Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ким Ан Чи, А. И. Кострикин, Некоторые сбалансированные группы и 3-многообразия, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 2, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:01:28

УДК 513.8+519.4

А. Ч. Ким, А. И. Кострикин

Некоторые сбалансированные группы и 3-многообразия

Строятся пять серий групп с конечным числом образующих и соотношений. Их определение основано на построении некоторых замкнутых компактных ориентируемых 3-многообразий, так что наши группы сбалансированы. Дано описание их факторгрупп по коммутанту. Доказано, что почти все группы бесконечны, а во многие из них, кроме того, вплетены линейные группы $SL(2, F)$, $|F : \mathbb{Q}| \leq 6$. Наши рассуждения элементарны, но полученные нами результаты о сбалансированных группах будут полезны для дальнейшего изучения 3-многообразий.

Библиография: 10 названий.

§ 0. Введение

Работа посвящается Ю. И. Манину в связи с его шестидесятилетием.

Побудительным мотивом к исследованию, описанному в данной статье, послужило желание изучить некоторые естественные 3-многообразия на уровне их фундаментальных групп. Для начала мы определим серию конечноопределенных групп $G_1(n)$:

$$G_1(n) = \langle 1, 2, \dots, 4n \mid R_1^1(k), R_1^2(k), R_1^3(k), R_1^4(k); 1 \leq k \leq n \rangle, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где по полиграфическим причинам отождествляются целое число i и образующая с номером i . Символы $1^{-1}, 2^{-1}, \dots, (4n)^{-1}$ также включаются в множество образующих. Символ “ $\cdot$ ” используется для умножения в определяющих соотношениях (определяющих словах) и в элементах группы. Буква “ e ” резервируется в качестве единичного элемента. Определяющие соотношения группы $G_1(n)$ имеют специфический вид:

$$R_1^1(k) : k \cdot 3n + k \cdot 2n + k + 1 = 2n + k \cdot k + 1, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$R_1^1(n) : n \cdot 4n \cdot 1 = 3n \cdot n + 1;$$

$$R_1^2(k) : n + k \cdot 3n + k \cdot k + 1 = k \cdot n + k + 1, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$R_1^3(k) : 2n + k \cdot 3n + k \cdot n + k + 1 = n + k \cdot 2n + k + 1, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$R_1^3(n) : 3n \cdot 4n \cdot 2n + 1 = 2n \cdot 1;$$

$$R_1^4(k) : 3k - 2 \cdot 3k - 1 \cdot 3k = (3n + k)^{-1} \cdot 3n + k + 1, \quad 1 \leq k \leq n-1;$$

$$R_1^4(n) : 3n - 2 \cdot 3n - 1 \cdot 3n = (4n)^{-1} \cdot 3n + 1.$$

Авторы выражают благодарность за поддержку при выполнении настоящей работы фондам КОСЕФ (грант № 93-09-415) и Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 96-01-00146).

Общее число $4n$ соотношений совпадает с числом образующих, так что мы имеем серию *сбалансированных* групп, как это принято говорить в комбинаторной теории групп. Многие конечные группы допускают сбалансированное задание, поэтому проблема доказательства бесконечности той или иной сбалансированной группы G , в общем, может оказаться весьма нетривиальной. Разумеется, эта проблема интересна для естественных, в каком-то смысле, классов сбалансированных групп. Наши группы $G_1(n)$ – геометрического происхождения. Чтобы убедиться в этом, мы рассмотрим замощение (a tessellation) 2-сферы, состоящее из $8n$ граней, $20n$ ребер и $12n + 2$ вершин, как это показано на рисунках для небольших значений $n = 2, 3$ (см. рис. 1.2, рис. 1.3). Все ребра пронумерованы и ориентированы таким образом, что каждой грани отвечает в точности еще одна грань с той же индуцированной ориентацией. Отождествляя эти пары пятиугольников, равно как соответствующие пары ребер и вершин, мы получаем трехмерный комплекс K , являющийся ориентируемым псевдомногообразием. Имеется простой критерий того, чтобы K было многообразием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [8]). *Пусть K – ориентируемое замкнутое трехмерное псевдомногообразие, получающееся из односвязного полиэдра отождествлением пар граней на поверхности. Псевдомногообразие K будет многообразием тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика равна нулю:*

$$\chi(K) = -p_0 + p_1 - p_2 + p_3 = 0,$$

где $p_i = p_i(K)$ – число i -клеток (3-клеток, граней, ребер, вершин).

Указанная выше конструкция приводит к комплексу K с $p_0 = 1$, $p_1 = 4n$, $p_2 = 4n$, $p_3 = 1$. Таким образом, предложение 1 применимо, давая замкнутое компактное ориентируемое 3-многообразие M_1^n . Хорошо известно, что его фундаментальная группа $\pi_1(M_1^n)$ обладает сбалансированным заданием

$$\pi_1(M_1^n) = \langle x_1, \dots, x_{4n} \mid R_1 = e, \dots, R_{4n} = e \rangle,$$

где образующие $x_1, \dots, x_{4n}$ отвечают ребрам $1, 2, \dots, 4n$, а слова $R_1, \dots, R_{4n}$ получаются при обходе границ 2-клеток. Отождествление x_i с i приводит к изоморфизму $\pi_1(M_1^n) \cong G_1(n)$.

Другую серию составляют сбалансированные группы $G_2(n)$, $n = 1, 2, \dots$, порожденные $2n$ элементами. Соотношения имеют вид:

$$R_2(k) : k + 3 \cdot k \cdot k + 4 \cdot k + 2 = k + 1; \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Все положительные целые числа берутся по mod $2n$ с множеством представителей $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Мы имеем

$$G_2(1) = \langle 1, 2 \mid 1^3 = e = 2^3 \rangle \cong Z_3 * Z_3;$$

$$G_2(2) = \langle 1, 2, 3, 4 \mid 4 \cdot 1^2 \cdot 3 = 2, 1 \cdot 2^2 \cdot 4 = 3, 2 \cdot 3^2 \cdot 1 = 4, 3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 1 \rangle;$$

$$G_2(4) = \langle 1, 2, \dots, 8 \mid 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 = 2, 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 = 3, 6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 4,$$

$$7 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 = 5, 8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7 = 6, 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 = 7, 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 = 8, 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 = 1 \rangle.$$

Рис. 1.2

Рис. 1.3

Сбалансированные группы $G_2(1)$, $G_2(2)$, $G_2(4)$ реализуются в качестве фундаментальных групп $\pi_1(M_2^n)$ замкнутых компактных ориентируемых 3-многообразий M_2^n , $n = 1, 2, 4$. В этой связи следует посмотреть на рис. 2.2, 2.4, сделать отождествления пар граней с одинаковой ориентацией и снова принять во внимание предложение 1. Можем ли мы ассоциировать какие-либо 3-многообразия с группами $G_2(n)$ при $n \neq 1, 2, 4$? Положительное заключение на этот счет в заметке [3] было чересчур оптимистичным.

