Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 2, 25–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:30:38

УДК 517.5

И. Ф. Красичков-Терновский

Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I

Пусть W инвариантное относительно дифференцирования подпространство в топологическом произведении $H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q)$ пространств аналитических функций, соответственно, в областях $G_1, \dots, G_q \subset \mathbb{C}$. При определенных условиях для некоторой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, существуют проекционные операторы $p_i: W \rightarrow W(\lambda_i)$, где $W(\lambda_i)$ – подпространство корневых элементов оператора дифференцирования, отвечающих собственному значению λ_i и содержащихся в W . Это позволяет каждому элементу $f \in W$ поставить в соответствие формальный ряд

$$f \rightsquigarrow \sum p_i(f).$$

Фундаментальный принцип состоит в явлении сходимости этого ряда к своему элементу f при любом выборе f из W . Существование проекторов p_i зависит от специального свойства аннуляторного подмодуля подпространства W – устойчивости относительно деления на двучлены $z - \lambda$. В статье исследуются вопросы устойчивости, связанные с реализацией фундаментального принципа.

Библиография: 64 названия.

§ 1. Введение

Со времен Эйлера [1] известно, что общее решение f однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой конечную линейную комбинацию элементарных решений

$$f(z) = \sum p_i(z) e^{\lambda_i z}, \quad (1)$$

где p_i – многочлены. Этот факт получил дальнейшее развитие в многочисленных исследованиях [2]–[16] разностных, дифференциально-разностных уравнений и уравнений бесконечного порядка. Обширная библиография, охватывающая конец прошлого века до 1930 года, содержится в книге [17]. Обзоры статей, относящихся к более поздним периодам, см. в [18], [19]. Перечисленные выше уравнения являются частными случаями однородного уравнения свертки. Согласно Ж. Дельсарту [20] функции, удовлетворяющие таким уравнениям, называются *периодическими в среднем*. Дальнейшее развитие обсуждаемого направления связано с экспоненциальными представлениями периодических в среднем функций [20]–[29]. В вещественной области важные результаты получили Л. Шварц [21], [22], Л. Эренпрайс и П. Мальявен [28], А. Ф. Леонтьев [29], [30],

Работы выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-259).

С. Беренштейн и Б. А. Тейлор [31] [32]. В комплексной области периодические в среднем функции исследовались Л. Шварцем [21], А. Ф. Леонтьевым [10], [36], Х. Шапиро [33], Д. Диксоном [34], [35], Ю. Ф. Коробейником [37]. Эффективный метод исследования периодических в среднем функций, метод интерполирующей функции, был предложен А. Ф. Леонтьевым [29], [30], [36]. Этот метод нашел многочисленные применения в теории рядов Дирихле [38]. В. А. Ткаченко разработал метод А. Ф. Леонтьева в русле спектральной теории операторов [39], [40]. Для однородного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами аналогом представления (1) для решения f является конечная сумма интегралов

$$f(z) = \sum \int_{V_i} \partial_i e^{\lambda z} d\mu_i(\lambda), \quad (2)$$

где μ_i — меры Радона, интегралы берутся по подмножествам V_i нулевого множества характеристического многочлена P , ∂_i — дифференциальные операторы в частных производных по $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тесно связанные с алгебраическими свойствами многочлена P . Этот факт был независимо установлен в 1961 году Л. Эренпрайсом [41], [42] и В. Паламоновым [43], [44] и стал известен в литературе как фундаментальный принцип. В работах [45], [46], [47] фундаментальный принцип был распространен на многомерные уравнения свертки, а в [48] — даже на системы сверточных уравнений с несколькими неизвестными функциями. При этом речь уже идет о разложении решений в бесконечные ряды (со скобками) вида (2), где V_i — подмножества аналитического множества, связанного с характеристическими элементами рассматриваемой системы уравнений. Если в результатах, относящихся к n переменным, положить $n = 1$, то, как правило, получаются результаты либо тривиальные (теоремы Эренпрайса–Паламонова), либо излишне отягощенные ограничениями (например, результаты Беренштейна–Тейлора [46], связанные с понятием медленно убывающих целых функций). Это происходит из-за более простого строения целых функций одной переменной. В частности, возможность факторизации позволяет обходить препятствия, часто непреодолимые в случае нескольких переменных [49]. В случае одной переменной фундаментальный принцип как по форме, так и по содержанию, можно продвинуть значительно дальше. Об этом свидетельствуют известные результаты о разложении периодических в среднем функций одной переменной, в которых содержится не только конструктивное построение ряда из элементарных решений [38, гл. IV], но и детально прослеживаются свойства этих рядов — геометрия области сходимости [38, гл. IV], оценка остаточного члена [38, гл. IV], теоремы единственности [38, гл. IV], [50]. Подпространство аналитических решений однородного уравнения свертки является инвариантным относительно оператора дифференцирования, а элементарные решения представляют собой корневые элементы данного оператора. Это обстоятельство позволяет трактовать фундаментальный принцип с общих позиций инвариантных подпространств.

