Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Об однородном консервативном уравнении Винера–Хопфа, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 123–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:01:54

УДК 517.968+519.21

М. С. Сгибнев

Об однородном консервативном уравнении Винера–Хопфа

Доказано существование P^* -решения однородного обобщенного уравнения Винера–Хопфа

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y) F(dy), \quad x \geq 0,$$

где F – распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ осциллирующего типа. Установлены асимптотические свойства этого решения.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

В работах [1], [2] исследовалось однородное уравнение Винера–Хопфа

$$S(x) = \int_0^\infty k(x-y)S(y) dy, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $S(x)$ – неизвестная функция, а $k(x)$ – плотность некоторого симметричного распределения вероятностей F , т.е.

$$k(x) = k(-x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^\infty k(x) dx = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [1]). Функция $S(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется P^* -решением уравнения (1), если она не убывает, непрерывна справа, не обращается всюду в нуль и $S(x) = 0$ при $x < 0$.

В работе [1] доказано существование единственного P^* -решения $S(x)$ уравнения (1) с нормировкой $S(0+) = 1$ (см. [1; теорема 5]) и установлено, что если у плотности $k(x)$ существует конечный второй момент $\sigma^2 := \int_{-\infty}^\infty x^2 k(x) dx$, то (см. [1; теорема 6])

$$S(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sigma} x, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Соотношение $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \infty$ означает, что $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Это свойство было уточнено в работе [2; теорема 1] следующим образом. Если $\sigma^2 < \infty$, то для функции $G(x)$, определяемой равенством

$$S(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} [x + G(x)], \quad x > 0,$$

справедливы соотношения:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} [G(x+h) - G(x)] = 0 \text{ для любого } h \geq 0;$$

- 2) предел $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$ равен либо $+\infty$, либо конкретному конечному значению в зависимости от того, бесконечен или конечен третий абсолютный момент $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 k(x) dx$.

Перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y)k(y) dy, \quad x > 0.$$

Мы будем рассматривать уравнение более общего вида

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y) F(dy), \quad x \geq 0, \quad (3)$$

где F – распределение вероятностей в $\mathbb{R}$. Считаем, что верхний предел x интегрирования включен в область интегрирования. В дальнейшем мы не будем предполагать, что в уравнении (3) распределение F непременно обладает плотностью. Назовем уравнение (3) *однородным обобщенным уравнением Винера–Хопфа*, чтобы отличить его от классического однородного уравнения Винера–Хопфа (1). Определение P^* -решения уравнения (3) аналогично определению 1.

Распределение вероятностей F называется *симметричным*, если его функция распределения $F(x) := F((-\infty, x])$ совпадает со своей сопряженной функцией распределения $\tilde{F}(x) := 1 - F(-x - 0)$ (см. [3; §3.1]). Распределение F называется *непрерывным*, если его функция распределения непрерывна. Распределение F называется *вырожденным*, если оно сосредоточено в одной точке: $F(\{a\}) = 1$ при некотором $a \in \mathbb{R}$.

В работе [4] рассматривалось уравнение (3) с непрерывным распределением F и было установлено, что:

- 1) если распределение F симметрично, то существует P^* -решение $S(x)$ уравнения (3) и при $\sigma^2 < \infty$ имеет место асимптотика (2), если же $\sigma^2 = \infty$, то $S(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см. [4; теорема 6.1]);
- 2) если распределение F обладает конечным моментом первого порядка и $\int_{-\infty}^{\infty} x F(dx) = 0$, то существует P^* -решение $S(x)$ уравнения (3) и $S(x) = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см. [4; теорема 6.2]).

Цель настоящей работы состоит в максимальном обобщении цитированных результатов работ [1], [2], [4] по двум направлениям: 1) вместо уравнения (1) мы будем рассматривать уравнение (3), не предполагая ни абсолютной непрерывности распределения F , ни даже его непрерывности; 2) мы не будем требовать и симметричности распределения F .

