Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Аппроксимация диадическими всплесками, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 11, 135–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:39:13

УДК 517.518.3+517.518.543+517.965

В. Ю. Протасов

Аппроксимация диадическими всплесками

Исследуются системы диадических всплесков на полупрямой $\mathbb{R}_+$ с операцией двоичного сложения. Решено несколько задач об аппроксимационных свойствах таких всплесков. В частности, получены явные формулы для порядков приближения ими гладких функций на $\mathbb{R}_+$, а также двоично-гладких функций (гладких в двоичной метрике на полупрямой). Охарактеризованы диадические всплески с наилучшими аппроксимационными свойствами. Исследуется взаимосвязь между гладкостью всплеск-функций и их порядками аппроксимации в различных функциональных пространствах.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение и постановка задачи

Аппроксимационные свойства классических ортогональных систем всплесков на прямой и на пространстве $\mathbb{R}^d$ широко изучались в литературе; см., например, [1]–[15] и библиографию в этих работах.

Настоящая работа посвящена аппроксимационным свойствам диадических всплесков на полупрямой $\mathbb{R}_+$, снабженной операцией двоичного сложения. Мы получаем явные формулы для порядков приближения диадическими всплесками гладких функций (из соответствующих классов Соболева), а также двоично-гладких функций (гладких в двоичной метрике на $\mathbb{R}_+$). Кроме того, в работе охарактеризованы диадические всплески с наилучшими аппроксимационными свойствами. Некоторые из результатов имеют прямые аналоги для систем классических всплесков, другие имеют существенные отличия от классического случая.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$ – множества целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1\}$ определяются равенствами

$$x_j = [2^j x] \pmod{2}, \quad x_{-j} = [2^{1-j} x] \pmod{2}. \quad (1)$$

Это цифры двоичного разложения $x = \sum_{j < 0} x_j 2^{-j-1} + \sum_{j > 0} x_j 2^{-j}$ (в случае двоично-рационального x получается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Для произвольных $x, y \in \mathbb{R}_+$ полагаем

$$x \oplus y = \sum_{j < 0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j > 0} |x_j - y_j| 2^{-j}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00066) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-5813.2006.1).

В частности, $x \oplus x = 0$. Полагаем $x \ominus y = x \oplus y$. На $\mathbb{R}_+$ рассматривается обычная мера Лебега; она инвариантна относительно сдвигов $x \mapsto x \oplus a$. Все пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \in [1, +\infty]$, совпадают с классическими пространствами L^p на полупрямой. Через $L_c^2(\mathbb{R}_+)$ обозначается множество финитных функций (имеющих компактный носитель) из $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Системой диадических ортогональных всплесков на $\mathbb{R}_+$ называется система функций $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+}$, являющаяся ортонормированным базисом пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x \ominus k)$ для всех j, k . Порождающая функция $\psi = \psi_{0,0}$ называется *всплеск-функцией*. В настоящей работе мы ограничимся случаем финитной функции ψ , т.е. системами всплесков с компактным носителем. Они являются аналогами классических всплесков Добеши для полупрямой с операцией двоичного сложения $\oplus$. Первые примеры диадических финитных всплесков на $\mathbb{R}_+$ появились в работах [16], [17], затем эта конструкция обобщалась в [18], [19]. Полная классификация таких всплесков была получена в статье [20], где был также разработан процесс их построения. Как и в классическом случае, сначала строится кратномасштабный анализ (КМА) пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$, т.е. семейство вложенных подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{Z}$, обладающих специальными свойствами (детали см. в [18], [19]). При этом построение КМА сводится к отысканию *масштабирующей функции* $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей двум условиям:

(а) φ является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \ominus k), \quad (2)$$

где $\{c_k\}$ – произвольная последовательность комплексных коэффициентов;

(б) функции $\{\varphi(x \oplus k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ образуют полную ортонормированную систему пространства V_0 , где

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{span}\{\varphi(2^j x \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Если функция φ удовлетворяет условиям (а) и (б), то пространства $\{V_j\}$ образуют КМА, а всплеск-функция ψ дается формулой

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \bar{c}_{k \oplus 1} \varphi(2x \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Полагая $W_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{span}\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$, $j \in \mathbb{Z}$, будем иметь

$$L^2(\mathbb{R}_+) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{и} \quad V_j = \bigoplus_{r < j} W_r, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, построение системы диадических всплесков сводится к нахождению масштабирующей функции φ , генерирующей КМА. Все такие функции φ классифицированы в теореме С, доказанной в [20]. Для удобства мы приводим ее формулировку в § 2, где будут даны необходимые определения и

факты теории диадических всплесков на $\mathbb{R}_+$. В §§ 3–5 мы исследуем вопрос о приближениях системами диадических всплесков. При этом мы ограничимся двумя классами функций: приближениями функций из пространств Соболева $W_p^l(\mathbb{R}_+)$ и функций, гладких в диадической метрике на $\mathbb{R}_+$.

Аппроксимационные свойства всплесков принадлежат к числу определяющих и наиболее важных. Они отвечают за способность всплесков приближать функции в различных функциональных пространствах. Общая задача ставится следующим образом: для данной системы всплесков $\{\psi_{j,k}\}$ и данной функции f (или класса функций $\mathcal{F}$) выяснить скорость убывания величины $\text{dist}(f, V_j) = \inf_{g \in V_j} \|f - g\|$ при $j \rightarrow +\infty$, где $\{V_j\}$ – соответствующий КМА, а норма берется в заданном функциональном пространстве. Для классов функций задача ставится аналогично, при этом нас интересует скорость убывания величины $\sup_{f \in \mathcal{F}, \|f\|=1} \text{dist}(f, V_j)$ при $j \rightarrow \infty$. Если норма берется в L^2 , то минимальное расстояние от f до V_j достигается на проекции $P_j f$ этой функции на пространство V_j . Таким образом, $\text{dist}(f, V_j) = \|f - P_j f\|_2$. Так как проекция $P_j f$ является “урезанным” до уровня j разложением функции f по системе всплесков, т.е.

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+, r < j} c_{r,k} \psi_{r,k},$$

где $c_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle$, то $\|f - P_j f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+, r \geq j} |c_{r,k}|^2$. Поэтому аппроксимационные свойства системы всплесков определяют также скорость убывания “хвоста” разложения $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+, r \geq j} |c_{r,k}|^2$, или, фактически, скорость убывания коэффициентов $c_{j,r}$ при $j \rightarrow \infty$.