Пусть H — некоторое отделимое локально выпуклое пространство. В H действует линейный непрерывный оператор D , спектр которого заполняет всю комплексную плоскость; W — замкнутое подпространство H , инвариантное относительно D , т.е.

$$f \in W \implies Df \in W.$$

- 1°. $\text{Im } p_\lambda = W(\lambda)$;
- 2°. $p_\lambda^2 = p_\lambda$;
- 3°. p_λ коммутирует с D .

$$f \sim \sum p_\lambda(f). \quad (3)$$

В настоящей статье фундаментальный принцип исследуется в конкретной ситуации, когда H есть топологическое произведение

обычных пространств аналитических функций, соответственно, в областях (или даже в открытых множествах) $G_1, \dots, G_q \subset \mathbb{C}$, а D – оператор покомпонентного дифференцирования

$$f = (f_1, \dots, f_g) \rightarrow Df := (f'_1, \dots, f'_g).$$

В дальнейшем упорядоченную систему $G = (G_1, \dots, G_q)$ из q областей $G_1, \dots, G_q \subset \mathbb{C}$ удобно кратко называть q -областью; сходимости последовательности элементов $f^{(n)}$ к f в топологии H будем называть *равномерной сходимостью внутри q -области G* . Рассмотрим замкнутое подпространство $W \subset H$, инвариантное относительно дифференцирования. В частности, в качестве W можно взять подпространство решений $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ системы сверточных уравнений [51]

$$\begin{cases} S_1^{(1)} * f_1 + \cdots + S_q^{(1)} * f_q = 0, \\ \vdots \\ S_1^{(m)} * f_1 + \cdots + S_q^{(m)} * f_q = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $S_j^{(i)}$ – линейный непрерывный функционал на $H(G_j)$, $i = 1, \dots, m$, m – число уравнений, $j = 1, \dots, q$, q – число неизвестных функций. Пространство H^* , сопряженное к H , представляет собой топологическое произведение

$$H^*(G_1) \times \cdots \times H^*(G_g),$$

где $H^*(G_i)$ – пространство, сопряженное к $H(G_i)$. Каждому функционалу $S = (S_1, \dots, S_q) \in H^*$ соответствует его характеристический элемент

$$\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_q(\lambda)),$$

где $\varphi_i(\lambda) = \langle S_i, e^{\lambda z} \rangle$ – характеристическая функция функционала $S_i \in H^*(G_i)$. Когда функционал S пробегает H^* , его характеристический элемент пробегает класс $P = P(G)$ q -функций $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$. Этот класс обладает структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\lambda]$ и наделяется локально выпуклой топологией, индуцируемой из H^* отображением $T: H^* \rightarrow P$, которое функционал S переводит в его характеристический элемент φ . Каждому замкнутому инвариантному подпространству $W \subset H$ соответствует его аннуляторный подмодуль $I = \text{An } W \subset P$, именно, $I = T(W^0)$, где W^0 – подпространство в H^* , “ортогональное” W ,

$$W^0 = \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \quad \forall f \in W\}.$$

Реализация фундаментального принципа существенным образом зависит от ранга аннуляторного подмодуля I [51, §2]. В этой статье мы исследуем случай, когда ранг I полный, т.е. равен q . По аналогии с системами сверточных уравнений вида (4), когда $m \geq q$, инвариантные подпространства с аннуляторными подмодулями полного ранга мы называем *переопределенными*. Для таких подпространств множество Λ точек λ , для которых $W(\lambda) \neq \{0\}$, дискретно. В этом случае для каждого $\lambda_i \in \Lambda$ существует единственный элементарный проектор $p_{\lambda_i}: W \rightarrow W(\lambda_i)$. Таким образом, каждому элементу $f \in W$ можно поставить в соответствие стандартный ряд