Опишем класс распределений вероятностей F , для которых будет установлено существование P^* -решения уравнения (3). Пусть X_k , $k \geq 1$, – независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 из [5; гл. XII, §2] существует только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью 1 между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (S_n с вероятностью 1 стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Известно [5; гл. XII, §7, теорема 2], что

случайное блуждание уходит в $-\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) < \infty. \quad (4)$$

Аналогичный критерий для случайных блужданий, уходящих в $+\infty$, получается заменой события $\{S_n > 0\}$ в неравенстве (4) событием $\{S_n < 0\}$.

Из этих утверждений вытекает, что случайное блуждание принадлежит к осциллирующему типу тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n < 0) = \infty. \quad (5)$$

Мы будем изучать уравнение (3) с произвольным распределением вероятностей F , порождающим случайное блуждание осциллирующего типа. Такие распределения вероятностей будем называть просто *распределениями осциллирующего типа*. Симметричные плотности вероятностей, рассматривавшиеся в работах [1], [2], приводят к случайным блужданиям осциллирующего типа, поскольку в этом случае

$$P(S_n > 0) = P(S_n < 0) = \frac{1}{2}$$

при любом n , и, следовательно, выполняются равенства (5).

Пусть ν и $\varkappa$ – конечные меры, определенные на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$. Их *сверткой* назовем меру

$$\nu * \varkappa(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} \nu(dx) \varkappa(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(A-x) \varkappa(dx), \quad A \in \mathcal{B};$$

здесь $A-x := \{y \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Обозначим через F^{n*} n -кратную свертку распределения F : $F^{1*} := F$, $F^{(n+1)*} := F^{n*} * F$, $n \geq 1$, и $F^{0*} := \delta_0$ (атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле). Тогда, поскольку F^{n*} – распределение случайной величины S_n , условие (5) принадлежности распределения вероятностей F к осциллирующему типу можно записать в терминах самого распределения F следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{n*}((0, \infty))}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{n*}((-\infty, 0))}{n} = \infty.$$

Если существует математическое ожидание $EX_1 := \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx)$, то при $EX_1 = 0$ случайное блуждание $\{S_n\}$ будет осциллирующим (см. [5; гл. XII, § 2]), а при $EX_1 > 0$ (соответственно $EX_1 < 0$) случайное блуждание уходит в $+\infty$ (соответственно в $-\infty$) согласно закону больших чисел: $S_n/n \rightarrow EX_1$ при $n \rightarrow \infty$ почти наверно [6; предложение IV.7.1].

Остановимся на вероятностной интерпретации P^* -решения уравнения (1), данной в работе [2] для случая с четной плотностью $k(x)$. Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}$. Случайная величина $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$ называется *первой (строго возрастающей) лестничной высотой*. Аналогично, $\mathcal{T}_- := \min\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$ и $\mathcal{H}_- := S_{\mathcal{T}_-}$. Обозначим через F_+ и F_- распределения случайных величин $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ соответственно.

Лемма 1 из [5; гл. XVIII, § 3] дает представление о совместном распределении двумерной случайной величины $(\mathcal{T}_+, \mathcal{H}_+)$ в терминах смешанного преобразования – производящей функции (для $\mathcal{T}_+$) и преобразования Лапласа (для $\mathcal{H}_+$):

$$\ln \frac{1}{1 - \mathbb{E}(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_{0+}^{\infty} e^{sx} F_+^{n*}(dx), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} s = 0. \quad (6)$$

Аналогичная формула имеет место и для $(\mathcal{T}_-, \mathcal{H}_-)$ (см. [5; гл. XVIII, § 3, лемма 2]).

Пусть U_+ – мера восстановления, порожденная распределением F_+ , т.е.

$$U_+ := \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{n*},$$

где F_+^{n*} – n -кратная свертка распределения F_+ . Функция восстановления, порожденная распределением F_+ , определяется как $U_+(x) := U_+((-\infty, x])$. Согласно лемме 1 из [2] P^* -решение $S(x)$ с нормировкой $S(0+) = 1$ уравнения (1) с плотностью $k(x)$ симметричного распределения F в качестве ядра совпадает с функцией восстановления $U_+(x)$, порожденной распределением F_+ первой строго возрастающей лестничной высоты $\mathcal{H}_+$ случайного блуждания $\{S_n\}$.

