Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства краевой задачи Орра–Зоммерфельда, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 129–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:43:13

УДК 517.9

С. А. Степин

Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства краевой задачи Орра–Зоммерфельда

В работе предложен новый подход к исследованию асимптотического поведения (в частности, степени неортогональности) собственных и присоединенных функций несамосопряженных сингулярно возмущенных операторов и краевых задач; основное внимание уделено случаю, когда в результате сингулярного возмущения нарушается свойство нижней полунепрерывности спектра. В качестве модели перехода от дискретного спектра к непрерывному рассмотрена задача Штурма–Лиувилля с малым параметром при второй производной. Исследована локализация спектра и обнаружен рост показателя неортогональности системы собственных и присоединенных функций задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости.

Библиография: 25 названий.

Работа посвящена спектральному анализу несамосопряженной краевой задачи, возникающей при исследовании устойчивости плоскопараллельных течений вязкой жидкости, и, в частности, изучению спектральных свойств этой задачи в пределе исчезающей вязкости. С математической точки зрения этот вопрос принадлежит сингулярной (асимптотической) теории возмущений и тесно связан с (гидродинамической) проблемой описания перехода течения жидкости из ламинарного состояния в турбулентное (см. [1], [2]).

Движение несжимаемой вязкой жидкости в полосе $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ описывается следующим уравнением для функции тока Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi = \frac{1}{R} \Delta^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x}, \quad (1)$$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, R – число Рейнольдса (величина, обратно пропорциональная вязкости жидкости). Рассматриваются малые возмущения стационарного течения с гладким профилем скорости $u(x)$; при этом функцию тока возмущенного течения (в линейном приближении по величине возмущения) будем искать в виде $\Psi(x, z, t) = \psi_0(x) + \psi(x)e^{i\alpha(z-ct)}$, $\psi'_0(x) = u(x)$. В результате линеаризации уравнения (1) относительно стационарного течения для амплитуды $\psi(x)$ получим (см., например, [3]) уравнение Орра–Зоммерфельда

$$\frac{1}{i\alpha R} (\psi^{(4)} - 2\alpha^2 \psi'' + \alpha^4 \psi) = (u - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - u'' \psi, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

где c – спектральный параметр, $\alpha > 0$ – параметр задачи; предполагается, что на границах полосы $|x| \leq 1$ выполнены условия

$$\psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0. \quad (3)$$

Спектр краевой задачи (2), (3) состоит из собственных значений (с.з.) конечной кратности с единственной точкой накопления на $-i\infty$, а соответствующая система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) полна в пространстве функций с конечной энергетической нормой [4]. Отметим, что в пределе нулевой вязкости задача (2), (3) превращается в краевую задачу для уравнения Рэлея:

$$(u - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - u'' \psi = 0, \quad (4)$$

$$\psi(\pm 1) = 0, \quad (5)$$

спектр которой содержит непрерывную компоненту (см. [5]). В связи с этим представляет интерес вопрос о зависимости спектра и системы с.п.ф. задачи (2), (3) от числа Рейнольдса R , когда $R \rightarrow \infty$.

Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной хорошо изучено в рамках сингулярной теории возмущений (см. [2], а также [13], [14]); для уравнения (2) эти вопросы непосредственно связаны с т.н. эффектом пограничного слоя. В настоящей работе предложен новый подход к исследованию асимптотического поведения (в частности, получены оценки степени неортогональности) с.п.ф. несамосопряженных сингулярно возмущенных операторов и краевых задач. Подходящим для этих целей средством спектрального анализа (в контексте перехода от дискретного спектра к непрерывному) оказывается сильная резольвентная сходимость (см. [6], [8]).¹ Известно, что в самосопряженном случае при непрерывном в смысле сильной резольвентной сходимости изменении оператора спектр полунепрерывен снизу; применительно к сингулярно возмущенным дифференциальным операторам этот вопрос детально рассмотрен в [7]. В несамосопряженной ситуации свойство полунепрерывности спектра при сингулярном возмущении оператора может нарушаться (спектральный скачок); это обстоятельство связано с сильной неортогональностью соответствующей системы корневых векторов. В свою очередь, учет неортогональности системы с.п.ф. задачи (2), (3) позволяет уточнить асимптотику по времени решения соответствующего эволюционного уравнения.

В § 1 сформулированы основные результаты работы (теоремы 1 и 2): оценки снизу для скорости роста степени неортогональности системы с.п.ф. задачи Орра–Зоммерфельда при $R \rightarrow \infty$ и модельной задачи Штурма–Лиувилля с малым параметром при старшей производной. Доказательство теоремы 2 приведено в § 2; там же установлена связь спектрального скачка и сильной неортогональности корневых векторов сингулярно возмущенных операторов в общей операторной постановке. Далее, с помощью асимптотических формул для решений уравнения (2) в § 3 показано существование спектрального скачка в задаче (2), (3), что позволяет доказать теорему 1. Заключительный § 4 дополняет теорему 2 оценкой сверху для степени неортогональности с.п.ф. модельной задачи Штурма–Лиувилля. Эти результаты были анонсированы в [11], [25].

¹В [8] используется термин “обобщенная сильная сходимость”.

§ 1. Операторная формулировка задачи (2), (3) и основные результаты

При исследовании спектральных свойств задачи (2), (3) удобно перейти к операторной форме ее записи с помощью замены $y = \Delta_\alpha \psi$, где Δ_α – дифференциальный оператор $\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2$ с нулевыми граничными условиями на концах отрезка $[-1, 1]$. В результате такой замены уравнение (2) преобразуется к виду

$$-\frac{1}{i\alpha R}(y'' - \alpha^2 y) + uy - u''\Delta_\alpha^{-1}y = cy,$$

граничные условия $\psi'(\pm 1) = 0$ превращаются в соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh} \alpha(1 \pm x)}{\operatorname{sh} 2\alpha} y(x) dx = 0, \quad (6)$$

которые (в наших предположениях) эквивалентны следующим:

$$\int_{-1}^1 e^{\pm \alpha x} y(x) dx = 0. \quad (6')$$

В результате (2), (3) сводится к задаче на с.з. для действующего в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ оператора

$$L_\varepsilon = i\varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right) + u - u''\Delta_\alpha^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha R},$$

область определения которого состоит из элементов линеала $\{y, y' \text{ абсолютно непрерывны, } y'' \in \mathcal{L}_2(-1, 1)\}$, подчиненных двум дополнительным условиям (6) (или (6')).

В дальнейшем используется следующее утверждение о (спектральной) эквивалентности краевой задачи на с.з. (2), (3) и приведенной выше ее операторной формулировки.²

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для каждого $\varepsilon > 0$:

- 1) L_ε – оператор с компактной резольвентой;
- 2) $\sigma(L_\varepsilon)$ совпадает с множеством с.з. соответствующей задачи (2), (3);
- 3) операторы Δ_α и Δ_α^{-1} переводят друг в друга цепочки с.п.ф. задачи (2), (3) и оператора L_ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c \in \mathbb{C}$ не является с.з. задачи (2), (3), то (замкнутый) оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$i\varepsilon \left(\frac{d^4}{dx^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha^4 \right) + (u - c) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right) - u''$$

и граничными условиями (3), обратим в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ при помощи функции Грина $G(x, \xi, c)$ (см. [8]). Отсюда непосредственно видно, что уравнение $(L_\varepsilon - cE)y = f$ разрешимо для всех $f \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$, решение единственно и задается формулой

$$y(x) = \Delta_\alpha \int_{-1}^1 G(x, \xi, c) f(\xi) d\xi.$$

²Всюду ниже $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A .

