Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, Об одной аппроксимационной схеме для мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 83–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:45:26

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

Об одной аппроксимационной схеме для мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка

В работе приводится кинетическая формулировка мерозначных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. С помощью специальной аппроксимации правой части соответствующего кинетического уравнения строится семейство уравнений, для которых доказывается однозначная разрешимость задачи Коши и сходимости (может быть после выделения подпоследовательности) получающейся последовательности решений к обобщенному решению исходной задачи.

Библиография: 12 названий.

Введение

В полупространстве $(t, x) \in \Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка:

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) &= 0, \\ u &= u(t, x), \quad \varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) \in (C^1(\mathbb{R}))^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Нелокальная теория обобщенных решений (о.р.) задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

была построена С. Н. Кружковым в работах [1]–[2]. Приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ограниченная измеримая функция $u = u(t, x)$ называется о.р. задачи Коши (1), (2), если:

а) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x [(\varphi(u) - \varphi(k)) \operatorname{sign}(u - k)] \leq 0 \quad (3)$$

в смысле распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$);

б) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$, т.е. существует множество нулевой меры Лебега $\mathcal{E} \subset (0, +\infty)$ такое, что для $t \notin \mathcal{E}$ $u(t, \cdot) \in L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$

$$u(t, \cdot) \rightarrow u_0 \quad \text{в } L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 94-2187).

Условие (3) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} \left[|u - k| g_t + \sum_{i=1}^n (\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) \operatorname{sign}(u - k) g_{x_i} \right] dt dx \geq 0.$$

Полагая в (3) $k = \pm \|u\|_\infty$, получим, что в $\mathcal{D}'(\Pi)$ $\pm\{u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u)\} \leq 0$, т.е. $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0$ и о.р. $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) в смысле распределений.

Известно (см. [1], [2]), что всегда существует единственное о.р. задачи (1), (2).

В работе [3] приведена кинетическая формулировка задачи (1), (2). А именно, показано, что функция $u = u(t, x)$ является о.р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда функция $f = f(t, x, v) = \chi_{u(t, x)}(v)$, где при $u, v \in \mathbb{R}$

$$\chi_u(v) = \theta(u - v) - \theta(-v), \quad \theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leq 0, \end{cases} \quad - \text{функция Хевисайда},$$

является о.р. (в смысле распределений) соответствующей задачи для кинетического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\varphi'(v), \nabla_x f) = \frac{\partial}{\partial v} m \quad (4)$$

($(\cdot, \cdot)$ – скалярное умножение на $\mathbb{R}^n$) с некоторой неотрицательной локально конечной мерой $m = m(t, x, v)$ на $\Pi \times \mathbb{R}$, финитной по переменной v , и начальным условием

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad (5)$$

где $f_0(x, v) = \chi_{u_0(x)}(v)$.

Начальное условие (5) понимается аналогично условию b) из определения 1:

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \cdot, \cdot) = f_0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (6)$$

Кроме того, в [3] приведена следующая аппроксимационная схема. Рассмотрим при $\varepsilon > 0$ решение (в $\mathcal{D}'(\Pi \times \mathbb{R})$) $f^\varepsilon = f^\varepsilon(t, x, v)$ задачи Коши для уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^\varepsilon + (\varphi'(v), \nabla_x f^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} (\bar{f}^\varepsilon - f^\varepsilon), \\ \bar{f}^\varepsilon(t, x, v) &= \chi_{\rho^\varepsilon(t, x)}(v), \quad \rho^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon(t, x, v) dv \end{aligned}$$

с начальным условием $f^\varepsilon(0, x, v) = f_0(x, v)$. Тогда, как показано в [3], при $\varepsilon \rightarrow 0$ $f^\varepsilon(t, x, v) \rightarrow f(t, x, v)$ в $L_{\text{loc}}^1(\Pi \times \mathbb{R})$, где $f(t, x, v) = \chi_{u(t, x)}(v)$ – о.р. задачи (4), (5).

В настоящей работе мы распространяем приведенные выше результаты на более общий случай мерозначных решений. При этом для соответствующей аппроксимирующей задачи будет доказана однозначная разрешимость.

Напомним (см. [4], [5]), что мерозначной функцией на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (здесь $m \in \mathbb{N}$ произвольно) называется слабо измеримое отображение $x \mapsto \nu_x$ множества Ω в пространство $\operatorname{Prob}_0(\mathbb{R})$ вероятностных борелевских мер с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$.

Слабая измеримость ν_x означает, что для любой непрерывной функции $p(\lambda)$ функция $x \mapsto \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ измерима на Ω .

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$. Минимальное из таких M будем обозначать $\|\nu_x\|_\infty$.

Наконец, мерозначные функции вида: $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u(x))$, $u(x) \in L^\infty(\Omega)$ ($\delta(\lambda - u)$ — мера Дирака в точке $u \in \mathbb{R}$) называются регулярными и будут нами отождествляться с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, имеется естественное вложение $L^\infty(\Omega) \subset MV(\Omega)$, где $MV(\Omega)$ — множество ограниченных мерозначных функций на Ω .

Рассмотрим мерозначные решения (м.р.) $\nu_{t,x} \in MV(\Pi)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$\nu_{0,x} = \nu_x^0 \in MV(\mathbb{R}^n). \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [5], [6]). Ограниченная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ называется м.р. задачи (1), (7), если:

а) $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\lambda - k| d\nu_{t,x}(\lambda) + \text{div}_x \int (\varphi(\lambda) - \varphi(k)) \text{sign}(\lambda - k) d\nu_{t,x}(\lambda) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \quad (8)$$

б) $\forall p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что определение 2 согласуется с определением 1 в том смысле, что функция $u(t, x)$ является о.р. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда она, как регулярная мерозначная функция $\nu_{t,x}(\lambda) = \delta(\lambda - u(t, x))$, является м.р. задачи (1), (7) с регулярной начальной функцией $\nu_x^0(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$.

Можно интерпретировать мерозначную функцию $\nu_{t,x}$ как случайное поле $u(t, x)$, где при фиксированном $(t, x) \in \Pi$ значение $u(t, x)$ — случайная величина с распределением $\nu_{t,x}$. Тогда требование (8) означает, что $u(t, x)$ удовлетворяет условию (3) “в среднем”, т.е.

$$\mathbb{E}(|u - k|)_t + \text{div}_x \mathbb{E}((\varphi(u) - \varphi(k)) \text{sign}(u - k)) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

здесь $\mathbb{E}$ — знак математического ожидания.

Полагая в (8) $k = \pm M$, где $M = \|\nu_{t,x}\|_\infty$, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) + \text{div}_x \int \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (9)$$

т.е. соответствующее случайное поле $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) “в среднем”.

Известно (см. [7]–[9]), что м.р. задачи Коши (1), (7) всегда существует и заведомо неединственно, если начальная функция ν_x^0 нерегулярна. Один из способов выделения класса существования и единственности предложен в [8] (подробно — в [9]).

§ 1. Кинетическая интерпретация м.р.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое множество, $\nu_x \in MV(\Omega)$, $M = \|\nu_x\|_\infty$; $f(x, v) = F(\nu_x)(v) = \nu_x((v, +\infty))$ – функция распределения меры ν_x . При фиксированном $x \in \Omega$ функция $f(x, v)$ не возрастает и непрерывна справа по переменной $v \in \mathbb{R}$; для п.в. $x \in \Omega$ имеем $f(x, v) = 0$ при $v \geq M$, $f(x, v) = 1$ при $v < -M$. Кроме того, из слабой измеримости отображения $x \mapsto \nu_x$ легко следует (см., например, лемму 3 в [10]), что функция $f(x, v)$ измерима по совокупности переменных. Пусть $F_M(\Omega)$ – класс функций с указанными свойствами. Ясно, что включение $f(x, v) \in F_M(\Omega)$ эквивалентно существованию мерозначной функции $\nu_x \in MV(\Omega)$ такой, что $\|\nu_x\|_\infty \leq M$ и $f(x, v) = \nu_x((v, +\infty))$.

Основным результатом параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Ограниченная мерозначная функция $\nu_{t,x}$ является м.р. задачи (1), (7) тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения $f(t, x, v) = \nu_{t,x}((v, +\infty))$ является о.р. задачи (4), (5) с начальной функцией $f_0(x, v) = \nu_x^0((v, +\infty))$.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

ЛЕММА 1. *Пусть $\nu_{t,x}$ – м.р. задачи (1), (7). Тогда $\forall v \in \mathbb{R}$*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\lambda - v| d\nu_{t,x}(\lambda) + \operatorname{div}_x \int (\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) d\nu_{t,x}(\lambda) = -\mu^v \quad (10)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi)$, где μ^v – неотрицательная локально конечная мера на Π . При этом, если $M = \|\nu_{t,x}\|_\infty$, то $\mu^v = 0$ для $v \notin [-M, M]$; соответствие $v \mapsto \mu^v$ слабо непрерывно, т.е. $\forall g(t, x) \in C_0(\Pi)$ функция $v \mapsto \int g(t, x) d\mu^v(t, x)$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $v \in \mathbb{R}$ обозначим

$$P = P(t, x) = \int |\lambda - v| d\nu_{t,x}(\lambda),$$

$$Q = Q(t, x) = \int (\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) d\nu_{t,x}(\lambda) \in \mathbb{R}^n$$

и рассмотрим функционал

$$L^v(g) = \int_\Pi [Pg_t + (Q, \nabla_x g)] dt dx, \quad g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi).$$

Из условия (8) следует неотрицательность L^v : $L^v(g) \geq 0$ при $g \geq 0$. Поэтому (подробности содержатся, например, в [10, лемма 5]), функционал L^v непрерывен в топологии $C_0(\Pi)$ и однозначно продолжается до ограниченного неотрицательного функционала на $C_0(\Pi)$; по теореме Рисса–Маркова о представлении таких функционалов существует локально-конечная неотрицательная борелевская мера μ^v на Π такая, что $L^v(g) = \int g(t, x) d\mu^v(t, x)$.