$$\sum_{\lambda_i \in \Lambda} p_i(f). \quad (5)$$

Основная цель статьи – сформулировать условия сходимости ряда (5) (или подпоследовательности частичных сумм этого ряда) к элементу f для любого f из W . Эти условия включают специальные оценки вдоль расширяющейся системы замкнутых контуров $\{\Gamma_n\}$, которым должны удовлетворять системы элементов из аннуляторного подмодуля $I = \text{An } W$. Сходимость будет равномерной внутри некоторой q -области $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_q)$, содержащейся в G , т.е. $\Omega_i \subset G_i$, $i = 1, \dots, q$. Геометрия Ω полностью определяется упомянутыми оценками и q -областью G . Если элемент f допускает аналитическое продолжение в более широкую q -область $G' \supset G$, то и сходимость распространяется в более широкую q -область $\Omega' \supset \Omega$, геометрия которой также определяется теми же оценками и q -областью G' . Этот результат распространяется и на более общий случай произвольной системы $G = (G_1, \dots, G_q)$ открытых множеств.

Краткое содержание первой (I) части работы. В §2 дается описание ситуации, в которой развивается фундаментальный принцип; вводятся терминология и понятия (спектральный синтез, аннуляторный подмодуль, локальный подмодуль, обильность), которые используются на протяжении всей статьи.

Если в задачах спектрального синтеза основную роль играет класс обильных подмодулей, то в задачах, относящихся к фундаментальному принципу, решающую роль играют более широкие классы устойчивых (п. 3.1) и квазиустойчивых (п. 4.1) подмодулей; точнее, реализация фундаментального принципа на системе

$G = (G_1, \dots, G_q)$ открытых множеств возможна только для инвариантных подпространств W , у которых аннуляторный подмодуль I устойчив, если G_i – связны, и квазиустойчив, если хотя бы одно G_i не связно. Систематическое развитие теории требует привлечения двух фактов о подмодулях:

- 1) замыкание устойчивого подмодуля – устойчивый подмодуль (теорема 3.5);
- 2) замыкание квазиустойчивого подмодуля – квазиустойчивый подмодуль (теорема 4.11).

Доказательство этих фактов составляет основное содержание §§ 3, 4 первой части. Их доказательства опираются на специальное свойство непрерывности, проявляемое модулем $P(G)$ при делении на двучлены $\lambda - \lambda_0$ (см. п. 3.1, п. 4.1). В случае, когда G_i , $i = 1, \dots, q$, – области, это свойство исследуется в § 3 (теорема 3.3); в случае когда G_i – открытые множества с конечным числом компонент связности, соответствующее свойство исследуется в § 4 (теорема 4.9).

Хотя развиваемые нами методы основаны на специфике аналитических функций одной переменной, мы надеемся, что некоторые результаты этой статьи могут подсказать гипотетические перспективы развития соответствующей теории для функций многих переменных.

Автор выражает благодарность Академии наук Республики Башкортостан и Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку при работе над этой статьей.

§ 2. Обозначения и предварительные сведения

2.1. Пространства и модули, ассоциированные с открытыми множествами. Пусть G – открытое множество в $\mathbb{C}$, $H = H(G)$ – пространство функций, голоморфных в G , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Пространство H является пространством типа (M^*) [52] и как таковое является бочечным [53, гл. IV], борнологическим [53, гл. V] и рефлексивным [53, гл. IV]. В дальнейшем H будем называть *пространством, ассоциированным с множеством G* . Пусть H^* – пространство сильное сопряженное к H . Каждому функционалу $S \in H^*$ поставим в соответствие его характеристическую функцию $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle$. Когда S пробегает H^* , φ пробегает класс целых функций экспоненциального типа $P = P(G)$. Этот класс обладает структурой модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\lambda]$ и наделяется топологией, индуцируемой из H^* отображением $T: S \rightarrow \varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle$. Класс P называется *модулем, ассоциированным с областью G* , а отображение $T: H^* \rightarrow P$ – *каноническим отображением*. Отображение T будет взаимно однозначным тогда и только тогда, когда система всех экспонент $\{e^{\lambda z}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, полна в H или, что то же самое, множество многочленов плотно в H . По известной теореме Рунге [54, гл. III] это будет иметь место, если дополнение G до расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ связно. Для сокращения формулировок открытое множество в $\mathbb{C}$ со связным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *множеством Рунге*. Из способа введения топологии в P следует, что если G – множество Рунге, то каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм; в общем случае каноническое отображение T непрерывно и открыто.

2.2. Определение q -множеств. В дальнейшем мы будем иметь дело с упорядоченными системами $G = (G_1, \dots, G_q)$ множеств $G_1, \dots, G_q \subset \mathbb{C}$. Для сокращения формулировок введем следующую терминологию. Упорядоченную систему

$K = (K_1, \dots, K_q)$ множеств $K_1, \dots, K_q \subset \mathbb{C}$ будем называть q -множеством. Далее, K – *открытое q -множество*, если все компоненты K_i – открытые множества; K – *q -множество Рунге*, если все K_i – множества Рунге; K – (*односвязная, выпуклая*) q -*область*, если все K_i – (односвязные, выпуклые) области; наконец, K – (*выпуклый*) q -*компакт*, если все K_i – (выпуклые) компакты.

