Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин, О спектре самосопряженного дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 8, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:14:07

УДК 517.956

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадыльшин**О спектре самосопряженного
дифференциального оператора на оси
с быстро осциллирующими коэффициентами**

В работе изучается асимптотическое поведение спектра самосопряженного дифференциального оператора второго порядка на оси. Коэффициенты данного оператора зависят от быстрой и медленной переменных и периодичны по быстрой переменной. Период осцилляций по быстрой переменной является малым параметром. Зависимость коэффициентов от быстрой переменной локализована, и на бесконечности коэффициенты перестают зависеть от быстрой переменной. В работе строятся асимптотические разложения собственных значений и собственных функций данного оператора. Показано, что помимо собственных значений, сходящихся к собственным значениям усредненного оператора при стремлении малого параметра к нулю, возмущенный оператор может также иметь собственное значение, сходящееся к границе непрерывного спектра. Получены необходимые и достаточные условия существования такого собственного значения.

Библиография: 22 названия.

Введение

Краевые задачи в ограниченных областях с быстро осциллирующими коэффициентами являются одним из классических предметов изучения теории усреднения (см., например, [1]–[6] и содержащийся в этих книгах обзор литературы). В частности, спектральные свойства таких сингулярно возмущенных задач представляют отдельный интерес (см., например, [3; гл. 4, § 10], [5; гл. XI], [4; гл. III]). Спектральные свойства дифференциальных операторов с быстро осциллирующими коэффициентами в неограниченных областях изучены в гораздо меньшей степени. Вместе с тем, подобные задачи возникают в различных приложениях. В качестве примера отметим задачи о фотонных кристаллах – материалах с высоконтрастной структурой (см., например, [7], [8]), а также полуклассическую модель динамики электронов в металлах (см., например, [9], [10]). Кроме того, спектры дифференциальных операторов в неограниченных областях имеют гораздо более богатую структуру по сравнению со спектрами операторов в ограниченных областях. Это, в частности, означает, что

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00037), при поддержке Европейской рамочной программы (MIF-CT-2006-006254), при поддержке стипендий “Marie Curie International Fellowship” в рамках 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-CT-2005-006254) и грантом Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным коллективам. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00138).

асимптотическое поведение спектров дифференциальных операторов с быстро осциллирующими коэффициентами в неограниченных областях может приводить к гораздо большему числу разнообразных эффектов, чем в случае ограниченной области.

Настоящая работа посвящена одному из возможных примеров сингулярно возмущенных дифференциальных операторов в неограниченной области. А именно, изучаются спектральные свойства одномерного самосопряженного дифференциального оператора второго порядка. Коэффициенты оператора зависят от быстрой и медленной переменных; зависимость от быстрой переменной носит периодический характер, а потому эти коэффициенты оказываются быстро осциллирующими. Основным свойством изучаемого оператора является тот факт, что быстрые осцилляции его коэффициентов сосредоточены на конечном отрезке и амплитуды этих осцилляций не являются малыми.

В работе доказывается сходимость спектра возмущенного оператора к спектру усредненного оператора и строятся асимптотические разложения для собственных значений и собственных функций.

Отдельно изучается случай существования собственного значения, поглощаемого в пределе непрерывным спектром. Установлены необходимые и достаточные условия существования такого собственного значения. В случае, когда оно существует, строятся асимптотические разложения этого собственного значения и соответствующей собственной функции. Отметим также, что в случае малых регулярных возмущений эффект возникновения собственных значений из края непрерывного спектра изучался в [11]–[15].

§ 1. Основные результаты

Пусть

$$H_\varepsilon := -\frac{d}{dx}A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

– оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Здесь $A(x, \xi), V(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ – вещественнозначные функции, 1-периодичные по ξ . Предполагается, что функции $(A(x, \xi) - 1), V(x, \xi)$ финитны по x для каждого значения ξ и функция A удовлетворяет равномерно по x и ξ неравенству

$$A(x, \xi) \geq c > 0. \quad (1.1)$$

Целью работы является исследование поведения спектра оператора H_ε при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Обозначим

$$A_0(x) := \frac{1}{\langle A^{-1}(x, \xi) \rangle}, \quad V_0(x) := \langle V(x, \cdot) \rangle,$$

где

$$\langle g(x, \cdot) \rangle := \int_0^1 g(x, \xi) d\xi.$$

Ясно, что $(A_0 - 1) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $A_0 \geq c > 0$. Здесь и всюду далее предполагается, что по крайней мере одна из функций $A(x, \xi)$ и $V(x, \xi)$ нетривиально зависит от ξ . Пусть

$$H_0 := -\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0$$

– оператор в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$.

Операторы H_0 и H_ε самосопряжены (см., например, [16; гл. V, § 3.6]). Так как функции $(A(x, x/\varepsilon) - 1)$, $V(x, x/\varepsilon)$, $(A_0(x) - 1)$, $V_0(x)$ финитны, то непрерывные спектры операторов H_0 и H_ε совпадают с полуосью $[0, +\infty)$, а точечные спектры операторов содержат не более чем конечное число отрицательных собственных значений (см., например, [17; гл. 1, § 2, п. 7, равенство (4), п. 12, теорема 31]). Ясно, что каждое из собственных значений операторов H_0 и H_ε простое.

Собственные значения оператора H_0 обозначим через $\lambda_0^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, где $N \geq 0$ (случай $N = 0$ соответствует пустому точечному спектру оператора H_0). Упорядочим эти собственные значения по убыванию: $0 > \lambda_0^{(1)} > \lambda_0^{(2)} > \dots > \lambda_0^{(N)}$. Соответствующие ортонормированные в $L_2(\mathbb{R})$ собственные функции обозначим через $\psi_0^{(n)}$.

В работе будет доказана

ТЕОРЕМА 1.1. *Справедлива оценка*

$$\|(H_\varepsilon - i)^{-1} - (H_0 - i)^{-1}\| \leq C\varepsilon, \quad (1.2)$$

где константа C не зависит от ε , а норма понимается как норма оператора в $L_2(\mathbb{R})$. Каждое собственное значение оператора H_ε сходится либо к собственному значению оператора H_0 , либо к нулю. Для любого собственного значения $\lambda_0^{(n)}$ оператора H_0 существует единственное собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \lambda_0^{(n)}$ оператора H_ε , сходящееся к нему при $\varepsilon \rightarrow +0$. Нормированную в $L_2(\mathbb{R})$ собственную функцию, соответствующую $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, можно выбрать так, что она будет сходиться к $\psi_0^{(n)}$ слабо в $W_2^1(\mathbb{R})$ и сильно в $L_2(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что в случае $V \equiv 0$, $A = A(\xi)$ оценка, аналогичная (1.2), была получена в [18] в многомерном случае.

Обозначим $V_1(x, \xi) := V(x, \xi) - V_0(x)$. Основным содержанием работы является доказательство следующих трех утверждений.

ТЕОРЕМА 1.2. *Собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, оператора H_ε имеют следующие асимптотические разложения:*

$$\lambda_\varepsilon^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i^{(n)}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_1^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} (\psi_0^{(n)}(x))^2 \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \left(\frac{A_0(x)}{A(x, \xi)} - 1 \right) \int_0^\xi V_1(x, t) dt d\xi \right) dx. \quad (1.4)$$

Если A не зависит от ξ , то

$$\lambda_1^{(n)} = 0, \quad \lambda_2^{(n)} = - \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 (\psi_0^{(n)}(x))^2 \left(\int_0^\xi V_1(x, t) dt + \int_0^1 t V_1(x, t) dt \right)^2 d\xi dx. \quad (1.5)$$

Если V не зависит от ξ , то

$$\lambda_1^{(n)} = 0, \quad \lambda_2^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} (V_0(x) - \lambda_0^{(n)}) \langle \Psi^2(x, \cdot) \rangle \left(\frac{d\psi_0^{(n)}(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (1.6)$$

$$\Psi(x, \xi) := A_0(x) \left(\int_0^\xi \frac{dt}{A(x, t)} + \int_0^1 \frac{t dt}{A(x, t)} \right) - \xi - \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

Остальные коэффициенты рядов (1.3) определяются согласно (5.21).

Спектральную точку нуль будем называть виртуальным уровнем оператора H_0 , если существует нетривиальное ограниченное решение уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0 \right) \psi_0^{(0)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Если такое решение существует, то оно единственно с точностью до умножения на константу. Пусть $\mathfrak{C}$ – множество всех конечных интервалов вещественной оси.

ТЕОРЕМА 1.3. Если нуль не является виртуальным уровнем оператора H_0 , то оператор H_ε не имеет собственных значений, сходящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Если нуль является виртуальным уровнем оператора H_0 , то оператор H_ε имеет не более одного собственного значения, сходящегося к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Если такое собственное значение существует, то соответствующая собственная функция сходится к нетривиальному решению уравнения (1.8) слабо в $W_2^1(Q)$ и сильно в $L_2(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$.

В случае существования собственного значения оператора H_ε , сходящегося к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, обозначим через $\lambda_\varepsilon^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть нуль является виртуальным уровнем оператора H_0 , соответствующее нетривиальное решение уравнения (1.8) нормировано условием

$$\left| \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_0^{(0)}(x) \right|^2 + \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_0^{(0)}(x) \right|^2 = 1, \quad (1.9)$$

k_m – первый отличный от нуля член последовательности $\{k_i\}_{i=1}^\infty$, члены которой определяются равенством

$$k_1 = - \int_{\mathbb{R}} (\psi_0^{(0)}(x))^2 \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \left(\frac{A_0(x)}{A(x, \xi)} - 1 \right) \int_0^\xi V_1(x, t) dt d\xi \right) dx \quad (1.10)$$

и формулами (6.12). Тогда в случае $k_m > 0$ оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ и его асимптотическое разложение имеет следующий вид:

$$\lambda_\varepsilon^{(0)} = - \left(\sum_{i=m}^\infty \varepsilon^i k_i \right)^2 = - \sum_{i=2m}^\infty \varepsilon^i \left(\sum_{j=m}^{2m-i} k_j k_{i-j} \right). \quad (1.11)$$

Если же $k_m < 0$, то оператор H_ε не имеет собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(0)}$. В частности, если A не зависит от ξ , то $k_1 = 0$,

$$k_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 (\psi_0^{(0)}(x))^2 \left(\int_0^\xi V_1(x, t) dt + \int_0^1 t V_1(x, t) dt \right)^2 d\xi dx > 0 \quad (1.12)$$

и собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ существует. Если V не зависит от ξ , то

$$k_1 = 0, \quad k_2 = - \int_{\mathbb{R}} V_0(x) \langle \Psi^2(x, \cdot) \rangle \left(\frac{d\psi_0^{(0)}(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (1.13)$$

где Ψ определяется формулой (1.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Так как функции $(A_0 - 1)$ и V_0 финитны, то при больших значениях x общим решением уравнения (1.8) является линейная функция. Требование ограниченности фактически означает, что функция $\psi_0^{(0)}$ является постоянной при достаточно больших x и в силу нетривиальности не обращается в нуль. Поэтому нормирующее условие (1.9) имеет смысл.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В работе также строятся асимптотики собственных функций, соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ при $n \geq 1$ (см. теорему 5.1) и $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ (см. теорему 6.1).

Отметим также, что в [19] исследовался частный случай рассматриваемой задачи в предположении, что $A \equiv 1$, $V_0 \equiv 0$. В этом случае достаточно простой заменой искомой функции удавалось свести исходную задачу к случаю регулярного возмущения, изученному в [15]. В общем случае, рассматриваемом в настоящей работе, подобную редукцию провести не удастся, а потому используется иной подход.