Теперь мы определим сбалансированные группы $G_3(n)$, $n = 1, 2, \dots$

$$G_3(n) = \langle 1, 2, \dots, 4n + 2 \mid R_3^1(k), R_3^2(k), R_3^3(k) \rangle$$

Рис. 2.2

Рис. 2.4

с множеством $\{1, 2, \dots, 4n + 2\}$ образующих и с соотношениями:

$$R_3^1(k) : 4k + 1 \cdot 4k + 2 \cdot 4k + 3 = 4k + 5 \cdot 4k + 4, \quad 0 \leq k \leq n;$$

$$R_3^2(k) : 4k - 1 \cdot 4k \cdot 4k + 1 = 4k + 3 \cdot 4k + 2, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$R_3^3(k) : 2k \cdot 4n + 1 - 2k \cdot 2k + 1 \cdot 4n - 1 - 2k = 2k + 2, \quad 1 \leq k \leq 2n + 1.$$

Как обычно, берем целые числа по mod $(4n + 2)$. На этот раз мы имеем $\pi_1(M_3^n) = G_3(n)$ для каждого целого числа $n \geq 1$ и замкнутого компактного ориентируемого

Рис. 3.1

Рис. 3.2

3-многообразия M_3^n . Следует рассмотреть топологический полиэдр, состоящий из $m = 2n + 1$ пятиугольников в северной и южной полусфере и из $2m$ пятиугольников в экваториальной зоне. Нумерация ребер и их ориентация выглядят, как на рис. 3.1, 3.2. Получающийся после отождествления одинаково ориентированных граней трехмерный комплекс K является ориентируемым псевдомногообразием. Снова, в соответствии с предложением 1, K будет 3-многообразием (обозначим его символом M_3^n), поскольку $\chi(K) = 0$ ($p_0 = 1, p_1 = 2m, p_2 = 2m, p_3 = 1$).

Совершенно аналогичная конструкция приводит нас к серии 3-многообразий $M_4^n, n \geq 1$, возникновение которых продемонстрировано на рис. 4.1, 4.2, и к серии 3-многообразий $M_5^n, n \geq 3$, построение которых ясно видно из рис. 5.3, 5.4.

Рис. 4.1

Рис. 4.2

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В отличие от серий $M_1^n - M_4^n$, где в основу было положено замощение 2-сферы пятиугольниками, 3-многообразия M_5^n связаны с замощением 2-сферы двумя n -угольниками и $2n$ треугольниками.

Соответствующие фундаментальные группы $\pi_1(M_r^n) \cong G_r(n)$, $r = 4, 5$, имеют следующие сбалансированные задания:

$$G_4(n) = \langle 1, 2, \dots, 6n + 2 \mid R_4^1(k), R_4^2(k); 1 \leq k \leq 3n + 1 \rangle, \quad n \geq 1,$$

Рис. 5.4

$$R_4^1(k) : 6n + 5 - 2k \cdot 4n + 4 - 2k \cdot 2n + 2 - 2k \cdot 6n + 4 - 2k = 6n + 3 - 2k,$$

$$1 \leq k \leq 3n + 1;$$

$$R_4^2(k) : 6n + 6 - 2k \cdot 4n + 5 - 2k \cdot 2n + 3 - 2k \cdot 6n + 5 - 2k = 6n + 4 - 2k,$$

$$1 \leq k \leq 3n + 1;$$

$$G_5(n) = \langle 1, 2, \dots, n + 1 \mid R_5^1, R_5^2(k) \rangle, \quad n \geq 3,$$

где

$$R_5^1 : 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n - 1 \cdot n = e;$$

$$R_5^2(k) : n + 1 \cdot k + 1 \cdot k = e, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$R_5^2(n) : n + 1 \cdot 1 \cdot n = e.$$

Из предыдущих конструкций должно быть ясно, что справедлива следующая элементарная (если имеются соответствующие рисунки!) теорема, и как таковая она

составляет, в духе заголовка статьи, мостик между двумя областями – сбалансированными группами и 3-многообразиями.

ТЕОРЕМА 0. *Сбалансированные группы $G_1(n)$, $n \geq 1$; $G_2(n)$, $n = 1, 2, 4$; $G_3(n)$, $G_4(n)$, $n \geq 1$; $G_5(n)$, $n \geq 3$, являются фундаментальными группами замкнутых компактных ориентируемых 3-многообразий M_k^n , $1 \leq k \leq 5$.*

Возникают естественные вопросы.

- 1) Каково строение факторгрупп по коммутанту $\overline{G}_k(n) = G_k(n)/G'_k(n)$? Это интересно, поскольку $G_k(n) = \pi_1(M_k^n) \implies \overline{G}_k(n) = H_1(M_k^n, \mathbb{Z})$.
- 2) Какие из наших групп конечны или бесконечны?
- 3) Что можно сказать о росте групп? В частности, какие 3-многообразия M_k^n допускают гиперболическую структуру?
- 4) Являются ли многообразия разветвленными накрытиями некоторых узлов или линков?

Нельзя сказать, что на все эти вопросы получены ответы; основные результаты статьи отвечают лишь на первые два из них. Всюду в дальнейшем мы полагаем $Z_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; Z_m^n – прямая сумма n экземпляров группы Z_m .

ТЕОРЕМА 1. *Факторгруппа $\overline{G}_k(n) = G_k(n)/G'_k(n)$, $1 \leq k \leq 5$, записанная в аддитивной форме, имеет следующее строение:*

- 1) $\overline{G}_1(3d) \cong \mathbb{Z}^{2d} \oplus Z_3^{d+2}$; $\overline{G}_1(n) \cong Z_9 \oplus Z_3^n$, $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$;
- 2) $|\overline{G}_2(n)| < \infty$;
- 3) $\overline{G}_3(n) \cong \mathbb{Z} \oplus Z_2$, $n \equiv 1 \pmod{3}$; $\overline{G}_3(n) \cong \mathbb{Z}$, $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$;
- 4) $|\overline{G}_4(n)| < \infty$;
- 5) $\overline{G}_5(2n) \cong \mathbb{Z} \oplus Z_n$; $\overline{G}_5(2n+1) \cong Z_{2n+1}$.

Строение групп $\overline{G}_2(n)$, $\overline{G}_4(n)$ является довольно запутанным. Оно будет прояснено индукцией по n в ходе доказательства и позднее – в замечании 2.