Аппроксимационные свойства классических систем всплесков исследовались во многих работах. Ясно, что скорость убывания $\text{dist}(f, V_j)$ зависит от приближаемой функции f , в частности от ее гладкости (в силу обратных теорем теории приближений). Поэтому задачу естественно ставить для тех или иных классов функций. Для приближений в классе непрерывно дифференцируемых функций $C^l(\mathbb{R})$ эта задача впервые исследовалась И. Шонбергом [1] для пространств V_j , порожденных функциями $\{\varphi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, где φ – произвольная непрерывная финитная функция, не обязательно удовлетворяющая масштабирующему уравнению. И. Шонберг установил связь между порядком убывания величины $\text{dist}(f, V_j)$ и максимальной степенью алгебраических полиномов, порождаемых целочисленными сдвигами функции f . Эта связь была найдена в явном виде Г. Стрэнгом и Г. Фиксом в монографии [2], где было показано (для простоты мы формулируем все результаты для функций одной переменной), что если преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

имеет нули порядка $\geq r$ во всех целых точках $\xi \neq 0$ и $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ (условия Стрэнга–Фикса порядка r), то $\text{dist}(f, V_j) \leq C(f) 2^{-rj}$ для любой функции $f \in C^r(\mathbb{R})$. Затем этот результат неоднократно уточнялся и обобщался на локальные аппроксимации (см. [3]–[5]), на пространства, порожденные несколькими финитными функциями [6], на приближения в пространствах Соболева W_p^l , в пространствах

Бесова и Лизоркина–Трибеля (см. [7]–[12]). Результаты о приближении функций различных классов пространствами, инвариантными относительно сдвига, можно найти в [13]–[15]. Все они распространяются и на приближения всплесками. В частности, условия Стрэнга–Фикса порядка r равносильны тому, что маска масштабирующего уравнения имеет корень кратности r в точке $\xi = 1/2$ (это условие также называется *правилом сумм* или *условием нулевых моментов*; см. [7]). Таким образом, порядок приближения всплесками в пространствах C^l и W_p^l определяется кратностью нуля маски. В частности, этот порядок не превосходит N , где N – длина носителя масштабирующей функции, или, что то же, степень масштабирующего уравнения. При этом гладкость самих всплесков не обязательна. С другой стороны, гладкость всплесков достаточна для хороших аппроксимационных свойств. Если масштабирующая функция φ принадлежит W_2^l , то порядок приближения не меньше, чем $l + 1$, т.е. $\text{dist}(f, V_j) \leq C(f)2^{-(l+1)j}$, $j \in \mathbb{N}$, для всех $f \in W_2^{l+1}(\mathbb{R})$ (см. [11], [12]).

Настоящая работа посвящена аппроксимационным свойствам диадических всплесков в пространствах Соболева W_p^l и в классах W -гладких функций (гладких в диадической метрике на $\mathbb{R}_+$). Как мы увидим, уже в этих простейших случаях имеются существенные различия по сравнению с приближениями классическими всплесками на прямой. В § 3 исследуются приближения функций, гладких в обычном смысле, т.е. в евклидовой метрике на $\mathbb{R}_+$. Поскольку мы изучаем всплески с компактным носителем, то вполне естественно ограничиться приближением финитных функций f . Ограничение это несущественно и сделано для простоты изложения. Приближениям W -гладких функций, т.е. гладких в двоичной метрике на $\mathbb{R}_+$, посвящен § 4 (определения даны в § 2). Будет установлено, что (в отличие от классических всплесков на прямой) все системы диадических всплесков на $\mathbb{R}_+$ имеют одинаковые порядки приближения. В пространствах Соболева W_p^l порядок приближения любой системой диадических всплесков равен 1 (теорема 1), в то время как в классе W -гладких функций порядок приближения равен $+\infty$ (теорема 2).

Таким образом, что касается порядков приближения, то все диадические всплески одинаковы. Поэтому для сравнения аппроксимационных свойств мы вводим более тонкий измеритель – дефект приближения (определение 3) и получаем для него явную формулу (теорема 3), которая имеет интересную аналогию с формулой для порядков приближения классическими всплесками. Напомним, что порядок приближения системой всплесков равен кратности нуля маски (тригонометрического полинома $m(\xi)$) в точке $\xi = 1/2$. Для диадических всплесков маска является полиномом Уолша, т.е. периодической функцией, кусочно постоянной на двоичных интервалах данного порядка n . Согласно теореме 3 дефект приближения определяется наибольшим целым числом k , для которого маска обращается в нуль на полуинтервале $[1/2, 1/2 + 2^{k-n})$. Это число, таким образом, является аналогом кратности нуля для полиномов Уолша. Данный результат позволяет охарактеризовать диадические всплески с наилучшими аппроксимационными свойствами (следствие 4).

Наконец, в § 5 будет исследована взаимосвязь аппроксимационных свойств всплесков с их гладкостью (или, что то же самое, с гладкостью масштабирующей функции). Там же будет доказано, что всплески с наименьшим дефектом

приближения обладают максимальной гладкостью, т.е. являются двоично-целыми функциями (следствие 5). С другой стороны, в отличие от ситуации с классическими всплесками гладкость масштабирующей функции не гарантирует хороших аппроксимационных свойств (предложение 4).

Все рассуждения будут проводиться в метрике пространства L^2 , хотя полученные результаты верны и для пространств L^p и C , при этом требуются незначительные изменения в доказательствах. Везде далее норма берется в L^2 , т.е. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

§ 2. Предварительные сведения

Двоичная (диадическая) метрика на полупрямой вводится с помощью расстояния $\rho(x, y) = x \ominus y$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Функции, непрерывные относительно этой метрики, называются *двоично-непрерывными* или *W-непрерывными*. Легко показать, что двоичная метрика на полупрямой мажорирует евклидову метрику. Поэтому топология, порождаемая этой метрикой, сильнее евклидовой. Последовательность, сходящаяся в двоичной топологии, сходится и в евклидовой, а функции, непрерывные в обычном смысле, являются также и W-непрерывными.