Структура работы следующая. В §2 доказывается теорема 1.1, а также вспомогательное утверждение, которое впоследствии используется при доказательстве теоремы 1.2. В §3 доказывается теорема 1.3. Четвертый параграф посвящен вспомогательным утверждениям, необходимым для доказательства теоремы 1.4. В §§5, 6 доказываются теоремы 1.2 и 1.4 соответственно.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Для доказательства теоремы мы воспользуемся методом работы [18]. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ – произвольная функция, $u_0 := (H_0 - i)^{-1}f$, $u_\varepsilon := (H_\varepsilon - i)^{-1}f$. Операторы H_0 , H_ε самосопряжены, а потому функции u_0 , u_ε определены корректно и верна оценка

$$\|u_0\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (2.1)$$

Пусть $[x_0, x_1]$ – минимальный отрезок на вещественной оси, содержащий носители функции V_0 и функций $V_1(\cdot, \xi)$, $(A(\cdot, \xi) - 1)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Через $\mathcal{U}$ обозначим множество функций $u = u(x, \xi)$ из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 1-периодических по ξ и таких, что для всех ξ выполнено вложение $\text{supp } u(\cdot, \xi) \subseteq [x_0, x_1]$. Нетрудно

проверить, что функция Ψ , определенная в (1.7), принадлежит $\mathcal{V}$, удовлетворяет равенствам

$$\langle \Psi(x, \cdot) \rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{A_0}{A} - 1 \quad (2.3)$$

и является 1-периодическим по ξ решением уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi = \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Обозначим

$$u_1(x, \xi) := \Psi(x, \xi) \frac{d}{dx} u_0(x), \quad (2.5)$$

$$\widehat{u}_\varepsilon(x) := u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$f_\varepsilon := \left(-\frac{d}{dx} A \frac{d}{dx} + V - i\right)(\widehat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon).$$

Используя соотношения (2.2)–(2.4), прямыми вычислениями проверяем:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= \left(-\frac{d}{dx} A \frac{d}{dx} + V - i\right) \widehat{u}_\varepsilon - f \\ &= \left(-\frac{d}{dx} A \frac{d}{dx} + V - i\right) \widehat{u}_\varepsilon - \left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0 - i\right) u_0 \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} A \frac{du_0}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{du_0}{dx} + \frac{d}{dx} A_0 \frac{du_0}{dx} - \varepsilon \frac{d}{dx} A \frac{\partial u_1}{\partial x} + V_1 u_0 - i \varepsilon u_1 \\ &= -\varepsilon \frac{d}{dx} A \frac{\partial u_1}{\partial x} + V_1 u_0 - i \varepsilon u_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $A = A(x, x/\varepsilon)$, $\Psi = \Psi(x, x/\varepsilon)$, $u_1 = u_1(x, x/\varepsilon)$. Символами $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial \xi$ мы обозначаем частные производные таких функций, рассматриваемых как функции независимых переменных x и $\xi = x/\varepsilon$.

Из (2.5), (1.7), гладкости функции A и оценки (2.1) следует, что

$$\|u_1\|_{L_2(\mathbb{R})} + \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (2.7)$$

где $u_1 = u_1(x, x/\varepsilon)$, а константа C не зависит от ε .

Из определения $V_1(x, \xi)$ вытекает, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\langle V_1(x, \cdot) \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что функция

$$\widetilde{V}_1(x, \xi) := \int_0^\xi V_1(x, t) dt$$

принадлежит $\mathcal{V}$ и удовлетворяет оценке

$$\left| \tilde{V}_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| + \left| \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq C,$$

где константа C не зависит от ε и $x \in \mathbb{R}$. Используя эту оценку, (2.1) и определение функции $\tilde{V}_1$, легко убедиться, что

$$V_1 u_0 = \varepsilon \frac{d}{dx} \tilde{V}_1 u_0 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}_1 u_0, \quad \|\tilde{V}_1 u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} + \left\| \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x} u_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $V_1 = V_1(x, x/\varepsilon)$, $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(x, x/\varepsilon)$, а константа C не зависит от ε . Из последних соотношений, равенств (2.5), (2.6) и оценки (2.7) следует, что функция f_ε представима в виде

$$f_\varepsilon = \varepsilon \frac{df_\varepsilon^{(1)}}{dx} + \varepsilon f_\varepsilon^{(2)}, \quad f_\varepsilon^{(1)} := -A \frac{\partial u_1}{\partial x} + \tilde{V}_1 u_0, \quad f_\varepsilon^{(2)} := -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}_1 u_0 - i u_1,$$

где функции $f_\varepsilon^{(i)} \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяют равномерным по ε оценкам

$$\|f_\varepsilon^{(i)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Таким образом, функция $\tilde{u}_\varepsilon := \hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon \in W_2^1(\mathbb{R})$ является обобщенным решением уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} A \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} + V \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - i \right) \tilde{u}_\varepsilon(x) = \varepsilon \frac{d}{dx} f_\varepsilon^{(1)}(x) + \varepsilon f_\varepsilon^{(2)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из определения обобщенного решения следует, что

$$\begin{aligned} & \left(A \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{dx}, \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{dx} \right)_{L_2(\mathbb{R})} + (V \tilde{u}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})} - i \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ &= -\varepsilon \left(f_\varepsilon^{(1)}, \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{dx} \right)_{L_2(\mathbb{R})} + \varepsilon (f_\varepsilon^{(2)}, \tilde{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Вычисляя мнимую и реальную части этого равенства и используя (2.9), получаем равномерные по ε оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\mathbb{R})}, \\ \left\| \frac{d\tilde{u}_\varepsilon}{dx} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\mathbb{R})} + C \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

С учетом этой оценки и (2.7) получаем

$$\begin{aligned} & \|(H_\varepsilon - i)^{-1} f - (H_0 - i)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ & \leq \|u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|\hat{u}_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R})} + \varepsilon \|u_1\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Оценка (1.2) доказана. Из этой оценки и теорем VIII.19, VIII.23, VIII.24 монографии [20; гл. VIII, § 7] следует справедливость остальных утверждений теоремы, кроме слабой сходимости собственных функций в $W_2^1(\mathbb{R})$.

Интегрируя по частям левую часть равенства $(H_\varepsilon \psi_\varepsilon^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} = \lambda_\varepsilon^{(n)}$, получаем, что собственные функции $\psi_\varepsilon^{(n)}$ удовлетворяют равенству

$$\left(A \frac{d\psi_\varepsilon^{(n)}}{dx}, \frac{d\psi_\varepsilon^{(n)}}{dx} \right)_{L_2(\mathbb{R})} + (V\psi_\varepsilon^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} = \lambda_\varepsilon^{(n)}.$$

Отсюда в силу сходимости собственных значений следует, что функции $\psi_\varepsilon^{(n)}$ ограничены равномерно по ε в норме $W_2^1(\mathbb{R})$. Тогда из слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве и сильной сходимости собственных функций в $L_0(\mathbb{R})$ вытекает слабая сходимость собственных функций в $W_2^1(\mathbb{R})$. Теорема 1.1 доказана.

Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится вспомогательная лемма, которую удобно доказать в настоящем параграфе.

ЛЕММА 2.1. *Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ при λ , близких к $\lambda_0^{(n)}$, справедливы представление и равномерная по ε и λ оценка*

$$(H_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = -\frac{\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}}{\lambda - \lambda_\varepsilon^{(n)}} (f, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} + \tilde{u}(x, \lambda, \varepsilon),$$

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^1(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (2.10)$$

где $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}$ – нормированная в $L_2(\mathbb{R})$ собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_\varepsilon^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1.1 следует, что при достаточно малых ε собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ отделено от остального спектра оператора H_ε . Пусть M_ε – собственное подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, соответствующее $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $M_\varepsilon^\perp$ – ортогональное дополнение к M_ε в $L_2(\mathbb{R})$, $H_\varepsilon^{(n)}$ – сужение оператора H_ε на $M_\varepsilon^\perp$. Согласно [16; гл. III, § 6.4, теорема 6.17], [16; гл. V, § 3.5] и формулам (6.30), (6.32) с $D = 0$, (6.33), (6.34) из [16; гл. III, § 6.5] оператор $H_\varepsilon^{(n)}$ является оператором в $M_\varepsilon^\perp$, $\sigma(H_\varepsilon^{(n)}) = \sigma(H_\varepsilon) \setminus \{\lambda_\varepsilon^{(n)}\}$, резольвента $(H_\varepsilon^{(n)} - \lambda)^{-1}$ ограничена равномерно по всем λ , достаточно близким к $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, и справедливы требуемое представление и равенство:

$$(H_\varepsilon^{(n)} - \lambda)^{-1} \tilde{f} = \tilde{u} \in M_\varepsilon^\perp, \quad \tilde{f} := f - (f, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} \in M_\varepsilon^\perp.$$

Отсюда и из [16; гл. V, § 3.5, формула (3.16)] получаем

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{\|\tilde{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\text{dist}(\lambda, \sigma(H_\varepsilon) \setminus \{\lambda_\varepsilon^{(n)}\})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad (2.11)$$

где константа C не зависит от ε . Из равенств

$$\begin{aligned} (\tilde{f}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R})} &= ((H_\varepsilon^{(n)} - \lambda)\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \left(A \frac{d\tilde{u}}{dx}, \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)_{L_2(\mathbb{R})} + ((V_0 + V_1)\tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R})} - \lambda \|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

и (1.1) следует равномерная по ε оценка

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^1(\mathbb{R})} \leq C(\|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|\tilde{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}) \leq C(\|\tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}).$$

Из последней оценки и (2.11) вытекает утверждение леммы.

§ 3. Доказательство теоремы 1.3

Напомним, что $[x_0, x_1]$ – минимальный отрезок на вещественной оси, содержащий носители функции V_0 и функций $V_1(\cdot, \xi)$, $(A(\cdot, \xi) - 1)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\text{supp}(A_0 - 1) \subseteq [x_0, x_1]$.

ЛЕММА 3.1. *Если $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ – собственное значение оператора H_ε , а $\psi_\varepsilon^{(0)}$ – соответствующая собственная функция, то $\psi_\varepsilon^{(0)}$ является решением краевой задачи*

$$\left(-\frac{d}{dx} A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi_\varepsilon^{(0)} = -k_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{(0)}, \quad x \in (x_0, x_1), \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - k_\varepsilon\right) \psi_\varepsilon^{(0)} = 0, \quad x = x_0, \quad \left(\frac{d}{dx} + k_\varepsilon\right) \psi_\varepsilon^{(0)} = 0, \quad x = x_1, \quad (3.2)$$

где $k_\varepsilon = \sqrt{-\lambda_\varepsilon^{(0)}}$.

Пусть $\psi_\varepsilon^{(0)} \in W_2^2(x_0, x_1)$ – нетривиальное решение краевой задачи (3.1), (3.2). Тогда

$$\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) \neq 0, \quad \psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) \neq 0. \quad (3.3)$$

Число $-k_\varepsilon^2$ является собственным значением оператора H_ε , если и только если $\text{Re } k_\varepsilon > 0$. Соответствующая собственная функция в этом случае является продолжением функции $\psi_\varepsilon^{(0)}$ согласно равенствам

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(0)}(x) &= \psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) e^{k_\varepsilon(x-x_0)}, & x \leq x_0, \\ \psi_\varepsilon^{(0)}(x) &= \psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) e^{-k_\varepsilon(x-x_1)}, & x \geq x_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ – собственное значение оператора H_ε , то функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$ является решением уравнения (3.1), удовлетворяющим равенствам (3.4). В силу последних равенств функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$ удовлетворяет граничным условиям (3.2).

Пусть $\psi_\varepsilon^{(0)} \in W_2^2(x_0, x_1)$ – нетривиальное решение краевой задачи (3.1), (3.2). Тогда $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) \neq 0$, так как предположение $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) = 0$ в силу (3.2) и единственности решения задачи Коши приводит к равенствам

$$\frac{d\psi_\varepsilon^{(0)}}{dx}(x_0) = 0, \quad \psi_\varepsilon^{(0)} \equiv 0.$$

Аналогично доказывается, что $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) \neq 0$. Нетрудно проверить, что функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$, продолженная согласно равенствам (3.4), принадлежит $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ и является решением уравнения

$$\left(-\frac{d}{dx} A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi_\varepsilon^{(0)} = -k_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{(0)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Указанное продолжение функции $\psi_\varepsilon^{(0)}$ вновь обозначим через $\psi_\varepsilon^{(0)}$. Так как $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) \neq 0$, $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) \neq 0$, то из (3.4) получаем, что $\psi_\varepsilon^{(0)} \in W_2^2(\mathbb{R})$, если и только если $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$. Следовательно, только в этом случае выполнено уравнение $H_\varepsilon \psi_\varepsilon^{(0)} = -k_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon^{(0)}$, и в силу соотношения $\psi_\varepsilon^{(0)} \not\equiv 0$ число $-k_\varepsilon^2$ является собственным значением оператора H_ε , а $\psi_\varepsilon^{(0)}$ – соответствующей собственной функцией.