ТЕОРЕМА 2. *Все группы $G_k(n)$, $1 \leq k \leq 4$; $G_5(2n)$ бесконечны. Имеет место изоморфизм $G_5(3) \cong Q_8 \cdot Z_3$ (полупрямое произведение группы кватернионов Q_8 на циклическую группу Z_3 порядка 3).*

ТЕОРЕМА 3. *При любом $n \equiv 2 \pmod{3}$ группа $G_1(n)$ обладает эпиморфизмом на бесконечную неабелеву подгруппу группы $\mathrm{SL}_2(F)$, где F – некоторое алгебраическое расширение степени 6 поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Более точно, в теореме 3 мы имеем в виду эпиморфизм на группу $\langle A, B \rangle \subset \mathrm{SL}_2(F)$, где $F = \mathbb{Q}(\lambda)$, λ – корень $\mathbb{Q}$ -неприводимого многочлена

$$\begin{aligned} f(X) &= X^6 - X^5 + 3X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X + 1 \\ &= X^3[(X + X^{-1})^3 - (X + X^{-1})^2 - 1]; \end{aligned} \tag{1}$$

A, B – матрицы типа

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} x & 13 \\ z & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \\ x &= -11\lambda^5 + 9\lambda^4 - 29\lambda^3 + 23\lambda^2 - 17\lambda + 2, \\ z &= -5\lambda^5 + \lambda^4 - 11\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 14, \\ t &= -2\lambda^5 + 4\lambda^4 - 10\lambda^3 + 16\lambda^2 - 9\lambda + 11. \end{aligned} \quad (2)$$

Редукция по $\text{mod } p$, где p – простое число, приводит к конечному эпиморфному образу

$$\overline{H}(p) = \langle \overline{A}, \overline{B} \rangle \subseteq \text{SL}_2(F_q).$$

Мы можем взять $q = p^r$, где r – максимальная степень некоторого неприводимого по $\text{mod } p$ множителя в $f(X)$. В настоящий момент не ясно, имеет ли место равенство $\overline{H}(p) = \text{SL}_2(F_q)$, но это так в случаях $p = 2, 13$. Еще один вопрос остается открытым: $\text{SL}_2(Z) \subset \langle A, B \rangle$?

§ 1. Доказательство теоремы 1

При вычислении групп $\overline{G}_s(n)$ естественно использовать аддитивную запись. В частности, вместо множеств определяющих слов $R_s^i(k)$ мы имеем надлежащие целочисленные матрицы $\overline{R}_s(n)$, $1 \leq s \leq 4$, размеров, соответственно, $4n, 2n, 4n+2, 6n+2$. Группы $\overline{G}_5(n)$ намного проще. Предполагается, что образы $\overline{1}, \overline{2}, \dots$ образующих $1, 2, \dots$ выписываются в том же порядке. Элементарными целочисленными преобразованиями трех типов матрицы $\overline{R}_s(n)$ приводятся к верхне-треугольной нормальной форме (нормальная форма Эрмита) или даже к диагональной нормальной форме (в зарубежной литературе – нормальная форма Смита) над $\mathbb{Z}$. Мы рассматриваем группы $G_s(n)$ по отдельности, опуская несущественные детали.

1.1. Группа $\overline{G}_1(n)$. Матрица $\overline{R}_1(n)$ состоит из 16 $n \times n$ -подматриц:

$$\overline{R}_1(n) = \begin{bmatrix} A_n + B_n & -B_n & -A_n & I_n \\ -A_n & A_n + B_n & -B_n & I_n \\ -B_n & -A_n & A_n + B_n & I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix},$$

где I_n – единичная $n \times n$ -матрица; $A_n = I_n + (a_{ij})$, $a_{i,i+1} = -1$, $a_{ij} = 0$, $j \neq i+1$, $i = 1, \dots, n-1$; $B_n = (b_{ij})$, $b_{ij} = 0$, за исключением коэффициента $b_{n1} = 1$;

$$(X_n \ Y_n \ Z_n) = \begin{bmatrix} 111 & 000 & \dots & 000 & 000 \\ 000 & 111 & \dots & 000 & 000 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 000 & 000 & \dots & 111 & 000 \\ 000 & 000 & \dots & 000 & 111 \end{bmatrix}.$$

Добавим еще одну матрицу $C_n = (c_{ij})$ с коэффициентами $c_{nj} = 1, 1 \leq j \leq n$, $c_{ij} = 0, i < n$. Очевидные элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы $\overline{R}_1(n)$ дают последовательно:

$$\begin{aligned}
\overline{R}_1(n) &\sim \begin{bmatrix} A_n + B_n & -B_n & -A_n & I_n \\ B_n & A_n & -A_n - B_n & 2I_n \\ -B_n & -A_n & A_n + B_n & I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} A_n + B_n & -B_n & -A_n & I_n \\ B_n & A_n & -A_n - B_n & 2I_n \\ 0 & 0 & 0 & 3I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} A_n & -A_n - B_n & B_n & -I_n \\ B_n & A_n & -A_n - B_n & 2I_n \\ 0 & 0 & 0 & 3I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} A_n & -A_n - B_n & B_n & -I_n \\ 0 & A_n + 2B_n & -A_n - 2B_n & C_n + 2I_n \\ 0 & 0 & 0 & 3I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} A_n & -A_n & B_n & -I_n \\ 0 & 0 & -A_n - 2B_n & C_n + 2I_n \\ 0 & 0 & 0 & 3I_n \\ X_n & Y_n & Z_n & A_n - B_n \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} A_n & -A_n & B_n & -I_n \\ X_n & Y_n + Z_n & Z_n & A_n - B_n \\ 0 & 0 & -A_n - 2B_n & C_n + 2I_n \\ 0 & 0 & 0 & 3I_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Мы предпочитаем не продолжать на этом этапе дальнейшие технические вычисления с $\overline{R}_1(n)$. Заметим только, что с точностью до знака имеет место следующее равенство для $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$:

$$\det \overline{R}_1(n) = \pm 3^n \cdot \det(X_n + Y_n + Z_n) \cdot \det(A_n + 2B_n) = 3^n \cdot (-3) \cdot 3 = \mp 3^{n+2}.$$

Однако, при $n = 3d$ мы сталкиваемся с совершенно иной ситуацией, поскольку в этом случае

$$X_n + Y_n + Z_n = \begin{bmatrix} T \\ T \\ T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

с

$$T = d \left\{ \begin{bmatrix} 111 & 000 & \dots & 000 \\ 000 & 111 & \dots & 000 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 000 & 000 & \dots & 111 \end{bmatrix} \right\}.$$

Все эти факты согласуются с утверждением 1) теоремы.

1.2. Группа $G_2(n)$. В случае $n = 2m$ мы можем представить матрицу соотношений $\overline{R}_2(n)$ группы $\overline{G}_2(n)$ в виде

$$\overline{R}_2(n) = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A \\ A & B & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A & B \end{bmatrix},$$

где 0 представляет нулевую 4×4 -матрицу и

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При $n = 2m + 1$ в правом (в левом) верхнем углу следует ставить, соответственно, матрицы

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

выделяя первые шесть строк и первые два столбца. Рассуждения в обоих случаях аналогичны. Проведем их детально при $n = 2m$. Начнем с элементарных преобразований над строками матрицы $\overline{R}_2(n)$. Умножаем слева последние четыре строки (последнюю строку 4×4 -матрицы) на $-A_0 B^{-1}$ (полагая $A_0 = A$); затем получившийся результат прибавляем к первым четырем строкам, которые примут вид $(B \ 0 \ 0 \ \dots \ A_1 \ 0)$, $A_1 = -A_0 B^{-1} A$. Далее, умножая предпоследние четыре строки в $\overline{R}_2(n)$ слева на $-A_1 B^{-1}$ и прибавляя снова к первым четырем строкам, преобразуем их к виду $(B \ 0 \ 0 \ \dots \ A_2 \ 0 \ 0)$, $A_2 = -A_1 B^{-1} A = A(-B - 1 \ A)^2$. После k шагов первые четыре строки примут вид

$$(B \ 0 \ 0 \ \dots \ A_{k-1} \ 0 \ \dots \ 0 \ 0), \quad A_{k-1} = A(-B^{-1} \ A)^{k-1}.$$