Главный вывод настоящей работы заключается в том, что функция восстановления $U_+(x)$ является P^* -решением однородного обобщенного уравнения Винера–Хопфа (3) с распределением F осциллирующего типа, при этом $U_+(0+) = 1$. Данный факт позволяет применить многочисленные известные результаты из вероятностной теории восстановления при исследовании асимптотических свойств P^* -решения уравнения (3), что будет сделано впоследствии. Здесь же мы ограничимся тем, что установим элементарные асимптотические свойства решения $U_+(x)$, как это сделано в работах [1], [2] для уравнения (1) с симметричной плотностью $k(x)$.

§ 2. Основной результат

Рассмотрим вопрос о существовании P^* -решения $S(x)$ уравнения (3), обладающего нормировкой $S(0+) = 1$. Обозначим через $\widehat{\nu}(s)$ преобразование Лапласа произвольной комплекснозначной меры ν : $\widehat{\nu}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \nu(dx)$, при условии, что данный интеграл имеет смысл. Нам понадобится факторизационное тождество (см. [5; гл. XVIII, § 3])

$$1 - z\widehat{F}(s) = [1 - \mathbb{E}(z^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-})][1 - \mathbb{E}(z^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+})], \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} s = 0. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что F – распределение вероятностей осциллирующего типа. Тогда функция восстановления $U_+(x)$, порожденная распределением F_+ первой лестничной высоты $\mathcal{H}_+$, является P^* -решением однородного обобщенного уравнения Винера–Хопфа (3), обладающим нормировкой $U_+(0+) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$U_+(x) = \int_{-\infty}^x U_+(x-y) F(dy), \quad x \geq 0, \quad (8)$$

и $U_+(0+) = 1$, поскольку функция восстановления $U_+(x)$ удовлетворяет всем остальным требованиям определения 1. Выберем $\varrho \in (0, 1)$ и обозначим через $F_\varrho^\pm$ меры с преобразованиями Лапласа $\widehat{F}_\varrho^\pm(s) := E(\varrho^{\mathcal{T}_\pm} e^{s\mathcal{H}_\pm})$. Для мер F_ϱ^+ справедливы представления

$$F_\varrho^+(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k P(\mathcal{T}_\pm = k, \mathcal{H}_\pm \in A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Очевидно, что $F_\varrho^+(\mathbb{R}) \leq \varrho < 1$. Пусть U_ϱ^+ – мера восстановления, порожденная дефектным распределением F_ϱ^+ :

$$U_\varrho^+(A) := \sum_{n=0}^{\infty} (F_\varrho^+)^{n*}(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Мера U_ϱ^+ конечна: $U_\varrho^+(\mathbb{R}) \leq 1/(1 - \varrho)$, поэтому ее преобразование Лапласа определено при $\operatorname{Re} s \leq 0$. Из тождества (7) вытекает формула

$$\widehat{U}_\varrho^+(s) = \frac{1}{1 - \widehat{F}_\varrho^+(s)} = \frac{1 - \widehat{F}_\varrho^-(s)}{1 - \varrho \widehat{F}(s)}, \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Рассмотрим свертку $\varrho F * U_\varrho^+$. Имеем

$$\begin{aligned} \varrho(\widehat{F * U_\varrho^+})(s) &= \frac{\varrho \widehat{F}(s)[1 - \widehat{F}_\varrho^-(s)]}{1 - \varrho \widehat{F}(s)} = \widehat{F}_\varrho^-(s) - 1 + \frac{1 - \widehat{F}_\varrho^-(s)}{1 - \varrho \widehat{F}(s)} \\ &= \widehat{F}_\varrho^-(s) - 1 + \widehat{U}_\varrho^+(s), \end{aligned}$$

откуда, переходя от преобразований Лапласа к мерам, выводим равенство

$$\varrho F * U_\varrho^+(A) = F_\varrho^-(A) - \delta_0(A) + U_\varrho^+(A), \quad A \in \mathcal{B}. \quad (9)$$

Устремим $\varrho \uparrow 1$. Поскольку $U_\varrho^+(A) \uparrow U_+(A)$ и $F_\varrho^-(A) \uparrow F_-(A)$ при любом $A \in \mathcal{B}$, то соотношение (9) превращается в равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_+(A - y) F(dy) = F_-(A) - \delta_0(A) + U_+(A), \quad A \in \mathcal{B}. \quad (10)$$