Учитывая определение функционала L^v , получаем, что в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$P_t + \operatorname{div}_x Q = -\mu^v.$$

Равенство (10) доказано.

Далее, если $v \notin [-M, M]$, то для п.в. $(t, x) \in \Pi$ имеем $|\lambda - v| = (v - \lambda) \operatorname{sign}(v)$, $(\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) = (\varphi(v) - \varphi(\lambda)) \operatorname{sign}(v)$ на $\operatorname{supp} \nu_{t,x}$ и $\forall g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$L^v(g) = \pm \int_{\Pi} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_t + \left(\int \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \nabla_x g \right) \right] dt dx = 0$$

по равенству (9). Следовательно, $\mu^v = 0$ при $v \notin [-M, M]$.

Для доказательства последнего утверждения леммы заметим, что при фиксированной функции $g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$ величина $L^v(g)$ непрерывно зависит от $v \in \mathbb{R}$. Следовательно, функции $v \mapsto \int g(t, x) d\mu^v(t, x)$ непрерывны при $g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$. Если $C \subset \Pi$ — компакт, $g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g(t, x) \geq 0$, $g(t, x) = 1$ при $(t, x) \in C$, то из непрерывности функции $v \mapsto \int g(t, x) d\mu^v(t, x)$ следует ограниченность значений $\mu^v(C)$ при $v \in \mathbb{R}$ (с учетом того, что $\mu^v = 0$ вне $[-M, M]$). Пусть $g(t, x) \in C_0(\Pi)$. Рассмотрим последовательность $g_r(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $r \in \mathbb{N}$, сходящуюся равномерно к функции $g(t, x)$, такую, что для всех $r \in \mathbb{N}$ $g_r = 0$ вне некоторого компакта $C \subset \Pi$. Тогда с учетом ограниченности $\mu^v(C)$ последовательность непрерывных по $v \in \mathbb{R}$ функций $\int_C g_r(t, x) d\mu^v(t, x)$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно сходится к функции $\int g(t, x) d\mu^v(t, x)$. Поэтому предельная функция $v \mapsto \int g(t, x) d\mu^v(t, x)$ непрерывна и в силу произвольности $g(t, x) \in C_0(\Pi)$ отображение $v \mapsto \mu^v$ слабо непрерывно. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $h(v) \in C_0^1(\mathbb{R})$, $p(\lambda) = \int |\lambda - v| h'(v) dv$,

$$q_i(\lambda) = \int (\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) h'(v) dv, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $p(\lambda), q_i(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$ и $p'(\lambda) = 2h(\lambda)$, $q'_i(\lambda) = \varphi'_i(\lambda) p'(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В смысле распределений на $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p'(\lambda) &= \int |\lambda - v|'_\lambda h'(v) dv = \int \operatorname{sign}(\lambda - v) h'(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} h'(v) dv - \int_{\lambda}^{+\infty} h'(v) dv = 2h(\lambda); \\ q'_i(\lambda) &= \int [(\varphi_i(\lambda) - \varphi_i(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v)]'_\lambda h'(v) dv \\ &= \int \varphi'_i(\lambda) \operatorname{sign}(\lambda - v) h'(v) dv = \varphi'_i(\lambda) \int \operatorname{sign}(\lambda - v) h'(v) dv = \varphi'_i(\lambda) p'(\lambda). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $p'(\lambda) = 2h(\lambda) \in C_0^1(\mathbb{R})$, $q'_i(\lambda) = \varphi'_i(\lambda) p'(\lambda) \in C_0(\mathbb{R})$, следовательно, функции $p(\lambda), q_i(\lambda)$ дифференцируемы в классическом смысле и $p(\lambda), q_i(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$ (более того, $p(\lambda) \in C^2(\mathbb{R})$).

ЛЕММА 3. Пусть $\nu_{t,x} \in MV(\Pi)$, $\nu_x^0 \in MV(\mathbb{R}^n)$; $f(t, x, v) = \nu_{t,x}((v, +\infty))$, $f_0(x, v) = \nu_x^0((v, +\infty))$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\forall p(\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n);$
- 2) $\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} f(t, x, v) = f_0(x, v) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n+1}).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала импликацию 2) $\Rightarrow$ 1).

Пусть $M = \|\nu_{t,x}\|_\infty$, $p(\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h(v) = p'(v)$. Из 2) следует, что

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} \int f(t, x, v) h(v) dv = \int f_0(x, v) h(v) dv \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n). \quad (11)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int f(t, x, v) h(v) dv = \int f(t, x, v) dp(v) = - \int p(v) df(t, x, v) = \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda)$$

и, аналогично, $\int f_0(x, v) h(v) dv = \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda)$. Из этих равенств и (11) следует справедливость условия 1).

Обратно, пусть выполнено 1). Тогда для любой функции $p = p(\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ существует множество нулевой меры $\mathcal{E}(p)$ такое, что при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}(p)$,

$$\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \rightarrow \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n). \quad (12)$$

Выберем счетное всюду плотное множество $S \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ и положим $\mathcal{E} = \bigcup_{p \in S} \mathcal{E}(p)$. Тогда, по счетности S , $\mathcal{E}$ — множество нулевой меры и при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$, предельное соотношение (12) выполнено для всех $p \in S$. Пусть $\rho(x) = e^{-|x|}$ ($|x| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$). Докажем, что при $t \rightarrow 0$, $t \notin \mathcal{E}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(t, x, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv \rightarrow 0, \quad (13)$$

откуда, очевидно, будет следовать 2) (заметим, что при $v \notin [-M, M]$ п.в. в $\mathbb{R}^n$ $f(t, x, v) = f_0(x, v)$).

Доказательство проведем методом от противного. Итак, предположим, что (13) ложно. Тогда существует $\delta > 0$ и последовательность t_r , $r \in \mathbb{N}$, $t_r \notin \mathcal{E}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} t_r = 0$ такая, что

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(t_r, x, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv > \delta. \quad (14)$$

Из (12) следует, что из последовательности t_r можно выделить подпоследовательность (за которой мы сохраним прежнее обозначение t_r) такую, что

$$\int p(\lambda) d\nu_x^{(r)}(\lambda) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda)$$

п.в. в $\mathbb{R}^n$ при $\nu_x^{(r)} = \nu_{t_r, x}$. Применяя стандартную диагональную процедуру, мы можем выбрать указанную подпоследовательность общей для счетного множества

функций $p(\lambda) \in S$. Тогда, так как S плотно в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, а, значит, и в $C_0(\mathbb{R})$, для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\int p(\lambda) d\nu_x^{(r)}(\lambda) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda)$$

при всех $p(\lambda) \in C_0(\mathbb{R})$, т.е. последовательность мер $\nu_x^{(r)}$ сходится слабо к мере ν_x^0 . Из теоремы Хелли (см. [11, с. 209]) следует, что для таких $x \in \mathbb{R}^n$ соответствующая последовательность функций распределения $f(t_r, x, v)$ сходится к $f_0(x, v)$ во всех точках непрерывности функции $v \mapsto f_0(x, v)$. Так как дополнение к множеству таких значений v при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ не более чем счетно, то (очевидно, измеримое) множество $\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(t_r, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f_0(x, v)\}$ имеет полную меру Лебега. Итак, $f(t_r, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f_0(x, v)$ п.в. в $\mathbb{R}^{n+1}$, $0 \leq f \leq 1$, и по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(t_r, x, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv = 0,$$

что противоречит (14). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $h(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Умножим равенство (10) на $h'(v)$ и проинтегрируем по $v \in \mathbb{R}$. Получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) + \operatorname{div}_x \int q(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = - \int_{\mathbb{R}} h'(v) \mu^v(t, x) dv \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda - v| h'(v) dv, \\ q(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) h'(v) dv = (q_1(\lambda), \dots, q_n(\lambda)) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

По лемме 2 $p(\lambda) \in C^1(\mathbb{R})$, $q(\lambda) \in (C^1(\mathbb{R}))^n$ и $p'(\lambda) = 2h(\lambda)$, $q'(\lambda) = 2\varphi'(\lambda)h(\lambda)$. Отсюда и из формулы интегрирования по частям следует, что

$$\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = - \int p(\lambda) d_\lambda f(t, x, \lambda) = c_0 + 2 \int h(\lambda) f(t, x, \lambda) d\lambda, \quad (16)$$

$$\int q(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = - \int q(\lambda) d_\lambda f(t, x, \lambda) = \mathbf{c} + 2 \int h(\lambda) \varphi'(\lambda) f(t, x, \lambda) d\lambda, \quad (17)$$

где внеинтегральные члены

$$c_0 = - \lim_{a \rightarrow +\infty} p(\lambda) f(t, x, \lambda) \Big|_{-a}^a, \quad \mathbf{c} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} q(\lambda) f(t, x, \lambda) \Big|_{-a}^a \in \mathbb{R}^n.$$