Таким образом, задача на собственные значения для оператора H_ε сведена к задаче (3.1), (3.2).

Числа k_ε , при которых краевая задача (3.1), (3.2) имеет нетривиальное решение, будем называть собственными частотами этой задачи, а соответствующие нетривиальные решения – собственными функциями. Частоту будем называть простой, если ей соответствует только одна собственная функция.

Отметим, что если нуль – виртуальный уровень оператора H_0 , то соответствующее нетривиальное решение уравнения (1.8) удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned} \psi_0^{(0)}(x) &= \psi_0^{(0)}(x_0), & x &\leq x_0, \\ \psi_0^{(0)}(x) &= \psi_0^{(0)}(x_1), & x &\geq x_1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

которые эквивалентны краевым условиям

$$\frac{d\psi_0^{(0)}}{dx} = 0, \quad x = x_0, x_1. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.2. *Если существует собственная частота задачи (3.1), (3.2), сходящаяся к нулю, то нуль – виртуальный уровень оператора H_0 . Соответствующую собственную функцию задачи (3.1), (3.2) можно выбрать так, что она будет сходиться к нетривиальному ограниченному решению уравнения (1.8) слабо в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильно в $L_2(x_0, x_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормируем собственную функцию $\psi_\varepsilon^{(0)}$ в $L_2(x_0, x_1)$. Домножая (3.1) на $\psi_\varepsilon^{(0)}$ и интегрируя по частям, в силу граничных условий (3.2) получаем равенство

$$\begin{aligned} &\left(A \frac{d\psi_\varepsilon^{(0)}}{dx}, \frac{d\psi_\varepsilon^{(0)}}{dx} \right)_{L_2(x_0, x_1)} + (V\psi_\varepsilon^{(0)}, \psi_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)} \\ &+ k_\varepsilon (|\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0)|^2 + |\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1)|^2) + k_\varepsilon^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из равномерной по ε оценки

$$|\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0)|^2 + |\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1)|^2 \leq C \|\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{W_2^1(x_0, x_1)}^2$$

следует, что функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$ ограничена в $W_2^1(x_0, x_1)$ равномерно по ε . Используя этот факт и повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 4.1 в [2; гл. V, § 4], можно показать, что существуют последовательность $\varepsilon_p \rightarrow +0$ и функция $\psi_0^{(0)}$, являющаяся решением уравнения в (1.8) на интервале (x_0, x_1) и удовлетворяющая краевым условиям (3.6), такая, что

$$\psi_{\varepsilon_p}^{(0)} \rightarrow \psi_0^{(0)}, \quad \varepsilon_p \rightarrow +0,$$

слабо в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильно в $L_2(x_0, x_1)$. Отсюда и из нормированности функции $\psi_\varepsilon^{(0)}$ вытекает, что $\psi_0^{(0)} \neq 0$.

ЛЕММА 3.3. *Если существует собственная частота задачи (3.1), (3.2), сходящаяся к нулю, то она вещественная, единственная и простая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем единственность собственной частоты, сходящейся к нулю. Пусть $k_{\varepsilon,1} \neq k_{\varepsilon,2}$ – две собственные частоты задачи (3.1), (3.2), сходящиеся к нулю на некоторой последовательности $\varepsilon_p \rightarrow +0$, а $\psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}, \psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)}$ – соответствующие собственные функции, нормированные в $L_2(x_0, x_1)$. Так как собственные частоты вещественны, то соответствующие собственные функции можно выбрать вещественными. В силу леммы 3.2 верны следующие сходимости: $\psi_{\varepsilon_p,i} \rightarrow \tilde{\psi}_0^{(0)}$ слабо в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильно в $L_2(x_0, x_1)$, $\psi_{\varepsilon_p,i}^{(0)}(x_0) \rightarrow \tilde{\psi}_0^{(0)}(x_0)$, $\psi_{\varepsilon_p,i}^{(0)}(x_1) \rightarrow \tilde{\psi}_0^{(0)}(x_1)$. Здесь $\tilde{\psi}_0^{(0)}$ – нетривиальное ограниченное решение уравнения (1.8), причем $\|\tilde{\psi}_0^{(0)}\|_{L_2(x_0, x_1)} = 1$. Умножим уравнение (3.1) для $\psi_{\varepsilon_p,1}$ на $\psi_{\varepsilon_p,2}$ и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} (k_{\varepsilon_p,1} - k_{\varepsilon_p,2})(\psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}(x_0)\psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)}(x_0) + \psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}(x_1)\psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)}(x_1)) \\ = (k_{\varepsilon_p,2}^2 - k_{\varepsilon_p,1}^2)(\psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}, \psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}. \end{aligned}$$

Так как $k_{\varepsilon_p,1} \neq k_{\varepsilon_p,2}$, то

$$\psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}(x_0)\psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)}(x_0) + \psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}(x_1)\psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)}(x_1) = -(k_{\varepsilon_p,2} + k_{\varepsilon_p,1})(\psi_{\varepsilon_p,1}^{(0)}, \psi_{\varepsilon_p,2}^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon_p \rightarrow +0$, в силу леммы 3.2 получаем, что $\tilde{\psi}_0^{(0)}(x_0) = \tilde{\psi}_0^{(0)}(x_1) = 0$. Как было отмечено в замечании 1.2, последние равенства невозможны.

Собственная частота k_ε вещественная, так как в противном случае число $\bar{k}_\varepsilon \neq k_\varepsilon$ также является собственной частотой задачи (3.1), (3.2), что противоречит единственности k_ε .

Собственная частота, сходящаяся к нулю, простая, так как в противном случае одну из соответствующих собственных функций можно выбрать так, что она будет обращаться в нуль в точке x_0 . Последнее противоречит неравенствам (3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. В силу лемм 3.1, 3.2 необходимым условием существования у оператора H_ε собственного значения, сходящегося к нулю, является существование виртуального уровня в нуле у оператора H_0 .

В силу лемм 3.1, 3.3 если существует собственное значение оператора H_ε , сходящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, то оно единственное. Согласно лемме 3.2 верна сходимость $\psi_\varepsilon^{(0)} \rightarrow \psi_0^{(0)}$, слабая в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильная в $L_2(x_0, x_1)$. Следовательно, $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) \rightarrow \psi_0^{(0)}(x_0)$, $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) \rightarrow \psi_0^{(0)}(x_1)$. Тогда требуемая слабая сходимость для собственной функции в $W_2^1(Q)$ и сильная в $L_2(Q)$ для всех $Q \in \mathcal{C}$ следует из (3.5) и (3.4).

§ 4. Вспомогательные утверждения

Настоящий параграф посвящен вспомогательным утверждениям, необходимым для доказательства теоремы 1.4. Вначале сформулируем необходимое и достаточное условие существования собственного значения оператора H_ε , сходящегося к нулю, которое является следствием лемм 3.1–3.3.

ЛЕММА 4.1. *Пусть нуль является виртуальным уровнем оператора H_0 , а $k_\varepsilon \rightarrow 0$ – собственная частота задачи (3.1), (3.2). Тогда оператор H_ε имеет собственное значение, сходящееся к нулю, если и только если $k_\varepsilon > 0$. В этом случае собственное значение дается равенством $\lambda_\varepsilon^{(0)} = -k_\varepsilon^2$.*

Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A \frac{d}{dx} + V\right)u &= -k^2 u + f, & x \in (x_0, x_1), \\ \left(\frac{d}{dx} - k\right)u &= 0, & x = x_0, \quad \left(\frac{d}{dx} + k\right)u = 0, & x = x_1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0\right)u &= -k^2 u + f, & x \in (x_0, x_1), \\ \left(\frac{d}{dx} - k\right)u &= 0, & x = x_0, \quad \left(\frac{d}{dx} + k\right)u = 0, & x = x_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $A = A(x, x/\varepsilon)$, $V = V(x, x/\varepsilon)$, $f \in L_2(x_0, x_1)$, k – произвольный комплексный параметр. Решения $u \in W_2^2(x_0, x_1)$ краевых задач (4.1), (4.2) удовлетворяют интегральным тождествам

$$\begin{aligned} \left(A \frac{du}{dx}, \frac{d\varphi}{dx}\right)_{L_2(x_0, x_1)} + (Vu, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} + k(u(x_0)\bar{\varphi}(x_0) + u(x_1)\bar{\varphi}(x_1)) \\ + k^2(u, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} = (f, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \left(A_0 \frac{du}{dx}, \frac{d\varphi}{dx}\right)_{L_2(x_0, x_1)} + (V_0 u, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} + k(u(x_0)\bar{\varphi}(x_0) + u(x_1)\bar{\varphi}(x_1)) \\ + k^2(u, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} = (f, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

соответственно для всех $\varphi \in W_2^1(x_0, x_1)$.

В гильбертовом пространстве $W_2^1(x_0, x_1)$ введем два эквивалентных скалярных произведения

$$\begin{aligned} (u_1, u_2)_A &:= \left(A \frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}\right)_{L_2(x_0, x_1)} + (u_1, u_2)_{L_2(x_0, x_1)}, \\ (u_1, u_2)_{A_0} &:= \left(A_0 \frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}\right)_{L_2(x_0, x_1)} + (u_1, u_2)_{L_2(x_0, x_1)}. \end{aligned}$$

Известно (см., например, [21; гл. IV, § 1, лемма 1']), что существуют линейные ограниченные операторы $T_1(\varepsilon)$, $T_1(0): L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^1(x_0, x_1)$ такие, что

$$(u, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} = (T_1(\varepsilon)u, \varphi)_A, \quad (u, \varphi)_{L_2(x_0, x_1)} = (T_1(0)u, \varphi)_{A_0} \quad (4.5)$$

для всех $\varphi \in W_2^1(x_0, x_1)$. Операторы $T_1(\varepsilon)$, $T_1(0)$ компактны как операторы в $W_2^1(x_0, x_1)$. Аналогично доказательству леммы 1' в [21; гл. IV, § 1] нетрудно проверить, что существуют линейные компактные операторы в $W_2^1(x_0, x_1)$, удовлетворяющие соотношениям

$$(T_2(\varepsilon)u, \varphi)_A = (T_2(0)u, \varphi)_{A_0} = u(x_0)\bar{\varphi}(x_0) + u(x_1)\bar{\varphi}(x_1)$$

для всех $\varphi \in W_2^1(x_0, x_1)$. С учетом данных равенств и (4.5) тождество (4.3) можно переписать в виде

$$(u, \varphi)_A + (T_1(\varepsilon)Vu, \varphi)_A + k(T_2(\varepsilon)u, \varphi)_A + (k^2 - 1)(T_1(\varepsilon)u, \varphi)_A = (T_1(\varepsilon)f, \varphi)_A,$$

что приводит к следующему операторному уравнению в $W_2^1(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned} (I + T_3(\varepsilon, k))u &= T_1(\varepsilon)f, \\ T_3(\varepsilon, k) &:= T_1(\varepsilon)V + kT_2(\varepsilon) + (k^2 - 1)T_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где I – единичный оператор, V – оператор умножения на $V(x, x/\varepsilon)$.

Аналогично приведенным выше рассуждениям нетрудно показать, что уравнение (4.4) эквивалентно операторному уравнению в $W_2^1(x_0, x_1)$

$$\begin{aligned} (I + T_3(0, k))u &= T_1(0)f, \\ T_3(0, k) &:= T_1(0)V_0 + kT_2(0) + (k^2 - 1)T_1(0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где V_0 – оператор умножения на $V_0(x)$.