Двоичным модулем непрерывности функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ называется величина $\omega_2(f, h) = \sup_{t \leq h} \|f(x \oplus t) - f(x)\|_2$. Понятие *двоичной гладкости*, или *W-гладкости*, в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется с помощью показателя Гёльдера α_f :

$$\alpha_f = \sup\{\alpha \geq 0 \mid \omega_2(f, h) \leq Ch^\alpha\}. \quad (4)$$

Заметим, что в данном случае показатель Гёльдера функции, отличной от константы, может быть больше 1.

Числовые промежутки $I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, будем называть *двоичными интервалами* порядка n . Через $\chi_I(x)$ обозначаем характеристическую функцию множества $I \subset \mathbb{R}_+$.

Через $\mathcal{P}_r$ обозначается пространство алгебраических полиномов на $\mathbb{R}_+$ степени не выше r . В частности, $\mathcal{P}_0$ – пространство тождественных констант. Аналогом полиномов в двоичной метрике являются двоично-целые функции. *Двоично-целой функцией* порядка r называется функция, постоянная на двоичных интервалах порядка r . Пространство таких функций обозначается через $\mathcal{E}_r$, а через $\mathcal{E} = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_r$ обозначается множество всех двоично-целых функций.

Аналогом тригонометрической системы является система Уолша. Через $w_1(x)$ обозначим 1-периодическую функцию на $\mathbb{R}_+$ такую, что $w_1(x) = 1$ для $x \in [0, 1/2)$ и $w_1(x) = -1$ для $x \in [1/2, 1)$. Система функций Уолша $\{w_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ на $\mathbb{R}_+$ определяется следующим образом:

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{j=0}^k (w_1(2^j x))^{\nu_j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $\nu_j \in \{0, 1\}$ берутся из двоичного разложения $n = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j 2^j$. Функции Уолша $w_j(x)$ при $0 \leq j \leq 2^n - 1$ принимают постоянные значения, равные 1

или -1 , на каждом из интервалов $I_k^{(n)}$, причем $w_j(x) = 1$ при $x \in I_0^{(n)}$. *Полиномами Уолша* называются конечные линейные комбинации функций Уолша. Для $x, \omega \in \mathbb{R}_+$ положим $\chi(x, \omega) = (-1)^{\sigma(x, \omega)}$, где $\sigma(x, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \omega_{-j} + x_{-j} \omega_j$ и x_j, ω_j определяются формулой (1). Отметим, что при любом натуральном n

$$\chi(x, 2^{-n}j) = \chi(2^{-n}x, j) = w_j(2^{-n}x) \quad \text{для всех } x \in [0, 2^n], \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Преобразование Уолша–Фурье для $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется формулой

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \chi(x, \omega) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

а затем унитарно продолжается на $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см., например, [21], [22]).

Рассмотрим произвольное масштабирующее уравнение (2). *Маской уравнения* называется полином Уолша

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega). \quad (5)$$

Ясно, что $m \in \mathcal{E}_n$. Положим $m_l = m(\omega)$ для $\omega \in I_l^{(n)}$, $0 \leq l \leq 2^n - 1$. Коэффициенты c_k масштабирующего уравнения связаны со значениями m_l прямым и обратным дискретными преобразованиями Уолша–Фурье:

$$c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{2^n-1} m_l w_l(k2^{-n}), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1;$$

$$m_l = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(l2^{-n}), \quad 0 \leq l \leq 2^n - 1.$$

Быстрые алгоритмы, реализующие эти преобразования, см., например, в [22; гл. 9]. Таким образом, коэффициенты уравнения (2) можно задавать значениями, принимаемыми его маской $m(\omega)$ на двоичных интервалах порядка n .

Нам понадобится несколько утверждений о диадических масштабирующих функциях и всплесках, доказанных в [20]. Первое устанавливает основные свойства решений масштабирующих уравнений. Оно является прямым аналогом хорошо известных результатов для классических масштабирующих уравнений на $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА А. *Если уравнение (2) имеет решение $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то $\sum_k c_k = 2$ и $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1})$. Это решение единственно, дается формулой*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) \quad (6)$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{\varphi}(r) = 0$ при всех $r \in \mathbb{N}$ (модифицированное условие Стрэнга–Фикса);
- 2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = 1$ почти всюду (свойство разбиения единицы).

Заметим, что $\widehat{\varphi} \in \mathcal{E}_{n-1}$ в силу равенства (6). Следующий результат устанавливает условия на коэффициенты уравнения (2), при которых его решение φ имеет линейно независимые целочисленные сдвиги $\{\varphi(x \oplus k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$. Для его формулировки потребуются ввести несколько дополнительных понятий.

Функция $f \in L^1_c(\mathbb{R}_+)$ называется *стабильной*, если ее целочисленные сдвиги линейно независимы. Имеет место следующий факт, доказанный в [20]: для данного $p \in [1, +\infty]$ функция $f \in L^p_c(\mathbb{R}_+)$ стабильна тогда и только тогда, когда она обладает свойством базиса Рисса в L^p , т.е. существуют положительные константы A_p, B_p такие, что для каждой последовательности $a = \{a_k\} \in \ell_p$ имеем

$$A_p \|a\|_p \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi(x \oplus k) \right\|_p \leq B_p \|a\|_p.$$

При $p = 2$ получаем классическое определение системы Рисса в L^2 . В дальнейшем мы ограничимся случаем $p = 2$. Только стабильные масштабирующие функции могут генерировать КМА.

Число $\omega_0 \in \mathbb{R}_+$ называется *периодическим нулем* W -непрерывной функции $g(\omega)$, если $g(\omega \oplus k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть A – множество нулей маски t на интервале $[0, 1)$. Поскольку $t \in \mathcal{E}_n$, то множество A состоит из двоичных интервалов порядка n . Для данного подмножества $M \subset [0, 1)$ положим $TM = \frac{1}{2}M \cup (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M)$. Будем говорить, что маска t имеет *блокированное множество* M , если M является объединением нескольких двоичных интервалов порядка $n - 1$, не содержит интервал $[0, 2^{-n})$ и обладает свойством $TM \subset M \cup A$.

