H_1(\Gamma)$; вторую часть выбираем, как и выше. Переходя к двойственному базису в $H_2(Q; \mathbb{R})$ замечаем, что его первая часть состоит из лагранжевых торов, а вторая порождается образующими e_i , аналогичными приведенным выше. Повторяя рассуждения, оканчиваем доказательство и в этом случае.

СЛЕДСТВИЕ. Если $0 \in \Omega(\mathcal{J})$, то $\Omega(\mathcal{J}) = \langle T \rangle^*$.

В частности, так будет всегда в системах классической механики и для геодезических потоков, где фазовое пространство является кокасательным расслоением и симплектическая форма точна. Заметим, что во многих случаях $\langle T \rangle = 0$, т.е. $\langle T \rangle^* = H^2(Q; \mathbb{R})$. Тогда класс симплектической формы принимает все возможные значения.

ЗАМЕЧАНИЯ.

- (1) Число m в теореме 1 нельзя уменьшить, как показывает система на рис. 6; при подходящем выборе функций вращения $\Omega(\mathcal{J})$ имеет вид, как на рис. 7.
- (2) Можно показать, что хотя выше мы брали конкретные матрицы склейки ребер, результат $-\Omega(\mathcal{J})$ — зависит только от набора инвариантов $(r_*, \varepsilon_*, n_*)$ — меток молекулы $W^*(Q)$, см. [6].

Рис. 6

Рис. 7

- (3) Как упоминалось в замечании 2, $\Omega(\mathcal{J})$ строится по множеству траекторных инвариантов $W^{*t}(Q; v)$. В частности, можно определить, когда $0 \in \Omega(\mathcal{J})$.

Резонансная интегрируемость.

Имеем: $Q^3 \xrightarrow{S^1} L^2$ – слоение Зейфerta над связным замкнутым ориентируемым многообразием L^2 траекториями поля $\mathcal{J}$. Любому такому слоению сопоставляется инвариант – число Эйлера $b(\mathcal{J})$ (см., например, [14]–[16]). Равенство $b(\mathcal{J})$ нулю равносильно существованию сечения слоения. В этом случае, очевидно, базис в $H_2(Q; \mathbb{R})$ можно выбрать как $[L^2]$ и $\alpha_i \times [S^1]$; здесь L^2 обозначает сечение, S^1 – регулярный слой слоения, α_i – базис в $H_1(L^2; \mathbb{R})$. Так как $(a\omega)(L^2) = c \in \mathbb{R}^*$, с любое, $(a\omega)(\alpha_i \times S^1) = 0$, то при $b(\mathcal{J}) = 0$ мы получаем

$$\Omega(\mathcal{J}) = \begin{cases} \langle [\omega] \rangle \setminus \{0\}, & [\omega] \neq 0, \\ 0, & [\omega] = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $b(\mathcal{J}) \neq 0$ (заметим, что в отсутствие особенностей равенство $b(\mathcal{J})$ нулю равносильно вопросу, является ли $Q^3 = L^2 \tilde{\times} S^1$ прямым произведением или косым). Используя, как ранее, двойственность, получаем, что $H_2(Q; \mathbb{R})$ порождено $\alpha_i \times [S^1]$, где $\{\alpha_i\}$ – базис в $H_1(L^2 \setminus \text{pt}; \mathbb{R})$ (сечение существует, если из Q^3 выбросить тривиально расслоенное полноторие). Поэтому $\Omega(\mathcal{J}) = 0$.

Итак, мы видим, что в резонансном случае $[\omega]$, в отличие от ω , восстанавливается по $\mathcal{J}$ с точностью до постоянного множителя, как и в неинтегрируемом случае. С этой точки зрения неинтегрируемость схожа со своей крайней противоположностью – резонансностью. Еще разительнее различие между случаями

(неинтегрируемость) $\cup$ (резонансность) и (нерезонансная интегрируемость) с точки зрения отображения $\Omega: \text{SympStr}(Q \times I) \rightarrow \text{Sets}(H^2(Q; \mathbb{R}))$ выглядит при рассмотрении условия $0 \in \Omega(\mathcal{J})$. В первом случае его выполнение влечет равенство нулю всей $\Omega(\mathcal{J})$, во втором же $\Omega(\mathcal{J})$ принимает наибольшее возможное значение $-\langle T \rangle^*$.

Выше мы рассматривали распределения $\mathcal{J}$, порождаемые какой-либо симплектической формой ω . Очевидно, что для существования такой формы ω необходимо потребовать ориентируемость одномерного расслоения $\ell: \mathcal{J} \rightarrow Q$, т.е. $w_1(\ell) = 0$, где w_1 — класс Штифеля–Уитни. Если это условие выполнено, то мы можем выбрать ненулевое сечение — векторное поле $\xi: Q \rightarrow \mathcal{J}$. Условие $\{\omega \mid \text{Ker}(\omega) = \mathcal{J}\} \neq \emptyset$ равносильно бездивергентности поля ξ , т.е. существованию формы объема dv на Q такой, что $\mathcal{L}_\xi dv = dv$. Здесь $\mathcal{L}_*$ — производная Ли. Связь ω и dv дается формулой $i_\xi dv = \omega$.

Список литературы

1. *Hofer H., Zehnder E.* Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics: Birkhäuser, 1994.
2. *Weinstein A.* Lectures on symplectic manifolds // North Carolina, Regional Conf. Ser. in Math. V. 29. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.
3. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы 4. Т. 4, 1985. С. 5–139.
4. *Кругликов Б. С.* О продолжении симплектической структуры // Труды семинара по тензорному и векторному анализу 1993. Т. 25. часть 1. С. 71–75.
5. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
6. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 59–77.
7. *Кругликов Б. С.* Существование пары дополнительных боттовских интегралов для резонансной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 109–112.
8. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185. №4, 5. С. 27–80, 27–78.
9. *Nguyen Tien Zung.* Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems // Preprint of ICTP, Trieste, 1993, IC/93/305.
10. *Фоменко А. Т.* Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. №4. С. 23–35.
11. *Болсинов А. В.* Гладкая траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. 1995. Т. 186. №1. С. 3–28.
12. *Кругликов Б. С.* Точная гладкая классификация гамильтоновых систем на двумерных многообразиях // Preprint of ICTP, Trieste, Nov. 1994, IC/94/314.
13. *Топалов П.* Переменная действия и гамильтониан Пуанкаре в окрестности критической окружности // УМН. 1995. Т. 50. №1. С. 213–214.
14. *Orlik P.* Seifert manifolds // Lecture Notes in Math. 1972. V. 291.
15. *Raymond F.* Classification of the actions of the circle on 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 51–78.
16. *Seifert H.* Topologie d'riedimensionaler gefaserte Räume // Acta Math. 1933. V. 60. P. 147–238.