Так как при достаточно большом $a > 0$ $f(t, x, a) = 0$, $f(t, x, -a) = 1$ и функции $p(-a)$, $q_i(-a)$, $i = 1, \dots, n$, постоянны (что вытекает из равенств $p'(\lambda) = 2h(\lambda)$, $q'(\lambda) = 2\varphi'(\lambda)h(\lambda)$ и финитности $h(\lambda)$), то константы c_0 , $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ корректно

определены и не зависят от $(t, x) \in \Pi$. Поэтому с учетом (16), (17) равенство (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int h(\lambda) f(t, x, \lambda) d\lambda + \operatorname{div}_x \int h(\lambda) \varphi'(\lambda) f(t, x, \lambda) d\lambda \\ = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h'(v) \mu^v(t, x) dv \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \end{aligned}$$

Применяя это равенство к пробной функции $g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \mathbb{R}} [f(t, x, \lambda) h(\lambda) g_t(t, x) + f(t, x, \lambda) (\varphi'(\lambda), h(\lambda) \nabla_x g)] dt dx d\lambda \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} h'(v) \left(\int_{\Pi} g(t, x) d\mu^v(t, x) \right) dv. \quad (18) \end{aligned}$$

Пусть $M = \|\nu_{t,x}\|_\infty$. Определим меру m на $\Pi \times \mathbb{R}$ равенством

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}} \xi(t, x, v) dm(t, x, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Pi} \xi(t, x, v) d\mu^v(t, x) \right) dv, \quad (19)$$

$\xi(t, x, v) \in C_0(\Pi \times \mathbb{R})$. По лемме 1 отображение $v \mapsto \mu^v$ слабо непрерывно и $\mu^v = 0$ при $v \notin [-M, M]$, откуда легко следует непрерывность и финитность функции $v \mapsto \int_{\Pi} \xi(t, x, v) d\mu^v(t, x)$, так что правая часть (19) корректно определена и задает неотрицательный непрерывный функционал на пространстве функций $\xi \in C_0(\Pi \times \mathbb{R})$. По теореме Рисса–Маркова однозначно определена локально конечная мера $m \geq 0$ на $\Pi \times \mathbb{R}$, для которой выполнено (19). Кроме того, ясно, что $\operatorname{supp} m \subset \Pi \times [-M, M]$.

Пусть $\xi = \xi(t, x, v) = g(t, x)h(v)$. Тогда ввиду (18), (19) при $f = f(t, x, v)$

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}} [f \xi_t + f(\varphi'(v), \nabla_x \xi)] dt dx dv = \int_{\Pi \times \mathbb{R}} \xi_v dm(t, x, v).$$

Линейная оболочка функций $\xi(t, x, v)$ вида $g(t, x)h(v)$ плотна в $C_0^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$ и по непрерывности последнее равенство верно для всех $\xi \in C_0^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\varphi'(v), \nabla_x f) = \frac{\partial}{\partial v} m \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi \times \mathbb{R}).$$

Таким образом, функция $f(t, x, v)$ удовлетворяет кинетическому уравнению (4). Из начального условия (7) в смысле определения 2 и леммы 3 следует, что

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} f(t, x, v) = f_0(x, v) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n+1}),$$

т.е. выполнено начальное условие (6).

Обратно, если $f(t, x, v) \in F_M(\Pi)$ – о.р. задачи Коши (4), (5), то из равенства (4) следует, что $\frac{\partial}{\partial v} m = 0$ при $v \notin [-M, M]$ и ввиду финитности меры m по переменной v имеем $\operatorname{supp} m \subset \Pi \times [-M, M]$. Применяя равенство (4) к пробной функции

$g(t, x)p'(v)$, где $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g(t, x) \geq 0$; $p(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $p''(v) \geq 0$ при $v \in [-M, M]$, получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v)p'(v) dv \right) g_t + \left(\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v)\varphi'(v)p'(v) dv, \nabla_x g \right) \right] dt dx \\ = \int_{\Pi \times \mathbb{R}} g(t, x)p''(v) dm(t, x, v) \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично (16), (17) из формулы интегрирования по частям выводятся равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v)p'(v) dv &= \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \\ \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v)\varphi'(v)p'(v) dv &= \int q(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \end{aligned}$$

где $q(\lambda) = (q_1(\lambda), \dots, q_n(\lambda))$, $q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi'(\sigma)p'(\sigma) d\sigma$. Тогда из (20)

$$\int_{\Pi} \left[\left(\int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_t + \left(\int q(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \nabla_x g \right) \right] dt dx \geq 0. \quad (21)$$

Пусть $p(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} |\lambda - v|h'(v) dv$, где $h(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h'(v) \geq 0$ на $[-M, M]$. По лемме 2 $p''(\lambda) = 2h'(\lambda) \geq 0$ на $[-M, M]$ и, с точностью до постоянного вектора,

$$q(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v)h'(v) dv.$$

Тогда, как следует из (21),

$$\int_{\mathbb{R}} R(v)h'(v) dv \geq 0,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} R(v) &= \int_{\Pi} \left[\left(\int |\lambda - v| d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_t \right. \\ &\quad \left. + \left(\int (\varphi(\lambda) - \varphi(v)) \operatorname{sign}(\lambda - v) d\nu_{t,x}(\lambda), \nabla_x g \right) \right] dt dx. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $v \notin [-M, M]$

$$R(v) = -\operatorname{sign} v \cdot c,$$

где

$$c = \operatorname{const} = \int_{\Pi} \left[\left(\int \lambda d\nu_{t,x}(\lambda) \right) g_t + \left(\int \varphi(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda), \nabla_x g \right) \right] dt dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}} R(v)h'(v) dv = \int_{-M}^M R(v)h'(v) dv + c \left(\int_{-\infty}^{-M} h'(v) dv - \int_M^{+\infty} h'(v) dv \right) \\ &= \int_{-M}^M R(v)h'(v) dv + c(h(-M) + h(M)). \end{aligned}$$

Рассматривая семейство постоянных на $[-M, M]$ функций h , выводим отсюда, что $c = 0$ и, следовательно, $\int_{-M}^M R(v)h'(v) dv \geq 0$, откуда, с учетом непрерывности $R(v)$ и произвольности $h(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h'(v) \geq 0$, следует неотрицательность функции $R(v)$ при $v \in [-M, M]$. Напомним, что при $v \notin [-M, M]$ $R(v) = \pm c = 0$. Итак, $\forall v \in \mathbb{R}$ $R(v) \geq 0$, что означает выполнение условия (8) (в силу произвольности $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g(t, x) \geq 0$).

Далее, из начального условия (6) и леммы 3

$$\forall p(\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0} \int p(\lambda) d\nu_{t,x}(\lambda) = \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n).$$

Так как пространство $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $C_0(\mathbb{R})$, то последнее предельное соотношение верно для всех $p(\lambda) \in C_0(\mathbb{R})$, т.е. выполнено начальное условие б) из определения 2. Итак, $\nu_{t,x}$ — м.р. задачи (1), (7). Теорема полностью доказана.

§ 2. Аппроксимирующая задача

Фиксируем некоторое $M > 0$ и положим для измеримой на $(-M, M)$ функции $h(v)$

$$m_h(\lambda) = -M + \text{mes}\{v \in (-M, M) \mid h(v) > \lambda\},$$

mes — мера Лебега; пусть при $v \in (-M, M)$ $h^*(v) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid m_h(\lambda) \leq v\}$ — невозрастающая перестановка функции $h(v)$ (см. [12, с. 332]). Хорошо известно, что $h^*(v)$ — невозрастающая непрерывная справа функция, равноизмеримая с $h(v)$, т.е. $m_h(\lambda) \equiv m_{h^*}(\lambda)$. Из равноизмеримости функций h^* и h следует, что для борелевской функции $p(u)$ функции $p(h(v))$, $p(h^*(v))$ суммируемы или нет на $(-M, M)$ одновременно и, если эти функции суммируемы, то (см. [12, с. 333])

$$\int_{-M}^M p(h^*(v)) dv = \int_{-M}^M p(h(v)) dv. \quad (22)$$

Нам потребуются некоторые свойства перестановок, собранные в следующей лемме.

ЛЕММА 4. 1) Если $h(v) \in L^1((-M, M))$, $\chi(v)$ — невозрастающая на $(-M, M)$ функция, то

$$\int_{-M}^M (h^*(v) - h(v))\chi(v) dv \geq 0;$$

в частности, $\forall \lambda \in [-M, M]$ $\int_{-M}^\lambda (h^*(v) - h(v)) dv \geq 0$.