ТЕОРЕМА В. *Функция $f \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ стабильна тогда и только тогда, когда ее преобразование Уолша–Фурье $\widehat{f}(\omega)$ не имеет периодических нулей. Масштабирующая функция φ стабильна тогда и только тогда, когда ее маска $t(\omega)$ не имеет блокированных множеств.*

Следующий результат работы [20] характеризует все диадические всплески на $\mathbb{R}_+$, или, что то же, все масштабирующие функции, порождающие КМА.

ТЕОРЕМА С. *Если функция $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ обладает ортогональными целыми сдвигами и порождает КМА, то она является решением масштабирующего уравнения (2), маска которого не имеет блокированных множеств и удовлетворяет условиям*

$$t(0) = 1, \quad |t(\omega)|^2 + |t(\omega + 1/2)|^2 \equiv 1. \quad (7)$$

Обратно, если маска масштабирующего уравнения удовлетворяет (7) и не имеет блокированных множеств, то φ принадлежит $L^2_c(\mathbb{R}_+)$, имеет ортогональные целые сдвиги и порождает КМА.

Таким образом, для построения системы диадических всплесков с компактным носителем нужно: выбрать натуральное число n ; взять произвольную двоично-целую функцию t порядка n (т.е. кусочно-постоянную функцию с шагом 2^{-n}) на интервале $[0, 1/2)$ такую, что $t(0) = 1$ и $|t(\omega)| \leq 1$ для всех $\omega \in [0, 1/2)$; продолжить ее на весь интервал $[0, 1)$ с помощью равенства (7);

убедиться, что полученная функция m не имеет блокированных множеств. Заметим, что продолжение $m(\omega)$ с интервала $[0, 1/2)$ на интервал $[0, 1)$ по уравнению (7) неоднозначно: в каждой точке $\omega \in [1/2, 1)$ задано лишь значение модуля $m(\omega)$. Однако для любого продолжения (согласно теореме С) масштабирующее уравнение с маской m имеет решение $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, которое генерирует КМА и соответствующую систему всплесков. Так описываются все всплески, порожденные финитными масштабирующими функциями. При построении диадических всплесков мы, таким образом, имеем свободу в выборе произвольной кусочно постоянной функции с шагом 2^{-n} на интервале $[0, 1/2)$ и с единственным ограничением на отсутствие блокированных множеств.

§ 3. Приближение гладких функций диадическими всплесками

Для произвольного $l \geq 1$ обозначим через $W_2^l(\mathbb{R}_+)$ пространство Соболева, состоящее из функций $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, у которых производная $f^{(l-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(l)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом $W_2^0 = L^2$. Показатель гладкости функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется как

$$s_\varphi = k + \sup\{s \mid \|f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)\|_2 \leq Ch^s\},$$

где k – наибольшее целое число, для которого $\varphi \in W_2^k(\mathbb{R}_+)$.

Для произвольной функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ через ν_φ обозначим точную верхнюю грань множества чисел $\gamma \geq 0$ таких, что

$$\text{dist}(f, V_j) \leq C(f, \gamma) 2^{-j\gamma}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

для любой функции $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ такой, что $s_f > \gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величина ν_φ называется *порядком приближения функции* φ .

Порядок приближения больше γ , если расстояние от любой достаточно гладкой финитной функции до пространства V_j равно $O(2^{-j\gamma})$ при $j \rightarrow +\infty$.

Положим $\tilde{V}_j = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi(2^j x \oplus k), a_k \in \mathbb{C}\}$. Так как функция φ финитна, то данная сумма корректно определена для любой числовой последовательности $\{a_k\}$. Таким образом, $V_j = \tilde{V}_j \cap L^2(\mathbb{R}_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\nu_\varphi = \begin{cases} 1 + \max\{r \mid \mathcal{P}_r \subset \tilde{V}_0\}, & \text{если } \mathcal{P}_0 \subset \tilde{V}_0, \\ 0, & \text{если } \mathcal{P}_0 \not\subset \tilde{V}_0. \end{cases}$$

Таким образом, порядок приближения на единицу превосходит наибольшую степень пространства полиномов, которое функция φ порождает своими целыми сдвигами.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ порядок приближения ν_φ конечен и является целым неотрицательным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Выберем натуральное n из условия $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1})$. Покажем сначала, что если $\mathcal{P}_r \subset \tilde{V}_0$, то $\nu_\varphi \geq r+1$. В самом деле, данное условие означает, что на интервале $[0, 2^{n-1})$ любой полином степени $\leq r$ порождается функциями $\varphi(\cdot \oplus k)$, $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$. Таким образом, V_j содержит все функции $g(x)$ следующего вида: на данном двоичном интервале длины 2^{n-1-j} функция $g(x)$ совпадает с заданным полиномом степени $\leq r$, а вне этого интервала равна нулю. Следовательно, пространство V_j приближает произвольную финитную функцию $f \in W_2^{r+1}$ не хуже, чем пространство сплайнов порядка r с узлами на равномерной сетке с шагом $h = 2^{n-1-j}$. Расстояние от f до этого пространства сплайнов не превосходит $C(f, r)h^{r+1}$ [23; гл. 3, § 3]. Следовательно, $\text{dist}(f, V_j) \leq [2^{(r+1)(n-1)} C(f, r)] 2^{-(r+1)j}$, откуда $\nu_\varphi \geq r+1$.

Теперь покажем, что если $\mathcal{P}_r \not\subset \tilde{V}_0$, то $\nu_\varphi \leq r$. Возьмем наименьшее $q \in \mathbb{Z}_+$, для которого $x^q \notin \tilde{V}_0$. По предположению $q \leq r$. Линейная оболочка L_{n-1} функций $\varphi(\cdot \oplus k)$, $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$, не содержит ограничения x^q на интервал $[0, 2^{n-1})$. Пусть $a = \text{dist}(x^q, L_{n-1})$ в пространстве $L^2[0, 2^{n-1})$. В силу конечности L_{n-1} имеем $a > 0$. Таким образом, расстояние от функции x^q , ограниченной на любой интервал $[2^{n-1}l, 2^{n-1}(l+1))$, $l \in \mathbb{Z}_+$, до пространства V_0 не меньше a . Применим преобразование $f(\cdot) \mapsto 2^{-jq} f(2^j \cdot)$, которое уменьшает L^2 -норму в $2^{j(q+1/2)}$ раз, переводит пространство V_0 в V_j , а функцию x^q оставляет на месте. Получаем, что расстояние от функции x^q , ограниченной на любой двоичный интервал $I_s^{(k)}$ порядка $k = n-1-j$, до пространства V_j не меньше, чем $2^{-j(q+1/2)}a$. Следовательно, для любой функции $g \in V_j$ имеем

$$\int_{I_s^{(k)}} |x^q - g(x)|^2 dx \geq 2^{-j(2q+1)} a^2.$$

Сложив это неравенство по всем 2^j интервалам порядка $n-1-j$, составляющим интервал $[0, 2^{n-1})$, получаем

$$\int_0^{2^{n-1}} |x^q - g(x)|^2 dx \geq 2^j \cdot 2^{-j(2q+1)} a^2 = 2^{-2qj} a^2 \geq 2^{-2rj} a^2.$$