Заметим, что обе части равенства (10) могут обращаться в бесконечность при некоторых A , например при $A = [a, \infty)$, поскольку U_+ – σ -конечная мера и $U_+(\mathbb{R}) = \infty$. Распределение F_- сосредоточено на $(-\infty, 0]$, и для рассматриваемого типа распределений F справедливо равенство $F_-((-\infty, 0]) = 1$, вытекающее из соотношения (5) и леммы 2 из [5; гл. XVIII, § 3]. Кроме того, мера U_+ сосредоточена на $[0, \infty)$. Поэтому, полагая $A = (-\infty, x]$ в равенстве (10), убеждаемся в справедливости соотношения (8) (напомним, что $U_+(x) := U_+((-\infty, x])$). Наконец, функция $U_+(x)$ обладает требуемой нормировкой $U_+(0+) = 1$, поскольку распределение F_+ сосредоточено на $(0, \infty)$ и, следовательно, мера $\sum_{n=1}^{\infty} (F_+)^{n*} = U_+ - \delta_0$ также сосредоточена на $(0, \infty)$. Теорема доказана полностью.

§ 3. Асимптотические свойства решения

Установим элементарные асимптотические свойства P^* -решения $S(x)$ однородного обобщенного уравнения Винера–Хопфа (3), воспользовавшись представлением $S(x) = U_+(x)$ и известными теоремами восстановления. Согласно элементарной теореме восстановления [7; часть II, § 1.2] при $E\mathcal{H}_+ < \infty$ имеем

$$S(x) \sim \frac{x}{E\mathcal{H}_+}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если $E\mathcal{H}_+ = \infty$, то $S(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Более тонкие утверждения о свойствах решения $S(x)$ необходимо формулировать отдельно для арифметических и неарифметических распределений F_+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [5]). Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* распределения G . Распределение, не являющееся арифметическим, называется *неарифметическим*.

В теореме Блеквелла утверждается (см. [5; гл. XI, § 1, теорема 1]), что если $E\mathcal{H}_+ < \infty$ и распределение F_+ не является арифметическим, то при любом фиксированном $h > 0$

$$S(x+h) - S(x) \rightarrow \frac{h}{E\mathcal{H}_+}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (12)$$

а если F_+ – арифметическое распределение, то соотношение (12) верно для любого h , кратного шагу распределения F_+ . Если $E\mathcal{H}_+ = \infty$, то $S(x+h) - S(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Элементарная теорема восстановления (11) – следствие теоремы Блеквелла (12).

Если $E(\mathcal{H}_+^2) < \infty$ и F_+ – неарифметическое распределение, то (см. [5; гл. XI, § 4])

$$S(x) - \frac{x}{E\mathcal{H}_+} \rightarrow \frac{E(\mathcal{H}_+^2)}{2(E\mathcal{H}_+)^2}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Для арифметических распределений F_+ с шагом единица справедливо соотношение

$$S(n) - \frac{n}{E\mathcal{H}_+} \rightarrow \frac{E(\mathcal{H}_+^2) + E\mathcal{H}_+}{2(E\mathcal{H}_+)^2}, \quad n \rightarrow \infty; \quad (14)$$

здесь n принимает целочисленные значения.

Наконец, если $E\mathcal{H}_+ < \infty$, но $E(\mathcal{H}_+^2) = \infty$, то разности, стоящие в левых частях соотношений (13) и (14), стремятся к ∞ при $x \rightarrow \infty$ [8; теорема 5].

Несмотря на то что приведенные асимптотические результаты носят максимально общий характер, а распределение F_+ теоретически определяется из соотношения (6), все же желательно указать такие условия для исходного распределения F , при которых также будут верны указанные асимптотические соотношения. Для этой цели необходимо в первую очередь установить связь между существованием моментов исходного распределения F и конечностью моментов распределения F_+ первой лестничной высоты $\mathcal{H}_+$ случайного блуждания $\{S_n\}$, порожденного распределением F . Справедливы следующие результаты.