В конечном счете первые четыре строки записываются в виде

$$(\overline{B}_m \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0), \quad \overline{B}_m = B + A(-B^{-1} \ A)^{m-1}.$$

Если $n = 2m + 1$, то первые шесть строк принимают вид $(\overline{B}'_m \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$, где

$$\overline{B}'_m = B' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & A_{m-1} & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Что касается остальных $2n - 4$ (или, соответственно, $2n - 6$) строк, то они совсем не менялись, так что наши элементарные операции приводят к матрице

$$\overline{\overline{R}}_2(n) = \begin{bmatrix} M & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ & * & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

где $M = \overline{B}_m$ или $\overline{B}'_m$. Ясно, что $\det \overline{R}_2(n) = \det \overline{\overline{R}}_2(n) = \det M$. Еще раз остановимся на случае $n = 2m$, когда $M = \overline{B}_m$. Удобно рассмотреть матрицу

$$B^{-1}\overline{B}_m = I_4 - (-B^{-1}A)^m.$$

Как нетрудно убедиться, матрица

$$-B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$\det(\lambda I_4 + B^{-1}A) = \lambda^4 + 9\lambda^3 + 25\lambda^2 + 9\lambda + 1$$

имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, не являющиеся корнями из 1. Следовательно, существует такая невырожденная 4×4 -матрица C , что

$$C^{-1}(B^{-1}\overline{B}_m)C = I_4 - \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \lambda_4^m).$$

Цепочка очевидных импликаций

$$\begin{aligned} \det(C^{-1}(B^{-1}\overline{B}_m)C) \neq 0 &\implies \det(B^{-1}\overline{B}_m) \neq 0 \implies \det \overline{B}_m \neq 0 \\ &\implies \det \overline{\overline{R}}_2(n) \neq 0 \implies \det \overline{R}_2(n) \neq 0 \end{aligned}$$

устанавливает невырожденность матрицы $\overline{R}_2(n)$ и тем самым конечность группы $\overline{G}_2(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Откровенно говоря, утверждение $|\overline{G}_2(n)| < \infty$ тривиально, поскольку $\overline{R}_2(n)$ – циркулянтная $2n \times 2n$ -матрица, определенная, например, строкой

$$(1, -1, 1, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-5}). \quad (3)$$

Тогда

$$\det \overline{R}_2(n) = \prod_{i=1}^{2n} f(\varepsilon_i) \neq 0,$$

где $f(x) = 1 - x^2 + x^3 + x^4$, и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}$ – все корни из 1 порядка $2n$.

Но наши предыдущие рассуждения дали гораздо больше. Как показывает доказательство, имеется не более четырех собственных значений $\neq 1$ матрицы $\overline{R}_2(n)$. Для вычисления степени $(-B^{-1}A)^m$ полезно воспользоваться рекуррентным соотношением, возникающим из теоремы Гамильтона–Кэли. Тем не менее, строение группы $\overline{G}_2(n)$ остается довольно запутанным. Мы продемонстрируем это для $n \leq 14$ в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

n	Инвариантные множители	n	Инвариантные множители
1	3, 3	8	3, 3, 69, 345
2	3, 15	9	999, 999
3	9, 9	10	8, 8, 120, 600
4	3, 3, 3, 15	11	4623, 4623
5	4, 4, 12, 12	12	9, 45, 495, 495
6	5, 45, 45	13	21453, 21453
7	213, 213	14	20661, 103305

1.3. Группа $\overline{G}_3(n)$. Заметим, что “четные” образующие $\overline{2i}$ группы $\overline{G}_3(n)$ входят в каждое соотношение парами – в левую и правую части с одним и тем же коэффициентом 1. Существует очевидный эпиморфизм $\Psi: \overline{G}_3(n) \rightarrow \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$, почти проясняющий строение группы $\overline{G}_3(n)$: $\Psi(\overline{2i}) = a$, $\Psi(\overline{2i-1}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$. Этого достаточно в случае $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$. Но при $n = 3s+1$ мы должны действовать более осмотрительно. Как и выше, положим $\Psi(\overline{2i}) = a$, $1 \leq i \leq 2n+1$, ожидая, что $\Psi(\overline{6j+1}) = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2s = 2(n-1)/3$, в то время как $\Psi(\overline{i}) = \Psi(\overline{3}) = b$, $2b = 0 \forall i \neq 2j, 6j+1$. Чтобы оправдать наши ожидания,

выпишем все соотношения между $\underline{i} = \Psi(\bar{i})$, исходя из определения группы $\overline{G}_3(n)$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \underline{5} = \underline{1} + \underline{3}; & \text{a')} \quad \underline{4n-1} + \underline{4n-3} + \underline{3} = 0; \\
 \text{b)} \quad \underline{7} = \underline{3} + \underline{5}; & \text{b')} \quad \underline{4n-3} + \underline{4n-5} + \underline{5} = 0; \\
 \dots & \dots \\
 \text{c)} \quad \underline{4n-1} = \underline{4n-5} + \underline{4n-3}; & \text{c')} \quad \underline{5} + \underline{3} + \underline{4n-3} = 0; \\
 \text{d)} \quad \underline{4n+1} = \underline{4n-3} + \underline{4n-1}; & \text{d')} \quad \underline{3} + \underline{1} + \underline{4n-1} = 0; \\
 \text{e)} \quad \underline{1} = \underline{4n-1} + \underline{4n+1}; & \text{e')} \quad \underline{1} + \underline{4n+1} + \underline{4n+1} = 0; \\
 \text{f)} \quad \underline{3} = \underline{4n+1} + \underline{1}; & \text{f')} \quad \underline{4n+1} + \underline{4n-1} + \underline{1} = 0.
 \end{array}$$

Приведем некоторые следствия:

$$\begin{array}{l}
 \text{g)} \quad 2 \cdot \underline{1} = 0 \text{ (см. e) \& f')}; \\
 \text{h)} \quad \underline{4n+1} + \underline{3} = 0 \text{ (см. d) \& a')}; \\
 \text{k)} \quad 2 \cdot \underline{3} = 0 \text{ (см. d') \& e')} \implies 0 = \underline{5} + \underline{3} + \underline{1} + (\underline{3} + \underline{4n-3} + \underline{4n-1}) = 2 \cdot \underline{3} + 2 \cdot \underline{1} \\
 \quad \text{(см. a), a'), g)}; \\
 \text{l)} \quad 2 \cdot \underline{4n+1} = 0 \text{ (см. h) \& k)}; \\
 \text{m)} \quad \underline{1} = 0 \text{ (см. l) \& e')}.
 \end{array}$$