2) Если $h_1, h_2 \in L^2((-M, M))$, то

$$\int_{-M}^M (h_1^*(v) - h_2^*(v))^2 dv \leq \int_{-M}^M (h_1(v) - h_2(v))^2 dv.$$

3) Если $h_1, h_2 \in L^\infty((-M, M))$, то $\forall v \in (-M, M)$

$$|h_1^*(v) - h_2^*(v)| \leq \|h_1 - h_2\|_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) доказано в [12, с. 334]. Для доказательства свойства 2) заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M (h_1^*(v) - h_2^*(v))^2 dv \\ = \int_{-M}^M (h_1^*(v))^2 dv + \int_{-M}^M (h_2^*(v))^2 dv - 2 \int_{-M}^M h_1^*(v) h_2^*(v) dv. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) при $p(h) = h^2$ следуют равенства

$$\int_{-M}^M (h_i^*(v))^2 dv = \int_{-M}^M (h_i(v))^2 dv, \quad i = 1, 2.$$

Далее, по теореме о двух перестановках из [12, с. 334]

$$\int_{-M}^M h_1^*(v) h_2^*(v) dv \geq \int_{-M}^M h_1(v) h_2(v) dv.$$

Поэтому из (23)

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M (h_1^*(v) - h_2^*(v))^2 dv \\ \leq \int_{-M}^M (h_1(v))^2 dv + \int_{-M}^M (h_2(v))^2 dv - 2 \int_{-M}^M h_1(v) h_2(v) dv \\ = \int_{-M}^M (h_1(v) - h_2(v))^2 dv, \end{aligned}$$

что доказывает 2).

Для доказательства 3) обозначим $c = \|h_1 - h_2\|_\infty$. Тогда $h_2(v) - c \leq h_1(v) \leq h_2(v) + c$ п.в. на $(-M, M)$. Далее, как непосредственно следует из определения невозрастающей перестановки, $f^*(v) \leq g^*(v)$ на $(-M, M)$, если $f(v) \leq g(v)$ п.в. на $(-M, M)$ и $(f + c)^*(v) = f^*(v) + c$, $c = \text{const}$.

Используя эти свойства, получим неравенства

$$h_2^*(v) - c \leq h_1^*(v) \leq h_2^*(v) + c,$$

то есть

$$|h_1^*(v) - h_2^*(v)| \leq c = \|h_1 - h_2\|_\infty.$$

Лемма полностью доказана.

Рассмотрим уравнение

$$f_t + (\varphi'(v), \nabla_x f) = r(g - f), \quad (24)$$

$f = f(t, x, v) \in L^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$, $r = \text{const} > 0$, нелинейный оператор $f \mapsto Ff = g$ определяется равенством

$$g = g(t, x, v) = \begin{cases} 1, & v \leq -M, \\ 0, & v \geq M, \\ l(f^*(t, x; v)), & v \in (-M, M), \end{cases}$$

где $f^*(t, x; v)$ – невозрастающая перестановка функции $v \mapsto f(t, x, v)$ по переменной $v \in (-M, M)$ (так как для п.в. $(t, x) \in \Pi$ функция $v \mapsto f(t, x, v)$ измерима, то перестановка $f^*(t, x; v)$ корректно определена); $l(f) = \max(\min(f, 1), 0)$.

Пусть далее $\nu_x^0 \in MV(\mathbb{R}^n)$, $\|\nu_x^0\|_\infty \leq M$, $f_0(x, v) = \nu_x^0((v, +\infty)) \in F_M(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (24) с начальным условием

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad (25)$$

понимаемом в смысле предельного соотношения

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0} f(t, \cdot) = f_0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Мы будем рассматривать обобщенные решения (о.р.) $f(t, x, v) \in L^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$ задачи (24), (25), удовлетворяющие уравнению (24) в $D'(\Pi \times \mathbb{R})$ и начальному условию (25). Как будет показано в следующем параграфе, после возможного выделения подпоследовательности последовательность о.р. $f_r(t, x, v)$ задачи (24), (25) (с параметром $r \in \mathbb{N}$ в правой части (24)) сходится при $r \rightarrow \infty$ к о.р. $f(t, x, v)$ задачи (4), (5), определяя в силу теоремы 1 м.р. задачи (1), (7) с мерозначной начальной функцией ν_x^0 .

В настоящем параграфе мы сосредоточимся на исследовании аппроксимирующей задачи (24), (25). Верна

ЛЕММА 5. Пусть $f(t, x, v)$ – о.р. задачи (24), (25). Тогда $0 \leq f(t, x, v) \leq 1$ п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$; $f(t, x, v) = 0$ для п.в. $(t, x, v) \in \Pi \times (M, +\infty)$, $f(t, x, v) = 1$ для п.в. $(t, x, v) \in \Pi \times (-\infty, -M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В переменных $y = x - \varphi'(v)t \in \mathbb{R}^n$ уравнение (24) перепишется в виде

$$\bar{f}_t = r(\bar{g} - \bar{f}), \quad (26)$$

где $\bar{f} = \bar{f}(t, y, v) = f(t, y + \varphi'(v)t, v)$, $\bar{g} = \bar{g}(t, y, v) = g(t, y + \varphi'(v)t, v)$ и, так как при $v > M$ по построению $\bar{g}(t, y, v) = 0$, то $\bar{f}_t + r\bar{f} = 0$, откуда

$$\bar{f}(t, y, v) = \bar{f}(0, y, v)e^{-rt} = f_0(y, v)e^{-rt} = 0 \quad \text{п.в. на } \Pi \times (M, +\infty)$$

($f_0(y, v) \in F_M(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $f_0(y, v) = 0$ при $v > M$). При $v < -M$ $\bar{g}(t, y, v) = 1$ и в силу (26) $(\bar{f} - 1)_t + r(\bar{f} - 1) = 0$, $f_0(y, v) - 1 = 0$ при $v < -M$, откуда $\bar{f}(t, y, v) - 1 = (f_0(y, v) - 1)e^{-rt} = 0$ п.в. на $\Pi \times (-\infty, -M)$. Далее, рассмотрим C^1 -гладкую функцию

$$\chi(u) = \begin{cases} u^2, & u \leq 0, \\ (u - 1)^2, & u \geq 1, \\ 0, & u \in [0, 1], \end{cases}$$

и умножим равенство (26) на $\chi'(\bar{f})$. Это даст соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(\bar{f}) = r\chi'(\bar{f})(\bar{g} - \bar{f}),$$

правая часть которого неположительна. Действительно, $\chi'(\bar{f}) = 0$ при $\bar{f} \in [0, 1]$; если $\bar{f} > 1$, то $\chi'(\bar{f}) > 0$, $\bar{g} - \bar{f} < 0$ (так как $\bar{g} \leq 1$); если же $\bar{f} < 0$, то $\chi'(\bar{f}) < 0$, $\bar{g} - \bar{f} > 0$ (так как $\bar{g} \geq 0$).

Итак, $\frac{\partial}{\partial t} \chi(\bar{f}) \leq 0$, откуда п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$

$$0 \leq \chi(\bar{f}(t, y, v)) \leq \chi(f_0(y, v)) = 0$$

(поскольку $0 \leq f_0(y, v) \leq 1$).

Это означает, что $0 \leq \bar{f}(t, y, v) \leq 1$ для п.в. $(t, y, v) \in \Pi \times \mathbb{R}$, и поэтому $0 \leq f(t, x, v) \leq 1$ п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 5 следует, что для п.в. $(t, x) \in \Pi$ при $v \in (-M, M)$ $0 \leq f^*(t, x; v) \leq 1$ и $g(t, x, v) = l(f^*(t, x; v)) = f^*(t, x; v)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_1(t, x, v)$, $f_2(t, x, v)$ — о.р. задачи (24), (25) с начальными функциями $f_1^0(x, v)$, $f_2^0(x, v) \in F_M(\mathbb{R}^n)$, соответственно; $N = \max_{v \in [-M, M]} |\varphi'(v)|$, $\rho(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для п.в. $t \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 \rho(x) dx dv \\ & \leq e^{Nt} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1^0(x, v) - f_2^0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \\ & = e^{Nt} \int_{\mathbb{R}^n \times [-M, M]} (f_1^0(x, v) - f_2^0(x, v))^2 \rho(x) dx dv. \end{aligned} \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f_1 = f_1(t, x, v)$, $f_2 = f_2(t, x, v)$ — о.р. задачи (24), (25), то в $D'(\Pi \times \mathbb{R})$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + (\varphi'(v), \nabla_x f_1) = r(g_1 - f_1), \quad \frac{\partial}{\partial t} f_2 + (\varphi'(v), \nabla_x f_2) = r(g_2 - f_2),$$

здесь $g_1 = F f_1$, $g_2 = F f_2$. Вычитая второе равенство из первого, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_1 - f_2) + (\varphi'(v), \nabla_x (f_1 - f_2)) = r((g_1 - g_2) - (f_1 - f_2)).$$

Отсюда, после умножения на $2(f_1 - f_2)$, следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_1 - f_2)^2 + (\varphi'(v), \nabla_x (f_1 - f_2)^2) = 2r((g_1 - g_2)(f_1 - f_2) - (f_1 - f_2)^2). \quad (28)$$

Пусть $\beta(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\beta(s) \geq 0$, $\text{supp } \beta \subset [0, 1]$, $\int \beta(s) ds = 1$.