Пусть F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ с нулевым средним $\int_{-\infty}^{\infty} x F(dx)$ и X – случайная величина с распределением F . Положим $X^+ := \max(0, X)$ и $X^- := -\min(0, X)$. Тогда из существования момента $E[(X^+)^{\beta}] = \int_0^{\infty} x^{\beta} F(dx)$ при $\beta > 1$ вытекает существование $E(\mathcal{H}_+^{\beta-1})$, и наоборот, если математическое ожидание $E|\mathcal{H}_-|$ конечно, а это так, если $E[(X^-)^2] = \int_{-\infty}^0 x^2 F(dx) < \infty$ (см. [9]), то из существования момента $E(\mathcal{H}_+^{\beta-1})$ при $\beta > 1$ вытекает существование $E[(X^+)^{\beta}]$ (см. [9; следствие 1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [3]). Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию, т.е. на множестве точек вида $a + j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ – постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел). Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* G .

Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ является решетчатым тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $|\hat{G}(it_0)| = 1$ (см. [3; теорема 2.1.4]). Анализируя доказательство цитируемой теоремы, видим, что G – арифметическое распределение в том и только том случае, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $\hat{G}(it_0) = 1$. Шаг λ решетчатого распределения G определяется следующими соотношениями [10; гл. IV, упр. 7]: $|\hat{G}(it)| < 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественное) и $|\hat{G}(2\pi i/\lambda)| = 1$. Если G – арифметическое распределение, то его шаг λ определяется следующими соотношениями: $\hat{G}(it) \neq 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественное) и $\hat{G}(2\pi i/\lambda) = 1$.

ЛЕММА 1. *Предположим, что F – распределение вероятностей осциллирующего типа. Тогда F – арифметическое распределение вероятностей с шагом λ в том и только том случае, если распределения $F_{\pm}$ лестничных высот $\mathcal{H}_{\pm}$ являются арифметическими с тем же самым шагом λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $z = 1$ в тождестве (7), получим

$$1 - \hat{F}(it) = [1 - \hat{F}_-(it)][1 - \hat{F}_+(it)], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Если $F_{\pm}$ – арифметические распределения с шагом λ , то согласно приведенному выше критерию из тождества (15) немедленно вытекает, что распределение F также арифметично с шагом λ .

Пусть теперь F – арифметическое распределение с шагом λ . Очевидно, что все случайные величины S_n с вероятностью 1 принимают значения из множества $\{0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots\}$. Следовательно, с вероятностью 1 случайные величины $\mathcal{H}_{\pm}$ принимают значения из этого же множества, и, таким образом, их распределения $F_{\pm}$ являются арифметическими с шагами $\lambda_{\pm} \geq \lambda$. Обращаясь снова к тождеству (15) и применяя критерий арифметичности вероятностных распределений, видим, что по крайней мере одно из распределений $F_{\pm}$ имеет шаг, равный λ . Пусть это будет распределение F_- и, следовательно, $\lambda_- = \lambda$. Покажем, что и распределение F_+ имеет такой же шаг λ . Рассуждаем от противного. Допустим, что шаг λ_+ распределения F_+ не равен λ . Тогда $\lambda_+ > \lambda$ и $\hat{F}_+(2\pi i/\lambda_+) = 1$, откуда вытекает, что $\hat{F}(2\pi i/\lambda_+) = 1$, но это противоречит соотношению $\hat{F}(2\pi i/\lambda_+) \neq 1$, поскольку $2\pi/\lambda_+ < 2\pi/\lambda$. Значит, допущение, что $\lambda_+ > \lambda$, неверно. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ с нулевым средним $\int_{-\infty}^{\infty} x F(dx)$ и X – случайная величина с распределением F . Пусть $S(x) = U_+(x) - P^*$ -решение однородного уравнения Винера–Хопфа (3), о котором идет речь в теореме 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $E[(X^+)^2] < \infty$, то выполняется соотношение (11). Предположим, что $E[(X^+)^2] = \infty$, а $E[(X^-)^2] < \infty$. Тогда $S(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$.*