Теперь из а)–м) следует, что

$$\begin{array}{lll}
 \underline{5} = \underline{3}, & \underline{7} = 0, & \underline{9} = \underline{3}, \\
 \underline{11} = \underline{3}, & \underline{13} = 0, & \underline{15} = \underline{3}, \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \underline{6j-1} = \underline{3}, & \underline{6j+1} = 0, & \underline{6j} = \underline{3}.
 \end{array}$$

Верно ли, что $\underline{3} = 0$? Это зависит от n . Используя f) и m), рассмотрим отдельно три случая:

$$\begin{array}{l}
 \alpha) \quad n = 3t; \text{ тогда } \underline{4n+1} = \underline{12t+1} = 0, \text{ откуда } \underline{3} = 0; \\
 \beta) \quad n = 3t+2; \text{ снова } \underline{4n+1} = \underline{6(2t+1)+1} = 0 \implies \underline{3} = 0; \\
 \gamma) \quad n = 3t+1 \implies \underline{4n+1} = \underline{6(2t+1)-1} = \underline{3}; \text{ это не накладывает никакого} \\
 \quad \text{ограничения на } \underline{3} \text{ за исключением k)}.
 \end{array}$$

Таким образом, мы построили эпиморфизм $\Psi: \overline{G}_3(n) \rightarrow \mathbb{Z}$, когда $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$, и эпиморфизм $\Psi: \overline{G}_3(n) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, когда $n \equiv 1 \pmod{3}$. Проверка тривиальности ядра $\text{Ker } \Psi$ опускается.

1.4. Группа $G_4(n)$. Надлежащее упорядочение определяющих соотношений $\overline{R}_4^1, \overline{R}_4^2, 1 \leq k \leq m = 3n+1$ группы $\overline{G}_4(n)$ почти немедленно приведет нас к заключению, что $\overline{R}_4(n)$ является циркулянтной матрицей с определяющей строкой

$$(-1, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-2}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n+1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-2}). \quad (4)$$

Таким образом,

$$\det \overline{G}_4(n) = \prod_{i=1}^{6n+2} f(\varepsilon_i), \quad \varepsilon_i^{6n+2} = 1,$$

где $f(x) = -1 + x + x^2 + x^{2n+1} + x^{4n+3}$. Из свойства $f(\varepsilon_i) \neq 0$ вытекает, что $\det \overline{G}_4(n) \neq 0$. Поэтому $|\overline{G}_4(n)| < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ровно так же, как в случае $\overline{G}_2(n)$, можно было бы описать строение группы $\overline{G}_4(n)$, используя индукцию по n . Мы опускаем соответствующие рассуждения, упомянув лишь несколько результатов вычислительной природы:

$$\begin{aligned}\overline{G}_4(1) &\cong Z_3^3 \oplus Z_{15}, & \overline{G}_4(2) &\cong Z_{87}^2, \\ \overline{G}_4(3) &\cong Z_{165} \oplus Z_{825}, & \overline{G}_4(4) &\cong Z_{1563}^2.\end{aligned}$$

Отметим, что $\overline{G}_4(1) = \overline{G}_2(4)$, поскольку определяющие строки (3), (4) в этих случаях тождественны. На самом деле $G_4(1) = G_2(4)$, поскольку совпадают сами задания этих групп. В конечном счете, легко отождествляются рисунки, лежащие в основе 3-многообразий M_4^1, M_2^4 (ср. рис. 4.1 и рис. 2.4), так что $M_4^1 = M_2^4$.

1.5. Группа $G_5(n)$. В соответствии с определением $G_5(n)$ мы имеем $n+1 = n^{-1} \cdot 1^{-1}$, $n+1 = k^{-1} \cdot (k+1)^{-1}$; $k = 1, 2, \dots, n-1$, и, кроме того, $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 1 \cdot n = e$. Таким образом, $k^{-1} \cdot (k+1)^{-1} = 1^{-1} \cdot 2^{-1}$ или, что эквивалентно, $(k+1) \cdot k = 2 \cdot 1$, откуда

$$\begin{aligned}2t &= (2 \cdot 1)^{t-1} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1)^{-(t-1)}, & t &= 1, 2, \dots \\ 2t+1 &= (2 \cdot 1)^t \cdot 2^{-1} \cdot (2 \cdot 1)^{-(t-1)},\end{aligned}$$

Далее, соотношения $2 \cdot 1 = 1 \cdot n$, $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = e$ приводят к соотношениям между $a := 1$, $b := 2$. Наконец, мы получаем желаемое задание:

$$G_5(2m) = \langle a, b \mid (ba)^m = (ab)^m, a(b^2a^2)^{m-1}b = (ba)^{m-1} \rangle, \quad m \geq 2, \quad (5)$$

$$G_5(2m+1) = \langle a, b \mid b(ab)^m = (ab)^ma, a(b^2a^2)^{m-1}b^2a = (ba)^{m-1}b \rangle, \quad m \geq 1. \quad (6)$$

Легко видеть, что

$$(5) \implies \overline{G}_5(2m) = \langle \overline{a}, \overline{b} \mid \overline{a}^m \overline{b}^m = \overline{e} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus Z_m;$$

$$(6) \implies \overline{G}_5(2m+1) = \langle \overline{a}, \overline{b} \mid \overline{b} = \overline{a}, \overline{a}^{2m+1} = \overline{e} \rangle \cong Z_{2m+1}.$$

Тем самым доказательство завершено.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Нам необходимо хорошо известное (см. [4]–[9])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – замкнутое компактное ориентируемое 3-многообразие с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Пусть простое число $p > 2$ делит $|\pi_1(M)|$. Тогда силовская p -подгруппа $S_p(\pi_1(M))$ – циклическая. Любая абелева подгруппа в $\pi_1(M)$ – также циклическая.

Допустим теперь, что группа $G_k(n) = \pi_1(M_k^n)$ – конечная. Тогда ее фактор-группа по коммутанту $\overline{G}_k(n)$ также конечна. Ввиду предложения 2 подгруппа $S_p(G_k(n))$, равно как и $S_p(\overline{G}_k(n))$, будет циклической ($p > 2$). Если, например, $S_3(\overline{G}_k(n))$ – нециклическая, то группа $G_k(n)$ должна быть бесконечной. Для значительного числа групп $G_k(n)$ бесконечность устанавливается непосредственно. Как и ранее, проверку групп $G_k(n)$ проводим индивидуально.

Группа $G_1(n)$. В соответствии с п. 1) теоремы 1 силовская 3-подгруппа $S_3(\overline{G}_1(n))$ не является циклической, так что по предложению 2 группа $G_1(n)$ должна быть бесконечной при любом $n \geq 2$.