По отношению к q -множествам теоретико-множественное отношение включения, операции объединения и пересечения имеют покомпонентный смысл. Таким образом, отношение включения $K \subset K'$ для q -множеств $K = (K_1, \dots, K_q)$ и $K' = (K'_1, \dots, K'_q)$ означает, что $K_i \subset K'_i$, $i = 1, \dots, q$. Аналогично, соотношения

$$K = \bigcup K^{(\alpha)}, \quad K = \bigcap K^{(\alpha)}$$

означают соответствующие соотношения для компонент

$$K_i = \bigcup K_i^{(\alpha)}, \quad K_i = \bigcap K_i^{(\alpha)}, \quad i = 1, \dots, q.$$

2.3. Пространства, ассоциированные с открытыми q -множествами.

Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$ – открытое q -множество; $H = H(G_1) \times \dots \times H(G_q)$ – топологическое произведение пространств $H(G_1), \dots, H(G_q)$, ассоциированных, соответственно, с множествами $G_1, \dots, G_q$. Как топологическое произведение этих пространств H наследует их свойства: оно является монтелевским пространством Фреше, бочечным, борнологическим и рефлексивным. Пространство H будем называть *пространством, ассоциированным с открытым q -множеством G* . Элементами H являются векторы $f = (f_1, \dots, f_q)$ с компонентами $f_i \in H(G_i)$.

Опишем сходимость в топологии H . Пусть $K = (K_1, \dots, K_q)$ – q -компакт в G , т.е. $K \subset G$ (см. п. 2.2). Последовательность элементов

$$f^{(n)} = (f_1^{(n)}, \dots, f_q^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

сходится к элементу $f = (f_1, \dots, f_q)$ равномерно на K , если $f_i^{(n)} \rightarrow f_i$ равномерно на K_i для $i = 1, \dots, q$. Сходимость последовательности (1) к элементу f в топологии H равносильна сходимости этой последовательности к элементу f равномерно внутри G , т.е. равномерной сходимости на любом q -компакте $K \subset G$. Чтобы указать зависимость компонент элемента $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ от соответствующих переменных, правильно было бы использовать запись $(f_1(z), \dots, f_q(z))$, где $z_1 \in G_1, \dots, z_q \in G_q$. Однако в рамках этой статьи более удобно использовать символическую запись $f(z) = (f_1(z), \dots, f_q(z))$, где неявно предполагается, что в i -й компоненте переменная z принимает значения из G_i независимо от значений z в других компонентах. Проиллюстрируем удобство такого соглашения: q -одночлен степени k , т.е. элемент $(a_1 z_1^k, \dots, a_q z_q^k)$, записывается символически в виде $a z^k$, где $a = (a_1, \dots, a_q)$ и умножение вектора a на степенную функцию z^k производится покомпонентно; q -многочлен степени n , т.е. элемент вида $(p_1(z_1), \dots, p_q(z_q))$, где p_i – многочлены, $\max_{i=1, \dots, q} \deg p_i = n$, допускает запись в виде комбинации q -одночленов

$$a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^q;$$

наконец, *элементарный* $\exp$ - q -многочлен степени n , т.е. элемент вида

$$(p_1(z_1)e^{\lambda z_1}, \dots, p_q(z_q)e^{\lambda z_q}), \quad \max \deg p_i = n,$$

допускает символическую запись $p(z)e^{\lambda z}$, где $p(z)$ – q -многочлен и экспонента $e^{\lambda z}$ умножается на q -многочлен p покомпонентно. Конечную сумму элементарных $\exp$ - q -многочленов будем называть $\exp$ - q -многочленом.

2.4. Анализ и синтез. В пространстве H действует оператор D покомпонентного дифференцирования

$$f = (f_1, \dots, f_q) \rightarrow Df = (f'_1, \dots, f'_q).$$

Элемент e из H называется *корневым элементом, отвечающим λ* , если e удовлетворяет уравнению вида

$$(D - \lambda E)^n = 0, \quad (2)$$

где E – тождественный оператор, n – целое число большее или равное 1. В дальнейшем нас будут интересовать только целые корневые элементы, т.е. элементы, у которых компоненты – целые функции. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что такие решения уравнения (2) представляют собой элементарные $\exp$ - q -многочлены с показателем λ степени меньшей n .