При $\nu \in \mathbb{N}$ положим $\delta_\nu(s) = \nu \beta(\nu s)$ (ясно, что при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность δ_ν сходится в $D'(\mathbb{R})$ к δ -функции Дирака); $\alpha_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds$, $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$, где $t_0, t_1 > 0$, $t_1 > t_0$. Очевидно, $0 \leq \chi_\nu(t) \leq 1$ и при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность $\chi_\nu(t)$ поточечно сходится к характеристической функции интервала $(t_0, t_1]$. Пусть $h(t, x) = \exp(-Nt - |x|) = e^{-Nt} \rho(x)$. Умножим (28)

на $h(t, x)\chi_\nu(t)$ и проинтегрируем по $(t, x, v) \in \Pi \times \mathbb{R}$. Перебросив производные на пробную функцию $h(t, x)\chi_\nu(t)$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (f_1 - f_2)^2 h(t, x) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt dx dv \\ & - \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (f_1 - f_2)^2 \left[N + \left(\varphi'(v), \frac{x}{|x|} \right) \right] \exp(-Nt - |x|) \chi_\nu(t) dt dx dv \\ & = -2r \int_{\Pi} \left[\int_{\mathbb{R}} (g_1 - g_2)(f_1 - f_2) dv - \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)^2 dv \right] h(t, x) \chi_\nu(t) dt dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку

$$\left| \left(\varphi'(v), \frac{x}{|x|} \right) \right| \leq |\varphi'(v)| \leq N$$

при $v \in [-M, M]$ и, как следует из леммы 5, $f_1 - f_2 = 0$ для п.в. $(t, x, v) \in \Pi \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M])$, то второй интеграл в левой части (29) неотрицателен. Далее, $g_1 = g_2$ при $v \notin [-M, M]$ и по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (g_1 - g_2)(f_1 - f_2) dv &= \int_{-M}^M (g_1 - g_2)(f_1 - f_2) dv \\ &\leq \left(\int_{-M}^M (g_1 - g_2)^2 dv \right)^{1/2} \left(\int_{-M}^M (f_1 - f_2)^2 dv \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{-M}^M (f_1 - f_2)^2 dv \end{aligned} \quad (30)$$

для п.в. $(t, x) \in \Pi$. Действительно, по замечанию 1 для п.в. $(t, x) \in \Pi$ при $v \in [-M, M]$ $g_1(t, x, v) = f_1^*(t, x; v)$, $g_2(t, x, v) = f_2^*(t, x; v)$ и по свойству 2 из леммы 4

$$\int_{-M}^M (g_1(t, x, v) - g_2(t, x, v))^2 dv \leq \int_{-M}^M (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 dv.$$

Из (30) следует, что правая часть (29) также неотрицательна. В итоге, из (29) вытекает, что

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}} (f_1 - f_2)^2 h(t, x) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt dx dv \geq 0$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 h(t, x) dx dv \right) \delta_\nu(t - t_1) dt \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 h(t, x) dx dv \right) \delta_\nu(t - t_0) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть $E \subset (0, +\infty)$ — множество точек Лебега функции

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 h(t, x) dx dv.$$

Тогда E – множество полной меры (см. [11, с. 237]) и при $t_0, t_1 \in E$ из (31) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t_1, x, v) - f_2(t_1, x, v))^2 h(t_1, x) dx dv \\ \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t_0, x, v) - f_2(t_0, x, v))^2 h(t_0, x) dx dv. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть $\mathcal{E} \subset (0, +\infty)$ – множество нулевой меры такое, что при $t \notin \mathcal{E}$ в соответствии с леммой 5 и начальным условием (25) $f_1(t, x, v), f_2(t, x, v) \in [0, 1]$ для п.в. $(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f_1(t, x, v) = f_2(t, x, v)$ для п.в. $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M])$ и при $t \rightarrow 0, t \notin \mathcal{E}, f_1(t, \cdot) \rightarrow f_1^0, f_2(t, \cdot) \rightarrow f_2^0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Тогда при $t_0 \rightarrow 0, t_0 \in E \setminus \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t_0, x, v) - f_2(t_0, x, v))^2 h(t_0, x) dx dv \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1^0(x, v) - f_2^0(x, v))^2 h(0, x) dx dv \end{aligned}$$

и из (32) следует (с заменой t_1 на t), что $\forall t \in E$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1(t, x, v) - f_2(t, x, v))^2 h(t, x) dx dv \\ \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_1^0(x, v) - f_2^0(x, v))^2 h(0, x) dx dv. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $h(t, x) = e^{-Nt}\rho(x)$, $h(0, x) = \rho(x)$. Ясно также, что $f_1^0(x, v) - f_2^0(x, v) = 0$ при $v \notin [-M, M]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Обобщенное решение $f(t, x, v)$ задачи (24), (25) единственно.*

Для доказательства применим теорему 2 при $f_1^0 = f_2^0 = f_0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть*

$$\omega_2^x(\sigma) = \sup_{\Delta x \in \mathbb{R}^n, |\Delta x| \leq \sigma} \int_{\mathbb{R}^n \times [-M, M]} (f_0(x + \Delta x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv$$

– квадрат модуля непрерывности начальной функции $f_0(x, v)$ по x в $L^2(\mathbb{R}^n \times [-M, M], \rho(x) dx dv)$. Тогда для п.в. $t \in (0, +\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t, x + \Delta x, v) - f(t, x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq e^{Nt} \omega_2^x(|\Delta x|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что при $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(t, x + \Delta x, v)$ является о.р. задачи (24), (25) с начальной функцией $f_0(x + \Delta x, v)$ и применить теорему 2 при $f_1 = f(t, x, v)$, $f_2 = f(t, x + \Delta x, v)$.

ТЕОРЕМА 3. *Обобщенное решение задачи (24), (25) существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $(t, x, v) \in \Pi \times \mathbb{R}$ пусть $y = x - \varphi'(v)t$. Тогда замена $Q(t, x, v) = (t, y, v)$ является гомеоморфизмом пространства $\Pi \times \mathbb{R}$ в себя, обратное отображение Q^{-1} задается формулой $x = y + \varphi'(v)t$. Поскольку при фиксированных t, v отображение Q является сдвигом вектора $x \in \mathbb{R}^n$, это отображение (вместе с Q^{-1}) сохраняет меру Лебега, т.е. множество $A \subset \Pi \times \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу одновременно с множеством $Q(A) \subset \Pi \times \mathbb{R}$ и $\text{mes}(A) = \text{mes}(Q(A))$. Для произвольной функции $h(t, x, v)$ на $\Pi \times \mathbb{R}$ будем обозначать $\bar{h}(t, y, v) = (h \circ Q^{-1})(t, y, v) = h(t, y + \varphi'(v)t, v)$ (заметим, что функции $h, \bar{h}$ измеримы или нет по Лебегу одновременно).

Если $f(t, x, v)$ — о.р. задачи (24), (25), $g = Ff = g(t, x, v)$, то по (26) (в смысле распределений)

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t, y, v) + r \bar{f}(t, y, v) = r \bar{g}(t, y, v) \quad \text{и} \quad \bar{f}(0, y, v) = f_0(y, v).$$

Из известной формулы для решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка следует, что задача (24), (25) эквивалентна интегральному уравнению

$$\bar{f}(t, y, v) = e^{-rt} f_0(y, v) + r \int_0^t e^{-r(t-\tau)} \bar{g}(\tau, y, v) d\tau. \quad (33)$$

Решение этого уравнения естественно искать методом последовательных приближений. Определим последовательность $f_m(t, x, v)$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что соответствующие функции $\bar{f}_m(t, y, v)$ удовлетворяют условиям: $\bar{f}_1(t, y, v) = f_0(y, v)$,

$$\bar{f}_{m+1}(t, y, v) = e^{-rt} f_0(y, v) + r \int_0^t e^{-r(t-\tau)} \bar{g}_m(\tau, y, v) d\tau, \quad (34)$$

где $g_m = Ff_m$. Пусть $E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_m$, где $E_m = \{(y, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{g}_m(\tau, y, v) \text{ — измеримая по } \tau \in (0, +\infty) \text{ функция}\}$; тогда E — множество полной меры и при $(y, v) \in E$ равенство (34) имеет смысл при всех $t \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Так как

$$r \int_0^t e^{-r(t-\tau)} d\tau = (1 - e^{-rt}), \quad 0 \leq \bar{g}_m \leq 1, \quad 0 \leq f_0 \leq 1,$$

то из (34) $\forall m \in \mathbb{N}$ $0 \leq \bar{f}_m \leq 1$. Ясно также, что $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M]) \subset E$ и $\bar{f}_m(t, y, v) = 0$ при $v > M$, $\bar{f}_m(t, y, v) = 1$ при $v < -M$.

Обозначим при $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_m(t) = \|\bar{f}_{m+1}(t, \cdot) - \bar{f}_m(t, \cdot)\|_\infty = \text{ess sup}_{(y, v) \in \mathbb{R}^{n+1}} |\bar{f}_{m+1}(t, y, v) - \bar{f}_m(t, y, v)|.$$

Из (34) вытекает равенство

$$\bar{f}_{m+2}(t, y, v) - \bar{f}_{m+1}(t, y, v) = r \int_0^t e^{-r(t-\tau)} (\bar{g}_{m+1}(\tau, y, v) - \bar{g}_m(\tau, y, v)) d\tau. \quad (35)$$