2) *Если $E[(X^+)^2] < \infty$ и распределение F не является арифметическим, то при любом фиксированном $h > 0$ имеет место соотношение (12), а если F – арифметическое распределение с шагом единица, то (12) верно для любого целого $h > 0$. Предположим, что $E[(X^+)^2] = \infty$, а $E[(X^-)^2] < \infty$. Тогда при любом фиксированном $h > 0$*

$$S(x+h) - S(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

3) *Если $E[(X^+)^3] < \infty$ и распределение F не является арифметическим, то выполняется соотношение (13), а если F – арифметическое распределение с шагом единица, то имеет место соотношение (14). Предположим, что $E[(X^+)^3] = \infty$, $E[(X^-)^2] < \infty$ и распределение F не является арифметическим либо арифметично с шагом единица. Тогда*

$$S(x) - \frac{x}{E\mathcal{H}_+} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

Доказательство состоит в непосредственном применении леммы 1, перечисленных перед ее формулировкой результатов из теории восстановления и утверждений работы [9] и здесь опускается. Отметим лишь два обстоятельства. Во-первых (это замечание относится к утверждениям 2) и 3) теоремы 2), если F – неарифметическое распределение, то этим же свойством обладает и распределение F_+ , так как если бы распределение F_+ было арифметическим, то из тождества (15) и критерия арифметичности вероятностных распределений вытекало бы, что и F – арифметическое распределение. Действительно, в этом случае мы бы имели $\widehat{F}(2\pi i/\lambda_+) = 1$, где λ_+ – шаг распределения F_+ , что противоречило бы предположению неарифметичности распределения F . Во-вторых, условия $E[(X^+)^2] = \infty$ и $E[(X^-)^2] < \infty$ гарантируют выполнение равенства $E\mathcal{H}_+ = \infty$ и, следовательно, $S(x) = o(x)$ и $S(x+h) - S(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, как указано в теореме 2. Однако эти условия не являются исчерпывающими. Как мы увидим далее (см. следствие 1), для симметричных распределений F условие $E(X^2) = \infty$ влечет за собой соотношение $E\mathcal{H}_+ = \infty$ и вместе с ним соответствующую асимптотику решения $S(x)$.

Прежде чем привести в качестве следствия соответствующие утверждения с уточнениями для симметричного распределения F , докажем лемму.

ЛЕММА 2. *Предположим, что F – невырожденное симметричное распределение вероятностей с конечным вторым моментом $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(dx)$, и пусть*

$$\gamma_0 := \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n = 0) \right],$$

где $\{S_n\}$ – случайное блуждание, порожденное распределением F . Тогда получаем $E\mathcal{H}_+ = \sigma/\sqrt{2\gamma_0}$. Если дополнительно предположить, что F – непрерывное распределение, то $E\mathcal{H}_+ = \sigma/\sqrt{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд под знаком экспоненты сходится при любом распределении $F \neq \delta_0$ (см. [5; гл. XII, § 9(в)]). Воспользуемся симметричной записью факторизации Винера–Хопфа (см. [5; гл. XVIII, § 6, формулы (6.5) и (6.7)])

$$1 - \widehat{F}(s) = \gamma_0 [1 - \widehat{F}_-^*(s)] [1 - \widehat{F}_+(s)], \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad (16)$$

где F_-^* – распределение первой строго убывающей лестничной высоты $\mathcal{H}_-^*$, определяемой как $\mathcal{H}_-^* := S_{\mathcal{T}_-^*}$ при $\mathcal{T}_-^* := \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$. Разделим обе части тождества (16) на s^2 при $\operatorname{Re} s = 0$ и устремим s к нулю. Получим (см. [3; теорема 2.3.3])

$$-\frac{\sigma^2}{2} = \gamma_0 E\mathcal{H}_+ E\mathcal{H}_-^*.$$

Из соображений симметрии $E\mathcal{H}_-^* = -E\mathcal{H}_+$. Таким образом, $\sigma^2 = 2\gamma_0 (E\mathcal{H}_+)^2$. Для непрерывных распределений F имеем $P(S_n = 0) = 0$ при всех $n \geq 1$. В этом случае $\gamma_0 = 1$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что F – невырожденное симметричное распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ и X – случайная величина с распределением F . Пусть $S(x) = U_+(x)$ – P^* -решение однородного уравнения Винера–Хопфа (3), о котором идет речь в теореме 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Пусть $\sigma^2 = E(X^2) < \infty$. Тогда

$$S(x) \sim \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma} x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Если $E(X^2) = \infty$, то $S(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Пусть $E(X^2) < \infty$. Если распределение F не является арифметическим, то при любом фиксированном $h > 0$ имеет место соотношение

$$S(x+h) - S(x) \rightarrow \frac{h\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Если же F – арифметическое распределение с шагом единица, то соотношение (17) верно для любого целого $h > 0$. Если $E(X^2) = \infty$, то $S(x+h) - S(x) = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $h > 0$.