Подпространство W в H назовем *инвариантным*, если оно инвариантно относительно дифференцирования, т.е. $f \in W \Rightarrow Df \in W$. В дальнейшем, если противное не оговорено, всегда предполагается, что инвариантное подпространство замкнуто. Задача описания запаса элементарных $\exp$ - q -многочленов, содержащихся в W , называется *задачей спектрального анализа*. Описание этого запаса осуществляется с помощью спектра инвариантного подпространства. Обозначим $\mathbb{C}^q[\xi]$ совокупность всех q -многочленов переменной ξ , т.е. совокупность всех выражений вида

$$a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n, \quad a_i \in \mathbb{C}^q.$$

Очевидно, $\mathbb{C}^q[\xi]$ обладает структурой модуля над $\mathbb{C}[\xi]$. Фиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$. *Локальный спектр W* в точке λ определяется как множество

$$\text{Sp}_\lambda W := \{p \in \mathbb{C}^q[\xi] : p(z)e^{\lambda z} \in W\}.$$

Здесь $p(z)e^{\lambda z}$ – символическая запись элементарного $\exp$ - q -многочлена (см. п. 2.3). Локальный спектр обладает следующими свойствами:

- 1°. если $p_1, p_2 \in \text{Sp}_\lambda W$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то $c_1p_1 + c_2p_2 \in \text{Sp}_\lambda W$;
- 2°. если $W \subset W'$, то $\text{Sp}_\lambda W \subset \text{Sp}_\lambda W'$;
- 3°. если $p \in \text{Sp}_\lambda W$, то $p' \in \text{Sp}_\lambda W$, где p' – производная q -многочлена p .

Проверка последнего свойства основана на инвариантности W : если $p \in \text{Sp}_\lambda W$, т.е. $p(z)e^{\lambda z} \in W$, то

$$Dp(z)e^{\lambda z} = p'(z)e^{\lambda z} + \lambda p(z)e^{\lambda z} \in W,$$

откуда следует $p'(z)e^{\lambda z} \in W$, т.е. $p' \in \text{Sp}_\lambda W$.

Спектр W определяется как дизъюнктивное объединение локальных спектров

$$\text{Sp } W := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Sp}_\lambda W.$$

Спектр W можно представить как совокупность всевозможных пар (λ, p) , $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}^q[\xi]$, для которых $p(z)e^{\lambda z} \in W$. Инвариантное подпространство W *допускает спектральный синтез*, если W совпадает с замыканием линейной оболочки целых корневых элементов оператора D , содержащихся в W , т.е. каждый элемент

2.6. Схема двойственности. В этом пункте будем предполагать, что G – q -множество Рунге и, следовательно, каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм. *Подмодулем* $\mathbb{C}[\lambda]$ -модуля P называется подмножество, обладающее свойствами:

- 1°. $\varphi_1, \varphi_2 \in I \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in I$;
- 2°. $\varphi \in I, p \in \mathbb{C}[\lambda] \Rightarrow \varphi p \in I$.

Существует связь между замкнутыми подмодулями $I \subset P$ и замкнутыми инвариантными подпространствами $W \subset H$. Эта связь устанавливается следующим образом. Пусть W – инвариантное подпространство в H . Рассмотрим подпространство в H^* , ортогональное W ,

$$W^0 = \{S \in H^* : \langle S, f \rangle = 0 \ \forall f \in W\}.$$

В силу рефлексивности H подпространство W^0 замкнуто в H^* . Оказывается, что образ $I = T(W^0)$ обладает структурой замкнутого подмодуля в P [51, §1]. Обратно, в силу того, что в рассматриваемой ситуации каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм, каждому замкнутому подмодулю $I \subset P$ соответствует замкнутое инвариантное подпространство $W \subset H$, связанное с I соотношением $I = T(W^0)$. Подмодуль I называется *аннуляторным подмодулем* инвариантного подпространства W и обозначается $\text{An } W$. Соотношение $I = \text{An } W$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью $\{W\}$ всех инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подмодулей в P .