Таким образом, расстояние от функции x^q , ограниченной на интервал $[0, 2^{n-1})$, до пространства V_j не меньше, чем $2^{-rj}a$. Взяв теперь произвольную функцию $f \in W_2^{r+1}(\mathbb{R}_+)$, совпадающую с полиномом x^s на интервале $[0, 2^{n-1})$, получаем, что $\text{dist}(f, V_j) \geq 2^{-rj}a$. Следовательно, $\nu_\varphi \leq r$, что и требовалось доказать.

Применим теперь полученные результаты к диадическим всплескам.

ТЕОРЕМА 1. Для любой диадической масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2$ имеем $\nu_\varphi = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме А функция φ обладает свойством разбиения единицы. Следовательно, $\mathcal{P}_0 \subset \tilde{V}_0$, и с помощью предложения 1 получаем $\nu_\varphi \geq 1$. Далее, если функция $f(x) = x$ принадлежит $\tilde{V}_0$, то найдутся коэффициенты $a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}$, для которых

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) = x \quad \text{для п.в. } x \in [0, 2^{n-1}).$$

Подставив в это равенство $x \oplus l$ вместо x и сложив по всем $l = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$, получим

$$\sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi((x \oplus l) \oplus k) = \sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} x \oplus l.$$

В силу свойства разбиения единицы $\sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} \varphi((x \oplus k) \oplus l) = 1$ для любого k , следовательно,

$$\sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi((x \oplus l) \oplus k) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} \varphi((x \oplus k) \oplus l) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k = \sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} x \oplus l \quad \text{для п.в. } x \in [0, 2^{n-1}). \quad (9)$$

Заметим, что если $x \in [0, 1)$, то $x \oplus l = x + l$. Следовательно, для $x \in [0, 1)$ уравнение (9) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k = \sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} x + l = 2^{n-1}x + 2^{n-2}(2^{n-1} - 1),$$

что невозможно в силу произвольности $x \in [0, 1)$. Таким образом, $f(x) = x \notin \tilde{V}_0$, значит, $\tilde{V}_0$ не содержит пространства $\mathcal{P}_1$. Применяя предложение 1, получаем $\nu_\varphi \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Классические финитные всплески на $\mathbb{R}$ имеют различные порядки приближения. Порядок приближения стабильной масштабирующей функцией φ (а значит, и соответствующей системой всплесков) равен кратности нуля маски $m(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$. Кроме того, если гладкость масштабирующей функции больше целого числа k , то ее порядок приближения также больше k [12; раздел 3.3]. В диадическом случае мы наблюдаем совершенно иную ситуацию: согласно теореме 1 порядок приближения у всех диадических всплесков один и тот же. Поэтому по своим аппроксимационным свойствам все диадические всплески одинаковы. Из всего многообразия таких всплесков, классифицированных в теореме C, нельзя выбрать ничего лучшего чем система Хаара. Частично этот феномен можно объяснить тем, что диадические всплески, равно как и система Уолша, предназначены для приближения не гладких, а двоично-гладких функций. Этому посвящен следующий параграф.

§ 4. Приближение двоично-гладких функций

Мы рассмотрим приближение диадическими всплесками двоично-гладких функций, при этом гладкость будет измеряться двоичным показателем Гёльдера (4). Отметим, что имеют смысл и другие обобщения различных классов функций на двоичную метрику на $\mathbb{R}_+$, в частности классов Харди, Бесова и

Лизоркина–Трибеля. В настоящей работе мы, однако, ограничимся лишь классами Гёльдера. Введем понятие порядка приближения для двоичной метрики аналогично определению 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Двоичным порядком приближения функцией $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ называется точная верхняя грань v_φ чисел $\gamma \geq 0$ таких, что (8) выполнено для всех $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, для которых $\alpha_f > \gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ имеет место альтернатива: либо $v_\varphi = 0$, либо $v_\varphi = +\infty$. При этом $v_\varphi = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = c \quad \text{п.в.} \quad (10)$$

для некоторой константы $c \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем натуральное n из условия $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1})$. Если выполнено (10), то $\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \varphi(x \oplus k) = c$ для п.в. $x \in [0, 2^{n-1})$. Следовательно, $\chi_{[0, 2^{n-1})} \in V_0$, откуда $\chi_{[0, 1)} \in V_{n-1}$. Значит, пространство $\tilde{V}_{n-1}$ содержит все двоично-целые функции порядка 0. Таким образом, $\mathcal{E}_0 \subset \tilde{V}_{n-1}$, следовательно, $\mathcal{E}_r \subset \tilde{V}_{r+n-1}$ для любого $r \geq 0$. Известно [21; § 10.5.2], что для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \omega_2(f, 2^{-r}) \leq \text{dist}(f, \mathcal{E}_r) \leq \omega_2(f, 2^{-r}). \quad (11)$$

Следовательно, $\text{dist}(f, \tilde{V}_{r+n-1}) \leq \text{dist}(f, \mathcal{E}_r) \leq \omega_2(f, 2^{-r})$. Полагая $j = r + n - 1$ и замечая, что $\text{dist}(f, \tilde{V}_{r+n-1}) = \text{dist}(f, V_{r+n-1})$, поскольку f финитна, имеем

$$\text{dist}(f, V_j) \leq \omega_2(f, 2^{-j+n-1}). \quad (12)$$

Если $\alpha_f > \gamma$, то $\omega_2(f, 2^{-j+n-1}) \leq C(f)2^{\gamma(-j+n-1)}$, откуда

$$\text{dist}(f, V_j) \leq 2^{(n-1)\gamma} C(f) 2^{-j\gamma}.$$

Это неравенство верно для любых $\gamma > 0$ и $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ при условии, что $\alpha_f > \gamma$. Отсюда в силу произвольности γ получаем $v_\varphi = +\infty$.