Таким образом, обратный к $L_\varepsilon - cE$ представляет собой интегральный оператор с непрерывным ядром $\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)G(x, \xi, c)$ и, следовательно, резольвента $(L_\varepsilon - cE)^{-1}$ компактна в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$. Тем самым установлено, что спектр $\sigma(L_\varepsilon)$ дискретный и состоит из нормальных с.з., принадлежащих спектру задачи (2), (3). Если же c — с.з. задачи (2), (3) и ψ — соответствующая с.ф., то $\Delta_\alpha \psi$ — с.ф. оператора L_ε и $c \in \sigma(L_\varepsilon)$. Обратно, если y — с.ф. оператора L_ε , то $\Delta_\alpha^{-1}y$ — с.ф. задачи (2), (3) с тем же с.з.; несложная проверка устанавливает аналогичное соответствие между присоединенными функциями.

Известно [9], см. также [23], [24], что система $\{\varphi_n\}$ собственных и присоединенных функций задачи на с.з. для дифференциального оператора на конечном интервале (a, b) , порожденного усиленно регулярными краевыми условиями, образует в пространстве $\mathcal{L}_2(a, b)$ базис Рисса, т.е. базис, эквивалентный ортонормированному; соответствующая биортогональная система $\{\chi_n\}$ представляет собой набор с.п.ф. сопряженной задачи. При этом обе системы бesselевы; это означает, что для произвольной квадратично интегрируемой на (a, b) функции f справедливы оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \chi_n)|^2 \leq M \|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq \widetilde{M} \|f\|^2.$$

В качестве констант бesselевости M и $\widetilde{M}$ можно выбрать числа $\|W\|^2$ и $\|W^{-1}\|^2$, где W — оператор, осуществляющий эквивалентность базиса $\{\varphi_n\}$ и ортонормированного базиса (ортгонализатор).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Степень неортогональности базиса Φ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ измеряется величинами $\|W\|$ и $\|W^{-1}\|$, где $W: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ — соответствующий ортогонализатор; число $\Upsilon := \|W\| \cdot \|W^{-1}\|$ назовем *константой риссовости* базиса Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина Υ не зависит от выбора ортогонализатора в $\mathfrak{H}$.

Вопрос о полноте, минимальности и базисности системы корневых функций краевой задачи на отрезке для уравнения

$$N\psi = \lambda P\psi,$$

где N и P — дифференциальные операторы порядков $n > p \geq 0$ соответственно, изучен в [10]; там, в частности, установлено, что с.п.ф. задачи Орра–Зоммерфельда образуют базис Рисса в пространстве $\{\psi \in W_2^2[-1, 1] : \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0\}$. В результате замены $y = \Delta_\alpha \psi$ отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ система с.п.ф. оператора L_ε образует в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ базис Рисса с дефектом 2, а именно, базис подпространства $\mathcal{L}$, задаваемого условиями (6').

Оператор L_ε , $\varepsilon > 0$, естественно рассматривать как сужение на $\mathcal{L} = \{e^{\pm \alpha x}\}^\perp$ сингулярно возмущенного оператора $L_0 = u - u''\Delta_\alpha^{-1}$, действующего в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$:

$$L_\varepsilon = (L_0 + \varepsilon V)|_{\mathcal{L}},$$

где возмущение V есть дифференциальный оператор $i\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)$ с максимальной областью определения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $u(z)$ аналитична в комплексной окрестности отрезка $[-1, 1]$ и достаточно близка к функции $u_0(z) \equiv z$ в этой окрестности относительно метрики равномерной сходимости. Тогда константа риссовости $\Upsilon(\varepsilon)$ базиса в $\mathcal{L}$, составленного из корневых векторов оператора L_ε , неограничена при $\varepsilon \downarrow 0$; более того, для почти всех $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $\Upsilon(\varepsilon) \geq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/3}$.

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы 1 для константы риссовости $\Upsilon(R)$ базиса из с.п.ф. задачи (2), (3) в подпространстве $W_2^2[-1, 1]$, заданном условиями (3), выполнена оценка $\Upsilon(R) \geq \text{const} \cdot R^{1/3}$ при п.в. $R > 0$.

Особенности асимптотического поведения спектра, корневых векторов и резольвенты, характерные для несамосопряженных сингулярно возмущенных операторов и краевых задач, проявляются (см. [11]) на примере следующей задачи Штурма–Лиувилля

$$i\varepsilon y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (7)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (8)$$

где λ – спектральный параметр, $\varepsilon > 0$. Обозначим через T_ε , $\varepsilon > 0$, оператор $i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, отвечающий задаче (7)–(8) и действующий в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$. Отметим, что в случае профиля $u_0(x) \equiv x$ (течение Куэтта) уравнение Орра–Зоммерфельда в переменной $y = \Delta_\alpha \psi$ после надлежащей замены спектрального параметра превращается в уравнение (7) с $q(x) \equiv x$. В следующем разделе на примере модельной задачи (7)–(8) будет изложена схема предлагаемого подхода к изучению степени неортогональности с.п.ф. сингулярно возмущенных операторов и краевых задач в зависимости от параметра возмущения.

ТЕОРЕМА 2. Для базиса Рисса в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$, составленного из с.п.ф. задачи (7)–(8) с аналитическим потенциалом, равномерно близким к $u_0(z)$ в комплексной окрестности отрезка $[-1, 1]$, имеем: $\Upsilon(\varepsilon) \geq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/3}$ при почти всех $\varepsilon > 0$.

§ 2. Несамосопряженные сингулярные возмущения и резольвентная сходимость

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 начнем с утверждения о спектральном скачке для задачи (7)–(8) (предложение 3). Этот существенно несамосопряженный эффект обнаруживается (см. [11]) уже в случае $q(x) \equiv x$: при $\varepsilon \downarrow 0$ с.з. операторов семейства T_ε не сгущаются к отрезку, заполненному непрерывным спектром предельного (в смысле сильной резольвентной сходимости) оператора умножения на независимую переменную.

Далее предполагается, что потенциал q допускает аналитическое продолжение в комплексную окрестность отрезка $[-1, 1]$; сохраним за этим продолжением прежнее обозначение. Будем считать, что функция $q(z)$ настолько близка к z в рассматриваемой окрестности относительно равномерной метрики,³ что для значений параметра λ из малой окрестности U точки $\lambda = 0$ уравнение (7) имеет (см. [2], [12])

³Это требование носит технический характер и налагается для простоты изложения.

фундаментальную систему решений (ФСР) $y_j(z, \lambda)$, $j = 1, 2$, с асимптотиками ($\varepsilon \downarrow 0$)

$$\begin{aligned} y_1(z, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{q(z) - \lambda}} \exp \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1}^z \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta \right) [1 + O(\sqrt{\varepsilon})], \\ y_2(z, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{q(z) - \lambda}} \exp \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_z^1 \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta \right) [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] \end{aligned} \quad (9)$$

(здесь подразумеваются арифметические ветви корней, отвечающие разрезу вдоль луча $\arg z = \pi/2$). В рассматриваемой ситуации ($q(z) \sim z$) можно утверждать, что асимптотики (9) выполнены равномерно по параметру $\lambda \in U$ и по переменной z в некоторой подобласти области голоморфности q , содержащей точки ± 1 и не содержащей 0.