Операторы $T_3(\varepsilon, k), T_3(0, k): W_2^1(x_0, x_1) \rightarrow W_2^1(x_0, x_1)$ компактны и ограничено голоморфны по k . Пусть δ – малое положительное число. Тогда для $k = \delta(1 + i)$ операторы $(I + T_3(\varepsilon, k))$ и $(I + T_3(0, k))$ ограничено обратимы. Данное утверждение следует из компактности операторов $T_3(\varepsilon, k)$ и $T_3(0, k)$, определения операторов $T_1(\varepsilon)$ и $T_1(0)$ и отсутствия нетривиальных решений уравнений (4.6), (4.7) при $f = 0$. Наличие нетривиальных решений означало бы, что $\lambda = -\delta^2(1 + i)^2$ – собственное значение оператора H_ε или H_0 , так как $\operatorname{Re} \delta(1 + i) > 0$. Последнее противоречит вещественности спектров этих операторов.

Указанные свойства операторов $T_3(\varepsilon, k)$ и $T_3(0, k)$ позволяют применить к ним теорему 7.1 из [2; гл. XV, § 7], согласно которой операторы $(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1}$ и $(I + T_3(0, k))^{-1}$ ограничено мероморфны по k в $W_2^1(x_0, x_1)$. Следовательно, операторы $(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1}T_1(\varepsilon)$ и $(I + T_3(0, k))^{-1}T_1(0)$ ограничено мероморфны по k как операторы из $L_2(x_0, x_1)$ в $W_2^1(x_0, x_1)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mathfrak{K}$ – произвольный компакт в комплексной плоскости, не содержащий собственных частот задачи

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0\right)\psi &= -k^2\psi, & x \in (x_0, x_1), \\ \left(\frac{d}{dx} - k\right)\psi &= 0, & x = x_0, & \left(\frac{d}{dx} + k\right)\psi = 0, & x = x_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда для достаточно малых ε и $k \in \mathfrak{K}$ определен оператор

$$(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon): L_2(x_0, x_1) \rightarrow W_2^1(x_0, x_1),$$

ограниченный равномерно по ε и $k \in \mathfrak{K}$. Верна равномерная по $k \in \mathfrak{K}$ сходимость

$$(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon) \rightarrow (I + T_3(0, k))^{-1} T_1(0), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где операторы рассматриваются как операторы в $L_2(x_0, x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале проверим, что при $k \in \mathfrak{K}$ и достаточно малых ε существует единственное решение задачи (4.2). Ввиду компактности оператора $T_3(\varepsilon, k)$ для этого достаточно показать отсутствие нетривиальных решений данной задачи в случае $f = 0$, $k \in \mathfrak{K}$. В свою очередь, для этого достаточно показать справедливость априорной оценки для решения задачи (4.1)

$$\|u\|_{W_2^1(x_0, x_1)} \leq C \|f\|_{L_2(x_0, x_1)},$$

равномерной по $k \in \mathfrak{K}$ и малым ε . Докажем эту оценку от противного.

Пусть существуют последовательности $\varepsilon_p \rightarrow +0$, $k_p \in \mathfrak{K}$, $f^{(p)} \in L_2(x_0, x_1)$ и функции $u^{(p)} \in W_2^1(x_0, x_1)$, являющиеся решениями задачи (4.1) с $f = f^{(p)}$, такие, что

$$\|u^{(p)}\|_{W_2^1(x_0, x_1)} \geq p \|f^{(p)}\|_{L_2(x_0, x_1)}. \quad (4.9)$$

Без ограничения общности считаем, что

$$\|u^{(p)}\|_{L_2(x_0, x_1)} = 1. \quad (4.10)$$

Умножая уравнение в (4.1) на $u^{(p)}$ и интегрируя по частям, нетрудно получить априорную оценку

$$\|u^{(p)}\|_{W_2^1(x_0, x_1)} \leq C (\|f^{(p)}\|_{L_2(x_0, x_1)} + \|u^{(p)}\|_{L_2(x_0, x_1)}),$$

равномерную по $k \in \mathfrak{K}$ и p . Отсюда и из (4.9), (4.10) следует, что

$$\|u^{(p)}\|_{W_2^1(x_0, x_1)} \leq C, \quad \|f^{(p)}\|_{L_2(x_0, x_1)} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow +\infty,$$

где константа C не зависит от p . Без ограничения общности считаем, что $k_p \rightarrow k_* \in \mathfrak{K}$, $p \rightarrow +\infty$. Выделяя при необходимости подпоследовательность, аналогично доказательству теоремы 4.1 в [2; гл. V, § 4] можно показать, что существует функция $u_* \in W_2^1(x_0, x_1)$, являющаяся решением задачи (4.2) с $f = 0$, $k = k_*$, такая, что $u^{(p)}$ сходится к u_* слабо в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильно в $L_2(x_0, x_1)$. Из нормировки (4.10) также следует, что функция u_* не равна тождественно нулю. Отсюда вытекает, что $k_* \in \mathfrak{K}$ является собственной частотой задачи (4.8), что противоречит определению множества $\mathfrak{K}$.

Как и в доказательстве леммы 3.2, аналогично доказательству теоремы 5.1 в [2; гл. V, § 5] можно показать, что для любого семейства функций $f_\varepsilon \in L_2(x_0, x_1)$, при $\varepsilon \rightarrow +0$ слабо сходящегося к f , справедлива сильная сходимость в $L_2(x_0, x_1)$

$$(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon) f_\varepsilon \rightarrow (I + T_3(0, k))^{-1} T_1(0) f, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

равномерная по $k \in \mathfrak{K}$. Оператор $T_3(0, k)$ компактен и голоморфен по $k \in \mathfrak{K}$, а потому

$$(I + T_3(0, k))^{-1} T_1(0) f_\varepsilon \rightarrow (I + T_3(0, k))^{-1} T_1(0) f$$

сильно в $L_2(x_0, x_1)$ равномерно по $k \in \mathfrak{K}$. Из последних двух сходимостей теперь легко вывести равномерную по $k \in \mathfrak{K}$ сходимость для оператора $(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon)$.

Множество полюсов оператора $(I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon)$ совпадает с множеством собственных частот задачи (3.1), (3.2). Кроме того, отметим, что оператор $(I + T_3(0, k))^{-1} T_1(0)$ имеет полюс в нуле, если и только если нуль является виртуальным уровнем оператора H_0 . Учитывая эти факты и лемму 4.2, аналогично доказательству пункта с) теоремы 7.2 из [2; гл. XV, § 7], легко установить следующее утверждение.

ЛЕММА 4.3. *Пусть нуль – виртуальный уровень оператора H_0 . Тогда существует собственная частота задачи (3.1), (3.2), сходящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.*

Пусть нуль – виртуальный уровень оператора H_0 . Нетривиальное решение уравнения (1.8) нормируем согласно (1.9), что с учетом (3.5) эквивалентно следующей нормировке:

$$|\psi_0^{(0)}(x_0)|^2 + |\psi_0^{(0)}(x_1)|^2 = 1. \quad (4.11)$$

Пусть $k_\varepsilon \rightarrow 0$ – собственная частота задачи (3.1), (3.2), а $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$ – соответствующая собственная функция, сходящаяся к собственной функции оператора $H_0^{(0)}$, соответствующей нулевому собственному значению и нормированной условием (1.9). Согласно лемме 3.2 верна сходимость

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)} \rightarrow \psi_0^{(0)}, \quad (4.12)$$

слабая в $W_2^1(x_0, x_1)$ и сильная в $L_2(x_0, x_1)$. Отсюда следует, что $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_0) \rightarrow \psi_0^{(0)}(x_0)$, $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_1) \rightarrow \psi_0^{(0)}(x_1)$. С учетом условия (4.11), равенств (3.5) и неравенств (3.3) нормируем функцию $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$ следующим образом:

$$|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_0)|^2 + |\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_1)|^2 = 1.$$

Ясно, что данная нормировка не нарушает сходимости (4.12).

ЛЕММА 4.4. *Пусть нуль – виртуальный уровень оператора H_0 . Тогда при значениях k , близких к нулю, для решения задачи (4.1) справедливо представление*

$$u = \frac{T_6(\varepsilon)f}{k - k_\varepsilon} \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)} + \tilde{u}. \quad (4.13)$$

Здесь линейный функционал $T_6(\varepsilon): L_2(x_0, x_1) \rightarrow \mathbb{C}$ ограничен равномерно по ε , а функция $\tilde{u} = \tilde{u}(x, \varepsilon, k)$ удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^1(x_0, x_1)} \leq C \|f\|_{L_2(x_0, x_1)}, \quad (4.14)$$

где константа C не зависит от ε и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – решение задачи (4.1). Тогда

$$u = (I + T_3(\varepsilon, k))^{-1} T_1(\varepsilon) f = \frac{T_6(\varepsilon) f}{(k - k_\varepsilon)^m} \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)} + O((k - k_\varepsilon)^{-m+1}), \quad (4.15)$$

где $T_6(\varepsilon): L_2(x_0, x_1) \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторый линейный функционал, не равный тождественно нулю. Подставляя $\varphi = \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$ в интегральное уравнение (4.3) и учитывая, что согласно лемме 3.3 полюс k_ε веществен, получаем

$$\begin{aligned} (k - k_\varepsilon) \left(u(x_0) \overline{\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_0)} + u(x_1) \overline{\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}(x_1)} \right) + (k^2 - k_\varepsilon^2) (u, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)} \\ = (f, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда равенство (4.15), получаем, что

$$\frac{T_6(\varepsilon) f}{(k - k_\varepsilon)^{m-1}} (1 + 2k_\varepsilon \|\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{L_2(x_0, x_1)}^2) + O((k - k_\varepsilon)^{-m+2}) = (f, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}.$$

Так как функционал $T_6(\varepsilon)$ не равен тождественно нулю, а сумма

$$1 + 2k_\varepsilon \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}\|_{L_2(x_0, x_1)}^2$$

стремится к единице в силу (4.12), то $m = 1$ и

$$T_6(\varepsilon) f = \frac{(f, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}}{1 + 2k_\varepsilon \|\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{L_2(x_0, x_1)}^2}.$$

Следовательно, справедливо представление (4.13), где $T_6(\varepsilon)$ удовлетворяет утверждению леммы, а функция $\tilde{u}$ голоморфна по k в норме $W_2^1(x_0, x_1)$.

В силу леммы 4.2 и представления (4.13) при достаточно малом δ справедлива оценка (4.14), равномерная по ε и $|k| = \delta$. Отсюда в силу голоморфности функции $\tilde{u}$ и принципа максимума модуля для голоморфных функций следует равномерная по $k \leq \delta$ оценка (4.14).

§ 5. Доказательство теоремы 1.2

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.2, построив асимптотические разложения собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, оператора H_ε . Мы также построим асимптотические разложения соответствующих собственных функций. Вначале асимптотические разложения будут построены формально, а затем будет проведено строгое обоснование.

Для формального построения асимптотических разложений собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующих собственных функций $\psi_\varepsilon^{(n)}$ (не нормированных в $L_2(\mathbb{R})$) мы применим метод двухмасштабных асимптотических разложений [6], [1]–[3]. Асимптотику собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ и соответствующей собственной функции будем строить в виде рядов (1.3) и

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \psi_0^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \psi_i^{(n)}(x, \xi), \quad (5.1)$$

где $\xi = x/\varepsilon$. Всюду ниже для краткости мы будем опускать в обозначениях верхний индекс (n) . Целью формального построения является определение коэффициентов рядов (1.3), (5.1).

Следуя методу двухмасштабных асимптотических разложений, функции ψ_i будем предполагать 1-периодическими по ξ . Так как собственная функция является элементом пространства $W_2^2(\mathbb{R})$, то дополнительно потребуем выполнения условий $\psi_i(x, x/\varepsilon) \in W_2^2(\mathbb{R})$.

Собственное значение λ_ε и собственная функция ψ_ε удовлетворяют уравнению

$$\left(-\frac{d}{dx} A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} + V_0(x) + V_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подставим ряды (1.3), (5.1) в это уравнение и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i+2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} \psi_i \\ &\quad - (V_0 + V_1) \psi_i + \sum_{j=0}^i \lambda_j \psi_{i-j}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$i \geq -1, \quad A = A(x, \xi), \quad V_1 = V_1(x, \xi), \quad V_0 = V_0(x), \quad \psi_{-1} \equiv 0.$$

Для решения этих уравнений нам понадобятся вспомогательные леммы и дополнительные обозначения.

