Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Стрелков, Универсально оптимальные всплески, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 1, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:02:43

УДК 517.5

Н. А. Стрелков

Универсально оптимальные всплески

Дано полное описание базисов из функций-всплесков, порождаемых фиксированной функцией, образ Фурье которой – характеристическая функция некоторого множества. В частности, для случая пространств Соболева построены базисы из функций-всплесков, обладающие следующим свойством универсальной оптимальности: порождаемые этими функциями подпространства экстремальны для проекционно-сеточных (а в одномерном случае и для колмогоровских) поперечников единичного шара в $W_2^m(E_n)$ в метрике $W_2^s(E_n)$ одновременно для всей шкалы соболевских классов (т.е. для всех $s, m \in E_1$ таких, что $s < m$). Попутно установлены некоторые результаты относительно полноты и базисности систем экспонент.

Библиография: 10 названий.

В работе описываются функции-всплески (wavelets), обладающие следующими свойствами:

- 1) одна и та же система трансформаций фиксированной функции является базисом каждого из пространств, принадлежащих некоторому семейству (это семейство включает в себя всю шкалу гильбертовых соболевских классов);
- 2) порождаемые фиксированной функцией подпространства оптимальны (в смысле реализации некоторых поперечников) одновременно для всей шкалы соболевских пространств.

Ниже в п.п. 1–4 доказаны утверждения, на основании которых в п. 5 описана чисто геометрическая конструкция, порождающая универсально оптимальные всплески в соболевских пространствах; п. 6 содержит примеры реализации этой конструкции.

1. Обозначения и определения

Первоначальная цель работы состояла в описании базисов из функций-всплесков в соболевских пространствах. В дальнейшем, однако, оказалось, что все рассмотрения ничуть не усложняются (а в некоторых случаях даже упрощаются) при изучении более общей ситуации класса гильбертовых функциональных пространств [1], [2], включающего в себя пространства Соболева. Опишем этот класс.

Пусть S – множество всех таких $v \in C^\infty(E_n)$, что

$$\sup_{x \in E_n} |x^\alpha D^\beta v(x)| < \infty$$

для любых мультииндексов α и β (топология в S , задаваемая системой полунорм, стоящих в левой части последнего неравенства, превращает S в пространство Фреше), S' – пространство линейных непрерывных функционалов над S (пространство обобщенных функций умеренного роста).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00600).

Заданную на E_n положительную функцию μ будем называть *умеренно растущей весовой функцией* (см. [1, определение 10.1.1]), если существуют такие положительные константы C и N , что

$$\mu(\xi + \eta) \leq (1 + C|\xi|)^N \mu(\eta) \quad (1)$$

для всех $\xi, \eta \in E_n$. Символом $\mathbb{M}$ будем обозначать множество всех таких весовых функций.

Из (1) получаем, что

$$(1 + C|\xi|)^{-N} \leq \frac{\mu(\xi + \eta)}{\mu(\eta)} \leq (1 + C|\xi|)^N \quad (2)$$

для любого $\mu \in \mathbb{M}$ и для всех $\xi, \eta \in E_n$. Левое неравенство в (2) следует из (1), если заменить в нем ξ на $-\xi$, а η на $\xi + \eta$. Переходя в (2) к пределу при $\xi \rightarrow 0$, получаем, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mu(\xi + \eta) = \mu(\eta),$$

откуда следует непрерывность функции μ . Наконец, полагая в (2) $\eta = 0$, получаем двустороннюю оценку

$$\mu(0)(1 + C|\xi|)^{-N} \leq \mu(\xi) \leq \mu(0)(1 + C|\xi|)^N, \quad \xi \in E_n. \quad (3)$$

Отметим, что условия типа (1) накладывались на весовые функции и в работе [2].

Пусть $\mu \in \mathbb{M}$. Символом L^μ будем обозначать пространство измеримых в E_n комплекснозначных функций v , для которых

$$\int_{E_n} \mu(\xi) |v(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Наконец, определим пространство H^μ как совокупность тех обобщенных функций $u \in S'$, преобразования Фурье $\hat{u}$ которых принадлежат пространству L^μ . Скалярное произведение в H^μ имеет вид

$$(u, v)_\mu = \int_{E_n} \mu(x) \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx.$$

Отметим, что если

$$\mu(\xi) = \mu_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s,$$

где $s \in E_1$, то пространства H^μ превращаются в пространства Соболева $W_2^s(E_n)$ (см., например, [3]). Нетрудно показать, что для любого $s \in E_1$ весовая функция μ_s принадлежит множеству $\mathbb{M}$ (для этой функции выполнено неравенство (1) с константами $C = 1$, $N = 2|s|$).

В дальнейшем для любого $s \in E_1$ символами $(\cdot, \cdot)_s$ и $\|\cdot\|_s$ иногда будут обозначаться скалярное произведение и норма в пространстве $W_2^s(E_n)$:

$$(u, v)_s = \int_{E_n} (1 + |x|^2)^s \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx, \quad \|u\|_s = (u, u)_s^{1/2}.$$

Кроме того, обозначение $L_{2,\mu}(\Omega)$ будет применяться для пространств функций, квадратично интегрируемых с весом μ по области $\Omega \subset E_n$; скалярные произведения в этих пространствах имеют вид

$$(f, g)_{\mu, \Omega} = \int_{\Omega} \mu(x) f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Определим еще некоторые геометрические объекты, используемые на протяжении всей работы.

Пусть $f_1, \dots, f_n$ – набор линейно-независимых элементов E_n . Символом $\Lambda = \Lambda(f_1, \dots, f_n)$ будет обозначаться решетка в E_n с базисом $f_1, \dots, f_n$ [4], т.е. совокупность точек вида

$$\alpha = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n,$$

где α_k принимают произвольные целочисленные значения. Обозначение Λ^* будет использоваться для решетки, сопряженной к Λ (т.е. для такой решетки, базис которой образует с базисом Λ биортогональную пару).