Формулы (9) позволяют сделать вывод о зоне, свободной от с.з. задачи (7)–(8) при малых $\varepsilon > 0$; этот вопрос сводится к исследованию расположения нулей характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) := y_1(1, \lambda)y_2(-1, \lambda) - y_1(-1, \lambda)y_2(1, \lambda).$$

Воспользуемся формулами (9) для нахождения асимптотики $\Delta(\lambda)$ при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{q(1) - \lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{q(-1) - \lambda}} \\ &\times \left\{ \exp \left(2 \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1}^1 \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta \right) - 1 \right\} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] \end{aligned}$$

с равномерной по $\lambda \in U$ оценкой остатка. С учетом условия близости $q(z)$ к z отсюда непосредственно видно, что равномерно по $\lambda \in U$ определитель $\Delta(\lambda)$ отделен от нуля при $\varepsilon \downarrow 0$, т.е. найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\Delta(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in U$, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тем самым для потенциалов q рассматриваемого класса установлено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Существуют числа $\rho > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что круг $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}$ не содержит с.з. задачи (7)–(8), если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Исходя из этого факта и дополнительных сведений о скорости резольвентной сходимости семейства T_ε при $\varepsilon \downarrow 0$ к оператору умножения на q , можно оценить степень неортогональности системы с.п.ф. задачи (7)–(8). Другой способ это сделать (без вычисления резольвенты оператора T_ε) основан на использовании следующей оценки.

ЛЕММА 1. *Если корневые векторы оператора A с дискретным спектром ограниченной кратности образуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ базис Рисса, то для произвольного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ выполнено неравенство*

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leqslant \Upsilon \cdot \mu \cdot \rho^{-\mu}, \quad (10)$$

где Υ – константа риссовости базиса из корневых векторов, μ – максимальная кратность с.з. оператора A , $\rho = \min\{1, \text{dist}(\lambda, \sigma(A))\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\lambda_\nu\}$ – последовательность с.з. оператора A , в которой каждое с.з. повторяется столько раз, какова его геометрическая кратность, и $\{\varphi_j^\nu\}_{j=1}^{\mu_\nu}$ – соответствующие жордановы цепочки, образующие полный набор Φ корневых векторов оператора A . Наряду с базисом Φ рассмотрим биортогональную систему X , также являющуюся базисом Рисса в $\mathfrak{H}$. Произвольный элемент $h \in \mathfrak{H}$ представим в виде

$$h = \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} (h, \chi_j^\nu) \varphi_j^\nu,$$

причем выполнена двусторонняя оценка

$$\widetilde{M}^{-1} \|h\|^2 \leq \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} |(h, \chi_j^\nu)|^2 \leq M \|h\|^2 \quad (11)$$

с константами $M = \|W\|^2$ и $\widetilde{M} = \|W^{-1}\|^2$, где W – ортогонализатор базиса Φ , $\{\chi_j^\nu\}_{j=1}^{\mu_\nu}$ – элементы системы X , отвечающие цепочке $\{\varphi_j^\nu\}_{j=1}^{\mu_\nu}$. Нетрудно убедиться, что резольвента оператора A действует по формуле

$$(\lambda E - A)^{-1} h = \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} \left(\sum_{k=j}^{\mu_\nu} \frac{(h, \chi_k^\nu)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{k-j+1}} \right) \varphi_j^\nu.$$

Ввиду свойства (11), а также простой оценки

$$\sum_{j=1}^{\mu_\nu} \left| \sum_{k=j}^{\mu_\nu} \frac{(h, \chi_k^\nu)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{k-j+1}} \right|^2 \leq \frac{\mu_\nu^2}{\rho^{2\mu_\nu}} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} |(h, \chi_j^\nu)|^2$$

справедлива следующая последовательность неравенств, доказывающая утверждение леммы,

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda E)^{-1} h\|^2 &\leq \widetilde{M} \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} \left| \sum_{k=j}^{\mu_\nu} \frac{(h, \chi_k^\nu)}{(\lambda - \lambda_\nu)^{k-j+1}} \right|^2 \\ &\leq \widetilde{M} \cdot \frac{\mu^2}{\rho^{2\mu}} \sum_{\nu} \sum_{j=1}^{\mu_\nu} |(h, \chi_j^\nu)|^2 \\ &\leq M \widetilde{M} \frac{\mu^2}{\rho^{2\mu}} \|h\|^2 = \Upsilon^2 \cdot \frac{\mu^2}{\rho^{2\mu}} \|h\|^2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях леммы 1 константа риссовости Υ системы Φ допускает оценку

$$\Upsilon \geq \mu^{-1} \cdot \rho^\mu \sup_{0 \neq f \in D(A)} \frac{\|f\|}{\|Af - \lambda f\|}. \quad (12)$$

Использованию неравенства (12) для оценки константы риссовости с.п.ф. задачи (7)–(8) предположим следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. Функция максимальной кратности $\mu(\varepsilon)$ с.з. задачи (7)–(8) существенно ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известным результатам теории возмущений (см. [15], [8]) все с.з. задачи (7)–(8), начиная с некоторого, – однократные и остаются однократными при малом изменении параметра ε . Таким образом, локально по параметру ε достаточно рассмотреть конечное множество с.з., представимых ветвями аналитических функций с возможными алгебраическими особенностями, т.е. ветвлениями конечного порядка (см. [8]). Отсюда непосредственно видно, что множество исключительных значений ε (т.е. тех, при которых происходят столкновения с.з.) не более чем счетно. Покажем, что на дополнении к этому множеству функция $\mu(\varepsilon)$ ограничена. Для этого введем величину $\nu(\varepsilon)$, равную разности суммарной кратности и количества кратных с.з. задачи (7)–(8). Функция $\nu(\varepsilon)$ постоянна для значений $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, не являющихся исключительными; действительно, при каждом столкновении сохраняется количество с.з., участвующих в столкновении, и их суммарная кратность (см. [8]). Остается заметить, что $\mu(\varepsilon) \leq \nu(\varepsilon) + 1$. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, ограничимся рассмотрением потенциалов $q(x)$ настолько близких к линейной функции, чтобы выполнялось заключение предложения 3, где $\rho \leq 1$. Тогда согласно результату [9] и оценке (12) применительно к $A = T_\varepsilon$ и $\lambda = 0$ имеем неравенство

$$\Upsilon(\varepsilon) \geq \mu(\varepsilon)^{-1} \cdot \rho^{\mu(\varepsilon)} \cdot \sup_{0 \neq f \in D(T_\varepsilon)} \frac{\|f\|}{\|T_\varepsilon f\|}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Рассмотрим следующее семейство функций, локализованных в окрестности точки $x_0 = q^{-1}(0)$:

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right), \quad \delta > 0,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\int_{-1}^1 |\varphi(t)|^2 dt = 1$; при этом, очевидно, $f_\delta \in D(T_\varepsilon)$ и $\|f_\delta\| = 1$, если $\delta > 0$ достаточно мало. Далее, выполним оценку

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f_\delta\|^2 &= \int_{-1}^1 |i\varepsilon f_\delta''(x) + q(x)f_\delta(x)|^2 dx \\ &\leq 2\frac{\varepsilon^2}{\delta^5} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi''\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \right|^2 dx + \frac{2}{\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| q(x) \varphi\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \right|^2 dx \\ &= 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \int_{-1}^1 |\varphi''(t)|^2 dt + 2 \int_{-1}^1 |q(x_0 + \delta t) \varphi(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где $\int_{-1}^1 |q(x_0 + \delta t) \varphi(t)|^2 dt = O(\delta^2)$, когда $\delta \rightarrow 0$. Положим здесь $\delta = \varepsilon^{1/3}$; тогда $\|T_\varepsilon f_\delta\| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/3}$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и, следовательно,

$$\frac{\|f_\delta\|}{\|T_\varepsilon f_\delta\|} \geq \frac{\text{const}}{\varepsilon^{1/3}}.$$

Остается заметить, что в силу леммы 2 величина $\mu(\varepsilon) \cdot \rho^{-\mu(\varepsilon)}$ существенно ограничена. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенное семейство $\{f_\delta(x)\}$ представляет собой последовательность Вейля (почти собственных) функций, отвечающих точке непрерывного спектра $\lambda = 0$ оператора умножения на q в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$.