При $i = -1$ уравнение (5.2) принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_1 = \frac{d\psi_{0,0}}{dx} \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.3)$$

где $\psi_{0,0} := \psi_0$. Из уравнения (2.4) вытекает, что 1-периодическое по ξ решение уравнения (5.3) имеет вид

$$\psi_1(x, \xi) = \tilde{\psi}_1(x, \xi) + \psi_{1,0}(x), \quad \tilde{\psi}_1(x, \xi) = \Psi(x, \xi) \frac{d\psi_{0,0}}{dx}(x), \quad (5.4)$$

где $\psi_{1,0}$ – произвольная функция. Подставляя (5.4) в уравнение (5.2) с $i = 0$ и учитывая равенства (2.3) и $(H_0 - \lambda_0)\psi_{0,0} = 0$, приходим к уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_2 = G_2 + \frac{d\psi_{1,0}}{dx} \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.5)$$

$$G_2 = \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_1 - V_1 \psi_{0,0}. \quad (5.6)$$

ЛЕММА 5.1. Пусть $f = f(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ – 1-периодическая по ξ функция. Уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} = f, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

разрешимо в классе 1-периодических по ξ функций, если и только если выполняется равенство $\langle f(x, \cdot) \rangle = 0$. Существует единственное 1-периодическое по ξ решение $u = u(x, \xi)$ данного уравнения, которое удовлетворяет равенству $\langle u(x, \cdot) \rangle = 0$. Это решение дается формулой

$$u(x, \xi) = T_7[f](x, \xi), \quad T_7[f](x, \xi) := \int_0^\xi \tilde{f}(x, t) dt + \int_0^1 t \tilde{f}(x, t) dt,$$

$$\tilde{f}(x, \xi) = \frac{A_0(x)}{A(x, \xi)} \int_0^1 \frac{1}{A(x, t_2)} \int_0^{t_2} f(x, t_1) dt_1 dt_2 - \frac{1}{A(x, \xi)} \int_0^\xi f(x, t) dt.$$

Если $f \in \mathcal{V}$, то $u \in \mathcal{V}$.

Утверждение леммы проверяется непосредственными вычислениями.

В силу (2.8), (5.6) и 1-периодичности по ξ функций A и $\tilde{\psi}_1$ верно соотношение $\langle G_2 \rangle = 0$. Так как $\psi_1, V_1 \in \mathcal{V}$, то $G_2 \in \mathcal{V}$. Поэтому из леммы 5.1 и уравнения (2.4) следует, что 1-периодическое по ξ решение уравнения (5.5) имеет вид

$$\psi_2(x, \xi) = \tilde{\psi}_2(x, \xi) + \psi_{2,0}(x),$$

$$\tilde{\psi}_2(x, \xi) = \psi_{2,1}(x, \xi) + \Psi(x, \xi) \frac{d\psi_{1,0}}{dx}(x), \quad \psi_{2,1}(x, \xi) = T_7[G_2](x, \xi), \quad (5.7)$$

где $\psi_{2,0}$ – произвольная функция, причем $\psi_{2,1} \in \mathcal{V}$ и

$$\langle \psi_{2,1}(x, \cdot) \rangle = 0. \quad (5.8)$$

Подчеркнем, что функции G_2 и $\psi_{2,1}$ не зависят от пока не определенной функции $\psi_{1,0}$, а зависимость функции $\tilde{\psi}_2$ от $\psi_{1,0}$ имеет явный вид (5.7).

Подставим теперь (5.4), (5.7) в уравнение (5.2) с $i = 1$ и учтем равенство (2.4). В результате получим следующее уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_3 = G_3 + \frac{d\psi_{2,0}}{dx} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \left(\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} - V_0 + \lambda_0 \right) \psi_{1,0} + F_3 + \lambda_1 \psi_{0,0}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.9)$$

$$G_3 = \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_2 + \frac{\partial}{\partial x} A \left(\frac{\partial \psi_{2,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x} \right) - (V_0 + V_1) \tilde{\psi}_1 - V_1 \psi_{1,0} + \lambda_0 \tilde{\psi}_1 - F_3, \quad (5.10)$$

$$F_3 = \frac{d}{dx} \left\langle A \left(\frac{\partial \psi_{2,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x} \right) \right\rangle - \langle V_1 \tilde{\psi}_1 \rangle. \quad (5.11)$$

Отметим, что функция F_3 полностью определена и не зависит от пока не известных функций $\psi_{1,0}$ и $\psi_{2,0}$ и числа λ_1 .

В силу (5.10), (2.8), (5.4), (2.2) и (5.11) верно равенство $\langle G_3 \rangle = 0$. Учитывая это равенство и выписывая условие разрешимости уравнения (5.9) в классе 1-периодических по ξ функций из леммы 5.1, получаем уравнение

$$\left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0 - \lambda_0 \right) \psi_{1,0} = F_3 + \lambda_1 \psi_{0,0}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Для решения этого уравнения нам понадобятся дополнительные обозначения и вспомогательная лемма. Обозначим

$$W_2^\infty(\mathbb{R}) := \bigcap_{j=1}^{\infty} W_2^j(\mathbb{R}).$$

В силу стандартных теорем вложения выполнено вложение $W_2^\infty(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ (см., например, [21; гл. III, § 6]). Аналогично лемме 4.1 из [22] доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 5.2. Пусть $f \in W_2^\infty(\mathbb{R})$. Уравнение $(H_0 - \lambda_0)u = f$ разрешимо в $W_2^2(\mathbb{R})$, если и только если $(f, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} = 0$. Существует единственное решение $u \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ этого уравнения, ортогональное ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$.

Так как $\Psi \in \mathcal{V}$, то функция ψ_1 , определенная равенством (5.4), будет элементом пространства $W_2^2(\mathbb{R})$, если то же выполнено и для функции $\psi_{1,0}$. Так как $\psi_{2,1}, \psi_1 \in \mathcal{V}$, то правая часть уравнения (5.12), очевидно, является элементом $W_2^\infty(\mathbb{R})$. Поэтому в силу леммы 5.2 условием разрешимости уравнения (5.12) в пространстве $W_2^2(\mathbb{R})$ является равенство

$$\lambda_1 = - \int_{\mathbb{R}} F_3 \psi_0 dx. \quad (5.13)$$

Выберем функцию $\psi_{1,0}$ ортогональной функции ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$. Согласно лемме 5.2 $\psi_{1,0} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$.

С учетом (5.12) уравнение (5.9) переписывается в виде

$$- \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_3 = G_3 + \frac{d\psi_{2,0}}{dx} \frac{\partial A}{\partial \xi}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.14)$$

откуда следует, что 1-периодическое по ξ решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_3(x, \xi) &= \tilde{\psi}_3(x, \xi) + \psi_{3,0}(x), \\ \tilde{\psi}_3(x, \xi) &= \psi_{3,1}(x, \xi) + \Psi(x, \xi) \frac{d}{dx} \psi_{2,0}(x), \quad \psi_{3,1}(x, \xi) = T_7[G_3](x, \xi), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $\psi_{3,0}$ – произвольная функция и

$$\langle \psi_{3,1}(x, \cdot) \rangle = 0. \quad (5.16)$$

Так как $V_1, \psi_{2,1}, \tilde{\psi}_1 \in \mathcal{V}$, то $G_3 \in \mathcal{V}$, откуда следует, что $\psi_{3,1} \in \mathcal{V}$. Функции G_3 и $\tilde{\psi}_3$ не зависят от выбора функции $\psi_{2,0}$, а зависимость $\tilde{\psi}_3$ от $\psi_{2,0}$ носит явный характер.

Остальные функции ψ_i и числа λ_i определяются по той же схеме, что и функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 и число λ_1 . А именно, условие разрешимости уравнения (5.2) в классе 1-периодических по ξ функций приводит к уравнению для функций $\psi_{i,0}$. Условие разрешимости этого уравнения в пространстве $W_2^2(\mathbb{R})$ однозначно определяет коэффициенты ряда (1.3). Результаты применения данного алгоритма удобно сформулировать в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 5.3. *Существуют 1-периодические решения уравнений (5.2), имеющие вид*

$$\psi_i(x, \xi) = \tilde{\psi}_i(x, \xi) + \psi_{i,0}(x), \quad \tilde{\psi}_i(x, \xi) = \psi_{i,1}(x, \xi) + \Psi(x, \xi) \frac{d\psi_{i-1,0}}{dx}(x), \quad (5.17)$$

$$\psi_{i,1}(x, \xi) = T_7[G_i](x, \xi), \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{i-1} + \frac{\partial}{\partial x} A \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i-1,1} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{i-2} \right) - (V_0 + V_1) \tilde{\psi}_{i-2} \\ &\quad - V_1 \psi_{i-2,0} - F_i + \sum_{j=0}^{i-2} \lambda_j \tilde{\psi}_{i-j-2}, \\ F_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left\langle A \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i-1,1} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{i-2} \right) \right\rangle - \langle V_1 \tilde{\psi}_{i-2} \rangle, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $A = A(x, \xi)$, $V_0 = V_0(x)$, $V_1 = V_1(x, \xi)$, $i \geq 1$. Функции $\psi_{i,1} \in \mathcal{V}$ удовлетворяют равенствам

$$\langle \psi_{i,1}(x, \cdot) \rangle = 0. \quad (5.20)$$

Функции $\psi_{i,0} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$, $i \geq 1$, являются решениями уравнений

$$\left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0 - \lambda_0 \right) \psi_{i,0} = F_{i+2} + \sum_{j=1}^i \lambda_j \psi_{i-j,0}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ортогональными ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$. Числа λ_i определяются равенствами

$$\lambda_i = - \int_{\mathbb{R}} F_{i+2} \psi_0 dx. \quad (5.21)$$

Покажем, что из (5.13) следует формула (1.4). Обозначим

$$\Phi(x, \xi) := -T_7[V_1](x, \xi). \quad (5.22)$$

В силу (2.8) и леммы 5.1 функция $\Phi \in \mathcal{V}$ является 1-периодическим по ξ решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = V_1, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.23)$$

Непосредственно проверяется, что в силу определения (5.7) функции $\psi_{2,1}$, определения (5.22) функции Φ и определения оператора T_7 выполняется равенство

$$\frac{\partial \psi_{2,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x} = \psi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}. \quad (5.24)$$

Из уравнения (5.23) получаем

$$\langle V_1 \Psi \rangle = \left\langle \Psi \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \Phi \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right\rangle = - \left\langle \Phi \frac{\partial A}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right\rangle.$$

Учитывая последнее равенство и подставляя (5.24) в (5.11), получаем, что

$$F_3 = \psi_0 \frac{d}{dx} \left\langle A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right\rangle. \quad (5.25)$$

В силу определения оператора T_7 и (5.22) выполнено соотношение

$$A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \int_0^\xi V_1(x, t) dt - A_0(x) \int_0^1 \frac{1}{A(x, \xi)} \int_0^\xi V_1(x, t) dt d\xi. \quad (5.26)$$

Подставляя (5.25), (5.26) в (5.13), получаем формулу (1.4) для λ_1 .