В случае $G_1(3d)$ можно выбрать прямой путь. Именно, стягивая в n раз множество первых $3n$ образующих в соотношениях $R_1^i(k)$, $i = 1, 2, 3$, мы получаем эпиморфизм $\Phi: G_1(n) \rightarrow \widehat{G}_1(n) = \langle \widehat{1}, \widehat{2}, \dots, \widehat{4n} \rangle$, где $\widehat{m} = \Phi(m)$ и

$$\widehat{1} = \widehat{4} = \dots = \widehat{3n-2}; \quad \widehat{2} = \widehat{5} = \dots = \widehat{3n-1}; \quad \widehat{3} = \widehat{6} = \dots = \widehat{3n}.$$

Так как $n \equiv 0 \pmod{3}$, то первые $3n$ соотношений принимают вид

$$\widehat{k} \cdot \widehat{3n+k} \cdot \widehat{k+1} = \widehat{k} \cdot \widehat{k+1}; \quad 1 \leq k \leq n,$$

откуда $\widehat{3n+1} = \widehat{3n+2} = \dots = \widehat{4n} = \widehat{e}$. Что касается соотношений $R_1^4(k)$, то они сливаются в одно: $\widehat{1} \cdot \widehat{2} \cdot \widehat{3} = \widehat{e}$. Поэтому

$$\widehat{G}_1(3d) = \langle \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3} \mid \widehat{1} \cdot \widehat{2} \cdot \widehat{3} = \widehat{e} \rangle$$

является группой с тремя образующими и одним соотношением. Отсюда следует, что $G_1(3d)$ – бесконечная группа.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Формальное определение группы $G_1(n)$, данное в начале статьи, справедливо и при $n = 1$. В этом случае ее заданием будет

$$G_1(1) = \langle 1, 2, 3, 4 \mid 1 \cdot 4 \cdot 1 = 3 \cdot 2, 2 \cdot 4 \cdot 2 = 1 \cdot 3, 3 \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 1, 1 \cdot 2 \cdot 3 = e \rangle$$

или

$$G_1(1) = \langle a, b \mid b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1} = a^2b^2a^2, a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1} = b^2a^2b^2 \rangle.$$

Хотя $\overline{G}_1(1) \cong Z_9 \oplus Z_3$, нам не удалось построить 3-многообразие M с $\pi_1(M) = G_1(1)$, а также ответить на вопрос о бесконечности $G_1(1)$.

Группа $G_2(n)$. Отображение $\phi: 2k \mapsto a, 2k-1 \mapsto b, 1 \leq k \leq n$, приводит к эпиморфизму $G_2(n) \rightarrow G_2(1) \cong Z_3 * Z_3$ (свободное произведение двух циклических групп порядка 3), так что группа $G_2(n)$ бесконечна.

Группа $G_3(n)$ бесконечна, поскольку таковой является ее абелианизация $\overline{G}_3(n)$ (п. 3) теоремы 1).

Группа $G_4(n)$. Подобно случаю $G_2(n)$, отображение $\phi: 2k \mapsto a, 2k-1 \mapsto b, 1 \leq k \leq 3n+1$, приводит к эпиморфизму $G_4(n) \rightarrow Z_3 * Z_3$, поэтому рассматриваемая группа также бесконечна.

Группа $G_5(n)$ бесконечна для каждого $n = 2m, m \geq 2$, поскольку $\overline{G}_5(2m) \cong \mathbb{Z} \oplus Z_m$ (п. 5) теоремы 1). Мы лишены возможности применить предложение 2 к $G_5(2m+1)$, поскольку $\overline{G}_5(2m+1)$ – циклическая. Мы подошли к рубежу, где разница между четными и нечетными значениями n становится критической, как это обнаруживается в простейшем случае $n = 3$. По определению

$$G_5(3) = \langle a, b \mid aba = bab, ab^2a = b \rangle$$

– сбалансированная группа. Очевидный эпиморфизм $\Psi: G_5(3) \rightarrow \mathrm{SL}_2(3) \cong Q_8 \cdot Z_3$ такой, что

$$\Psi(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi(b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

вынуждает думать о ядре $\mathrm{Ker} \Psi$. По-видимому, известно, что $\mathrm{Ker} \Psi$ тривиально. Не обращаясь к ссылкам, можно рассмотреть импликацию

$$\begin{aligned} & \{aba = bab, ab^2a = b\} \\ & \Downarrow \\ & \{aba^2 = b^2ab, bab^2 = a^2ba, ba^2b = a, b^2 = a^2ba^2, \\ & \quad a^2 = b^2ab^2, a^2b^2a^2 = aba, b^3 = (ab)^3 = (ba)^3 = a^3, a^6 = e\}. \end{aligned}$$

Теперь, когда мы знаем это, $G_5(3)$ как множество выражается в виде

$$G_5(3) = \left\{ e, a^3, a^2b, ba^2, aba, a^4ba, a^3ba^2, a^5b, a^2, a^4, a, a^5, \right. \\ \left. b, ab, ba, a^3b, a^2ba, aba^2, a^4b, a^3ba, a^2ba^2, a^5ba, a^4ba^2, a^5ba^2 \right\}.$$

Таким образом, $|G_5(3)| = 24$, а эпиморфизм Ψ должен быть изоморфизмом. Мы можем положить

$$Q_8 = \{e, a^3, a^2b, ba^2, aba, a^4ba, a^3ba^2, a^5b\} = \langle a^2b, ba^2 \rangle,$$

$$[a^2b, ba^2] = a^3; Z_3 = \{e, a^2, a^4\}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 3

Итак, еще раз подвергнем анализу группу $G_1(n)$, $n \equiv 2 \pmod{3}$. Действуя по аналогии со случаем $G_1(3d)$, рассмотрим эпиморфизм $\Phi: G_1(n) \rightarrow H = \langle a, b, c, f \rangle$, где

$$\begin{aligned} a &= \Phi(1 + 3k), \quad b = \Phi(2 + 3k), \quad 0 \leq k \leq n-1; \\ c &= \Phi(3k), \quad f = \Phi(3n + k), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Из сравнения $n \equiv 2 \pmod{3}$ следует, что образы соотношений $R_1^1 - R_1^4$ попадают в следующее множество:

$$\{a \cdot f \cdot c = b^2, b \cdot f \cdot a = c^2, c \cdot f \cdot b = a^2, a \cdot b \cdot c = e\}.$$

Так как $c = b^{-1}a^{-1}$, $f = a^{-1}b^2c^{-1} = a^{-1}b^2ab$, то

$$b \cdot a^{-1}b^2ab \cdot a = b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1} \iff abab^2a^{-1}b^2aba = e.$$