Обнаруженный эффект (теорема 2) имеет место в общей операторной постановке. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ семейство замкнутых операторов $A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon V$, $\varepsilon > 0$, с дискретным спектром, являющихся сингулярными возмущениями оператора A_0 ; последнее означает “подчиненность” A_0 оператору V (см. [17], [18]). Предполагается, что $D(A_\varepsilon) = D(V) \subset D(A_0)$, $D(A_\varepsilon)$ – плотно в $\mathfrak{H}$. В качестве подходящей реализации рассматриваемой модели выделим следующий класс сингулярных возмущений: V – неограниченный нормальный оператор с компактной резольвентой, A_0 – оператор, подчиненный степени V , т.е. $\|A_0 \cdot V^{-\theta}\| < \infty$, $\theta < 1$, при этом подразумевается, что $D(A_0) \supset D(V^\theta)$, если $\theta > 0$, а в случае $\theta < 0$ налагается дополнительное требование $\|V^{-\theta/2} A_0 V^{-\theta/2}\| < \infty$. Допустим, что спектр оператора V содержится в некотором угле $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \alpha < \pi\}$ и состоит из с.з. с асимптотикой $\lambda_j(V) \sim \text{const} \cdot j^\beta$, $\beta > 0$. Согласно [16], [24] при условии $\beta(1 - \theta) \geq 1$ система корневых векторов оператора A_ε , $\varepsilon > 0$, образует базис Рисса со скобками в $\mathfrak{H}$. Введем обозначения: $\mu(\varepsilon)$ – точная верхняя грань алгебраических кратностей с.з., составляющих спектр $\sigma(A_\varepsilon)$; $\Upsilon(\varepsilon)$ – степень неортогональности системы корневых векторов оператора A_ε , $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество $(A_0 - \lambda E)D(V)$ плотно в $\mathfrak{H}$ для некоторого $\lambda \in \rho(A_0) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A_0)$ и существует последовательность $\{\lambda_\nu\} \subset \rho(A_0)$ такая, что $\lambda^* := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu \in \sigma(A_0)$ и $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \text{dist}(\lambda^*, \sigma(A_\varepsilon)) > 0$. Тогда

$$\mu(\varepsilon)\Upsilon(\varepsilon) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что величины $\mu(\varepsilon)$ и $\Upsilon(\varepsilon)$ ограничены, когда $\varepsilon \downarrow 0$. Для резольвенты $R_\varepsilon(\lambda) = (A_\varepsilon - \lambda E)^{-1}$ справедлива оценка (10) и, следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\|R_\varepsilon(\lambda)\| \leq \Upsilon(\varepsilon) \cdot \mu(\varepsilon) \cdot \delta^{-\mu(\varepsilon)}, \quad (13)$$

если $|\lambda - \lambda^*| < \delta$, $\delta = \min\{1, \frac{1}{3} \cdot \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \text{dist}(\lambda^*, \sigma(A_\varepsilon))\}$. Таким образом, $\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \|R_\varepsilon(\lambda)\| < \infty$, если $|\lambda - \lambda^*| < \delta$, т.е. δ -окрестность точки λ^* принадлежит области ограниченности (см. [8]) семейства $\{R_\varepsilon(\lambda), \varepsilon > 0\}$. Далее, поскольку для $f \in D(V)$ имеем $A_\varepsilon f \rightarrow A_0 f$, $\varepsilon \downarrow 0$, и множество $(A_0 - \lambda E)D(V)$, $\lambda \in \rho(A_0)$, плотно в $\mathfrak{H}$, согласно [8] можно утверждать сильную резольвентную сходимость $R_\varepsilon(\lambda) \rightarrow R_0(\lambda)$, $\varepsilon \downarrow 0$, если $\lambda \in \rho(A_0)$, $|\lambda - \lambda^*| < \delta$. В частности, $R_\varepsilon(\lambda_\nu)$ сходится сильно к $R_0(\lambda_\nu)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ для достаточно больших $\nu \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\|R_0(\lambda_\nu)\| \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow \infty$, так как $\lambda_\nu \rightarrow \lambda^* \in \partial\sigma(A_0)$. В результате приходим к следующему выводу: величина $\|R_\varepsilon(\lambda_\nu)\|$ неограничена, когда $\varepsilon \downarrow 0$ и $\nu \rightarrow \infty$. Ввиду оценки (13) это, очевидно, противоречит предположению об одновременной ограниченности $\Upsilon(\varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Теорема доказана.

Условие плотности $(A_0 - \lambda E)D(V)$ в $\mathfrak{H}$ для некоторого $\lambda \in \rho(A_0)$ в формулировке теоремы 3 можно заменить явным требованием сильной резольвентной сходимости: $R_\varepsilon(\lambda_\nu) \rightarrow R_0(\lambda_\nu)$, $\varepsilon \downarrow 0$; более того, как видно из доказательства, для наших целей достаточно сходимости норм $\|R_\varepsilon(\lambda_\nu)f\| \rightarrow \|R_0(\lambda_\nu)f\|$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3'. Пусть существует последовательность $\{\lambda_\nu\} \subset \rho(A_0)$ такая, что

- 1) $\lambda^* := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu \in \sigma(A_0)$ и $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \text{dist}(\lambda^*, \sigma(A_\varepsilon)) > 0$;
- 2) $\|(A_\varepsilon - \lambda_\nu E)^{-1} f\| \rightarrow \|(A_0 - \lambda_\nu E)^{-1} f\|$ при $\varepsilon \downarrow 0$ для элементов f множества, плотно в $\mathfrak{H}$.

Тогда $\mu(\varepsilon) \Upsilon(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \downarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если найдется последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что $\mu(\varepsilon_n) \leq \text{const}$, то в предположениях теорем 3 и 3' константа риссовости $\Upsilon(\varepsilon)$ неограниченна при $\varepsilon \downarrow 0$.