Пусть

$$\{C_\gamma\}_{\gamma \in Q} \quad (4)$$

есть некоторая система измеримых множеств пространства E_n , где Q – совокупность индексов произвольной природы.

Система (4) – *укладка* (см., например, [4]), если попарные пересечения множеств этой системы имеют меру нуль.

Будем говорить, что система (4) – *замощение измеримого множества* $C \subseteq E_n$, если, во-первых, (4) – укладка, а во-вторых, мера симметрической разности объединения множеств системы (4) и множества C равна нулю.

В дальнейшем характерна ситуация, когда множества системы (4) являются трансляциями фиксированного измеримого множества на векторы некоторой решетки, т.е. Q – решетка в E_n , а $C_\gamma = \Omega + \gamma$, $\gamma \in Q$, где Ω – измеримое множество в E_n . В этом случае будем еще иногда говорить, что Ω порождает *Q-решетчатую укладку* (соответственно, *Q-решетчатое замощение*).

2. Предварительные результаты

Докажем вначале два вспомогательных утверждения (представляющие, по-видимому, и самостоятельный интерес) относительно полноты и базисности в $L_2(\Omega)$ системы экспонент

$$\{e^{i(\alpha, x)}\}_{\alpha \in \Lambda} \quad (5)$$

(здесь Λ – решетка в E_n).

Для любого измеримого множества $\Omega \subseteq E_n$ рассмотрим систему трансляций вида

$$\{\Omega + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}, \quad (6)$$

где Λ^* – сопряженная к Λ решетка.

ЛЕММА 1. Система функций (5) полна в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество Ω порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатую укладку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть система функций (5) полна в $L_2(\Omega)$, т.е. если $f \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} f(x) e^{i(\alpha, x)} dx = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Lambda,$$

то $f = 0$ почти всюду в Ω . Покажем, что (6) – укладка. Предположим противное. Тогда существуют такое $\beta \in 2\pi\Lambda^* \setminus \{0\}$ и такое множество $B \subset \Omega$, что выполнены следующие условия:

- 1) $0 < \text{mes } B < \infty$;
- 2) $B \cap (B + \beta) = \emptyset$;
- 3) $B \cup (B + \beta) \subset \Omega$.

Определяя функцию $g \in L_2(\Omega)$ равенством

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B, \\ -1, & \text{если } x \in B + \beta, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus (B \cup (B + \beta)), \end{cases} \quad (7)$$

нетрудно показать, используя $2\pi\Lambda^*$ -периодичность функций системы (5), что для отличной от нуля на множестве положительной меры функции g вида (7) выполняется равенство

$$\int_{\Omega} g(x) e^{i(\alpha, x)} dx = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Lambda.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость условий леммы.

Достаточность. Пусть система множеств (6) – укладка. Докажем полноту системы функций (5). Без потери общности будем считать, что множества системы (6) попарно не пересекаются (этого всегда можно добиться за счет удаления из Ω множества меры нуль). Пусть $f_1^*, \dots, f_n^*$ – любой из базисов решетки Λ^* , а Π^* – порожденный этим базисом фундаментальный параллелепипед решетки $2\pi\Lambda^*$ вида

$$\Pi^* = \{x \in E_n : x = t_1 f_1^* + \dots + t_n f_n^*, 0 < t_k < 2\pi, k = 1, \dots, n\}. \quad (8)$$

Для любого $\beta \in 2\pi\Lambda^*$ определим множество Ω_β равенством

$$\Omega_\beta = \Pi^* \cap (\Omega + \beta).$$

Поскольку

$$\{\Pi^* + \alpha\}_{\alpha \in 2\pi\Lambda^*}$$

– замощение E_n , а система (6) – укладка, то множества Ω_β попарно не пересекаются, а мера объединения всех этих множеств равна мере множества Ω .

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} f(x) e^{i(\alpha, x)} dx = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Lambda.$$

Покажем, что $f = 0$ почти всюду в Ω . Определим функцию $g \in L_2(\Pi^*)$ следующим образом. Если $x \in \Omega_\beta$ для некоторого $\beta \in 2\pi\Lambda^*$, то полагаем $g(x) = f(x - \beta)$. Если же $x \in \Pi^*$ не принадлежит ни одному из Ω_β , то полагаем $g(x) = 0$. Нетрудно видеть, используя способ построения функции g и $2\pi\Lambda^*$ -периодичность функций системы (5), что

$$\int_{\Pi^*} g(x) e^{i(\alpha, x)} dx = \int_{\Omega} f(x) e^{i(\alpha, x)} dx \quad (9)$$

для всех $\alpha \in \Lambda$.

Пусть $f_1, \dots, f_n$ – базис решетки Λ , двойственный к базису $f_1^*, \dots, f_n^*$ решетки Λ^* (т.е. $(f_k, f_s^*) = \delta_k^s$). Тогда если $\alpha = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in \Lambda$, то

$$\int_{\Pi^*} g(x) e^{i(\alpha, x)} dx = |J| \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g\left(\sum_{k=1}^n t_k f_k^*\right) \exp\left\{i \sum_{k=1}^n \alpha_k t_k\right\} dt, \quad (10)$$

где

$$|J| = \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} \right| = |\det\{(e_k, f_j^*)\}_{k,j=1}^n| = V(\Lambda^*) \neq 0$$

(здесь $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n , а $V(\Lambda^*)$ – объем решетки Λ^* , т.е. объем параллелепипеда, натянутого на векторы любого из базисов этой решетки).