Предположим теперь обратное: функция φ не обладает свойством (10). Тогда для любых коэффициентов a_k , $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$, имеем

$$\left\| \chi_{[0, 2^{n-1})} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) \right\|_2 > 0.$$

В самом деле, если для некоторых коэффициентов $\{a_k\}$ выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) = \chi_{[0, 2^{n-1})},$$

то, применив преобразование Уолша–Фурье, получим $a(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = \chi_{[0, 2^{1-n})}$, где $a(\omega) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k w_k(\omega)$. Следовательно, $a(0) \hat{\varphi}(0) = 1$ и $a(k) \hat{\varphi}(k) = 0$ при

всех $k \in \mathbb{N}$. Из первого равенства следует, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ и $a(0) \neq 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $a(k) = a(0) \neq 0$. Применив теперь второе равенство, получаем $\widehat{\varphi}(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Разложив в ряд Уолша–Фурье 1-периодическую функцию $\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k)$, получаем

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\varphi}(k) w_k(x) = \widehat{\varphi}(0) w_0(x) = \widehat{\varphi}(0) \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, условие (10) выполнено с константой $c = \widehat{\varphi}(0)$, что противоречит предположению. Итак, непрерывная функция

$$\{a_k\}_{k=0}^{2^{n-1}-1} \mapsto \left\| \chi_{[0, 2^{n-1})} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) \right\|_2$$

принимает только положительные значения, из чего (в силу конечномерности) следует

$$\inf_{\{a_k\}} \left\| \chi_{[0, 2^{n-1})} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) \right\|_2 = q > 0.$$

Таким образом, $\text{dist}(\chi_{[0, 2^{n-1})}, V_0) = q > 0$. Тогда для любого двоичного интервала $I_s^{(k)}$ порядка $k = n - 1 - j$ имеем

$$\text{dist}(\chi_{I_s^{(k)}}, V_j) \geq 2^{-j/2} q.$$

Следовательно, для любой функции $g \in V_j$ имеем

$$\int_{I_s^{(k)}} |g(x) - 1|^2 dx \geq 2^{-j} q^2.$$

Сложив эти неравенства по всем 2^j интервалам $I_s^{(k)}$, составляющим интервал $[0, 2^{n-1})$, получим $\|g - \chi_{[0, 2^{n-1})}\|_2 > q$. Таким образом, $\text{dist}(\chi_{[0, 2^{n-1})}, V_j) \geq q$. Итак, характеристическую функцию интервала $[0, 2^{n-1})$ нельзя с любой точностью приблизить пространствами V_j . Но поскольку показатель Гёльдера α функции $\chi_{[0, 2^{n-1})}$ равен $+\infty$, имеем $v_\varphi = 0$.

В силу теоремы А любая L_c^2 -масштабирующая функция обладает свойством разбиения единицы и, следовательно, удовлетворяет (10). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Для любой масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ имеем $v_\varphi = +\infty$.*

В частности, порядок приближения любой системой диадических всплесков равен $+\infty$. Таким образом, диадические всплески приближают W-гладкие функции лучше, чем любая классическая система всплесков.

С другой стороны, теорема 2 показывает, что двоичный порядок приближения v_φ является слишком грубой характеристикой. Более тонкий анализ предполагает изучение константы $C(f, \gamma)$ в неравенстве (8) и ее роста в зависимости от γ . Мы сделаем это в более общем виде для произвольных модулей непрерывности. Ввиду оценки (12) вполне естественно ввести следующую характеристику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть для функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ выполнено $v_\varphi = +\infty$. Дефектом приближения b_φ функцией φ называется наименьшее целое число b такое, что для всех $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ выполнено неравенство

$$\text{dist}(f, V_j) \leq \omega_2(f, 2^{-j+b}), \quad (13)$$

где ω_2 – двоичный модуль непрерывности.

Таким образом, дефект приближения b_φ определяется только для функций, у которых $v_\varphi = +\infty$, т.е. для функций, обладающих свойством (10). Корректность определения следует из предложения 3, которое доказывается ниже. Вначале нам понадобится следующая несложная

ЛЕММА 1. Для любого $l \geq 0$ следующие свойства функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ эквивалентны:

- а) $\chi_{[0, 2^l)} \in \tilde{V}_0$;
- б) $\mathcal{E}_{-l} \subset \tilde{V}_0$;
- с) функция $\hat{\varphi}(x)$ на каждом интервале $[k, k + 2^{-l})$, $k \in \mathbb{N}$, тождественно равна нулю и не обращается в нуль на интервале $[0, 2^{-l})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность свойств а) и б) очевидна. Докажем, что свойство а) равносильно с). Пусть $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1})$. Если

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k \varphi(x \oplus k) = \chi_{[0, 2^l)},$$

то, применив преобразование Уолша–Фурье, получим

$$a(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = \chi_{[0, 2^{-l})}, \quad (14)$$

где $a(\omega) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k w_k(\omega)$. Из этого следует, что функция $a(\omega)$ не обращается в нуль на интервале $[0, 2^{-l})$, а значит, и на всех интервалах $[k, k + 2^{-l})$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому функция $\hat{\varphi}(\omega)$ на этих интервалах равна нулю. Обратно, если выполнено с), то, положив

$$a(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{\varphi}(\omega)}, & \omega \in [0, 2^{-l}), \\ 0, & \omega \in [2^{-l}, 1), \end{cases}$$

и продолжив по периодичности на $\mathbb{R}_+$, получим (14), откуда следует а).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей (10), дефект приближения b_φ равен минимальному числу l , для которого выполнены условия а)–с) леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{E}_{-l} \subset \tilde{V}_0$ для данного l , т.е. выполнено свойство б), то $\mathcal{E}_{j-l} \subset \tilde{V}_j$ для любого j . Применив теперь (11) к любой функции $f \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, получаем $\text{dist}(f, V_j) \leq \omega_2(f, 2^{-j+l})$. Следовательно, при $b = l$ неравенство (13) выполнено.