§3. Спектральный скачок и степень неортогональности системы с.п.ф. задачи Орра–Зоммерфельда

Изложенный в предыдущем параграфе (на примере модельной краевой задачи (7)–(8)) подход к изучению степени неортогональности корневых векторов несамосопряженных сингулярно возмущенных операторов применим теперь к задаче (2), (3) и соответствующему оператору L_ε (см. §1). При этом мы ограничимся рассмотрением функций $u(x)$, допускающих аналитическое продолжение $u(z)$ в окрестность отрезка $[-1, 1]$ и достаточно близких к линейной функции в равномерной метрике. Зафиксируем комплексную окрестность $\mathcal{O}$ отрезка $[-1, 1]$ и обозначим через $\mathfrak{A}$ множество функций, аналитических в $\mathcal{O}$. Имея в виду воспользоваться асимптотическими формулами для решений уравнения (2) при $\alpha R \rightarrow \infty$, сделаем необходимые приготовления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [20]). Для $u \in \mathfrak{A}$ и $c \in \mathbb{C}$ кусочно-гладкий путь $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}$, $\pi(0) = -1$, $\pi(1) = 1$, назовем *c-допустимым*, если $u(z) \neq c$, $z \in \pi([0, 1]) =: \gamma$ и при интегрировании вдоль γ величина $\text{Re} \int_{-1}^z \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta$ монотонно возрастает; здесь и всюду ниже выбранная ветвь арифметического корня $\sqrt{w}$ соответствует разрезу по лучу $\arg w = 3\pi/4$.

Далее, введем в рассмотрение классы $\mathfrak{A}_\theta = \{f \in \mathfrak{A} : \sup_{z \in \mathcal{O}} |f(z) - z| < \theta\}$, $\theta \in \mathbb{R}^+$, и с их помощью сформулируем следующее несложное утверждение о существовании допустимого пути. Найдутся $\theta_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для произвольной функции $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$ и любого $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$, в качестве *c-допустимого* пути может быть выбран один и тот же (т.е. не зависящий от u и c) путь π такой, что соответствующая кривая γ получается из отрезка $[-1, 1]$ деформацией в нижнюю полуплоскость в окрестности точки $z = 0$. Это видно из формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_{-1}^z \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta &= \sqrt{i} \frac{2}{3} \frac{(u(z) - c)^{3/2}}{u'(z)} \\ &\quad - \sqrt{i} \frac{2}{3} \frac{(u(-1) - c)^{3/2}}{u'(-1)} + \sqrt{i} \frac{2}{3} \int_{-1}^z (u(\zeta) - c)^{3/2} \frac{u''(\zeta)}{u'(\zeta)^2} d\zeta \end{aligned}$$

и существования 0-допустимого пути, указанного выше вида, для $u(z) \equiv z$. Построенную таким образом кривую γ будем называть *допустимой*.

Для наших целей (предложение 4 ниже) потребуется некоторое уточнение известных (см., например, [21], [22]) асимптотик ФСР уравнения Орра–Зоммерфельда.

ЛЕММА 3. Для $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$, существует ФСР уравнения (2) со следующими асимптотическими представлениями при $z \in \gamma$ и $\alpha R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= (u(z) - c)^{-5/4} \exp \left\{ \sqrt{\alpha R} \int_{-1}^z \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta \right\} [1 + O((\alpha R)^{-1/2})], \\ \psi_2(z) &= (u(z) - c)^{-5/4} \exp \left\{ \sqrt{\alpha R} \int_z^1 \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta \right\} [1 + O((\alpha R)^{-1/2})], \\ \psi_3(z) &= \phi_1(z) + O((\alpha R)^{-1}), \\ \psi_4(z) &= \phi_2(z) + O((\alpha R)^{-1});\end{aligned}\tag{14}$$

здесь интегрирование ведется вдоль допустимой кривой γ , ϕ_1 и ϕ_2 — линейно независимые решения уравнения (4). Оценки остатков в приведенных асимптотиках — равномерные по переменной $z \in \gamma$, параметру $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$, и для функций $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$, формулы (14) можно дифференцировать по z с сохранением равномерных оценок остаточных членов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности любой точки, отличной от точки поворота $z_c = u^{-1}(c)$ и лежащей в области голоморфности $u(z)$, асимптотику ФСР уравнения (2) можно найти методом, изложенным в [2, гл. VII]. Вводя вектор-функцию

$$Y = (\psi, \psi', \psi'' - \alpha^2 \psi, \varepsilon(\psi''' - \alpha^2 \psi')), \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1/2},$$

переходом от уравнения (2) к системе

$$\varepsilon \frac{dY}{dz} = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \alpha^2 \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ iu'' & 0 & \alpha^2 \varepsilon^2 + i(u - c) & 0 \end{pmatrix}.$$

Это векторное дифференциальное уравнение с помощью подходящей замены удается расщепить на три уравнения, два из которых будут скалярными, а третье оказывается системой, превращающейся в пределе $\varepsilon \downarrow 0$ в вырожденное по отношению к (2) уравнение (4). Описанная схема реализована в [22], где найдены асимптотики при $\varepsilon \downarrow 0$ для некоторой ФСР $\{Y_j\}_{j=1}^4$ уравнения $\varepsilon Y' = AY$ на кривой γ . Введем обозначения

$$\begin{aligned}\chi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{r(z)}} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\}, \\ \chi_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{r(z)}} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_z^1 r(\zeta) d\zeta \right\};\end{aligned}$$

здесь $r = \sqrt{i(u - c)}$ и интегрирование ведется вдоль γ . Согласно [22] для первых двух компонент вектор-функций $Y_j(z)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $z \in \gamma$, при $\varepsilon \downarrow 0$ справедливы представления:

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= \chi_1(z) \cdot O(1), & \psi'_1(z) &= \frac{1}{\varepsilon r(z)} \chi_1(z) (1 + O(\varepsilon)), \\ \psi_2(z) &= \chi_2(z) \cdot O(1), & \psi'_2(z) &= -\frac{1}{\varepsilon r(z)} \chi_2(z) (1 + O(\varepsilon)), \\ \psi_3(z) &= \phi_1(z) + O(\varepsilon^2), & \psi'_3(z) &= \phi'_1(z) + O(\varepsilon^2), \\ \psi_4(z) &= \phi_2(z) + O(\varepsilon^2), & \psi'_4(z) &= \phi'_2(z) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

с оценками остаточных членов, равномерными по $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$, $z \in \gamma$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$; при этом $\psi_1(-1) = (r(-1))^{-5/2}$, $\psi_2(1) = (r(1))^{-5/2}$.

Исходя из равенства $\psi'_1 = \frac{1}{\varepsilon r} \chi_1 \cdot (1 + O(\varepsilon))$, можно уточнить асимптотику ψ_1 , $\varepsilon \downarrow 0$. Для этого замечаем, что $\frac{1}{\varepsilon r} \chi_1 = \left(\frac{1}{r^2} \chi_1 \right)' \cdot (1 + O(\varepsilon))$ и, следовательно,

$$\psi'_1(z) - \left(\frac{1}{r(z)^2} \chi_1(z) \right)' = O(1) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\}, \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

где $z \in \gamma$. В результате интегрирования последнего соотношения, с учетом равенства $\psi_1(-1) = (r(-1))^{-5/2} = \frac{1}{r(-1)^2} \cdot \chi_1(-1)$, имеем

$$\psi_1(z) - \frac{1}{r(z)^2} \chi_1(z) = O(1) \cdot \int_{-1}^z \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\} |dz|.$$

Для преобразования и оценки интеграла в правой части введем параметризацию дуги γ посредством новой переменной $s = \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta$, $z \in \gamma$, и рассмотрим со-

ответствующий якобиан $J = \frac{ds}{|dz|} = \frac{ds}{|dw|} \cdot \frac{|dw|}{|dz|}$, где $w(z) = \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta$. Поскольку $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$, образ $\tilde{\gamma}$ допустимой кривой γ под действием отображения $z \mapsto w(z)$ обладает тем свойством, что $s = \operatorname{Re} w$ монотонно возрастает вдоль $\tilde{\gamma}$ и, не ограничивая общности, можно считать выполненным условие $\frac{ds}{|dw|} \geq k > 0$, $w \in \tilde{\gamma}$. Кроме того,

$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |u(z) - c|^{1/2} \geq \varkappa$ с некоторым $\varkappa > 0$, если $z \in \gamma$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$. Таким образом, якобиан J на γ отделен от нуля равномерно по $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$.