Из (9)–(10) получаем, что если

$$\int_{\Omega} f(x) e^{i(\alpha, x)} dx = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Lambda,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g\left(\sum_{k=1}^n t_k f_k^*\right) \exp\left\{i \sum_{k=1}^n \alpha_k t_k\right\} dt = 0$$

для всех целых α_k . Поэтому из полноты системы $\{e^{i(\alpha, t)}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_n}$ в $L_2((0, 2\pi)^n)$ (здесь $\mathbb{Z}_n$ – целочисленная решетка в E_n), получаем, что $g = 0$ почти всюду в Π^* . Из определения функции g тогда следует, что и $f = 0$ почти всюду в Ω . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Получим соотношение, которое будет полезно в дальнейшем. Заметим, что если множество Ω порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатое замощение пространства E_n , то объединение построенных при доказательстве достаточности непересекающихся множеств Ω_β с точностью до множеств меры нуль дает Π^* . Поэтому если $f(x) \equiv 1$ для всех $x \in \Omega$, то $g = 1$ почти всюду в Π^* . Полагая в (9) и (10) $f = g = 1$, получаем, что если система множеств (6) – замощение E_n , то для всех $\alpha \in \Lambda$ имеет место следующее используемое в дальнейшем равенство:

$$\int_{\Omega} e^{i(\alpha, x)} dx = V(\Lambda^*) \prod_{k=1}^n \int_0^{2\pi} e^{i\alpha_k t_k} dt_k = (2\pi)^n V(\Lambda^*) \delta_{\alpha}^0. \quad (11)$$

ЛЕММА 2. Система функций (5) образует базис пространства $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество Ω порождает $2\pi\Lambda^*$ -решетчатое замощение пространства E_n . При этом базис (5) ортогонален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть система множеств (6) – замощение E_n . Тогда система (5) – базис пространства $L_2(\Omega)$, так как, во-первых, в силу леммы 1 эта система полна (поскольку система множеств (6), будучи замощением E_n , является укладкой), а во-вторых, после умножения каждой из функций системы (5) на константу $(2\pi)^{-n/2} V^{-1/2}(\Lambda^*)$ эта система становится ортонормированной (см. замечание 1). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть система (5) – базис пространства $L_2(\Omega)$. Используя лемму 1, получаем из полноты системы (5) в $L_2(\Omega)$, что (6) – укладка. Покажем, что система множеств (6) обязана быть замощением пространства E_n . Предположим противное. Тогда существует такое измеримое множество $D \supset \Omega$, что, во-первых, $\text{mes}(D \setminus \Omega) > 0$, а во-вторых, $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ – замощение пространства E_n . Поэтому система функций (5) – базис пространства $L_2(D)$ (так как достаточность условий леммы 2 только что доказана). Если $f \in L_2(D)$ такова, что $f(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$ и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in D \setminus \Omega$, то, разлагая f по базису (5), получаем

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_{\alpha} e^{i(\alpha, x)} \quad (12)$$

(ряд сходится в $L_2(D)$), где не все c_{α} обращаются в нуль. Сужение (12) на Ω приводит к противоречию. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 2 (как и лемма 1) справедлива и для определенных в п. 1 пространств $L_{2,\mu}(\Omega)$ с подчиненной некоторым условиям весовой функцией μ . Например, это верно, если существуют такие положительные константы a и b , что почти всюду в Ω выполняется неравенство

$$a \leq \mu(\cdot) \leq b \quad (13)$$

(в этом случае нормы в $L_2(\Omega)$ и в $L_{2,\mu}(\Omega)$ эквивалентны). Конечно, для произвольной весовой функции ортогональность базиса не гарантируется. Для таких пространств аналоги лемм 1 и 2 выглядят следующим образом: для полноты (безусловной базисности) системы функций (5) в пространстве $L_{2,\mu}(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы система множеств (6) была укладкой (замощением пространства E_n); при этом в случае базисности системой, составляющей с (5) биортонормированную пару безусловных базисов, служит

$$\{(2\pi)^{-n} V(\Lambda) \mu^{-1}(x) e^{i(\alpha, x)}\}_{\alpha \in \Lambda}. \quad (14)$$

В частности, все сказанное выше имеет место, если множество Ω ограничено, а μ – сужение на Ω некоторой функции из множества $\mathbb{M}$ весовых функций умеренного роста (см. п. 1). В этом случае неравенство (13) сразу следует из (3) и ограниченности Ω . Заметим также, что в аналоге леммы 2 для весовых пространств легко можно было бы добиться ортонормированности базиса, заменив систему функций (5) на

$$\{(2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} \mu^{-1/2}(x) e^{i(\alpha, x)}\}_{\alpha \in \Lambda}.$$

Тем не менее для целей данной работы нужен именно базис (5) (в дальнейшем будет существенно использована его независимость от весовой функции μ).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказанные выше утверждения касаются полноты и базисности системы (5) в весовых и обычных пространствах типа L_2 , что вполне достаточно для наших целей построения оптимальных базисов из функций-всплесков. Тем не менее заметим, что эти утверждения остаются справедливыми и для пространств типа L_p (о полноте – для $1 \leq p < \infty$, о базисности – для $1 < p < \infty$). Конечно, при $p \neq 2$ о безусловности базисов говорить не приходится.

3. Базисы из функций-всплесков

В этом пункте будет описан один способ построения семейства базисов из функций-всплесков. Предлагаемый подход позволяет действовать в рамках кратноразрешающего анализа (см., например, [5], [6]).

Пусть D и Ω – измеримые ограниченные множества в E_n , $\{A_\gamma\}_{\gamma \in M}$ и $\{B_\omega\}_{\omega \in S}$ – две совокупности линейных операторов, действующих в E_n , где M и S – некоторые счетные множества индексов (в приводимых ниже примерах $M = S = \mathbb{Z}_n$, либо $M = S = \mathbb{Z}_1$), A_γ^* и B_ω^* – операторы, сопряженные к A_γ и B_ω , соответственно.