Обратно, если для числа $l - 1$ не выполнено свойство а), т.е. $\chi_{[0, 2^{l-1})} \notin V_0$, то, как и при доказательстве предложения 2, заключаем, что $\text{dist}(f_0, V_{l-1}) \geq q > 0$, где $f_0 = \chi_{[0, 1)}$. Так как $\omega_2(f_0, 2^{-l+1+b}) = 0$ для любого $b < l - 1$, то неравенство (13) не выполняется при $j = l - 1$. Следовательно, $b \geq l - 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей (10), имеем $0 \leq b_\varphi \leq n-1$, где n – наименьшее натуральное число, для которого $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^{n-1})$.

Как вычислить дефект приближения для масштабирующей функции? Из предложения 3 следует, что b_φ целиком определяется множеством нулей функции $\hat{\varphi}$, а значит, множеством нулей маски уравнения $m(\omega)$. Мы сформулируем все результаты для стабильных масштабирующих функций, так как только они порождают КМА.

ЛЕММА 2. Стабильная масштабирующая функции φ обладает свойствами а)–с) из леммы 1 тогда и только тогда, когда ее маска равна нулю на интервале $[1/2, 1/2 + 1/2^{l+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m(1/2 + \omega/2) = 0$ для всех $\omega \in [0, 2^{-l})$, то, применив (6), получаем для любого нечетного $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{\varphi}(k + \omega) = m\left(\frac{k}{2} + \frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{k}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = m\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{k}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Если же k четно, то представим его в виде $k = 2^s r$, где r нечетно. Тогда для любого $\omega \in [0, 2^{-l})$ получим

$$\hat{\varphi}(k + \omega) = \hat{\varphi}(2^s r + \omega) = \hat{\varphi}(r + 2^{-s}\omega) \prod_{i=1}^s m(2^{-i}k + 2^{-i}\omega) = 0$$

(так как r нечетно, то $\hat{\varphi}(r + 2^{-s}\omega) = 0$). Итак, функция $\hat{\varphi}$ равна нулю на всех интервалах $[k, k + 2^{-l})$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, на интервале $[0, 2^{-l})$ она в нуль не обращается, иначе $\hat{\varphi}$ имела бы периодический нуль, а значит, была бы нестабильна (теорема В), что противоречит условию. Таким образом, выполнено свойство с) из леммы 1. Обратно, если это свойство выполнено, то для любого $\omega \in [0, 2^{-l})$ и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$0 = \hat{\varphi}(2k + 1 + \omega) = \hat{\varphi}\left(k + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right)m\left(k + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}\left(k + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right)m\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right).$$

Если существует $\omega \in [0, 2^{-l})$, для которого $m(1/2 + \omega/2) \neq 0$, то

$$\hat{\varphi}\left(k + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = 0$$

для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, функция $\hat{\varphi}$ имеет периодический нуль, а значит, φ нестабильна. Итак, $m(1/2 + \omega/2) = 0$ для всех $\omega \in [0, 2^{-l})$.

Объединением предложения 3 и леммы 2 получается

ТЕОРЕМА 3. Дефект приближения b_φ стабильной масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ (и соответствующей системой диадических всплесков) равен наименьшему целому числу r такому, что маска $m(\omega)$ равна нулю на интервале $[1/2, 1/2 + 2^{-r-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как мы видим, аппроксимационные свойства диадических всплесков различаются только дефектами приближения. Для классических всплесков на $\mathbb{R}$ порядок приближения равен кратности нуля маски $m(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$. Для диадических всплесков двоичный порядок приближения один и тот же, а дефект приближения определяется длиной двоичного интервала с началом в точке $\omega = 1/2$, на котором маска обращается в нуль. Таким образом, вместо кратности нуля в нашем случае возникает другая характеристика – длина двоичного интервала, на котором функция равна нулю.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Минимальный дефект приближения равен нулю и достигается, когда маска равна нулю тождественно на интервале $[1/2, 1)$.*

§ 5. Гладкость диадических всплесков и аппроксимация

Согласно теореме C и следствию 3 для любого n существуют диадические всплески, порожденные масштабирующими функциями порядка n и имеющие минимальный дефект приближения, т.е. наилучшие аппроксимационные свойства. Необходимым и достаточным условием для этого является равенство $|m(\omega)| = 1$ для всех $\omega \in [0, 1/2)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Масштабирующая функция порождает систему диадических всплесков с минимальным дефектом приближения тогда и только тогда, когда*

$$|m(\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/2), \\ 0, & \omega \in [1/2, 1). \end{cases}$$

В частности, всплеск Хаара имеет минимальный дефект приближения. Он соответствует случаю $n = 1$. При каждом $n \geq 2$ существует множество систем всплесков с минимальным дефектом. В качестве маски $m(\omega)$ можно взять произвольную 1-периодическую целую функцию $t \in \mathcal{E}_n$, принимающую значения ± 1 на интервале $[0, 1/2)$ (если маска комплекснозначная, то произвольные комплексные значения с модулем 1) и равную нулю на $[1/2, 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Стабильная масштабирующая функция имеет минимальный дефект приближения тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathcal{E}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b_\varphi = 0$, то согласно следствию 3 $m(\omega) = 0$ для всех $\omega \in [1/2, 1)$. Тогда, взяв для любого $\omega \geq 1$ натуральное число j , для которого $\omega \in [2^{j-1}, 2^j)$, имеем $m(2^{-j}\omega) = 0$. Подставив это в (6), получаем, что $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ для всех $\omega \geq 1$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{E}_0$. Обратно, если $\varphi \in \mathcal{E}_0$, то $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ для любого $\omega \geq 1$. Предположим, что $b_\varphi > 0$. Это означает, что $m(\omega_0) \neq 0$ для некоторого $\omega_0 \in [1/2, 1)$. Тогда $0 = \widehat{\varphi}(2\omega_0) = m(\omega_0)\widehat{\varphi}(\omega_0)$, откуда $\widehat{\varphi}(\omega_0) = 0$. Но поскольку $\widehat{\varphi}(\omega_0 + k) = 0$ для всех $k \geq 1$, получаем, что ω_0 – периодический нуль функции $\widehat{\varphi}$, следовательно, φ нестабильна.