Оценим подынтегральное выражение в (35). С учетом определения функций g_m и свойства 3) из леммы 4, при фиксированных (τ, v) на множестве полной меры значений $y \in \mathbb{R}^n$, для которых функции $u \mapsto f_m(\tau, y + \varphi'(v)\tau, u)$ измеримы,

$$\begin{aligned} & |\bar{g}_{m+1}(\tau, y, v) - \bar{g}_m(\tau, y, v)| \\ &= |g_{m+1}(\tau, y + \varphi'(v)\tau, v) - g_m(\tau, y + \varphi'(v)\tau, v)| \\ &\leq |f_{m+1}^*(\tau, y + \varphi'(v)\tau; v) - f_m^*(\tau, y + \varphi'(v)\tau; v)| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{u \in [-M, M]} |f_{m+1}(\tau, y + \varphi'(v)\tau, u) - f_m(\tau, y + \varphi'(v)\tau, u)| \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{u \in [-M, M]} |\bar{f}_{m+1}(\tau, y + (\varphi'(v) - \varphi'(u))\tau, u) - \bar{f}_m(\tau, y + (\varphi'(v) - \varphi'(u))\tau, u)|, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\bar{g}_{m+1}(\tau, y, v) - \bar{g}_m(\tau, y, v)| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{(y, u) \in \mathbb{R}^{n+1}} |\bar{f}_{m+1}(\tau, y + (\varphi'(v) - \varphi'(u))\tau, u) - \bar{f}_m(\tau, y + (\varphi'(v) - \varphi'(u))\tau, u)| \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{(z, u) \in \mathbb{R}^{n+1}} |\bar{f}_{m+1}(\tau, z, u) - \bar{f}_m(\tau, z, u)|. \end{aligned} \quad (36)$$

В последнем равенстве используется тот факт, что при фиксированных τ, v преобразование $(y, u) \mapsto (z, u)$ сохраняет меру Лебега. Из (36) следует, что

$$\|\bar{g}_{m+1}(\tau, \cdot) - \bar{g}_m(\tau, \cdot)\|_\infty \leq \Delta_m(\tau),$$

и из (35)

$$\Delta_{m+1}(t) = r \int_0^t e^{-r(t-\tau)} \Delta_m(\tau) d\tau \leq r \int_0^t \Delta_m(\tau) d\tau. \quad (37)$$

Ясно, что $\Delta_1(t) \leq 1$. Индукцией по $m \in \mathbb{N}$ из (37) выводится оценка

$$\Delta_m(t) \leq \frac{(rt)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\bar{f}_{m+1}(t, \cdot) - \bar{f}_m(t, \cdot)\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(rt)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{rt} < \infty,$$

что означает сходимость последовательности $\bar{f}_m(t, y, v)$ в $L^\infty(\Pi_T \times \mathbb{R})$, где $\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$ произвольно. Пусть $\bar{f}(t, y, v)$ — предельная функция $\bar{g}(t, y, v) = g(t, y + \varphi'(v)t, v)$, $g = Ff$.

Аналогично (36) доказывается оценка

$$\|\bar{g}_m(t, \cdot) - \bar{g}(t, \cdot)\|_\infty \leq \|\bar{f}_m(t, \cdot) - \bar{f}(t, \cdot)\|_\infty,$$

из которой следует сходимость $\bar{g}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \bar{g}$ в $L^\infty(\Pi_T \times \mathbb{R})$. Переходя к пределу

в (34) при $m \rightarrow \infty$, получим тогда, что для предельных функций $\bar{f}(t, y, v)$, $\bar{g}(t, y, v)$ выполнено (33). Это значит, что функция $f(t, x, v) = \bar{f}(t, x - \varphi'(v)t, v)$ является о.р. задачи (24), (25). Теорема доказана.

Ниже нам понадобится следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(t, x, v)$ — о.р. задачи (24), (25). Тогда для п.в. $\Delta t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(\Delta t, x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq \omega^t(\Delta t),$$

$$\text{где } \omega^t(\Delta t) = c \inf_{0 < h < 1} \left(\frac{\Delta t}{h} + \omega_1^x(h) \right),$$

$$\omega_1^x(h) = \sup_{\Delta x \in \mathbb{R}^n, |\Delta x| \leq h} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f_0(x + \Delta x, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv$$

— модуль непрерывности начальной функции по переменной x в $L^1(\mathbb{R}^n \times [-M, M], \rho(x) dx dv)$; c — константа, не зависящая от $\Delta t, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $R > 0$ обозначим B_R — шар $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}$. Предположим, что $\gamma(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\gamma(x) \geq 0$, $\text{supp } \gamma \subset B_1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) dx = 1$. Пусть при $h > 0$ $\gamma_h(x) = h^{-n} \gamma(h^{-1}x)$, так что при $h \rightarrow 0$ $\gamma_h(x)$ сходится в $D'(\mathbb{R}^n)$ к δ -функции Дирака. Фиксируем $t_0, t_1 > 0$ и положим при $\nu \in \mathbb{N}$ $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$ (см. доказательство теоремы 2). Рассмотрим также функцию

$$\beta_h(x, v) = f_0(\cdot, v) * \gamma_h = \int f_0(x - y, v) \gamma_h(y) dy,$$

получаемую усреднением начальной функции f_0 по пространственным переменным. По свойствам средних функций при $h \rightarrow 0$ $\beta_h(x, v) \rightarrow f_0(x, v)$ п.в. на $\mathbb{R}^{n+1}$ и при фиксированном $v \in \mathbb{R}$ $\beta_h(x, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \beta_h(x, v) = f_0(\cdot, v) * \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_h, \quad i = 1, \dots, n,$$

то

$$|\nabla_x \beta_h(x, v)| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \beta_h(x, v) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \|f_0(\cdot, v)\|_\infty \cdot \|\nabla_x \gamma_h\|_1 \leq \frac{c_1}{h}, \quad (38)$$

$c_1 = \|\nabla_x \gamma\|_1 = \text{const.}$

Положим $w(t, x, v) = \beta_h(x, v) \chi_\nu(t) \rho(x) \xi(v)$, где $\xi(v)$ — характеристическая функция отрезка $[-M, M]$.

Применяя равенство (24) к пробной функции $w(t, x, v)$ получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f(t, x, v) [w_t(t, x, v) + (\varphi'(v), \nabla_x w)] dt dx dv \\ = -r \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (g(t, x, v) - f(t, x, v)) w(t, x, v) dt dx dv \end{aligned}$$

или, раскрыв производные $w_t, \nabla_x w$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv \right) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt \\ + \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f(t, x, v) (\varphi'(v), \nabla_x (\beta_h(x, v) \rho(x))) \xi(v) \chi_\nu(t) dt dx dv \\ = -r \int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}} (g(t, x, v) - f(t, x, v)) \beta_h(x, v) \xi(v) dv \right) \rho(x) \chi_\nu(t) dt dx. \quad (39) \end{aligned}$$

Так как $f_0(x, v)$ не возрастает по переменной $v \in \mathbb{R}$, то функция $\beta_h(x, v)$ также не возрастает по v , и по свойству 1) из леммы 4

$$\int_{\mathbb{R}} (g(t, x, v) - f(t, x, v)) \beta_h(x, v) \xi(v) dv = \int_{-M}^M (g(t, x, v) - f(t, x, v)) \beta_h(x, v) dv \geq 0$$

на множестве полной меры значений $(t, x) \in \Pi$, при которых функция $v \mapsto f(t, x, v)$ измерима и в соответствии с замечанием 1 $g(t, x, v) = f^*(t, x, v)$. Поэтому правая часть (39) неположительна и, значит,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv \right) \delta_\nu(t - t_0) dt \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv \right) \delta_\nu(t - t_1) dt \\ & \quad + \left| \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f(t, x, v) (\varphi'(v), \nabla_x (\beta_h(x, v) \rho(x))) \xi(v) \chi_\nu(t) dt dx dv \right|. \end{aligned} \quad (40)$$

Как следует из равенства (33), о.р. $f(t, x, v)$ (может быть, после “исправления” на множестве нулевой меры) непрерывно по $t \in [0, +\infty)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. В частности, можно считать, что функции

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv$$

непрерывны по t и из (40) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t_0, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(t_1, x, v) \beta_h(x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv \\ & \quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |(\varphi'(v), \nabla_x (\beta_h(x, v) \rho(x)))| f(t, x, v) \xi(v) dt dx dv. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее, при $h < 1$ с учетом оценки (38)

$$\begin{aligned} \nabla_x (\beta_h(x, v) \rho(x)) & \leq |\nabla_x \beta_h(x, v)| \rho(x) + \beta_h |\nabla_x \rho(x)| \\ & \leq \frac{c_1}{h} \rho(x) + \rho(x) \leq \frac{c_2}{h} \rho(x), \quad c_2 = c_1 + 1 \end{aligned}$$

(заметим, что $|\nabla_x \rho(x)| = \rho(x)$ и, поскольку $0 \leq f_0(x, v) \leq 1$, то и $0 \leq \beta_h(x, v) \leq 1$). Поэтому, из (41) и из того, что $f(t_0, x, v) - f(t_1, x, v) = 0$ для п.в. $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M])$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t_0, x, v) - f(t_1, x, v)) \beta_h(x, v) \rho(x) dx dv \\ & \leq \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\varphi'(v)| |\nabla_x (\beta_h \rho)| f(t, x, v) \xi(v) dt dx dv \leq \frac{c_3}{h} (t_1 - t_0), \end{aligned} \quad (42)$$

$c_3 = 2M N c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx$, где обозначено $N = \max_{v \in [-M, M]} |\varphi'(v)|$. Далее,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\beta_h(x, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_0(x - y, v) - f_0(x, v)) \gamma_h(y) dy \right| \rho(x) dx dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f_0(x - y, v) - f_0(x, v)| \rho(x) dx dv \right) \gamma_h(y) dy \leq \omega_1^x(h), \end{aligned} \quad (43)$$

так как

$$\text{supp } \gamma_h \subset B_h \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_h(y) dy = 1.$$