Пусть ψ и ϕ – зависящие от множеств D и Ω функции, образы Фурье которых имеют вид

$$\widehat{\psi}(t) = \chi_D(t), \quad \widehat{\phi}(t) = \chi_\Omega(t),$$

где χ_Ω и χ_D – характеристические функции множеств Ω и D .

Если Λ и Σ – решетки в E_n , то пусть для всех $\gamma \in M$, $\omega \in S$, $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Sigma$

$$\psi_{\gamma,\alpha}(x) = (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda) |A_\gamma|)^{1/2} \psi(A_\gamma x - \alpha), \quad (15)$$

$$\phi_{\omega,\beta}(x) = (2\pi)^{-n/2} (V(\Sigma) |B_\omega|)^{1/2} \phi(B_\omega x - \beta), \quad (16)$$

где $|A_\gamma|$ и $|B_\omega|$ – модули якобианов преобразований A_γ и B_ω , а $V(\Lambda)$ и $V(\Sigma)$ – объемы решеток Λ и Σ .

Возьмем любое $\mu \in \mathbb{M}$, рассмотрим пространство H^μ (см. п. 1) и для любых $\gamma \in M$ и $\omega \in S$ символами W_γ и V_ω обозначим следующие замкнутые линейные оболочки:

$$W_\gamma = \{\psi_{\gamma,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}, \quad V_\omega = \{\phi_{\omega,\beta}\}_{\beta \in \Sigma}.$$

Наконец, введем в рассмотрение зависящие от μ функции

$$\psi_{\gamma,\alpha}^*(x) = (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda)|A_\gamma|)^{1/2} \psi_\gamma^*(A_\gamma x - \alpha), \quad (17)$$

$$\phi_{\omega,\beta}^*(x) = (2\pi)^{-n/2} (V(\Sigma)|B_\omega|)^{1/2} \phi_\omega^*(B_\omega x - \beta), \quad (18)$$

где образы Фурье функций ψ_γ^* и ϕ_ω^* имеют следующий вид:

$$\widehat{\psi_\gamma^*}(t) = \mu^{-1}(A_\gamma^* t) \chi_D(t), \quad \widehat{\phi_\omega^*}(t) = \mu^{-1}(B_\omega^* t) \chi_\Omega(t).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu \in \mathbb{M}$. Системы функций

$$\{\psi_{\gamma,\alpha}\}_{\gamma \in M, \alpha \in \Lambda} \quad (19)$$

и

$$\{\psi_{\gamma,\alpha}^*\}_{\gamma \in M, \alpha \in \Lambda}, \quad (20)$$

где $\psi_{\gamma,\alpha}$ и $\psi_{\gamma,\alpha}^*$ имеют вид (15), (17), образуют биортонормированную пару безусловных базисов пространства H^μ тогда и только тогда, когда решетка Λ , множество D и совокупность линейных операторов $\{A_\gamma\}_{\gamma \in M}$ таковы, что каждая из двух систем множеств $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ и $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ является замощением пространства E_n . При этом

$$H^\mu = \bigoplus_{\gamma \in M} W_\gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ и $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ – замощения пространства E_n . Докажем базисность системы (19). Используя (15), найдем образы Фурье функций $\psi_{\gamma,\alpha}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_{\gamma,\alpha}}(t) &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda)|A_\gamma|)^{1/2} \int_{E_n} \psi(A_\gamma x - \alpha) e^{-i(t,x)} dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} \int_{E_n} \psi(y) e^{-i(t, A_\gamma^{-1}(\alpha+y))} dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} \widehat{\psi}((A_\gamma^*)^{-1}t) e^{-i((A_\gamma^*)^{-1}t, \alpha)} \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} e^{-i((A_\gamma^*)^{-1}t, \alpha)}, & \text{если } t \in A_\gamma^* D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\gamma \in M$ семейство $\{\widehat{\psi_{\gamma,\alpha}}\}_{\alpha \in \Lambda}$ – безусловный базис пространства $L_{2,\mu}(A_\gamma^* D)$ (см. замечание 2). Поскольку $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ – замощение пространства E_n , то

$$L_{2,\mu}(E_n) = \bigoplus_{\gamma \in M} L_{2,\mu}(A_\gamma^* D)$$

и $\{\psi_{\gamma,\alpha}\}_{\gamma \in M, \alpha \in \Lambda}$ – безусловный базис пространства H^μ .

Покажем, что системы функций (19) и (20) образуют биортонормированную пару относительно скалярного произведения в H^μ . Для этого прежде всего найдем образы Фурье функций $\psi_{\gamma,\alpha}^*$ вида (17):

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_{\gamma,\alpha}^*}(t) &= \int_{E_n} (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda)|A_\gamma|)^{1/2} \psi_\gamma^*(A_\gamma x - \alpha) e^{-i(x,t)} dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} \int_{E_n} \psi_\gamma^*(y) e^{-i(A_\gamma^{-1}(y+\alpha),t)} dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} e^{-i(A_\gamma^{-1}\alpha,t)} \widehat{\psi_\gamma^*}((A_\gamma^*)^{-1}t) \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda))^{1/2} |A_\gamma|^{-1/2} \mu^{-1}(t) e^{-i((A_\gamma^*)^{-1}t,\alpha)}, & \text{если } t \in A_\gamma^* D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (21), (22), получаем, что если $\gamma \in M$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, то

$$\begin{aligned} (\psi_{\gamma,\alpha}, \psi_{\gamma,\beta}^*)_\mu &= \int_{E_n} \mu(t) \widehat{\psi_{\gamma,\alpha}}(t) \overline{\widehat{\psi_{\gamma,\beta}^*}(t)} dt \\ &= (2\pi)^{-n} V(\Lambda) |A_\gamma|^{-1} \int_{A_\gamma^* D} e^{-i((A_\gamma^*)^{-1}t, \alpha - \beta)} dt \\ &= (V(2\pi\Lambda^*))^{-1} \int_D e^{-i(y, \alpha - \beta)} dy = \delta_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

Здесь использовалось, во-первых, что $V(\Lambda) = (V(\Lambda^*))^{-1}$, а во-вторых, что поскольку $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ – замощение E_n , то для всех $\alpha, \beta \in \Lambda$

$$\int_D e^{-i(y, \alpha - \beta)} dy = V(2\pi\Lambda^*) \delta_\alpha^\beta$$

(см. замечание 1).