Следствие 5 нельзя усилить на случай $b_\varphi = 1$.

ПРИМЕР 1. Фиксируем некоторое $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим масштабирующее уравнение со следующей маской:

$$\begin{aligned} m(\omega) &= 1 && \text{при } \omega \in \left[0, \frac{1}{4}\right); \\ m(\omega) &= \sqrt{\alpha} && \text{при } \omega \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \\ m(\omega) &= 0 && \text{при } \omega \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right); \\ m(\omega) &= \sqrt{1-\alpha} && \text{при } \omega \in \left[\frac{3}{4}, 1\right). \end{aligned}$$

Согласно теореме С соответствующая масштабирующая функция φ принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$, порождает КМА и сосредоточена на интервале $[0, 2)$. Согласно теореме 3 $b_\varphi = 1$. Однако $\varphi \notin \mathcal{E}$. В самом деле, так как $m(2^{k-j} - 2^{-j-1}) \neq 0$ при любых натуральных k и j , то из (6) заключаем, что $\widehat{\varphi}(2^k - 1/2) \neq 0$ для любого натурального k . Поэтому функция $\widehat{\varphi}$ не является финитной и, значит, φ не является двоично-целой.

Согласно следствию 5 диадические всплески с минимальным дефектом приближения являются двоично-целыми. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого n существует масштабирующее уравнение порядка n , решение которого порождает КМА, является двоично-целой функцией, но при этом имеет максимально возможный дефект приближения $b_\varphi = n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного n возьмем произвольную маску $m(\omega)$, которая равна нулю на интервалах $[2^{-n}, 2^{1-n})$ и $[1/2, 1/2 + 2^{-n})$, равна 1 на интервалах $[0, 2^{-n})$ и $[1/2 + 2^{-n}, 1/2 + 2^{1-n})$, а в остальных точках интервала $[0, 1)$ не обращается в нуль и удовлетворяет условию (7). По теореме С соответствующая масштабирующая функция φ генерирует КМА. Так же, как при доказательстве следствия 5, устанавливаем, что $\varphi \in \mathcal{E}_{n-1}$. Тем не менее $b_\varphi = n - 1$ согласно теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для классических всплесков на $\mathbb{R}$ гладкость является достаточным условием хороших аппроксимационных свойств. Если масштабирующая функция φ , порождающая КМА на $\mathbb{R}$, принадлежит пространству W_2^l , то $\nu_\varphi \geq l + 1$ (см. [6], [8]). В диадическом случае, как следует из предложения 4, уже нет прямой связи гладкости всплесков с их аппроксимационными свойствами. Двоично-целые всплески (гладкость которых равна $+\infty$) могут иметь наибольший дефект приближения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Все масштабирующие функции, принадлежащие $\mathcal{E}_0$, имеют оптимальные аппроксимационные свойства, т.е. наименьший дефект приближения. В частности, хааровские аппроксимации являются оптимальными. В связи с этим отметим, что в некоторых прикладных задачах при аппроксимации

“сигнала” f его проекциями $P_j f$ коэффициенты уравнения (2) (и, тем самым, масштабирующая функция φ) на каждом уровне j выбираются с помощью энтропийного критерия, и такой “адаптационный” подход, как правило, приводит к аппроксимациям, отличным от хааровских (см., например, [19; § 3], [24]).

Автор выражает благодарность Ю. А. Фаркову за постоянное внимание к настоящей работе и ряд ценных замечаний. Статья была завершена во время визита в Католический университет Лоувейн (г. Лоувейн-ля-Нев, Бельгия). Автор признателен университету за гостеприимство.

Список литературы

- [1] I. J. Schoenberg, “Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae”, *Quart. Appl. Math.*, **4** (1946), 45–99, 112–141.
- [2] G. Strang, G. J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [3] W. Dahmen, Ch. A. Micchelli, “On the approximation order from certain multivariate spline spaces”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **26**:2 (1984), 233–246.
- [4] C. de Boor, R.-Q. Jia, “Controlled approximation and a characterization of the local approximation order”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:4 (1985), 547–553.
- [5] A. Ron, “Approximation orders of and approximation maps from local principal shift-invariant spaces”, *J. Approx. Theory*, **81**:1 (1995), 38–65.
- [6] C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron, “Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **341**:2 (1994), 787–806.
- [7] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001.
- [8] R.-Q. Jia, “Refinable shift-invariant spaces: from splines to wavelets”, *Approximation theory VIII. Vol. 2. Wavelets and multilevel approximation*, Papers from the 8th Texas international conference (College Station, TX, USA, 1995), Ser. Approx. Decompos., **6**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, 179–208.
- [9] G. C. Kyriazis, “Wavelet coefficients measuring smoothness in H_p (open face R^d)”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3**:2 (1996), 100–119.
- [10] G. Kyriazis, P. Petrushev, “New bases for Triebel–Lizorkin and Besov spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:2 (2002), 749–776.
- [11] A. Ron, “Smooth refinable functions provide good approximation orders”, *SIAM J. Math. Anal.*, **28**:3 (1997), 731–748.
- [12] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [13] C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron, “Approximation orders of FSI spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$ ”, *Constr. Approx.*, **14**:3 (1998), 411–427.
- [14] G. C. Kyriazis, “Approximation from shift-invariant spaces”, *Constr. Approx.*, **11**:2 (1995), 141–164.
- [15] G. C. Kyriazis, “Approximation of distribution spaces by means of kernel operators”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **2**:3 (1995), 261–286.
- [16] W. Ch. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.
- [17] W. Ch. Lang, “Wavelet analysis on the Cantor dyadic group”, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544.

- [18] Yu. A. Farkov, “Orthogonal p -wavelets on $\mathbb{R}_+$ ”, *Wavelets and splines* (St. Petersburg, Russia, 2003), St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005, 4–26.
- [19] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 623–650.
- [20] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160; англ. пер.: V. Yu. Protasov, Yu. A. Farkov, “Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1529–1558.
- [21] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [22] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [23] С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*, Наука, М., 1976.
- [24] B. Sendov, “Adapted multiresolution analysis and wavelets”, *Functions, series, operators* (Budapest, Hungary, 1999), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 23–38.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступила в редакцию

06.07.2006 и 05.06.2007