Кроме того,

$$b^{-1}a^{-2}b^2ab^2 = a^2 \iff b^2ab^2 = a^2ba^2.$$

Стало быть, H является сбалансированной группой с заданием

$$H = \langle a, b \mid a^2ba^2 = b^2ab^2, abab^2a^{-1}b^2aba = e \rangle.$$

Мы должны показать, что H – бесконечная группа. В отличие от случая $n \equiv 0 \pmod{3}$ сомнительно, чтобы существовал более или менее очевидный эпиморфизм H на какую-то бесконечную группу, если проигнорировать тот факт, что $G_1(n) = \pi_1(M_1^n)$. Мы попытаемся построить гомоморфизм $\Psi: H \rightarrow \mathrm{SL}_2(F)$ с бесконечным образом $\Psi(H)$, заранее не специализируя поле F , в качестве которого можно будет взять некоторое конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Одну из матриц $A = \Psi(a)$, $B = \Psi(b)$, например B , можно, без потери общности, взять в каноническом виде $B = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, $\lambda \in F$. В этом случае определяющие соотношения группы H могут быть переписаны таким образом, чтобы число вхождений образующей “ a ” в каждую часть соотношения было минимальным. Другими словами, нам нежелательно умножать без сокращений более трех матриц A и A^{-1} . Именно, возьмем первое соотношение в виде

$$aba^2 = a^{-1}b^2ab^2. \quad (7)$$

Далее, используя первое соотношение, рассмотрим следующую цепочку эквивалентных преобразований, примененных ко второму соотношению:

$$\begin{aligned} & abab^2a^{-1}b^2aba = e \\ \iff & bab^2a^{-1}b^2a^{-1} \cdot a^2ba^2 = e \\ \iff & bab^2a^{-1}b^2a^{-1} \cdot b^2ab^2 = e \\ \iff & b^{-2}ab^{-2}a^{-1}b^{-1} = a^{-1}b^2ab^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы хотели бы найти матрицы

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F), \quad AB \neq BA, \quad (9)$$

удовлетворяющие после перемножения аналогичным соотношениям

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda x(x^2 + yz) + \lambda^{-1}yz(x+t) & \lambda xy(x+t) + \lambda^{-1}y(t^2 + yz) \\ \lambda z(x^2 + yz) + \lambda^{-1}zt(x+t) & \lambda yz(x+t) + \lambda^{-1}t(t^2 + yz) \end{bmatrix} \\ & \qquad \qquad \qquad = \begin{bmatrix} \lambda^4xt - yz & ty(1 - \lambda^{-4}) \\ xz(1 - \lambda^4) & \lambda^{-4}xt - yz \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda^{-5}xt - \lambda^{-1}yz & -\lambda^{-3}xy + \lambda xy \\ \lambda^{-1}tz - \lambda^3tz & -\lambda yz + \lambda^5xt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^4xt - yz & ty - \lambda^{-4}ty \\ -\lambda^4xz + xz & -yz + \lambda^{-4}xt \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8')$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты в (7'), (8'), мы получаем шесть нелинейных соотношений на скаляры

$$\lambda x(x^2 + w) + \lambda^{-1}w(x + t) = (\lambda^4 - 1)w + \lambda^4, \quad (10)$$

$$\lambda^{-1}t(t^2 + w) + \lambda w(x + t) = (\lambda^{-4} - 1)w + \lambda^{-4}, \quad (11)$$

$$\lambda x(x + t) + \lambda^{-1}(t^2 + w) + (\lambda^{-4} - 1)t = 0, \quad (12)$$

$$\lambda^{-1}t(x + t) + \lambda(x^2 + w) + (\lambda^4 - 1)x = 0, \quad (13)$$

$$(1 - \lambda^4 + \lambda^5 - \lambda^9)w = \lambda^9 - 1, \quad (14)$$

$$(\lambda^5 - \lambda)x - (\lambda^4 - 1)t = 0. \quad (15)$$

Здесь нами использовано обозначение $w = yz$. Следовательно, $xt = w + 1$, поскольку $xt - yz = \det A = 1$. Фактически мы имеем еще одно соотношение типа (14), которое естественно опустить. Кроме того, вместо (12), (13), (15) нам следовало бы рассмотреть четыре скалярных соотношения

$$[\lambda x(x + t) + \lambda^{-1}(t^2 + w) + (\lambda^{-4} - 1)] \cdot y = 0, \quad (12')$$

$$[\lambda^{-1}t(x + t) + \lambda(x^2 + w) + (\lambda^{-4} - 1)x] \cdot z = 0, \quad (13')$$

$$[(\lambda^5 - \lambda)x - (\lambda^4 - 1)t] \cdot y = 0, \quad (15')$$

$$[(\lambda^5 - \lambda)x - (\lambda^4 - 1)t] \cdot z = 0. \quad (15'')$$

Однако, любое из равенств $y = 0$, $z = 0$ влечет $w = 0$ и, приняв во внимание (10), (11), (14), мы имеем

$$tx = 11, \quad x^3 = \lambda^3, \quad \lambda^9 - 1 = 0. \quad (16)$$

В случае $y = 0 = z$ мы приходим к матрице $A = \text{diag}(x, x^{-1})$, что дает $AB = BA$, т.е. противоречие (см. (9)). С точностью до некоторых деталей можно положить $z = 0$, $y \neq 0$, что приведет нас к (12) и (15). Так как

$$1 - \lambda^4 = 0 = \lambda^9 - 1 \implies \lambda = 1 \implies AB = BA,$$

то мы должны сделать заключение (см. (16)), что $1 - \lambda^4 \neq 0$, откуда

$$(15) \implies t = \lambda x \implies x^2 = \lambda^{-1} \implies x = \lambda^4 \implies t = \lambda^{-4}.$$

Поэтому

$$(12) \implies \lambda^5 = 2(\lambda + 1) \implies \lambda = 4(\lambda + 1)^2.$$

Теперь $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^6 + \lambda^3 + 1) = \lambda^9 - 1 = 0$. Если $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, то

$$\lambda = 4(\lambda + 1)^2 = 4\lambda \implies \text{char } F = 3 \implies \lambda = 1$$

— противоречие. Таким образом, $\lambda^6 + \lambda^3 + 1 = 0$, а так как $\lambda^6 = \lambda \cdot \lambda^5 = 2\lambda^2 + 2\lambda$, то из того, что уже было отмечено, можно вывести соотношение

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 2\lambda^2 + 2\lambda + \lambda^3 + 1 = \lambda^6 + \lambda^3 + 1 = 0.$$

Снова $\lambda \neq -1 \implies \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ – противоречие. Проверку симметричного случая $y = 0, z \neq 0$ можно опустить. В конечном счете нам осталось исследовать систему (10)–(15). Заметим следующее: $xt = 0 \implies w = -1$, откуда (см. (14)) $\lambda^4(1 - \lambda) = 0$, что не так. Следовательно, на самом деле

$$xyzt \neq 0.$$

Ввиду того же соотношения (14)

$$\lambda^9 - 1 \neq 0, \quad (1 - \lambda^4)(1 + \lambda^5) = 1 - \lambda^4 + \lambda^5 - \lambda^9 \neq 0.$$

Далее, из (14), (15) следует, что

$$\begin{aligned} w &= \frac{\lambda^9 - 1}{(1 - \lambda^4)(1 + \lambda^5)} \neq 0, \\ t &= \lambda x \neq 0, \quad xt = w + 1, \quad x^2 = \lambda^{-1}(w + 1), \quad t^2 = \lambda(w + 1). \end{aligned} \tag{17}$$

Подстановка этих значений в соотношения (10)–(13) приводит к следующим трем соотношениям ((10) и (11) оказываются эквивалентными):

$$\begin{aligned} [(2 + \lambda + \lambda^{-1})w + 1]x &= (\lambda^4 - 1)w + \lambda^4, \\ \lambda(1 - \lambda^{-4})x &= (2 + \lambda + \lambda^{-1})w + 2 + \lambda, \\ (1 - \lambda^4)x &= (2 + \lambda + \lambda^{-1})w + 2 + \lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Комбинируя (17), (18) и учитывая неравенство $\lambda^4 \neq 1$, мы приходим к выражению