Если же $\gamma, \omega \in M$ таковы, что $\gamma \neq \omega$, то из (21)–(22) следует, что для всех $\alpha, \beta \in \Lambda$ мера пересечения носителей функций $\widehat{\psi_{\gamma,\alpha}}$ и $\widehat{\psi_{\omega,\beta}^*}$ равна нулю, поэтому

$$(\psi_{\gamma,\alpha}, \psi_{\omega,\beta}^*)_\mu = 0.$$

Итак, для всех $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\gamma, \omega \in M$ выполняется равенство

$$(\psi_{\gamma,\alpha}, \psi_{\omega,\beta}^*)_\mu = \delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\omega,$$

т.е. системы функций (19) и (20) образуют биортонормированную пару. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть системы (19) и (20) – базисы пространства H^μ , составляющие биортонормированную пару. Покажем, что $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ и $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ – замощения пространства E_n .

Прежде всего заметим, что для любого $\gamma \in M$ функции $\widehat{\psi_{\gamma,0}}$ и $\widehat{\psi_{\gamma,0}^*}$ положительны на множестве $A_\gamma^* D$ и равны нулю вне этого множества (см. (21)–(22)). Поэтому если $\gamma, \omega \in M$ таковы, что $\gamma \neq \omega$, то из условия $(\psi_{\gamma,0}, \psi_{\omega,0}^*)_\mu = 0$ следует, что мера пересечения носителей функций $\widehat{\psi_{\gamma,0}}$ и $\widehat{\psi_{\omega,0}^*}$ равна нулю, т.е.

$$\text{mes}(A_\gamma^* D \cap A_\omega^* D) = 0 \quad \text{для всех } \gamma \neq \omega. \quad (23)$$

Кроме того, почти все точки пространства E_n принадлежат объединению множеств системы $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$. Действительно, предположив противное, получаем, что найдется множество C ненулевой меры, не пересекающееся ни с одним из множеств этой системы, и если f – характеристическая функция множества C , то из (21) следует, что $(f, \psi_{\gamma, \alpha})_\mu = 0$ для всех $\gamma \in M, \alpha \in \Lambda$, что противоречит базисности системы (19). Таким образом, доказано, что $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ – замощение пространства E_n .

Поэтому

$$L_{2, \mu}(E_n) = \bigoplus_{\gamma \in M} L_{2, \mu}(A_\gamma^* D).$$

Для того чтобы доказать, что $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ – замощение пространства E_n , осталось воспользоваться представлением (21) и применить замечание 2. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$ – укладка и для каждого $\omega \in S$ пусть M_ω – некоторое подмножество множества M . Для того чтобы для $\omega \in S$ выполнялось равенство

$$V_\omega = \bigoplus_{\gamma \in M_\omega} W_\gamma,$$

необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, система множеств

$$\{\Omega + 2\pi\beta\}_{\beta \in \Sigma^*} \quad (24)$$

была укладкой, а во-вторых, система множеств $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M_\omega}$ была замощением множества $B_\omega^* \Omega$. Кроме того, система функций

$$\{\phi_{\omega, \beta}\}_{\beta \in \Sigma} \quad (25)$$

является безусловным базисом пространства V_ω тогда и только тогда, когда система множеств (24) – замощение E_n ; при этом биортонормированную (относительно скалярного произведения в H^μ) пару безусловных базисов c (25) составляет система

$$\{\phi_{\omega, \beta}^*\}_{\beta \in \Sigma}$$

(здесь $\phi_{\omega, \beta}$ и $\phi_{\omega, \beta}^*$ определены равенствами (16) и (18)).

Доказательство этого утверждения мы опускаем; скажем лишь, что оно проводится с существенным использованием лемм 1, 2 и замечания 2 примерно по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теоремах 1 и 2 описаны чисто геометрические условия, которым обязаны удовлетворять решетки Λ и Σ , множества D и Ω , операторы A_γ и B_ω для того, чтобы порождаемые этими геометрическими объектами системы функций $\{\psi_{\gamma, \alpha}\}$, $\{\phi_{\omega, \beta}\}$ вида (15), (16) обладали определенными свойствами в пространствах H^μ . Подчеркнем, что эти геометрические условия вовсе не зависят от весовой функции $\mu \in \mathbb{M}$; другими словами, одни и те же системы функций вида (15), (16) обладают нужными свойствами одновременно для всей совокупности пространств H^μ , где весовая функция μ пробегает все множество $\mathbb{M}$ умеренно растущих функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Нетрудно проверить, что носители образов Фурье элементов подпространства V_ω принадлежат множеству $B_\omega^* \Omega$ (если $\mu(x) \equiv 1$, то в обозначениях работы [7] $V_\omega = B_{B_\omega^* \Omega, 2}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В теоремах 1 и 2 можно было бы добиться ортонормированности базисов, если вместо функций $\psi_{\gamma,\alpha}$ и $\phi_{\omega,\beta}$ вида (15), (16) взять функции