Учитывая это и делая замену $|dz| = \frac{1}{J} ds$, имеем

$$\int_{-1}^z \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\} |dz| = O(\varepsilon) \left[\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\} - 1 \right],$$

где $z \in \gamma$ и $\varepsilon \downarrow 0$; остается заметить, что

$$\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta \right\} = O(1) \cdot \frac{1}{r(z)^2} \chi_1(z)$$

и, тем более,

$$1 = O(1) \cdot \frac{1}{r(z)^2} \chi_1(z), \quad z \in \gamma,$$

в силу монотонного возрастания величины $\operatorname{Re} \int_{-1}^z r(\zeta) d\zeta$ вдоль γ .

Итак, в результате интегрирования равенства $\psi'_1 = \frac{1}{\varepsilon r} \chi_1 \cdot (1 + O(\varepsilon))$ получена асимптотика

$$\psi_1(z) = \frac{1}{r(z)^2} \cdot \chi_1(z) \cdot (1 + O(\varepsilon)), \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

с равномерной (по $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$, $z \in \gamma$ и $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$) оценкой остатка. Аналогично, посредством интегрирования равенства $\psi'_2 = -\frac{1}{\varepsilon r} \chi_2 \cdot (1 + O(\varepsilon))$ с учетом граничного условия $\psi_2(1) = (r(1))^{-5/2}$ уточняется асимптотика ψ_2 при $\varepsilon \downarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существуют числа $\theta > 0$, $\rho > 0$ и $R_\alpha > 0$ такие, что для $u \in \mathfrak{A}_\theta$ круг $\{c \in \mathbb{C} : |c| < \rho\}$ не содержит с.з. задачи (2)–(3) при $R > R_\alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что с.з. задачи (2)–(3) совпадают с нулями характеристического определителя $\Delta(c, \alpha, R) = \det\left(\psi_j^{\left(\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\right)}((-1)^k)\right)$ как функции спектрального параметра; здесь $\{\psi_j(z)\}_{j=1}^4$ – фундаментальная система решений соответствующего уравнения (2). Формулы (14) позволяют для значений c , принадлежащих достаточно малой окрестности нуля, вычислить асимптотику $\Delta(c, \alpha, R)$ при $R \rightarrow \infty$ (α фиксировано):

$$\Delta(c, \alpha, R) = \frac{i\alpha R}{(u(1) - c)^{3/4}(u(-1) - c)^{3/4}} \times \exp\left\{2\sqrt{\alpha R} \int_{-1}^1 \sqrt{i(u(\zeta) - c)} d\zeta\right\} [\tilde{\Delta}(c, \alpha) + \eta(c, \alpha, R)], \quad (15)$$

где $\tilde{\Delta}(c, \alpha) = \det(\phi_j((-1)^k))$ – характеристический определитель “предельной” задачи (4)–(5); вследствие равномерности асимптотик (14) (лемма 3) для остаточного члена в (15) справедлива оценка $\eta(c, \alpha, R) = O((\alpha R)^{-1/2})$, равномерная по функции $u \in \mathfrak{A}_{\theta_0}$ и параметру $c \in \mathbb{C}$, $|c| < \delta$.

Допустим, что утверждение предложения неверно. Тогда существуют последовательность функций $\{u_\nu(z)\} \subset \mathfrak{A}$, равномерно в $\mathcal{O}$ сходящаяся к функции $u_0(z) \equiv z$ при $\nu \rightarrow \infty$, и числовые последовательности $\{c_\nu\}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} c_\nu = 0$, и $\{R_\nu\}$, $R_\nu > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu = \infty$, такие, что при $R = R_\nu$ значение $c = c_\nu$ – собственное для (2)–(3) с коэффициентом $u_\nu(z)$ в уравнении (2), и, следовательно, характеристический определитель $\Delta_\nu(c, \alpha, R)$ этой задачи обращается в нуль, когда $c = c_\nu$ и $R = R_\nu$. Построив решения уравнения (4) на допустимой кривой γ , составим характеристический определитель $\tilde{\Delta}_\nu(c, \alpha)$ соответствующей предельной задачи; согласно формуле (15) и равномерной оценке $\eta(c, \alpha, R)$ имеем:

$$\tilde{\Delta}_\nu(c_\nu, \alpha) = O(R_\nu^{-1/2}), \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Остается заметить, что каждое решение уравнения (4) на кривой γ зависит непрерывно 1) от параметра c , изменяющегося в малой окрестности нуля, и 2) от аналитического коэффициента $u(z)$, варьируемого в малой окрестности линейной функции относительно метрики равномерной сходимости в $\mathcal{O}$. В результате приходим к следующему выводу: у предельной задачи (4)–(5), отвечающей коэффициенту $u_0(z) \equiv z$, характеристический определитель в точке $c = 0$ обращается в нуль. Это, очевидно, противоречит отсутствию точечного спектра у задачи Рэля $c u(z) \equiv z$. Доказательство окончено.

При условии близости функции u к u_0 точка $c = 0$ принадлежит непрерывному спектру краевой задачи Рэля и соответствующего оператора L_0 . Тем самым в предложении 4 установлен эффект “спектрального скачка” для задачи Орра–Зоммерфельда при $R \rightarrow \infty$. Сопоставление этого факта и оценки нормы резольвенты $(L_\varepsilon - \lambda E)^{-1}$ через расстояние от λ до спектра $\sigma(L_\varepsilon)$ (см. § 2) позволяет оценить степень неортогональности системы корневых векторов оператора L_ε , отвечающего задаче (2)–(3).

При этом понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2'. Максимальная кратность $\mu(R)$ с.з. задачи (2)–(3) существенно ограничена при $R > 0$.

Ввиду асимптотической простоты с.з. задачи (2)–(3) (см. [19]) и локально-аналитической их зависимости от параметра R сформулированное утверждение устанавливается так же, как и лемма 2.