Покажем справедливость формул (1.5). Пусть A не зависит от ξ . В этом случае из (1.4), (1.7) и (5.25) имеем: $A(x, \xi) = A_0(x)$, $\lambda_1 = 0$, $F_3 = 0$, $\Psi = 0$. Следовательно, правая часть уравнения (5.12) равна нулю, а потому $\psi_{1,0} = 0$. С учетом последних равенств, (5.6), (5.7), (5.19), (5.22) получаем

$$\begin{aligned} G_2 &= -V_1 \psi_0, & \tilde{\psi}_2 &= \psi_{2,1} = \psi_0 \Phi, \\ F_4 &= -\langle V_1 \tilde{\psi}_{2,1} \rangle = -\psi_0 \langle V_1 \Phi \rangle, & \lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2 \langle V_1 \Phi \rangle dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Формула (1.5) для λ_2 теперь следует из последнего равенства, (1.1) и соотношений

$$\begin{aligned} \langle V_1 \Phi \rangle &= A_0(x) \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \Phi \right\rangle = -A_0(x) \left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right\rangle, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= -\frac{1}{A_0(x)} \int_0^1 \int_0^{t_2} V_1(x, t_1) dt_1 dt_2 - \int_0^\xi V_1(x, t) dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Докажем теперь равенства (1.6). Пусть V не зависит от ξ , тогда $V_1 \equiv 0$. Из (1.4), (5.22) следует, что $\lambda_1 = 0$, $\Phi = 0$. Используя эти равенства, (5.24) и (5.11), получаем

$$\frac{\partial \psi_{2,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x} = 0, \quad F_3 = 0. \quad (5.29)$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.4), (5.15), имеем

$$\left\langle A \frac{\partial \psi_{3,1}}{\partial \xi} \right\rangle = -\left\langle \psi_{3,1} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \psi_{3,1} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \Psi \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \psi_{3,1}}{\partial \xi} \right\rangle = -\langle \Psi G_3 \rangle.$$

Из полученных равенств, (5.10), (5.29), (2.3), (5.7), (5.8), (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} \left\langle A \left(\frac{\partial \psi_{3,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right) \right\rangle &= \left\langle A \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \Psi \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right\rangle + (V_0 - \lambda_0) \langle \tilde{\psi}_1 \Psi \rangle \\ &= \left\langle A \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right\rangle + (V_0 - \lambda_0) \langle \tilde{\psi}_1 \Psi \rangle = (V_0 - \lambda_0) \langle \Psi^2 \rangle \frac{d\psi_0}{dx}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Используя формулу (5.19) для F_4 и (5.21) для λ_2 , получаем

$$\lambda_2 = - \int_{\mathbb{R}} \psi_0 \frac{d}{dx} \left\langle A \left(\frac{\partial \psi_{3,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right) \right\rangle dx = \int_{\mathbb{R}} \left\langle A \left(\frac{\partial \psi_{3,1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x} \right) \right\rangle \frac{d\psi_0}{dx} dx.$$

Подставляя теперь (5.30) в полученное равенство, приходим к (1.6).

Пусть $p \geq 2$. Обозначим

$$\lambda_{\varepsilon,p} := \lambda_0 + \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \lambda_i, \quad \psi_{\varepsilon,p}(x) := \psi_0(x) + \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Из леммы 5.3 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 5.4. *Функция $\psi_{\varepsilon,p} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ сходится к ψ_0 сильно в $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению $(H_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,p})\psi_{\varepsilon,p} = f_{\varepsilon,p}$, где для функции $f_{\varepsilon,p} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ справедлива оценка*

$$\|f_{\varepsilon,p}\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-1}), \quad \|f_{\varepsilon,p}\|_{W_2^q(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-q-1}), \quad q \in \mathbb{N}. \quad (5.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Так как $\lambda_{\varepsilon,p} \rightarrow \lambda_0$, то лемма 5.4 позволяет применить к числу $\lambda_{\varepsilon,p}$ и функции $\psi_{\varepsilon,p}$ лемму 2.1, согласно которой верны представление и оценка:

$$\psi_{\varepsilon,p} = -\frac{\tilde{\psi}_\varepsilon}{\lambda_{\varepsilon,p} - \lambda_\varepsilon} (f_{\varepsilon,p}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})} + \tilde{u}_{\varepsilon,p}, \quad \|\tilde{u}_{\varepsilon,p}\|_{W_2^1(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-1}). \quad (5.32)$$

Так как в силу леммы 5.4 функция $\psi_{\varepsilon,p}$ сходится к ψ_0 сильно в $L_2(\mathbb{R})$, то из последних равенств и леммы 5.4 имеем

$$1 + o(1) = \|\psi_{\varepsilon,p} - \tilde{u}_{\varepsilon,p}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{\|f_{\varepsilon,p}\|_{L_2(\mathbb{R})}}{|\lambda_{\varepsilon,p} - \lambda_\varepsilon|}, \quad |\lambda_{\varepsilon,p} - \lambda_\varepsilon| = O(\varepsilon^{p-1}),$$

что в силу произвола в выборе p доказывает теорему 1.2.

Умножая первое из равенств (5.32) на ψ_ε скалярно в $L_2(\mathbb{R})$, получаем

$$\frac{(f_{\varepsilon,p}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,p} - \lambda_\varepsilon} = (\tilde{u}_{\varepsilon,p} - \psi_{\varepsilon,p}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Из данного равенства, нормированности функции $\tilde{\psi}_\varepsilon$, оценки для $\tilde{u}_{\varepsilon,p}$ из (5.32) и лемм 5.3, 5.4 вытекает, что для любых p_1, p_2 выполнено соотношение

$$\frac{(f_{\varepsilon,p_1}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,p_1} - \lambda_\varepsilon} - \frac{(f_{\varepsilon,p_2}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,p_2} - \lambda_\varepsilon} = O(\varepsilon^{\min\{p_1, p_2\}}). \quad (5.33)$$

Следовательно, существует функция $c(\varepsilon)$ такая, что

$$-\frac{(f_{\varepsilon,p}, \tilde{\psi}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,p} - \lambda_\varepsilon} = c(\varepsilon) + O(\varepsilon^p)$$

для всех $p \geq 2$. Из полученного равенства и (5.32) имеем

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,p}\|_{W_2^1(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-1}), \quad (5.34)$$

где $\psi_\varepsilon := c(\varepsilon)\tilde{\psi}_\varepsilon$. Выразим из уравнений $(H_\varepsilon - \lambda_\varepsilon)\psi_\varepsilon = 0$, $(H_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,p})\psi_{\varepsilon,p} = f_{\varepsilon,p}$ вторые производные функций ψ_ε , $\psi_{\varepsilon,p}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_\varepsilon}{dx^2} &= \frac{1}{A} \left(-\frac{dA}{dx} \frac{d}{dx} - V + \lambda_\varepsilon \right) \psi_\varepsilon, \\ \frac{d^2\psi_{\varepsilon,p}}{dx^2} &= \frac{1}{A} \left(-\frac{dA}{dx} \frac{d}{dx} - V_0 + \lambda_{\varepsilon,p} \right) \psi_{\varepsilon,p} + f_{\varepsilon,p}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где $A = A(x, x/\varepsilon)$, $V = V(x, x/\varepsilon)$. Используя эти равенства и оценки (1.1), (5.34), получаем

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,p}\|_{W_2^2(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-2}).$$

Аналогично, дифференцируя равенства (5.35) и используя вторую из оценок (5.31), нетрудно проверить, что

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,p}\|_{W_2^q(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^{p-q}) \quad (5.36)$$

для всех $q \in \mathbb{N}$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, оператора H_ε , можно выбрать так, что для всех $q \in \mathbb{N}$ в норме $W_2^q(\mathbb{R})$ она будет иметь асимптотическое разложение (5.1). Первые члены этого разложения определяются равенствами (5.4), (1.7), (5.7), (5.15) и уравнением (5.12). Остальные коэффициенты разложения даются в лемме 5.3. Если A не зависит от ξ , то $\psi_1(x, \xi) = 0$, $\psi_2(x, \xi) = -\psi_0(x)\Phi(x, \xi) + \psi_{2,0}(x)$; если V не зависит от ξ , то $\psi_1(x, \xi) = \Psi(x, \xi) d\psi_0(x)/dx$.*

§ 6. Доказательство теоремы 1.4

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.4. Кроме того, будет построено асимптотическое разложение собственной функции, соответствующей собственному значению $\lambda_\varepsilon^{(0)}$.

Всюду в параграфе предполагаем, что нуль является виртуальным уровнем оператора H_0 . Согласно лемме 3.1 в этом случае критерием существования собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ является положительность собственной частоты k_ε задачи (3.1), (3.2), сходящейся к нулю. Чтобы выяснить знак k_ε , мы построим асимптотическое разложение данной частоты, а также асимптотическое разложение соответствующей собственной функции. Данную функцию обозначим через $\psi_\varepsilon^{(0)}$ и не будем предполагать для нее никаких условий нормировки. Как и в предыдущем параграфе, вначале будет проведено формальное построение асимптотических разложений, а затем эти разложения будут строго обоснованы.

Асимптотику k_ε будем строить в виде

$$k_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i k_i. \quad (6.1)$$

Для построения асимптотики функции $\psi_\varepsilon^{(0)}$ мы снова применим метод двух-масштабных асимптотических разложений, следуя которому асимптотическое разложение $\psi_\varepsilon^{(0)}$ ищем в виде

$$\psi_\varepsilon^{(0)}(x) = \psi_0^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \psi_i^{(0)}(x, \xi), \quad (6.2)$$

где, напомним, $\xi = x/\varepsilon$, а функция $\psi_0^{(0)}$ удовлетворяет условию нормировки (4.11). Функции $\psi_i^{(0)}$ будем предполагать 1-периодическими по ξ .

Целью формального построения является определение вида чисел k_i и функций $\psi_i^{(0)}$. Далее для краткости мы будем опускать в обозначениях верхний индекс (0).

Подставим разложения (6.1), (6.2) в уравнение (3.1) и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i+2} = & \left(\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial}{\partial x} \psi_i - (V_0 + V_1) \psi_i \\ & + \sum_{j=0}^{i-2} \psi_j \sum_{q=1}^{i-j-1} k_q k_{i-j-q}, \quad x \in (x_0, x_1), \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $i \geq -1$, $A = A(x, \xi)$, $V_0 = V_0(x)$, $V_1 = V_1(x, \xi)$, $\psi_{-1} \equiv 0$.

Подстановка разложений (6.1), (6.2) в краевые условия (3.2) приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \psi_j &= 0, \quad x = x_0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \psi_j &= 0, \quad x = x_1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $i \geq -1$, $\psi_{-1} \equiv 0$.

Через $\tilde{\mathcal{V}}$ обозначим множество функций $u = u(x, \xi)$, являющихся сужением функций из $\mathcal{V}$ на $\{(x, \xi) : x \in [x_0, x_1], \xi \in \mathbb{R}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из определения $\tilde{\mathcal{V}}$ вытекает, что если $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{V}}$, то

$$\tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = 0, \quad x = x_0, x_1.$$

При $i = -1$ уравнение (6.3) совпадает с уравнением из (5.3), рассматриваемым при $x \in (x_0, x_1)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Следовательно, 1-периодическое по ξ решение уравнения (5.3) с $i = -1$ дается формулой (5.4), где $\psi_{1,0}$ – произвольная функция, $\psi_{0,0} := \psi_0^{(0)}$. Так как $\Psi \in \mathcal{V}$, то $\tilde{\psi}_1 \in \tilde{\mathcal{V}}$. Подставляя (5.4) в уравнение (6.3) с $i = 0$, приходим к уравнению (5.5) для ψ_2 , рассматриваемому при $x \in (x_0, x_1)$, $\xi \in \mathbb{R}$, где функция G_2 определяется формулой (5.6). Это уравнение разрешимо в классе 1-периодических по ξ функций и его решение имеет вид (5.7), где $\psi_{1,0}$, ψ_0 из настоящего параграфа, $\psi_{2,0}$ – произвольная функция, $\tilde{\psi}_{2,1} \in \tilde{\mathcal{V}}$ и выполнено равенство (5.8).

Подставим теперь (5.4), (5.7) в уравнение (6.3) с $i = 1$ и учтем равенство (2.3). Тогда получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_3 &= G_3 + \frac{d\psi_{2,0}}{dx} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \left(\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} \psi_{1,0} - V_0 \right) \psi_{1,0} + F_3, \\ &x \in (x_0, x_1), \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ G_3 &= \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_2 + \frac{\partial}{\partial x} A \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{2,1} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_1 \right) - (V_0 + V_1) \tilde{\psi}_1 - V_1 \psi_{1,0} - F_3, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где F_3 имеет вид (5.11) с функциями $\psi_{2,1}$, $\tilde{\psi}_1$ из настоящего параграфа. Используя (2.8), (2.2) и (5.4), нетрудно проверить, что $\langle G_3 \rangle = 0$. Следовательно, в силу леммы 5.1 критерием разрешимости уравнения (6.5) в классе 1-периодических по ξ функций является уравнение

$$\left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0\right) \psi_{1,0} = F_3, \quad x \in (x_0, x_1). \quad (6.6)$$

Так как функция ψ_0 не зависит от ξ , то условия (6.4) с $i = -1$ выполнены. При $i = 0$, подставляя (5.4) в (6.4) и учитывая (3.6), заключаем, что условия (6.4) с $i = 0$ выполнены. Подставим теперь (5.4), (5.7) в (6.4) с $i = 1$ и учтем, что $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \in \tilde{\mathcal{V}}$. Тогда получим (см. замечание 6.1) следующие граничные условия:

$$\frac{d\psi_{1,0}}{dx} = k_1 \psi_0, \quad x = x_0, \quad \frac{d\psi_{1,0}}{dx} = -k_1 \psi_0, \quad x = x_1. \quad (6.7)$$

Для решения задач вида (6.6), (6.7) мы воспользуемся следующим очевидным вспомогательным утверждением.