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma,\alpha}(x) &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Lambda)|A_\gamma|)^{1/2} \Psi_\gamma(A_\gamma x - \alpha), \\ \Phi_{\omega,\beta}(x) &= (2\pi)^{-n/2} (V(\Sigma)|B_\omega|)^{1/2} \Phi_\omega(B_\omega x - \beta),\end{aligned}$$

где

$$\widehat{\Psi}_\gamma(t) = \mu^{-1/2} (A_\gamma^* t) \chi_D(t), \quad \widehat{\Phi}_\omega(t) = \mu^{-1/2} (B_\omega^* t) \chi_\Omega(t).$$

При этом, однако, возникли бы два неприятных момента. Во-первых, терялось бы одно из главных достоинств всплесков – наличие пары функций ψ и ϕ , порождающих системы подпространств $\{W_\gamma\}_{\gamma \in M}$ и $\{V_\omega\}_{\omega \in S}$ с определенными свойствами; в этой ситуации (за исключением случая $\mu \equiv \text{const}$) каждое из подпространств W_γ и V_ω порождалось бы своей функцией. Во-вторых, поскольку базисные функции зависят от весовой функции μ , то невозможно было бы вести речь об универсальной оптимальности построенных подпространств (см. ниже п. 5).

4. Оптимальность всплесков

Обратимся к вопросу оптимальности всплесков, построенных в предыдущем пункте.

Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{M}$, $\omega \in S$ и для любого $\varphi \in H^\mu$ пусть

$$H_\omega(\varphi) = \{\varphi(B_\omega \cdot -\alpha)\}_{\alpha \in \Sigma}$$

– подпространство пространства H^μ (в частности, $H_\omega(\phi) = V_\omega$). Определим следующие зависящие от весовых функций μ и ν характеристики аппроксимационных свойств таких подпространств:

$$\kappa_\omega(\varphi) = \sup_{\|u\|_\nu=1} \inf_{w \in H_\omega(\varphi)} \|u - w\|_\mu, \quad (26)$$

$$\kappa_\omega = \inf_{\varphi \in H^\mu} \kappa_\omega(\varphi). \quad (27)$$

Подобные величины в работах [8], [9] названы проекционно-сеточными поперечниками. Несколько переформулировав результаты этих работ, можно показать, что $\kappa_\omega(\varphi)$ зависит от распределения значений функции $f: E_n \times E_1 \rightarrow E_1$ вида

$$f(x, \lambda) = \sum_{\beta \in 2\pi B_\omega^* \Sigma^*} \frac{\mu(x + \beta) |\widehat{\varphi}((B_\omega^*)^{-1}(x + \beta))|^2}{\frac{\mu(x + \beta)}{\nu(x + \beta)} - \lambda^2}, \quad (28)$$

а κ_ω определяется поведением отношения весовых функций μ и ν .

Более точно, пусть для любого $c \in E_1$ лебеговы множества Ω_c функции μ/ν имеют вид

$$\Omega_c = \{x \in E_n : \sqrt{\mu(x)/\nu(x)} > c\}, \quad (29)$$

а

$$\bar{c} = \inf \{c \in E_1 : \text{mes}(\Omega_c \cap (\Omega_c + 2\pi\alpha)) = 0 \text{ для всех } \alpha \in B_\omega^* \Sigma^* \setminus \{0\}\}$$

(т.е. $\bar{c}$ – нижняя грань множества таких $c \in E_1$, для которых множество Ω_c порождает $2\pi B_\omega^* \Sigma^*$ -решетчатую укладку). Следствиями результатов работ [8], [9] являются следующие утверждения:

- 1) $\kappa_\omega(\varphi) = \inf \{c > \bar{c} : f(\cdot, c) > 0 \text{ почти всюду в } \Omega_c\}$ для всех $\varphi \in H^\mu$;
- 2) $\kappa_\omega = \bar{c}$;
- 3) для того чтобы некоторая функция $\varphi \in H^\mu$ была оптимальной (т.е. на ней достигалась нижняя грань в (27); иногда еще в этом случае будем говорить об оптимальности порождаемого функцией φ подпространства $H_\omega(\varphi)$), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду в $\Omega_{\bar{c}}$ выполнялось каждое из следующих двух условий:

$$\widehat{\varphi}((B_\omega^*)^{-1} \cdot) \neq 0; \quad f(\cdot, \bar{c}) \geq 0. \quad (30)$$

В частности, если множество $\Omega = \text{supp } \widehat{\varphi}$ таково, что с точностью до множеств меры нуль имеют место соотношения

$$\Omega_{\bar{c}} \subseteq B_\omega^* \Omega \quad (31)$$

и

$$\{\Omega_{\bar{c}} + 2\pi B_\omega^* \beta\} \cap B_\omega^* \Omega = \emptyset \quad \text{для всех } \beta \in \Sigma^* \setminus \{0\}, \quad (32)$$

то функция φ оптимальна, т.е. на ней реализуется поперечник κ_ω вида (27).

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно проверить выполнение условий (30). Первое из них выполнено, поскольку $(B_\omega^*)^{-1} \Omega_{\bar{c}} \subseteq \Omega$, и так как $\text{supp } \widehat{\varphi} = \Omega$, то $\widehat{\varphi}((B_\omega^*)^{-1} x) \neq 0$ для $x \in \Omega_{\bar{c}}$. Второе из условий (30) также выполнено, так как при $x \in \Omega_{\bar{c}}$ и $\lambda = \bar{c}$ все члены ряда (28) обращаются в нуль, кроме единственного неотрицательного слагаемого, соответствующего $\beta = 0$.