Инвариантным подпространствам, допускающим спектральный синтез, соответствуют замкнутые подмодули, обладающие специальным свойством. Чтобы описать это свойство, введем понятие локального подмодуля, порожденного подмодулем $I \subset P$. Пусть $O(\lambda)$ – кольцо ростков функций, аналитических в точке λ ; $O^q(\lambda)$ – совокупность ростков q -функций, аналитических в λ . Множество $O^q(\lambda)$ обладает структурой модуля над кольцом $O(\lambda)$. Фиксированный подмодуль $I \subset P$ порождает в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ локальный подмодуль $I(\lambda)$; последний состоит из всевозможных конечных линейных комбинаций элементов из I с коэффициентами из $O(\lambda)$. Элемент f из P принадлежит I локально, $f \in I_{\text{loc}}$, если $f \in I(\lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль I – *обильный*, если справедлива импликация

$$f \in P, f \in I_{\text{loc}} \Rightarrow f \in I.$$

В статье [51, §1, предложение 5] доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для того чтобы инвариантное подпространство $W \subset H$ допускало спектральный синтез необходимо и достаточно, чтобы его аннуляторный подмодуль был обильным.

2.7. Ранг и индекс. Система элементов $g^{(1)}, \dots, g^{(k)} \in O^q(\lambda)$ независима над кольцом $O(\lambda)$, если

$$\sum c_i g^{(i)} = 0, c_i \in O(\lambda) \Rightarrow c_i = 0.$$

Если J – подмножество $O^q(\lambda)$, то ранг J – максимальное число элементов в независимых системах $g^{(1)}, \dots, g^{(k)} \in J$. Всегда ранг $J \leq q$. Пусть I – подмодуль в P . Нетрудно проверить, что ранг локального подмодуля $I(\lambda)$ не зависит от λ [58, § 2]. Это число называется *рангом* I и обозначается $\text{Rank } I$. Система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in P$ называется *независимой*, если она независима хотя бы над одним кольцом $O(\lambda)$. Ранг I равен максимальному числу элементов в независимых системах $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$.

Будем представлять элемент $u \in P$ как вектор-столбец. Обозначим через $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ матрицу, составленную из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$. Рассмотрим минор

$$\begin{bmatrix} u^{(1)} & \dots & u^{(k)} \\ i_1 & \dots & i_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

этой матрицы, полученный выделением строк с номерами $i_1, \dots, i_k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q$. Независимость системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ равносильна тому, что ранг матрицы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ равен k , т.е. среди определителей вида (3) хотя бы один отличен от тождественного нуля [58, § 1]. Для элемента u из $O(\lambda)$ индекс u , $\text{Ind } u$, – кратность обращения в 0 этого элемента в точке λ . Если $u = 0$, то полагаем $\text{Ind } u = \infty$.

Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, k \leq q$, – система элементов из $O^q(\lambda)$. *Индекс системы* $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$, $\text{Ind}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$, – это наименьший индекс всех миноров (3) k -го порядка матрицы $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$. Если система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ зависима над $O(\lambda)$, то полагаем $\text{Ind}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) = \infty$.

Пусть J – подмножество в $O^q(\lambda)$ ранга k . *Индекс* J , $\text{Ind } J$, определяется как минимум индексов всевозможных систем $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ элементов из J . Пусть I – подмодуль в $O^q(\lambda)$ ранга k , $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ – независимая система элементов из I . Система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ порождает I , если каждый элемент u из I может быть представлен в виде конечной комбинации

$$u = \sum c_i u_i, \quad c_i \in O(\lambda).$$

В статье [58, § 2] доказано

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для того чтобы система $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ порождала I необходимо и достаточно, чтобы эта система реализовала индекс I , т.е. чтобы выполнялось условие

$$\text{Ind}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) = \text{Ind } I.$$

Определим индекс подмодуля $I \subset P$ в точке λ . *Индекс целой функции* f в точке λ , $\text{Ind}_\lambda f$, есть кратность обращения в нуль этой функции в точке λ . Если $f \equiv 0$, то полагаем $\text{Ind}_\lambda f = \infty$. Пусть $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ система целых q -функций, $k \leq q$. *Индекс системы* $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ в точке λ , $\text{Ind}_\lambda(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$, есть наименьший индекс в точке λ миноров k -го порядка (3) матрицы $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$, составленной из векторов-столбцов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$. Пусть I – подмодуль в P ранга k . *Индекс подмодуля* I в точке λ , $\text{Ind}_\lambda I$, определяется как наименьший индекс в точке λ всевозможных систем $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$, составленных из элементов I . С помощью процитированного выше утверждения о порождающих системах нетрудно показать, что

$$\text{Ind}_\lambda I = \text{Ind } I(\lambda).$$

Величина $\text{Ind}_\lambda I$ зависит от λ . Множество $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ind}_\lambda I > 0\}$ называется *индексным множеством подмодуля I* . Индексное множество представляет собой последовательность точек $\{\lambda_i\}$ с конечной верхней плотностью

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} < \infty,$$

где $n(t)$ — считающая функция последовательности $\{\lambda_i\}$. Это следует из того, что Λ — часть нулевого множества целой функции экспоненциального типа, представимой в виде (3).