ЛЕММА 6.1. Пусть $f \in C^\infty[x_0, x_1]$, α_0, α_1 – некоторые числа. Краевая задача

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0\right) u &= f, \quad x \in (x_0, x_1), \\ \frac{du}{dx} &= \alpha_0, \quad x = x_0, \quad \frac{du}{dx} = \alpha_1, \quad x = x_1, \end{aligned}$$

разрешима в $W_2^2(x_0, x_1)$, если и только если

$$\psi_0(x_0)\alpha_0 - \psi_0(x_1)\alpha_1 = (f, \psi_0)_{L_2(x_0, x_1)}. \quad (6.8)$$

Если выполнено условие (6.8), то существует единственное решение $u \in C^\infty[x_0, x_1]$, удовлетворяющее равенству

$$u(x_0)\psi_0(x_0) + u(x_1)\psi_0(x_1) = 0. \quad (6.9)$$

Из леммы 6.1 и (1.9) следует, что задача (6.6), (6.7) разрешима, если и только если число k_1 выбрано следующим образом:

$$k_1 = \int_{\mathbb{R}} F_3 \psi_0 dx. \quad (6.10)$$

Отсюда и из (5.25), (5.26) следует формула (1.10). Функцию $\psi_{1,0} \in C^\infty[x_0, x_1]$ выберем удовлетворяющей условию (6.9).

С учетом (6.6) уравнение (6.5) совпадает с уравнением из (5.14), где $x \in (x_0, x_1)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Решение этого уравнения имеет вид (5.15), $\psi_{3,1} \in \tilde{\mathcal{V}}$ и выполнено равенство (5.16).

ЛЕММА 6.2. *Существуют 1-периодические по ξ решения краевых задач (6.3), (6.4), имеющие вид (5.17), (5.18), где*

$$G_i = \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{i-1} + \frac{\partial}{\partial x} A \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i-1,1} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{i-2} \right) - (V_0 + V_1) \tilde{\psi}_{i-2} \\ - V_1 \psi_{i-2,0} - \sum_{j=0}^{i-4} \tilde{\psi}_j \sum_{q=1}^{i-j-3} k_q k_{i-j-q-2} - F_i,$$

$A = A(x, \xi)$, $V_1 = V_1(x, \xi)$, $V_0 = V_0(x)$, $i \geq 1$, а функции F_i даются равенством (5.19). Функции $\psi_{i,1} \in \tilde{\mathcal{V}}$ удовлетворяют соотношениям (5.20). Функции $\psi_{i,0} \in C^\infty[x_0, x_1]$ являются решениями краевых задач

$$\left(-\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} + V_0 \right) \psi_{i,0} = F_{i+2} - \sum_{j=0}^{i-2} \tilde{\psi}_j \sum_{q=1}^{i-j-1} k_q k_{i-j-q-2}, \quad x \in (x_0, x_1), \\ \frac{d\psi_{i,0}}{dx} = \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \psi_{j,0}, \quad x = x_0, \quad \frac{d\psi_{i,0}}{dx} = -\sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} \psi_{j,0}, \quad x = x_1, \quad (6.11)$$

удовлетворяющими условию (6.9). Числа k_i определяются формулами

$$k_i = \int_{x_0}^{x_1} F_{i+2} \psi_0 dx - \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{q=1}^{i-j-1} k_q k_{i-j-q-2} \int_{x_0}^{x_1} \tilde{\psi}_j \psi_0 dx. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (5.17), (5.18), (5.20) для $i = 1, 2, 3$ следуют из (5.4), (5.7), (5.15), (5.8), (5.16), если положить $G_1 := 0$, $\psi_{1,1} := 0$. Краевая задача (6.11) с $i = 1$ совпадает с краевой задачей (6.6), (6.7). Формула (6.12) для k_1 следует из (6.10).

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть формулы (5.17), (5.18), (5.20) верны для $i \leq p+1$, а функции $\psi_{i,0}$ и числа k_i , $i \leq p-1$, определяются краевыми задачами (6.11) и формулами (6.12). Подставим представления (5.17) в уравнение (6.3) с $i = p$. С учетом (2.3) получаем

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{p+2} = G_{p+2} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{d\psi_{p+1,0}}{dx} + \left(\frac{d}{dx} A_0 \frac{d}{dx} - V_0 \right) \psi_{p,0} + F_{p+2} \\ - \sum_{j=0}^{p-2} \tilde{\psi}_j \sum_{q=1}^{p-j-1} k_q k_{p-j-q-2}, \quad x \in (x_0, x_1), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

В силу леммы 5.1 условием разрешимости этого уравнения в классе 1-периодических по ξ функций является уравнение для $\psi_{p,0}$ из (6.11). Подставим теперь формулы (5.17) в краевые условия (6.4) с $i = p$ и учтем, что $\tilde{\psi}_i \in \tilde{\mathcal{V}}$, $i \leq p+1$. Тогда получим (см. замечание 6.1) граничные условия для $\psi_{p,0}$ из (6.11). Условием разрешимости краевой задачи (6.11) для $\psi_{p,0}$ согласно лемме 6.1 является равенство (6.12) с $i = p$. Функцию $\psi_{p,0} \in C^\infty[x_0, x_1]$ выберем удовлетворяющей условию (6.9).

Ясно, что $G_{p+2} \in \tilde{\mathcal{V}}$. Из леммы 5.1, уравнения для $\psi_{p,0}$ и (6.13) теперь следует, что функция ψ_{p+2} имеет вид (5.17), (5.18), где для $\psi_{p+2,1} \in \tilde{\mathcal{V}}$ выполнено равенство (5.20).

Пусть A не зависит от ξ . Из (1.10), (1.7) и (5.25) следует: $k_1 = 0$, $\Psi = 0$, $F_3 = 0$. Правые части уравнения (6.6) и краевых условий (6.7) равны нулю, а потому $\psi_{1,0} = 0$. Используя полученные равенства, (5.6), (5.7), (5.19), (5.22), приходим к формулам (5.27) для G_2 , $\tilde{\psi}_2$, $\psi_{2,1}$ и F_4 . Следовательно, в силу (6.12) и условия $\Psi \in \tilde{\mathcal{V}}$ верно равенство

$$k_2 = \int_{x_0}^{x_1} F_4 \psi_0 dx = - \int_{x_0}^{x_1} \psi_0^2 \langle V_1 \Phi \rangle dx.$$

Подставляя сюда соотношения (5.28), получаем (1.12).

Пусть V не зависит от ξ . В этом случае $V = V_0$, $k_1 = 0$ (см. (1.10)), $\Phi = 0$ (см. (5.22)). Правые части уравнения (6.6) и краевых условий (6.7) обращаются в нуль, поэтому $\psi_{1,0} = 0$. Из этих равенств, (5.24), (5.11) следуют соотношения (5.29). Равенства (5.30) в этом случае справедливы с $\lambda_0 = 0$, откуда в силу (5.19) имеем

$$F_4 = \frac{d}{dx} V_0 \langle \Psi^2 \rangle \frac{d\psi_0}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (6.12) и интегрируя по частям с учетом условия $\Psi \in \tilde{\mathcal{V}}$, приходим к формуле (1.13) для k_2 .

Пусть $p \geq 3$. Обозначим

$$k_{\varepsilon,p} = \sum_{i=1}^p \varepsilon^i k_i, \quad \psi_{\varepsilon,p}(x) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^p \varepsilon^i \psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Из леммы 6.2 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 6.3. *Функция $\psi_{\varepsilon,p} \in C^\infty[x_0, x_1]$ является решением краевой задачи:*

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \psi_{\varepsilon,p} &= -k_{\varepsilon,p}^2 \psi_{\varepsilon,p} + f_{\varepsilon,p}, & x \in (x_0, x_1), \\ \left(\frac{d}{dx} - k_{\varepsilon,p}\right) \psi_{\varepsilon,p} &= \alpha_{\varepsilon,p}^0, & x = x_0, & \left(\frac{d}{dx} + k_{\varepsilon,p}\right) \psi_{\varepsilon,p} = \alpha_{\varepsilon,p}^1, & x = x_1, \end{aligned}$$

и сходится к функции ψ_0 при $\varepsilon \rightarrow +0$ в $L_2(x_0, x_1)$. Числа $\alpha_{\varepsilon,p}^i$ и функция $f_{\varepsilon,p} \in C^\infty[x_0, x_1]$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varepsilon,p}^0| + |\alpha_{\varepsilon,p}^1| &= O(\varepsilon^p), & \|f_{\varepsilon,p}\|_{L_2(x_0, x_1)} &= O(\varepsilon^{p-1}), \\ \|f_{\varepsilon,p}\|_{W_2^q(x_0, x_1)} &= O(\varepsilon^{p-q-1}), & q \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пусть $\chi_2 = \chi_2(x)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в окрестности точек x_0, x_1 и нулю в окрестности центра интервала (x_0, x_1) . Положим

$$R_{\varepsilon,p}(x) := \begin{cases} \frac{\alpha_{\varepsilon,p}^0 x}{1 - k_{\varepsilon,p} x_0} \chi_2(x), & x \in \left[x_0, \frac{x_0 + x_1}{2}\right], \\ \frac{\alpha_{\varepsilon,p}^1 x}{1 + k_{\varepsilon,p} x_1} \chi_2(x), & x \in \left[\frac{x_0 + x_1}{2}, x_1\right]. \end{cases}$$

Ясно, что $R_{\varepsilon,p} \in C^\infty[x_0, x_1]$ и в силу (6.14) верны оценки

$$\|R_{\varepsilon,p}\|_{C^q[x_0,x_1]} = O(\varepsilon^p), \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.15)$$

Из леммы 6.3 следует, что функция $\tilde{\psi}_{\varepsilon,p} := \psi_{\varepsilon,p} - R_{\varepsilon,p}$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dx} A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{\psi}_{\varepsilon,p} &= -k_{\varepsilon,p}^2 \tilde{\psi}_{\varepsilon,p} + \tilde{f}_{\varepsilon,p}, \quad x \in (x_0, x_1), \\ \left(\frac{d}{dx} - k_{\varepsilon,p}\right) \tilde{\psi}_{\varepsilon,p} &= 0, \quad x = x_0, \quad \left(\frac{d}{dx} + k_{\varepsilon,p}\right) \tilde{\psi}_{\varepsilon,p} = 0, \quad x = x_1, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\|\tilde{f}_{\varepsilon,p}\|_{L_2(x_0,x_1)} = O(\varepsilon^{p-1}), \quad \|\tilde{f}_{\varepsilon,p}\|_{W_2^q(x_0,x_1)} = O(\varepsilon^{p-q-2}), \quad q \in \mathbb{N}. \quad (6.17)$$

Согласно лемме 4.4 функция $\tilde{\psi}_{\varepsilon,p}$ представляется в виде

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon,p} = \frac{T_6(\varepsilon)\tilde{f}_{\varepsilon,p}}{k_{\varepsilon,p} - k_\varepsilon} \psi_\varepsilon^{(0)} + \tilde{u}_{\varepsilon,p}, \quad (6.18)$$

где в силу (4.14), (6.17) функция $\tilde{u}_{\varepsilon,p}$ удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{u}_{\varepsilon,p}\|_{W_2^1(x_0,x_1)} = O(\varepsilon^{p-2}). \quad (6.19)$$

Из последней оценки, (6.15), (6.17), (6.18), сходимости (4.12) и лемм 4.4, 6.3 следует

$$\begin{aligned} \|\psi_0\|_{L_2(x_0,x_1)} + o(1) &= \|\psi_{\varepsilon,p} - \tilde{u}_{\varepsilon,p}\|_{L_2(x_0,x_1)} \\ &\leq \frac{|T_6(\varepsilon)\tilde{f}_{\varepsilon,p}|}{|k_{\varepsilon,p} - k_\varepsilon|} \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}\|_{L_2(x_0,x_1)} \leq \frac{C\varepsilon^{p-2}}{|k_{\varepsilon,p} - k_\varepsilon|}, \end{aligned}$$

где константа C не зависит от ε . Отсюда выводим, что

$$k_\varepsilon = k_{\varepsilon,p} + O(\varepsilon^{p-2}). \quad (6.20)$$

Следовательно, в силу произвола в выборе p собственная частота k_ε краевой задачи (3.1), (3.2) имеет асимптотическое разложение (6.1) с коэффициентами, определенными в настоящем параграфе. Если первый ненулевой член этого разложения положителен, то $k_\varepsilon > 0$ и из леммы 3.1 следует, что в этом случае оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_\varepsilon = -k_\varepsilon^2$, стремящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Асимптотика данного собственного значения имеет вид (1.11). Если первый ненулевой член разложения (6.1) отрицателен, то $k_\varepsilon < 0$ и в силу леммы 3.1 оператор H_ε не имеет собственного значения, стремящегося к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Теорема 1.4 доказана.