Поскольку описанная в п. 3 функция ϕ такова, что $\widehat{\phi} = \chi_\Omega$, то приведенные только что рассуждения доказывают справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнены условия (31)–(32), то построенное в п. 3 подпространство V_ω оптимально (т.е. на порождающей это подпространство функции ϕ реализуется поперечник κ_ω вида (27)).*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что в некоторых случаях одна и та же функция φ оказывается оптимальной для целой совокупности пространств H^μ и H^ν , определяющих поперечники вида (27). Так обстоит дело, например, если весовые функции μ и ν таковы, что $\mu(x)/\nu(x)$ зависит лишь от $|x|$ и монотонно убывает с ростом $|x|$ (характерный пример: $H^\mu = W_2^s(E_n)$, $H^\nu = W_2^m(E_n)$, где $s < m$). В этом случае лебеговы множества Ω_c вида (29) – евклидовы шары, множество $\Omega_{\bar{c}}$ – шар максимального радиуса, порождающий $2\pi B_\omega^* \Sigma^*$ -решетчатую укладку (существенно, что этот шар не зависит от весовых функций), а оптимальной будет, например, любая функция φ , образ Фурье которой отличен от нуля на множестве $(B_\omega^*)^{-1} \Omega_{\bar{c}}$ и равен нулю в точках множества

$$\bigcup_{\beta \in \Sigma^* \setminus \{0\}} \{(B_\omega^*)^{-1} \Omega_{\bar{c}} + 2\pi \beta\}.$$

5. Универсально оптимальные базисы из функций-всплесков

Сформулируем утверждение (являющееся прямым следствием теорем 1–3 для случая пространств Соболева), которое дает способ построения универсально оптимальных базисов из функций-всплесков, порождающих подпространства, экстремальные в смысле проекционно-сеточных поперечников единичного шара пространства $W_2^m(E_n)$ в метрике $W_2^s(E_n)$ вида

$$\inf_{\varphi \in W_2^s} \sup_{\|u\|_m=1} \inf_{w \in H_\omega(\varphi)} \|u - w\|_s \quad (33)$$

одновременно для всей шкалы соболевских классов (т.е. для любой из пар $(W_2^m(E_n), W_2^s(E_n))$ при всех $s < m$). Другими словами, для пространств V_ω отсутствует эффект насыщения – при аппроксимации элементами этих пространств происходит автоматическая настройка на регулярность приближаемой функции.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Λ и Σ – решетки в E_n , M и S – некоторые множества индексов произвольной природы и для любого $\omega \in S$ пусть M_ω – некоторое подмножество множества M . Пусть построены такие множества $D, \Omega \subset E_n$ и такие совокупности действующих в E_n линейных операторов $\{A_\gamma\}_{\gamma \in M}$ и $\{B_\omega\}_{\omega \in S}$, что выполнены следующие условия:

- 1) $\{D + 2\pi\alpha\}_{\alpha \in \Lambda^*}$, $\{\Omega + 2\pi\beta\}_{\beta \in \Sigma^*}$ и $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M}$ – замощения пространства E_n ;
- 2) $\{A_\gamma^* D\}_{\gamma \in M_\omega}$ – замощение множества $B_\omega^* \Omega$ для любого $\omega \in S$;
- 3) для любого $\omega \in S$ множество $B_\omega^* \Omega$ обладает следующими свойствами: оно содержит открытый шар максимального радиуса R_ω с центром в нуле, трансляции которого на элементы решетки $2\pi B_\omega^* \Sigma^*$ образуют укладку, и не пересекается ни с каким другим шаром из этой системы трансляций.

Если такие геометрические объекты построены, то функции ψ и ϕ , образы Фурье которых равны характеристическим функциям множеств D и Ω соответственно, порождают такие функции $\psi_{\gamma, \alpha}$ и $\phi_{\omega, \beta}$ вида (15), (16), что для любого $s \in E_1$ система функций $\{\psi_{\gamma, \alpha}\}_{\gamma \in M, \alpha \in \Lambda}$ – безусловный базис пространства $W_2^s(E_n)$ (ортонормированный при $s = 0$), и если V_ω и W_γ – подпространства пространства $W_2^s(E_n)$ с базисами $\{\phi_{\omega, \beta}\}_{\beta \in \Sigma}$ и $\{\psi_{\gamma, \alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$, то, во-первых, для всех $\omega \in S$

$$V_\omega = \bigoplus_{\gamma \in M_\omega} W_\gamma,$$

а во-вторых, для любого $\omega \in S$ подпространства V_ω оптимальны в смысле реализации на них поперечника вида (33) для всех $s < m$.

Отметим, что если $n = 1$, то подпространства V_ω являются экстремальными не только для проекционно-сеточных, но и для колмогоровских поперечников той же средней размерности (см. [8], [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В частности, условие 3) теоремы 4 выполнено, если множество $B_\omega^* \Omega$ – многогранник Вороного [4] решетки $2\pi B_\omega^* \Sigma^*$, построенный для точки $\beta = 0$, т.е.

$$B_\omega^* \Omega = \{x \in E_n : |x| \leq |x - \alpha| \text{ для всех } \alpha \in 2\pi B_\omega^* \Sigma^*\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть

$$\Omega = \{x \in E_n : |x| \leq |x - \alpha| \text{ для всех } \alpha \in 2\pi \Sigma^*\} \quad (34)$$