§ 3. Устойчивость

3.1. Устойчивость модулей и подмодулей. Пусть P — модуль, ассоциированный с односвязной q -областью $G = (G_1, \dots, G_q)$ (см. п. 2.5). Если области $G_1, \dots, G_q$ — выпуклые, то пространство P является *равномерно устойчивым* [51, § 2], [58]: для любой окрестности нуля $V \subset P$ существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что справедлива импликация

$$\varphi \in U, \lambda - \lambda_0 \mid \varphi \implies \frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in V.$$

Здесь запись $\lambda - \lambda_0 \mid \varphi$ означает, что двучлен $\lambda - \lambda_0$ делит $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$, т.е. каждая из компонент $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ обращается в нуль в точке λ_0 . Если хотя бы одна из областей G_i выпуклой не является, то пространство P уже не является равномерно устойчивым [51, § 2]. Тем не менее равномерность устойчивости, хотя и в ослабленной форме, для областей сохраняется. Рассмотрим какое-либо локально выпуклое пространство P целых q -функций.

Пространство P называется *локально равномерно устойчивым*, если для любой окрестности нуля $V \subset P$ и любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует окрестность нуля $U \subset P$, для которой справедлива импликация

$$f \in U, \lambda_0 \in K, \lambda - \lambda_0 \mid f \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in V.$$

Локально равномерная устойчивость влечет локальную устойчивость [62, § 2]: для любого ограниченного множества $B \subset P$ и компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует ограниченное множество $B' \subset P$ такое, что

$$f \in B, \lambda_0 \in K, \lambda - \lambda_0 \mid f \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in B'.$$

В этом параграфе мы установим, что модуль, ассоциированный с любой q -областью, является локально равномерно устойчивым.

Подмодуль $I \subset P$ называется *устойчивым* [58, § 1], если для него справедлива импликация

$$f \in I, \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0) \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I.$$

Опираясь на факт локально равномерной устойчивости P , мы докажем, что замыкание устойчивого подмодуля — снова устойчивый подмодуль.

3.2. Независимость от стирания дыр. Для каждого открытого множества $G \subset \mathbb{C}$ существует наименьшее множество Рунге G' , содержащее G (п. 2.1). Это множество получается из G “стиранием дыр”. Если сформулировать более корректно, G' совпадает с $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, где D – компонента связности $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$, содержащая бесконечно удаленную точку. Если G – множество Рунге, то каноническое отображение $T: H^*(G) \rightarrow P(G)$ – топологический изоморфизм (п. 2.5). Если G не есть множество Рунге, то T изоморфизмом уже не будет; ядро этого отображения не пусто – оно состоит из функционалов, обращающихся в нуль на функциях, допускающих аналитические продолжения на “дыры” множества G , т.е. голоморфных на наименьшем множестве Рунге, содержащем G . Это неприятное обстоятельство компенсируется следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть G' – открытое q -множество, G – наименьшее q -множество Рунге, содержащее G' . Тогда модули P, P' , ассоциированные, соответственно, с G, G' , идентичны.

Предварительно докажем утверждение для случая $q = 1$.

ЛЕММА. Пусть G' – открытое множество в $\mathbb{C}$, G – наименьшее множество Рунге, содержащее G' . Тогда модули $P = P(G), P' = P(G')$, ассоциированные с G, G' , идентичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = H(G), H' = H(G')$ – пространства, ассоциированные с G, G' . Очевидно, что H непрерывно вложено в H' , причем вложение осуществляется отображением сужения $r: H \rightarrow H': f \rightarrow f|_{G'}$. Это отображение линейно, непрерывно и взаимно однозначно; более того, r – топологический мономорфизм. Последнее следует из того, что по принципу максимума модуля топология H совпадает с топологией, индуцируемой из H' . Рассмотрим сопряженное отображение $r^*: H'^* \rightarrow H^*$. Из теоремы Дьедонне–Шварца [59, § 12], следует, что r^* – топологический эпиморфизм. При этом, если $S = r^*(S')$, то

$$\langle S, f \rangle = \langle S', f \rangle \quad \forall f \in H.$$

Отсюда, в частности, следует, что характеристические функции

$$\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle, \quad \varphi'(\lambda) = \langle S', e^{\lambda z} \rangle$$

функционалов S, S' совпадают.