СЛЕДСТВИЕ. Для почти всех $\varepsilon > 0$ максимальная кратность $\mu(\varepsilon)$ с.з. оператора L_ε равномерно ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть функция u настолько близка к линейной, что согласно предложениям 4 и 1 некоторый круг $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}$, $\rho \leq 1$, не содержит с.з. оператора L_ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = (\alpha R_\alpha)^{-1}$. Тогда в силу оценки (12) применительно к оператору L_ε , действующему в $\mathcal{L}_2(-1, 1)$, для $f \in \mathcal{L} = \{e^{\pm \alpha x}\}^\perp$ имеем неравенство:

$$\frac{\|L_\varepsilon^{-1}f\|}{\|f\|} \leq \Upsilon(\varepsilon) \cdot \mu(\varepsilon) \cdot \rho^{-\mu(\varepsilon)}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Если $h \in C_0^\infty(-1, 1)$ и $u'h \in \mathcal{L}$, то, как нетрудно убедиться, $f = L_\varepsilon \Delta_\alpha h \in \mathcal{L}$ и

$$\frac{\|L_\varepsilon^{-1}f\|}{\|f\|} = \frac{\|\Delta_\alpha h\|}{\|L_\varepsilon \Delta_\alpha h\|}.$$

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство функций $h_\delta(x)$, $\delta > 0$, локализованных в окрестности точки $x_0 = u^{-1}(0)$:

$$h_\delta(x) = \frac{1}{u'(x)} \varphi_\delta \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right),$$

где $\varphi_\delta(t) = \chi(t) + c_\delta \cdot \eta(t)$, $\chi, \eta \in C_0^\infty(-1, 1)$ – четные функции, для которых

$$\int_{-1}^1 \chi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta(t) dt = 1 \quad \text{и} \quad c_\delta = - \int_{-1}^1 \operatorname{ch} \alpha \delta t \cdot \chi(t) dt \left(\int_{-1}^1 \operatorname{ch} \alpha \delta t \cdot \eta(t) dt \right)^{-1}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $u'h \in \mathcal{L}$, если $\operatorname{supp} h_\delta \subset (-1, 1)$, и, таким образом,

$$\Upsilon(\varepsilon) \geq \mu(\varepsilon)^{-1} \cdot \rho^{\mu(\varepsilon)} \cdot \frac{\|\Delta_\alpha h_\delta\|}{\|L_\varepsilon \Delta_\alpha h_\delta\|}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Здесь $\|\Delta_\alpha h_\delta\| \geq \|h_\delta''\| - \alpha^2 \|h_\delta\|$ и при достаточно малых $\delta > 0$ выполнены оценки:

$$\begin{aligned} \|h_\delta\|^2 &= \int_{-1}^1 |h_\delta(x)|^2 dx \leq a_0 \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi_\delta \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \right|^2 dx = a_0 \delta \int_{-1}^1 |\varphi_\delta(t)|^2 dt, \\ \|h_\delta''\|^2 &= \int_{-1}^1 |h_\delta''(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \frac{b}{\delta^4} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi_\delta'' \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \right|^2 dx \\ &\quad - 8 \frac{a_1}{\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi_\delta' \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \right|^2 dx - 4a_2 \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi_\delta \left(\frac{x - x_0}{\delta} \right) \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{b}{\delta^3} \int_{-1}^1 |\varphi_\delta''(t)|^2 dt - 8 \frac{a_1}{\delta} \int_{-1}^1 |\varphi_\delta'(t)|^2 dt - 4a_2 \delta \int_{-1}^1 |\varphi_\delta(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где

$$a_j = \max_{x \in [-1, 1]} \left[\left(\frac{1}{u'(x)} \right)^{(j)} \right]^2, \quad j = 0, 1, 2, \quad b = \left[\max_{x \in [-1, 1]} (u'(x))^2 \right]^{-1}.$$

Отсюда непосредственно видно, что $\|h_\delta\| \leq \text{const} \sqrt{\delta}$, $\|h''_\delta\| \geq \text{const} / \delta^{3/2}$, и, следовательно,

$$\|\Delta_\alpha h_\delta\| \geq \frac{\text{const}}{\delta^{3/2}},$$

если $\delta > 0$ достаточно мало. Аналогичным способом для малых $\delta > 0$ устанавливаются неравенства

$$\|\Delta_\alpha^2 h_\delta\| \leq \frac{\text{const}}{\delta^{7/2}}, \quad \|u \Delta_\alpha h_\delta\| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}},$$

и, стало быть, существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $\delta \in (0, \delta_0)$ справедлива оценка

$$\|L_\varepsilon \Delta_\alpha h_\delta\| \leq \varepsilon \|\Delta_\alpha^2 h_\delta\| + \|u \Delta_\alpha h_\delta\| + \|u'' h_\delta\| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}} \max \left(\frac{\varepsilon}{\delta^3}, 1 \right).$$

Положим здесь $\varepsilon = \delta^3$; тогда $\|L_\varepsilon \Delta_\alpha h_\delta\| \leq \text{const} / \sqrt{\delta}$ и, тем самым, установлено неравенство

$$\frac{\|\Delta_\alpha h_\delta\|}{\|L_\varepsilon \Delta_\alpha h_\delta\|} \geq \frac{\text{const}}{\delta}, \quad \delta = \sqrt[3]{\varepsilon},$$

если $\varepsilon \in (0, \delta_0^3)$. Для завершения доказательства теоремы 1 остается добавить, что согласно лемме 2' величина $\mu(\varepsilon)$ существенно ограничена.

СЛЕДСТВИЕ. В предположениях теоремы 1 константа рессовости $\Upsilon(R)$ базиса из с.п.ф. задачи (2)–(3) в подпространстве $\{\psi \in W_2^2[-1, 1] : \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) = 0\}$ неограничена при $R \rightarrow \infty$; существует число $R(\alpha)$ такое, что для почти всех $R > R(\alpha)$ выполнена оценка $\Upsilon(R) \geq \text{const} \cdot R^{1/3}$.

§ 4. О верхней границе скорости роста константы бесселевости

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы на примере модельной задачи

$$i\varepsilon y'' + p(x)y = \lambda y, \tag{7'}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{8'}$$

изучить вопрос об оценке сверху степени неортогональности системы корневых функций сингулярно возмущенных дифференциальных операторов. Все рассмотрения здесь будут проводиться в случае произвольного комплексного потенциала $p \in C[0, 1]$; при этом спектр задачи (7')–(8') расположен в полуполосе

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \min \text{Re } p \leq \text{Re } \lambda \leq \max \text{Re } p, \text{ Im } \lambda \leq \max \text{Im } p\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Для константы бесселевости базиса из с.п.ф. задачи (7')–(8') справедлива оценка

$$M(\varepsilon) \leq \frac{\text{const}(\alpha)}{\varepsilon^{1+\alpha}}, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

с произвольным $\alpha > 0$ и постоянной, зависящей от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Не ограничивая общности можно считать, что $\max_{x \in [0,1]} |p(x)| \leq 1$. Зафиксируем $\alpha > 0$, положим $N = N(\varepsilon) = 1 + \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha}} \right\rceil$, $\varepsilon \in (0, 1]$, и введем обозначение $\rho(\varepsilon) := \frac{1}{2i}(\nu_{N+1} + \nu_N)$, где $\nu_n = -i\varepsilon\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность с.з. задачи (7')–(8') с $p(x) \equiv 0$. В область $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda < \rho(\varepsilon)\}$ попадают точки ν_n с номерами $n > N$, причем $|\nu_{n+1} - \nu_n| \geq 2\pi^2$, если $n \geq N$.