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^3 + 1)x = \lambda^2. \tag{19}$$

В то же самое время мы приходим к заключению, что

$$f(\lambda) := \lambda^6 - \lambda^5 + 3\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0. \tag{20}$$

Таким образом, используя все множество соотношений (10)–(15), мы выразили $x, t, w = yz$ через параметр λ , где λ – корень многочлена f . Так как

$$f(\lambda) = \lambda^3[(\lambda + \lambda^{-1})^3 - (\lambda + \lambda^{-1})^2 - 1],$$

то, как легко видеть, f неприводим над $\mathbb{Q}$. До сих пор основное поле F не было конкретизировано. Теперь в соответствии с (20) мы возьмем в качестве F алгебраическое расширение $\mathbb{Q}(\lambda)$ степени 6. Каждый элемент $u \in \mathbb{Q}(\lambda)$ имеет вид $u = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + \dots + a_5$, $a_i \in \mathbb{Q}$. Вследствие этого мы временно полагаем $y = 1$, $z = w$, а затем используем выражения (17), (19). В конечном счете, матрицы A, B вида (2) оказываются правильно выбранными: они удовлетворяют определяющим соотношениям группы H и порождают бесконечную группу, поскольку элемент B – бесконечного порядка (заметим, что многочлен f (см. (14)) не является круговым). Тем самым доказательство завершено.

§ 4. Некоторые дополнительные замечания

а) Поиск эпиморфизма $G \rightarrow \mathrm{SL}_2(F)$ – обычный метод в комбинаторной теории групп, когда хотят проверить, что $|G| = \infty$, или хотя бы получить некоторую информацию о группе G (см., например, [2]). Но далеко не всегда такой эпиморфизм существует. В частности, его нет для групп $G_1(3d+1)$ и $G_5(2m+1)$, $m > 1$.

б) Группа внешних автоморфизмов

$$\mathrm{Out} G = \mathrm{Aut} G / \mathrm{Inn} G, \quad \mathrm{Inn} G \cong G/Z(G),$$

– важная характеристика любой группы G . Разумеется, описание группы $\mathrm{Out} G_k(n)$, $1 \leq k \leq 5$, относится к числу глубоких вопросов, выходящих за пределы этой статьи. Мы лишь обратим внимание на некоторые специальные автоморфизмы.

Группа $G_1(2)$ обладает автоморфизмом

$$\varphi = (1, 4)(2, 5)(3, 6)(7, 8)$$

порядка 2. Его действие на соотношения $R_1^i(k)$ проясняет идею, лежащую в основе конструкции эпиморфизма $\phi: G_1(n) \rightarrow H$ при $n \equiv 2 \pmod{3}$. Группа $G_2(n)$ обладает автоморфизмом

$$\varphi = (1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n)$$

(циклическая перестановка образующих $1, 2, \dots, 2n$), которая отражает циркулянтную природу соотношений $R_2(k)$, $1 \leq k \leq 2n$. Далее, автоморфизм

$$\varphi^2 = (1, 3, 5, \dots, 2n-1)(2, 4, 6, \dots, 2n)$$

согласован с конструкцией эпиморфизма $\phi: G_2(n) \rightarrow Z_3 * Z_3$. Группа $G_4(n)$, с ее $6n+2$ образующими и двумя типами соотношений $R_4^1(k)$, $R_4^2(k)$ геометрического происхождения, очевидно, допускает “циркулянтное” задание

$$2 + k \cdot 4n + 3 + k \cdot 2n + 1 + k \cdot 1 + k = k, \quad 1 \leq k \leq 6n+2.$$

Поэтому $G_4(n)$ обладает автоморфизмом

$$\varphi = (1, 2, 3, \dots, 6n+1, 6n+2).$$

На самом деле этот факт был использован при доказательстве п. 4) теоремы 1.

Наконец, группа $G_5(n)$ обладает внешним автоморфизмом

$$\varphi = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)(n+1),$$

который легко усматривается из геометрических соображений. После перехода к заданию (5) или (6) мы будем иметь $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = bab^{-1}$. Очевидно, что $\varphi(ba) = ba$, поэтому циклическая подгруппа $\langle ba \rangle$ неподвижна при действии φ .

Если положить $c = ba$, $b = ca^{-1}$, то задание группы $G_5(5)$ с неясным строением (бесконечна ли она?) может быть переписано в виде

$$G_5(5) = \langle a, c \mid ac^2a = c^3, caca^{-1}cac = aca \rangle,$$

так что действие автоморфизма φ порядка 5 выразится следующим образом: $\varphi(c) = c$, $\varphi(a) = ca^{-1}$. Вообще говоря, второе соотношение имеет вид

$$aca^{-1}caca^{-1}ca = c^2,$$

но, применив φ , мы придем к указанному выше выражению.

с) Следует упомянуть о еще одном подходе к проблеме бесконечности конечно-определенной группы G . Именно, следствие 4 статьи Дж. Вилсона и Е. И. Зельманова [10] показывает, что $4(n+1) \geq (n+1)^2 - 1$, если группа $G_1(n)$, $n \neq 3d$, конечна. Отсюда следует, что $n = 1$ или 2 (ср. с п. 1) теоремы 2).

Мы надеемся, что наши элементарные результаты вписываются в общую теорию 3-многообразий. По мнению специалистов, именно в этом предмете велика сила примеров, легко строящихся и освещающих суть дела.

Список литературы

1. *Hempel J.* 3-manifolds // Ann. of Math. Stud. V. 86. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976.
2. *Holt D.F., Plesken W.* A cohomological criterion for a finitely presented group to be infinite // J. London Math. Soc. 1992. V. 45. №2. P. 469–480.
3. *Ким А. Ч., Кострикин А. И.* Три серии 3-многообразий и их фундаментальные группы // Докл. АН. 1995. Т. 340. №2. С. 158–160.
4. *Mennicke J.* Über Heegaarddiagramme von Geschlecht zwei mit endlicher Fundamentalgruppe // Arch. Math. (Basel). 1957. V. 8. P. 192–198.
5. *Меннике Й.* Конечные фундаментальные группы трехмерных многообразий // Препринт. М.: МИРАН, 1994. С. 1–15.
6. *Milnor J.* Groups which act on S^n without fixed points // Amer. J. Math. 1957. V. 79. P. 623–630.
7. *Reidemeister K.* Kommutative Fundamentalgruppen // Monatsh. Math. Phys. 1935. V. 43. №1. P. 20–28.
8. *Seifert H., Threlfall W.* Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner, 1934.
9. *Seifert H., Threlfall W.* Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes // Math. Ann. 1930–1931. V. 104. P. 1–70.
10. *Wilson J. S., Zelmanov E. I.* Identities for Lie algebras of pro- p -groups // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 81. P. 103–109.