3) Пусть $E(|X|^3) < \infty$. Если распределение F не является арифметическим, то справедливо соотношение

$$S(x) - \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma} x \rightarrow \frac{\gamma_0 E(\mathcal{H}_+^2)}{\sigma^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Для арифметических распределений F с шагом единица справедливо соотношение

$$S(n) - \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma} n \rightarrow \frac{\gamma_0 \sqrt{2} E(\mathcal{H}_+^2) + \sigma \sqrt{\gamma_0}}{\sigma^2 \sqrt{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $E(X^2) < \infty$, $E(|X|^3) = \infty$ и распределение F либо является неарифметическим, либо арифметическим с шагом единица, то

$$S(x) - \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma} x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения следствия вытекают из теоремы 2, леммы 2 и симметричности распределения F . В проверке нуждаются только соответствующие свойства моментов случайной величины $\mathcal{H}_+$. Например, если $E(X^2) = \infty$, то $E\mathcal{H}_+ = \infty$, так как если допустить противное, то по соображениям симметрии мы имели бы $E|\mathcal{H}_-^*| < \infty$ (случайная величина $\mathcal{H}_-^*$ определена в доказательстве леммы 2). Очевидно, что $|\mathcal{H}_-^*| \geq |\mathcal{H}_-|$ всюду, за исключением события $\{S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots\}$, на котором случайная величина $\mathcal{H}_-^*$ не определена и вероятность которого равна нулю. Последнее утверждение вытекает из теоремы 1 из [5; гл. XII, § 7], примененной к случайной величине $\mathcal{T}_-^*$, и соотношения (5). Следовательно, $E|\mathcal{H}_-^*| \geq E|\mathcal{H}_-|$, что влечет за собой неравенство $E|\mathcal{H}_-| < \infty$, но тогда в силу ранее цитированного результата работы [9] неравенства $E|\mathcal{H}_+| < \infty$ и $E|\mathcal{H}_-| < \infty$ повлекли бы за собой неравенство $E[(X^+)^2] < \infty$, что противоречит предположению $E(X^2) = \infty$ и симметричности распределения F . Таким образом, допущение $E|\mathcal{H}_+| < \infty$ неверно. Аналогично, если $E(X^2) < \infty$ и $E(|X|^3) = \infty$, то $E(\mathcal{H}_+^2) = \infty$. Следствие доказано.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Список литературы

- [1] F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density", *Duke Math. J.*, **24**:3 (1957), 327–343.
- [2] F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. II", *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 363–372.
- [3] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, Charles Griffin, London; Hafner Publ., New York, 1970.
- [4] Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 21–48; англ. пер.: N. B. Engibaryan, "Convolution equations containing singular probability distributions", *Izv. Math.*, **60**:2 (1996), 251–279.
- [5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1967; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II, Wiley, New York–London–Sydney, 1966.
- [6] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969; пер. с фр.: J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964.
- [7] Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*, Советское радио, М., 1967.
- [8] М. С. Сгибнев, "О теореме восстановления в случае бесконечной дисперсии", *Сиб. матем. журн.*, **22**:5 (1981), 178–189; англ. пер.: M. S. Sgibnev, "Renewal theorem in the case of an infinite variance", *Siberian Math. J.*, **22**:5 (1982), 787–796.
- [9] R. A. Doney, "Moments of ladder heights in random walks", *J. Appl. Probab.*, **17**:1 (1980), 248–252.
- [10] М. Лоэв, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: M. Loève, *Probability theory*, Nostrand, Princeton, NJ–Toronto–New York–London, 1960.

М. С. Сгибнев (M. S. Sgibnev)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
18.07.2006 и 14.03.2007