С учетом (42), (43) и оценки $\|f(t_0, \cdot) - f(t_1, \cdot)\|_\infty \leq 1$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t_0, x, v) - f(t_1, x, v)) f_0(x, v) \rho(x) dx dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t_0, x, v) - f(t_1, x, v)) (f_0(x, v) - \beta_h(x, v)) \rho(x) dx dv \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t_0, x, v) - f(t_1, x, v)) \beta_h(x, v) \rho(x) dx dv \\ &\leq \omega_1^x(h) + \frac{c_3}{h} (t_1 - t_0). \end{aligned} \quad (44)$$

Переходя к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, получим из (44) (для удобства мы меняем обозначение t_1 на Δt), что $\forall \Delta t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_0(x, v) - f(\Delta t, x, v)) f_0(x, v) \rho(x) dx dv \leq \omega_1^x(h) + \frac{c_3}{h} \Delta t. \quad (45)$$

Далее, умножим (24) на $2f(t, x, v)$. Получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f^2(t, x, v) + (\varphi'(v), \nabla_x f^2(t, x, v)) \\ &= 2r(g(t, x, v) - f(t, x, v)) f(t, x, v) \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R}), \end{aligned}$$

применяя которое к пробной функции $\rho(x) \chi_\nu(t) \xi(v)$, где $\chi_\nu(t) = \alpha_\nu(t - t_0) - \alpha_\nu(t - t_1)$, $0 < t_0 < t_1$, $\nu \in \mathbb{N}$, получим, после элементарных преобразований, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f^2(t, x, v) \rho(x) \xi(v) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt dx dv \\ &+ \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (\varphi'(v), \nabla_x \rho(x)) f^2(t, x, v) \xi(v) \chi_\nu(t) dt dx dv \\ &= -2r \int_{\Pi} \left(\int_{-M}^M g(t, x, v) f(t, x, v) dv - \int_{-M}^M f^2(t, x, v) dv \right) \rho(x) \chi_\nu(t) dt dx. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь с учетом замечания 1 $g(t, x, v) = f^*(t, x, v)$ при $v \in (-M, M)$. По неравенству Гёльдера и равенству (22) для п.в. $(t, x) \in \Pi$

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M g(t, x, v) f(t, x, v) dv &= \int_{-M}^M f^*(t, x, v) f(t, x, v) dv \\ &\leq \left(\int_{-M}^M (f^*(t, x, v))^2 dv \right)^{1/2} \left(\int_{-M}^M (f(t, x, v))^2 dv \right)^{1/2} \\ &= \int_{-M}^M (f(t, x, v))^2 dv. \end{aligned}$$

Поэтому правая часть (46) неотрицательна и из (46)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f^2(t, x, v) \rho(x) \xi(v) (\delta_\nu(t - t_1) - \delta_\nu(t - t_0)) dt dx dv \\ \leq \int_{\Pi \times \mathbb{R}} |(\varphi'(v), \nabla_x \rho(x))| f^2(t, x, v) \xi(v) \chi_\nu(t) dt dx dv. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценок $|(\varphi'(v), \nabla_x \rho(x))| \leq |\varphi'(v)| |\nabla_x \rho(x)| \leq N \rho(x)$ при $v \in [-M, M]$, $\|f(t, x, v)\|_\infty \leq 1$ получаем, что

$$\begin{aligned} \int \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f^2(t, x, v) \rho(x) \xi(v) dt dx dv \right) (\delta_\nu(t - t_1) - \delta_\nu(t - t_0)) dt \leq c_4 \int \chi_\nu(t) dt, \\ c_4 = \text{const}. \end{aligned}$$

Как отмечено выше, можно считать, что отображение $t \mapsto f(t, x, v)$ непрерывно в $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, что влечет непрерывность функции $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f^2(t, x, v) \rho(x) \xi(v) dx dv$.

Следовательно, в пределе при $\nu \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f^2(t_1, x, v) - f^2(t_0, x, v)) \rho(x) dx dv \leq c_4(t_1 - t_0).$$

Переходя в этой оценке к пределу при $t_0 \rightarrow 0$ (с учетом (25)) и заменяя t_1 на Δt , получим, что $\forall \Delta t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f^2(\Delta t, x, v) - f_0^2(x, v)) \rho(x) dx dv \leq c_4 \Delta t. \quad (47)$$

Наконец, ввиду (45), (47)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(\Delta t, x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f^2(\Delta t, x, v) - f_0^2(x, v)) \rho(x) dx dv \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_0(x, v) - f(\Delta t, x, v)) f_0(x, v) \rho(x) dx dv \\ &\leq c_4 \Delta t + 2 \left(\frac{c_3 \Delta t}{h} + \omega_1^x(h) \right) \leq c \left(\omega_1^x(h) + \frac{\Delta t}{h} \right), \quad c = 2c_3 + c_4 + 2, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности $h \in (0, 1)$ следует требуемая оценка. Теорема доказана.

В дополнение к теореме заметим, что $\omega^t(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Действительно, взяв $h = \sqrt{\Delta t}$ при $\Delta t < 1$, получим, что $\omega^t(\Delta t) \leq c(\omega_1^x(\sqrt{\Delta t}) + \sqrt{\Delta t})$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для n, θ . $t_1, t_0 \in (0, \infty)$, $t_1 > t_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t_1, x, v) - f(t_0, x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq \omega^t(\Delta t), \quad \Delta t = (t_1 - t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать (см. доказательство теоремы 4), что отображение $t \mapsto f(t, x, v)$ непрерывно при $t \in [0, +\infty)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда при $\Delta t > 0$ функции $f_1(t, x, v) = f(t, x, v)$, $f_2(t, x, v) = f(t + \Delta t, x, v)$ являются о.р. задачи (24), (25) с начальными функциями $f_0(x, v)$, $f(\Delta t, x, v)$, соответственно. Тогда по теореме 2 для $t \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(t + \Delta t, x, v) - f(t, x, v))^2 \rho(x) dx dv \\ \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(\Delta t, x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq \omega^t(\Delta t), \end{aligned}$$

что и нужно было доказать.

§ 3. Сходимость аппроксимаций

Пусть $f_r(t, x, v)$, $r \in \mathbb{N}$, — последовательность о.р. задачи (24), (25)

$$f_t + (\varphi'(v), \nabla_x f) = r(g - f), \quad g = Ff; \quad f(0, x, v) = f_0(x, v) \in F_M(\mathbb{R}^n).$$

Покажем, что эта последовательность (может быть, после выделения подпоследовательности) сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$ к о.р. $f(t, x, v)$ задачи (4), (5).

Нам понадобится

ЛЕММА 6. Пусть $g_r = Ff_r$. Тогда для некоторой неотрицательной локально конечной борелевской меры m_r на $\Pi \times [-M, M]$

$$r(g_r(t, x, v) - f_r(t, x, v)) = \frac{\partial}{\partial v} m_r(t, x, v) \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R}).$$

При этом для любого компакта $C \subset \Pi$ значения $m_r(C \times \mathbb{R})$ ограничены по $r \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho_r(t, x, v) = r \int_{-M}^v (g_r(t, x, \lambda) - f_r(t, x, \lambda)) d\lambda$ для множества полной меры значений $(t, x) \in \Pi$, при которых последний интеграл определен. По свойству 1) из леммы 4 $\rho_r(t, x, v) \geq 0$ и, очевидно,

$$r(g_r - f_r) = \frac{\partial}{\partial v} \rho_r = \frac{\partial}{\partial v} m_r \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R}),$$

где m_r — неотрицательная мера: $m_r(t, x, v) = \rho_r(t, x, v) dt dx dv$ на $\Pi \times \mathbb{R}$. Так как $g_r(t, x, v) - f_r(t, x, v) = 0$ п.в. на $\Pi \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M])$ и

$$\int_{-M}^M (g_r(t, x, \lambda) - f_r(t, x, \lambda)) d\lambda = \int_{-M}^M (f_r^*(t, x; \lambda) - f_r(t, x, \lambda)) d\lambda = 0$$

по равенству (22), то $\rho_r(t, x, v) = 0$ п.в. на $\Pi \times (\mathbb{R} \setminus [-M, M])$, откуда следует включение $\text{supp } m_r \subset \Pi \times [-M, M]$. Пусть далее $C \subset \Pi$ — компакт, $h(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $h(t, x) \geq 0$, $h(t, x) \equiv 1$ на C ; $\chi(v) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi'(v) = 1$ на $[-M, M]$. Применяя равенство

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + (\varphi'(v), \nabla_x f_r) = r(g_r - f_r) = \frac{\partial}{\partial v} m_r$$

к пробной функции $h(t, x)\chi(v)$, получим оценку

$$\begin{aligned} m_r(C \times [-M, M]) &\leq \int_{\Pi \times \mathbb{R}} h(t, x)\chi'(v) dm_r(t, x, v) \\ &= \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f_r(t, x, v) [h_t + (\varphi'(v), \nabla_x h)] \chi(v) dt dx dv \\ &\leq c = \|(h_t + (\varphi'(v), \nabla_x h))\chi(v)\|_{L^1(\Pi \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Мы учли, что по лемме 5 $\|f_r\|_\infty \leq 1$. Итак, значения $m_r(C \times [-M, M]) = m_r(C \times \mathbb{R})$ ограничены по $r \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Существует подпоследовательность последовательности $f_r(t, x, v)$, сходящаяся в $L_{\text{loc}}^1(\Pi \times \mathbb{R})$ к о.р. $f(t, x, v) \in F_M(\Pi)$ задачи (4), (5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме 5 для всех $r \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_r(t, x, v) \leq 1$ п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$ и по лемме 6 последовательность мер m_r ограничена по вариации на любом компакте, то, после выделения подпоследовательности (за которой мы сохраним прежнее обозначение) при $r \rightarrow \infty$ $f_r(t, x, v) \rightarrow f(t, x, v)$ *-слабо в $L^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$, $m_r \rightarrow m$ слабо в пространстве $Z_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$ локально конечных зарядов на $\Pi \times \mathbb{R}$, где $f(t, x, v) \in L^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$, $m \in Z_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$, $m = m(t, x, v) \geq 0$, $\text{supp } m \subset \Pi \times [-M, M]$. В пределе при $r \rightarrow \infty$ из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} f_r + (\varphi'(v), \nabla_x f_r) = r(g_r - f_r) = \frac{\partial}{\partial v} m_r \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R})$$

следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\varphi'(v), \nabla_x f) = \frac{\partial}{\partial v} m \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R}),$$

т.е. $f = f(t, x, v)$ удовлетворяет кинетическому уравнению (4). Далее, по равенству (22) с $p(u) = u^2$

$$\int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)(g_r + f_r) dv = \int_{\mathbb{R}} (g_r^2 - f_r^2) dv = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)g_r dv = - \int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)f_r dv,$$

и поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)^2 dv = \int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)g_r dv - \int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)f_r dv = -2 \int_{\mathbb{R}} (g_r - f_r)f_r dv.$$

Умножим это равенство на неотрицательную функцию $h = h(t, x) \in C_0^1(\Pi)$ и проинтегрируем по $(t, x) \in \Pi$. Получим, что

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}} (g_r - f_r)^2 h \, dt \, dx \, dv = -2 \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (g_r - f_r) f_r h \, dt \, dx \, dv,$$

откуда в силу соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} f_r^2 + (\varphi'(v), \nabla_x f_r^2) = 2r(g_r - f_r) f_r \quad \text{в } D'(\Pi \times \mathbb{R})$$

следует равенство (в котором $\xi(v)$ — характеристическая функция интервала $[-M, M]$)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (g_r - f_r)^2 h \, dt \, dx \, dv &= -\frac{1}{r} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f_r^2 + (\varphi'(v), \nabla_x f_r^2), h(t, x) \xi(v) \right\rangle \\ &= \frac{1}{r} \int_{\Pi \times \mathbb{R}} f_r^2 [h_t + (\varphi'(v), \nabla_x h)] \xi(v) \, dt \, dx \, dv \leq \frac{c}{r}, \\ c = \text{const} &= \|(h_t + (\varphi'(v), \nabla_x h)) \xi(v)\|_{L^1(\Pi \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует предельное соотношение

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}} |g_r - f_r| h \, dt \, dx \, dv \leq \int_{\Pi \times \mathbb{R}} (g_r - f_r)^2 h \, dt \, dx \, dv \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

и ввиду произвольности неотрицательной функции $h \in C_0^1(\Pi)$ при $r \rightarrow \infty$

$$g_r(t, x, v) - f_r(t, x, v) \rightarrow 0 \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\Pi \times \mathbb{R}). \quad (48)$$

Из (48), в частности, следует, что при $r \rightarrow \infty$ последовательность $g_r(t, x, v)$ сходится к $f(t, x, v)$ *-слабо в $L^\infty(\Pi \times \mathbb{R})$ (одновременно с последовательностью f_r).

Так как функции $g_r(t, x, v)$ не возрастают по переменной v , то после возможного “исправления” предельной функции $f(t, x, v)$ на множестве нулевой меры $f(t, x, v)$ также не возрастает и непрерывна справа по переменной v . Ясно также, что $0 \leq f(t, x, v) \leq 1$ п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$, $f(t, x, v) = 1$ п.в. на $\Pi \times (-\infty, -M)$, $f(t, x, v) = 0$ п.в. на $\Pi \times (M, +\infty)$. Таким образом, $f(t, x, v) \in F_M(\Pi)$.

Пусть, далее, $\chi(v) \in C_0^1(\mathbb{R})$,

$$p_r(t, x) = \int f_r(t, x, v) \chi(v) \, dv, \quad q_r(t, x) = \int g_r(t, x, v) \chi(v) \, dv.$$

Ясно, что при $r \rightarrow \infty$

$$p_r(t, x) \rightarrow p(t, x), \quad q_r(t, x) \rightarrow p(t, x) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Pi), \quad (49)$$

где $p(t, x) = \int f(t, x, v) \chi(v) \, dv$.

Из оценок, содержащихся в следствиях 2, 3, вытекает равностепенная непрерывность последовательности $p_r(t, x)$ в $L^1(\Pi_T, \rho(x) \, dt \, dx)$, $T > 0$ произвольно. По

критерию Хаусдорфа, сходимость в (49) сильная – в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ (для последовательности q_r нужно учесть (48)).

Выберем счетное всюду плотное множество $S \subset C^1_0(\mathbb{R})$. Тогда, применяя при дополнительном выделении подпоследовательности стандартную диагональную процедуру, можем считать, что для всех $\chi(v) \in S$

$$q_r(t, x) = \int g_r(t, x, v) \chi(v) dv \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int f(t, x, v) \chi(v) dv$$

в $L^1_{\text{loc}}(\Pi)$ и п.в. на Π . Из плотности S в $C^1_0(\mathbb{R})$ (и, значит, в $L^1(\mathbb{R})$), для п.в. $(t, x) \in \Pi$

$$g_r(t, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(t, x, v)$$

по $v \in \mathbb{R}$ *-слабо в $L^\infty(\mathbb{R})$.

Так как функции $g_r(t, x, v)$ монотонны по v , то по теореме Хелли (см. [11, с. 209]) $g_r(t, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(t, x, v)$ во всех точках непрерывности функции $v \mapsto f(t, x, v)$. Дополнение ко множеству точек непрерывности в силу монотонности не более чем счетно. Итак, измеримое множество $\{(t, x, v) \in \Pi \times \mathbb{R} \mid g_r(t, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(t, x, v)\}$ имеет полную меру.

Значит, $g_r(t, x, v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(t, x, v)$ п.в. на $\Pi \times \mathbb{R}$ и (с учетом ограниченности g_r) в $L^1_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$. Из (48) следует, что последовательность $f_r(t, x, v)$ также сходится к $f(t, x, v)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$.

Для завершения доказательства осталось проверить выполнение начального условия (26) для предельной функции $f(t, x, v)$. По теореме 4 для п.в. $\Delta t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f_r(\Delta t, x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq \omega^t(\Delta t), \quad (50)$$

$\omega^t(\Delta t)$ не зависит от r .

Для п.в. $\Delta t > 0$ последовательность $f_r(\Delta t, \cdot) - f_0$ сходится в $L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \rho(x) dx dv)$ к функции $f(\Delta t, \cdot) - f_0$ и из (50) в пределе при $r \rightarrow \infty$ вытекает, что для п.в. $\Delta t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (f(\Delta t, x, v) - f_0(x, v))^2 \rho(x) dx dv \leq \omega^t(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Итак,

$$\text{ess lim}_{\Delta t \rightarrow 0} f(\Delta t, \cdot) = f_0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

т.е. выполнено начальное условие (25) и $f(t, x, v)$ – о.р. задачи (24), (25). Теорема полностью доказана.

Предположим, далее, что $\nu^0_x(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$ – регулярная начальная функция. Известно (см. [6], [7], [9]), что в этом случае м.р. $\nu_{t,x}$ задачи Коши (1), (7) также регулярно и единственно: $\nu_{t,x} = \delta(\lambda - u(t, x))$, где $u(t, x)$ – единственное о.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_0(x)$. Легко видеть, что соответствующая функция распределения $f(t, x, v) = \nu_{t,x}((v, +\infty)) = \theta(u(t, x) - v)$, где $\theta(u)$ – функция Хевисайда. Из единственности решения $\nu_{t,x}$ следует, что предельная функция $f(t, x, v)$ в теореме 5 не зависит от выбора подпоследовательности. Таким образом, $f(t, x, v)$ – единственная предельная точка последовательности $f_r(t, x, v)$, $r \in \mathbb{N}$, в $L^1_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$. Это означает, что исходная последовательность $f_r(t, x, v)$ сходится к $f(t, x, v)$ в $L^1_{\text{loc}}(\Pi \times \mathbb{R})$ (без выделения подпоследовательности).

Список литературы

1. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР. 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
2. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. *Lions P. L., Perthame B., Tadmor E.* A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations // J. Amer. Math. Soc. 1994. V. 7. № 1. P. 169–191.
4. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics. Heriot-Watt Symposium. V. 4, 1979. P. 136–212.
5. *DiPerna R. J.* Generalized solutions to conservation laws, in system of nonlinear partial differential equations // NATO ASI Series / ed. J. M. Ball: D. Reidel Pub. Co., 1983.
6. *DiPerna R. J.* Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.
7. *Панов Е. Ю.* Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991.
8. *Панов Е. Ю.* Сильные мерозначные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка с ограниченной мерозначной начальной функцией // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем, мех. 1993. № 1. С. 20–23.
9. *Панов Е. Ю.* О мерозначных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 107–148.
10. *Панов Е. Ю.* О последовательностях мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 2. С. 87–106.
11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
12. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

Новгородский государственный университет

Поступила в редакцию
06.02.1996