– многогранник Вороного [4] решетки $2\pi \Sigma^*$, $P_1, \dots, P_m$ – все его $(n - 1)$ -мерные грани, а $g_1, \dots, g_m$ – нормали к этим граням. Система векторов $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ единственным образом разбивается на p подсистем $G_1, \dots, G_p$, так что в любой подсистеме G_k нет ортогональных между собой векторов, а для любых $k \neq s$ каждый вектор подсистемы G_k ортогонален любому вектору подсистемы G_s ($k, s = 1, \dots, p$). Если X_s – линейная оболочка векторов подсистемы G_s ($s = 1, \dots, p$), то

$$E_n = \bigoplus_{s=1}^p X_s. \quad (35)$$

Ортогональное разложение (35) определяет совокупность диагональных операторов $\{T\}$, каждый из которых зависит от набора действительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и действует следующим образом: если $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_s \in X_s$, $s = 1, \dots, p$ (см. (35)), то

$$Tx = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p. \quad (36)$$

Можно показать, что если Ω — многогранник Вороного вида (34) и $B_\omega = T_\omega U_\omega$, где U_ω — любой ортогональный оператор, а T_ω — произвольный оператор вида (36), то выполнено условие 3) теоремы 4 (при этом также выполнено и одно из условий 1) этой теоремы: $\{\Omega + 2\pi\beta\}_{\beta \in \Sigma^*}$ — замощение пространства E_n).

Таким образом, теоремы 1–3 при $\mu(x) = (1 + |x|^2)^s$ и теорема 4 дают способ построения универсально оптимальных базисов из функций-всплесков, порождающих подпространства, экстремальные в смысле проекционно-сеточных поперечников единичного шара пространства $W_2^m(E_n)$ в метрике $W_2^s(E_n)$ одновременно для всей шкалы соболевских классов (т.е. для любой из пар $(W_2^m(E_n), W_2^s(E_n))$ при всех $s < m$). При этом дело сводится к реализации чисто геометрической конструкции, элементы которой обязаны удовлетворять условиям 1)–3) теоремы 4.

6. Примеры

Приведем два простых примера конструкций, удовлетворяющих условиям теоремы 4.

$$1) \Lambda = \Lambda^* = \Sigma = \Sigma^* = M = S = \mathbb{Z}_n,$$

$$\forall \omega \in \mathbb{Z}_n \quad M_\omega = \{\gamma \in \mathbb{Z}_n : \gamma_k < \omega_k \quad \forall k = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega = [-\pi, \pi]^n, \quad D = \{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]\}^n,$$

$$\forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}_n, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$$

$$A_\gamma x = A_\gamma^* x = B_\gamma x = B_\gamma^* x = (2^{\gamma_1} x_1, \dots, 2^{\gamma_n} x_n) \in E_n.$$

Тогда

$$B_\omega \Omega = \bigotimes_{k=1}^n [-2^{\omega_k} \pi, 2^{\omega_k} \pi],$$

$$A_\gamma D = \bigotimes_{k=1}^n \{[-2^{\gamma_k+1} \pi, -2^{\gamma_k} \pi] \cup [2^{\gamma_k} \pi, 2^{\gamma_k+1} \pi]\},$$

$R_\omega = 2^a \pi$, где $a = \min_{1 \leq k \leq n} \omega_k$, и условия 1)–3) теоремы 4 выполнены.

2) $n = 2$, $\Lambda = \Lambda^* = \Sigma = \Sigma^* = \mathbb{Z}_2$, $M = S = \mathbb{Z}_1$, $\forall \omega \in \mathbb{Z}_1$ $M_\omega = \{k \in \mathbb{Z}_1 : k < \omega\}$, $\Omega = [-\pi, \pi]^2$ — многогранник Вороного решетки $2\pi\mathbb{Z}_2$, $\forall \gamma \in \mathbb{Z}_1$ $A_\gamma = B_\gamma = L^\gamma$, $D = L\Omega \setminus \Omega$, где L — оператор, равный суперпозиции поворота на угол $\pi/4$ в положительном направлении и гомотетии с коэффициентом $\sqrt{2}$; его матрица в каноническом базисе имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определенное выше множество D — так называемая зона Бриллюэна [10] 2-го ранга, состоящая из тех точек x плоскости E_2 , для которых нулевой узел является вторым по удаленности от точки x среди всех узлов решетки $2\pi\mathbb{Z}_2$. И в этом случае все нужные условия выполнены.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть для некоторых решеток Λ , Σ и некоторых множеств индексов M , S , M_ω построены такие D , Ω , $\{A_\gamma\}$, $\{B_\omega\}$, что выполнены условия 1)–3) теоремы 4. Если возникла необходимость добиться выполнения этих условий для некоторых других решеток $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Sigma}$, связанных с Λ и Σ соотношениями $\tilde{\Lambda} = F\Lambda$, $\tilde{\Sigma} = G\Sigma$, где F и G – линейные операторы, то достаточно положить $\tilde{M} = M$, $\tilde{S} = S$, $\tilde{M}_\omega = M_\omega$, $\tilde{D} = (F^*)^{-1}D$, $\tilde{\Omega} = (G^*)^{-1}\Omega$, $\tilde{A}_\gamma = FA_\gamma$, $\tilde{B}_\omega = GB_\omega$. Именно поэтому в приведенных выше примерах рассмотрен лишь случай целочисленной решетки.

Благодарю В. Л. Дольникова за полезные обсуждения, а также А. К. Карлина и О. А. Коптеву за помощь в оформлении статьи.

Список литературы

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными // Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Т. 2. М.: Мир, 1988.
2. Волевиц Л. Р., Панеях Б. П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // УМН. 1965. Т. 20. № 1. С. 3–74.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
4. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
5. Mallat S. G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 315. № 1. P. 69–87.
6. Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. P. 909–996.
7. Динь Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г. Задачи типа Бернштейна и Фавара и средняя ε -размерность некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 783–786.
8. Стрелков Н. А. Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1513–1533.
9. Стрелков Н. А. Анализ Фурье проекционно-сеточных аппроксимаций // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Ярославль: ЯрГУ, 1993.
10. Гончаров А. Решетки и зоны Бриллюэна // Квант. 1995. № 1. С. 15–17.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
01.04.1996