Пусть существует собственное значение $\lambda_\varepsilon = -k_\varepsilon^2$ оператора H_ε , стремящееся к нулю. В этом случае в силу леммы 3.1 соответствующая собственная функция оператора H_ε на интервале (x_0, x_1) совпадает с собственной функцией краевой задачи (3.1), (3.2), соответствующей собственной частоте $k = k_\varepsilon$. Выясним асимптотическое разложение данной собственной функции.

Умножим представление (6.18) на $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$ скалярно в $L_2(x_0, x_1)$, тогда получим

$$\frac{T_6(\varepsilon)\tilde{f}_{\varepsilon,p}}{k_{\varepsilon,p} - k_\varepsilon} = \frac{(\tilde{\psi}_{\varepsilon,p} - \tilde{u}_{\varepsilon,p}, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)})_{L_2(x_0, x_1)}}{\|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}\|_{L_2(x_0, x_1)}^2}.$$

Используя это равенство, лемму 6.2, оценку (6.19) и сходимость (4.12), аналогично (5.33) нетрудно показать, что существует функция $c(\varepsilon)$ такая, что

$$\frac{T_6(\varepsilon)\tilde{f}_{\varepsilon,p}}{k_{\varepsilon,p} - k_\varepsilon} = c(\varepsilon) + O(\varepsilon^{p-2}) \quad (6.21)$$

для всех $p \geq 3$. Так как в силу (4.12) функция $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$ сходится к $\psi_0^{(0)}$ слабо в $W_2^1(x_0, x_1)$, то она ограничена равномерно по ε в норме $W_2^1(x_0, x_1)$. Учитывая этот факт, (6.15), (6.17), (6.19), из (6.18), (6.21) имеем

$$\|\psi_\varepsilon^{(0)} - \psi_{\varepsilon,p}\|_{W_2^1(x_0, x_1)} = O(\varepsilon^{p-2}),$$

где $\psi_\varepsilon^{(0)} := c(\varepsilon)\tilde{\psi}_\varepsilon^{(0)}$. Используя это равенство и выражая вторые производные функций $\psi_\varepsilon^{(0)}$ и $\tilde{\psi}_{\varepsilon,p}$ из уравнений (3.1) и (6.16), аналогично выводу (5.36) нетрудно проверить, что

$$\|\psi_\varepsilon^{(0)} - \psi_{\varepsilon,p}\|_{W_2^q(x_0, x_1)} = O(\varepsilon^{p-q-1}), \quad q \in \mathbb{N}. \quad (6.22)$$

При $x \leq x_0$ и $x \geq x_1$ функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$ определяется равенствами (3.4). Из леммы 6.2 и (6.22) следует, что верны асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(0)}(x_0) &= \psi_0^{(0)}(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{i,0}^{(0)}(x_0), \\ \psi_\varepsilon^{(0)}(x_1) &= \psi_0^{(0)}(x_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \psi_{i,0}^{(0)}(x_1). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Пусть $Q \in \mathfrak{C}$, $Q \subset (-\infty, x_0)$. Из (6.23), (3.4) и (6.20) следует, что для любого $q \in \mathbb{N}$ в норме $W_2^q(Q)$ функция $\psi_\varepsilon^{(0)}$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\psi_\varepsilon^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i^-(x), \quad (6.24)$$

где $P_0^-(x) \equiv \psi_0^{(0)}(x_0)$, $P_i^-(x)$ – некоторые многочлены, удовлетворяющие начальным условиям

$$P_i^-(x_0) = \psi_{i,0}^{(0)}(x_0), \quad i \geq 1. \quad (6.25)$$

При $x \in Q$ выполнено уравнение

$$\left(\frac{d}{dx} - k_\varepsilon\right)\psi_\varepsilon^{(0)} = 0.$$

Подставляя в него ряды (6.1) и (6.24), получаем рекуррентную систему уравнений

$$\frac{dP_i^-}{dx} = \sum_{j=1}^i k_j P_{i-j}^-, \quad x \in Q.$$

Решая эти уравнения с учетом начальных условий (6.25), определяем коэффициенты разложения (6.24)

$$P_i^-(x) = \psi_{i,0}^{(0)}(x_0) + \sum_{j=1}^i k_j \int_{x_0}^x P_{i-j}^-(t) dt. \quad (6.26)$$

Пусть теперь $Q \in \mathfrak{C}$, $Q \subset (x_1, +\infty)$. Аналогично (6.24), (6.25), (6.26) доказыва-
ется, что асимптотика $\psi_\varepsilon^{(0)}$ в норме $W_2^q(Q)$, $q \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{(0)}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i^+(x), \\ P_0^+(x) &\equiv \psi_0^{(0)}(x_1), \quad P_i^+(x) = \psi_{i,0}^{(0)}(x_1) + \sum_{j=1}^i k_j \int_{x_1}^x P_{i-j}^+(t) dt. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Продолжим функции $\psi_{i,1}$, $\tilde{\psi}_{i,1}$, $\psi_{i,0}$ для $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{i,1}(x, \xi) &= \psi_{i,1}(x, \xi) = 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_1], \\ \psi_{i,0}(x) &= P_i^-(x), & x \in (-\infty, x_0), \\ \psi_{i,0}(x) &= P_i^+(x), & x \in (x_1, +\infty). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Так как в силу леммы 6.2 $\psi_{i,1} \in \tilde{\mathcal{V}}$ и $\Psi \in \mathcal{V}$, то из (5.17) вытекает, что продолжения (6.28) функций $\psi_{i,1}$, $\tilde{\psi}_{i,1}$ принадлежат $\mathcal{V}$. Используя равенства (6.26), (6.27) и краевые задачи (6.12), нетрудно убедиться, что функции $\psi_{i,0}$, продолженные согласно (6.28), бесконечно дифференцируемы. Учитывая эти факты, (6.22), (6.24)–(6.28), приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть существует сходящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$ собственное значение оператора H_ε . Тогда соответствующую собственную функцию можно выбрать так, что она будет иметь асимптотическое разложение (6.2) в норме $W_2^q(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$, $q \in \mathbb{N}$. Коэффициенты этого разложения определяются равенствами (5.4), (5.7), (5.15), краевой задачей (6.6), (6.7), где правая часть определяется равенством (5.11), леммой 6.2 и формулами (6.26)–(6.28). Эта собственная функция удовлетворяет равенствам (6.6) с $k = k_\varepsilon$, где числа $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_0)$, $\psi_\varepsilon^{(0)}(x_1)$ имеют асимптотические разложения (6.23), а асимптотика k_ε дается равенствами (6.1), (1.10), (1.12), (1.13), (6.12). Если A не зависит от ξ , то $\psi_1 = 0$, $\psi_2(x, \xi) = \psi_0(x)\Phi(x, \xi) + \psi_{2,0}(x)$. Если V не зависит от ξ , то $\psi_1(x, \xi) = \Psi(x, \xi) d\psi_0^{(0)}(x)/dx$.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить первоначальную версию статьи.

Список литературы

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.
- [2] Е. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: E. Sánchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
- [3] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [4] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990; англ. пер. О. А. Oleĭnik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, Stud. Math. Appl., **26**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [5] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Olejnik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [6] А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и некоторые приложения*, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2007.
- [7] P. Kuchment, “The mathematics of photonic crystals”, *Mathematical modeling in optical science*, Proceedings of a minisymposium on optics at SIAM’s annual meeting (Stanford Univ., Palo Alto, CA, 1997), Frontiers Appl. Math., **22**, SIAM, Philadelphia, PA, 2001, 207–272.
- [8] В. В. Жиков, “О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами”, *Алгебра и анализ*, **16**:5 (2004), 34–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On spectrum gaps of some divergent elliptic operators with periodic coefficients”, *St. Petersburg Math. J.*, **16**:5 (2005), 773–790.
- [9] В. С. Буслаев, “Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами”, *УМН*, **42**:6 (1987), 77–98; англ. пер.: V. S. Buslaev, “Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients”, *Russian Math. Surveys*, **42**:6 (1987), 97–125.
- [10] M. Marx, “On the eigenvalues for slowly varying perturbations of a periodic Schrödinger operator”, *Asymptot. Anal.*, **48**:4 (2006), 295–357.
- [11] B. Simon, “The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions”, *Ann. Physics*, **97**:2 (1976), 279–288.
- [12] M. Klaus, “On the bound state of Schrödinger operators in one dimension”, *Ann. Physics*, **108**:2 (1977), 288–300.
- [13] R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, B. Simon, “The bound states of weakly coupled long-range one-dimensional quantum Hamiltonians”, *Ann. Physics*, **108**:1 (1977), 69–78.
- [14] M. Klaus, B. Simon, “Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case”, *Ann. Physics*, **130**:2 (1980), 251–281.
- [15] Р. Р. Гадыйльшин, “О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси”, *ТМФ*, **132**:1 (2002), 97–104; англ. пер.: R. R. Gadyĭl’shin, “Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis”, *Theoret. and Math. Phys.*, **132**:1 (2002), 976–982.
- [16] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.

- [17] И. М. Глазман, *Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматгиз, М., 1963; англ. пер.: I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Israel Program for Scientific Transl., Jerusalem; Oldbourne Press, London, 1965.
- [18] В. В. Жиков, “Об операторных оценках в теории усреднения”, *Докл. РАН*, **403**:3 (2005), 305–308.
- [19] Д. И. Борисов, Р. Р. Гадильшин, “О спектре оператора Шредингера с быстро осциллирующим финитным потенциалом”, *ТМФ*, **147**:1 (2006), 58–63; англ. пер.: D. I. Borisov, R. R. Gadyl'shin, “On the spectrum of the Schrödinger operator with a rapidly oscillating compactly supported potential”, *Theoret. and Math. Phys.*, **147**:1 (2006), 496–500.
- [20] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: V. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972.
- [21] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976; англ. пер.: V. P. Mikhailov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [22] Д. И. Борисов, “О спектре оператора Шредингера, возмущенного быстро осциллирующим потенциалом”, *Проблемы математического анализа*, **33** (2006), 13–78; англ. пер.: D. I. Borisov, “On the spectrum of the Schrödinger operator perturbed by a rapidly oscillating potential”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **139**:1 (2006), 6243–6322.

Д. И. Борисов (D. I. Borisov)

Башкирский государственный педагогический
университет, г. Уфа;

Nuclear Physics Institute, Academy of Sciences
of the Czech Republic, Rez

E-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступила в редакцию

18.07.2006 и 19.03.2007

Р. Р. Гадильшин (R. R. Gadyl'shin)

Башкирский государственный педагогический
университет, г. Уфа

E-mail: gadylshin@bspu.ru, gadylshin@yandex.ru