Рассмотрим в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ семейство операторов $S(\varkappa) = T + \varkappa A$, где $T = i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2}$ с нулевыми граничными условиями, A — оператор умножения на $p(x)$. Покажем, что прямая $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda = \rho(\varepsilon)\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора $S(\varkappa)$ для каждого $\varkappa \in [0, 1]$. В самом деле, поскольку

$$\|(T - \lambda E)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))},$$

то для $\lambda \in \Gamma$ и $\varkappa \in [0, 1]$ имеем

$$\varkappa \|A\| \leq 1 < \pi^2 \leq \|(T - \lambda E)^{-1}\|^{-1}$$

и, стало быть, в силу устойчивости ограниченной обратимости $\Gamma \cap \sigma(S(\varkappa)) = \emptyset$, $\varkappa \in [0, 1]$. На основании этого факта и с учетом непрерывной зависимости с.з. оператора $S(\varkappa)$ от параметра $\varkappa$ можно сделать следующий вывод: спектр задачи (7')–(8') в области $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > \rho(\varepsilon)\}$ состоит из $N(\varepsilon)$ (считая кратности) с.з. $\lambda_n(\varepsilon)$, занумерованных в порядке убывания мнимых частей. Аналогично предыдущему устанавливается, что окружности $\gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \nu_n| = 2\pi^2/3\}$, $n > N$, состоят из точек резольвентного множества оператора $S(\varkappa)$ при $\varkappa \in [0, 1]$. Как следствие, внутри каждой γ_n , $n > N$, содержится ровно одно (простое) с.з. задачи (7')–(8'), причем других точек спектра в области $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda < \rho(\varepsilon)\}$ нет.

Далее нам понадобятся асимптотические представления с.ф. $y_n(x)$ задачи (7')–(8'), отвечающих с.з. $\lambda_n(\varepsilon)$ с номерами $n > N(\varepsilon)$. При построении этих асимптотик перейдем от (7') к интегральному уравнению типа Вольтерра (ср. [20]):

$$y(x) = \sin kx + \frac{i}{k\varepsilon} \int_0^x \sin k(x-t)p(t)y(t) dt, \quad (16)$$

где

$$k = \sqrt{i \frac{\lambda}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\varepsilon}} \cdot e^{i(\frac{1}{2} \arg \lambda + \frac{\pi}{4})}, \quad \arg \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Поскольку $|\lambda_n - \nu_n| < 2\pi^2/3$, $n > N$, то, как нетрудно убедиться прямым вычислением, $k_n = \sqrt{i\lambda_n/\varepsilon} = \pi n + \theta_n$, $|\theta_n| \leq \pi(\varepsilon n)^{-1}$, если $n > N(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Соответствующее значению $k = k_n$, $n > N(\varepsilon)$, решение уравнения (16) строится методом последовательных приближений и в результате получаем

$$y_n(x) = \sin \pi n x + \frac{1}{\varepsilon n} \cdot \eta_n(x), \quad (17)$$

где $|\eta_n(x)| \leq \operatorname{const}$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $n > N(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Как известно [9], система $\{\varphi_n\}$ нормированных с.п.ф. задачи (7')–(8') бesselевых в $\mathcal{L}_2(0, 1)$, т.е. существует константа $M = M(\varepsilon) > 0$ такая, что для любого элемента $f \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq M \|f\|^2, \quad c_n = (f, \varphi_n); \quad (18)$$

здесь $\varphi_n = y_n / \|y_n\|$ при $n > N(\varepsilon)$. Выведем оценку (18) с тем, чтобы учесть в ней зависимость $M(\varepsilon)$. Представим левую часть неравенства (18) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n \leq N(\varepsilon)+1} |c_n|^2 + \sum_{n > N(\varepsilon)+1} |c_n|^2$$

и рассмотрим каждое слагаемое по отдельности. Поскольку $|c_n| \leq \|f\|$, первое слагаемое, очевидно, не превосходит $(N(\varepsilon) + 1) \cdot \|f\|^2$. Для оценки второго слагаемого воспользуемся формулами (17), из которых легко следуют неравенства

$$|c_n|^2 \leq \text{const}(\alpha) \left[|a_n|^2 + \frac{|b_n|^2}{\varepsilon^2 n^2} \right], \quad n > N(\varepsilon) + 1, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

где a_n – коэффициенты Фурье разложения $f \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ по системе $\{\sin \pi n x\}$, $b_n = (f, \eta_n)$. Для системы $\{\sin \pi n x\}$ справедливо равенство Парсеваля и, стало быть,

$$\sum_{n > N(\varepsilon)+1} |a_n|^2 \leq \|f\|^2.$$

Заметим также, что $|b_n| \leq \text{const} \|f\|$ в силу неравенства Шварца и оценки $\|\eta_n\| \leq \text{const}$, $n > N(\varepsilon)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n > N(\varepsilon)+1} |c_n|^2 &\leq \text{const}(\alpha) \left[\sum_{n > N(\varepsilon)+1} |a_n|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n > N(\varepsilon)+1} \frac{|b_n|^2}{n^2} \right] \\ &\leq \text{const}(\alpha) \left[1 + \frac{\text{const}}{\varepsilon^2} \sum_{n > N(\varepsilon)+1} \frac{1}{n^2} \right] \cdot \|f\|^2 \end{aligned}$$

и, таким образом, получается оценка

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 &\leq \left[N(\varepsilon) + \text{const}(\alpha) \left(1 + \frac{\text{const}}{\varepsilon^2 N(\varepsilon)} \right) \right] \cdot \|f\|^2 \\ &\leq \frac{\text{const}(\alpha)}{\varepsilon^{1+\alpha}} \cdot \|f\|^2, \quad \varepsilon \in (0, 1], \end{aligned}$$

представляющая собой неравенство (18) с $M(\varepsilon) = \text{const}(\alpha) / \varepsilon^{1+\alpha}$.

Оценка сверху для константы бesselевости системы с.п.ф. задачи (2)–(3) позволяет получить дополнительные сведения о свойствах решений нестационарного уравнения Орра–Зоммерфельда, в частности, о скорости стабилизации решения по времени. Этим вопросам, а также применению развитой здесь техники к спектральному анализу некоторых других сингулярно возмущенных краевых задач будет посвящена отдельная публикация.

Автор благодарит А.Г. Костюченко, В.П. Михайлова и В.А. Садовниченко за обсуждение результатов настоящей работы и полезные замечания.

Список литературы

1. *Friedrichs K. O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V. 61. P. 485–504.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
3. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
4. *DiPrima R. C., Habetler G. J.* A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability // Arch. Rational Mech. Anal. 1968. V. 34. P. 218–227.
5. *Фаддеев Л. Д.* К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1971. Т. 21. С. 164–172.
6. *Маслов В. П.* Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. №2. С. 267–270.
7. *Moser J.* Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equation of even order // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 251–278.
8. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
9. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $L^2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. №5. С. 981–984.
10. *Shkalikov A. A., Tretter C.* Kamke problems. Properties of the eigenfunctions // Math. Nachr. 1994. V. 170. P. 251–275.
11. *Степин С. А.* Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 219–220.
12. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Мир, 1990.
13. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
14. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
15. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
16. *Агранович М. С.* О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной частью // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. №3. С. 1–21.
17. *Greenlee W. M.* Stability theorems for singular perturbation of eigenvalues // Manuscripta Math. 1981. V. 34. №2–3. P. 157–174.
18. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
19. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Формулы следов в случае уравнения Орра–Зоммерфельда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. №3. С. 633–648.
20. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
21. *Wasow W.* The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics // Ann. of Math. 1948. V. 49. №4. P. 852–871.
22. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
23. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. №2. С. 82–93.
24. *Шкаликков А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. 1979. Т. 34. №5. С. 235–236.
25. *Степин С. А.* О спектральных свойствах задачи Орра–Зоммерфельда при исчезающей вязкости // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. №4. С. 88–91.