Поскольку отображение r^* эпиморфно, заключаем, что по запасу элементов пространства P и P' совпадают. Пусть $\mathcal{K}$ – ядро r^* . Из соотношения (1) легко вывести, что $\langle S', e^{\lambda z} \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $S' \in \mathcal{K}$. Последнее означает, что $\mathcal{K}$ совпадает с ядром канонического эпиморфизма $T': H'^* \rightarrow P'$.

Рассмотрим факторпространство $H'^*/\mathcal{K}$, наделенное фактортопологией топологии H'^* по $\mathcal{K}$. Поскольку $T': H'^* \rightarrow P'$ – топологический эпиморфизм, пространство P' топологически изоморфно $H'^*/\mathcal{K}$. С другой стороны, так как $T: H^* \rightarrow P$ – топологический изоморфизм, то сложное отображение $T \circ r^*: H^* \rightarrow P$ – топологический эпиморфизм с ядром $\mathcal{K}$. Отсюда следует, что P топологически изоморфно $H'^*/\mathcal{K}$.

Таким образом, мы установили, что пространства P и P' топологически изоморфны одному и тому же пространству $H'^*/\mathcal{K}$, т.е. топологически изоморфны друг другу. Поскольку уже известно, что запас элементов в этих пространствах один и тот же, пространства P и P' идентичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Пусть

$$G = (G_1, \dots, G_q), \quad G' = (G'_1, \dots, G'_q),$$

где G_i – наименьшее множество Рунге, содержащее G'_i . По лемме модули $P(G_i)$ и $P(G'_i)$ идентичны для любого $i = 1, \dots, q$; поэтому идентичны и топологические произведения

$$P = P(G_1) \times \dots \times P(G_q), \quad P' = P(G_1) \times \dots \times P(G_q).$$

СЛЕДСТВИЕ. Модуль P' , ассоциированный с открытым q -множеством G' , представляет собой пространство типа (ZN^*) , в частности, P' – отделимое полное бочечное борнотопологическое и рефлексивное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.1 P' топологически изоморфно пространству $H^*(G)$, где G – наименьшее q -множество Рунге, содержащее G' , а так как $H^*(G)$ является пространством типа (ZN^*) [52], то и P' есть пространство того же типа. Остается отметить, что пространства типа (ZN^*) обладают свойствами, перечисленными в формулировке следствия (см., например, [60, гл. XI]).

3.3. Локально равномерная устойчивость.

ТЕОРЕМА 3.2. Модуль P , ассоциированный с q -областью G , является локально равномерно устойчивым: для любой окрестности нуля $V \subset P$ и любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует окрестность нуля U , для которой выполняется импликация

$$\varphi \in U, \quad \lambda_0 \in K, \quad \lambda - \lambda_0 \mid \varphi \implies \frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in V. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала докажем, что модуль P вообще является устойчивым, т.е. справедлива импликация

$$\varphi \in P, \quad \lambda - \lambda_0 \mid \varphi \implies \frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in P. \quad (2)$$

Поскольку P есть произведение $P(G_1) \times \dots \times P(G_q)$ модулей, ассоциированных с областями $G_1, \dots, G_q$, соответственно, достаточно доказать импликацию (2) в случае $q = 1$. Итак, пусть G – область в $\mathbb{C}$, P – модуль, ассоциированный с G . По лемме модуль P идентичен модулю, ассоциированному с наименьшей односвязной областью, содержащей G . Поэтому без ограничения общности можем предположить, что G – односвязная область.

Пусть H – пространство, ассоциированное с G . Рассмотрим функцию $\varphi \in P$. Она является характеристической функцией некоторого функционала $S \in H^*$: $\varphi(\lambda) = \langle S, e^{\lambda z} \rangle$. Пусть для некоторой точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ двучлен $\lambda - \lambda_0$ делит φ , т.е. $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ – целая функция. Фиксируем точку $z_0 \in G$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \left\langle S, \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda - \lambda_0} \right\rangle \\ &= \left\langle S, e^{\lambda_0 z} \int_0^z e^{(\lambda - \lambda_0)t} dt \right\rangle \\ &= \left\langle S, e^{\lambda_0 z} \int_{z_0}^z e^{(\lambda - \lambda_0)t} dt \right\rangle. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, так как

$$\begin{aligned} \left\langle S, e^{\lambda_0 z} \int_0^{z_0} e^{(\lambda - \lambda_0)t} dt \right\rangle &= \langle S, e^{\lambda_0 z} \rangle \int_0^{z_0} e^{(\lambda - \lambda_0)t} dt \\ &= \varphi(\lambda_0) \int_0^{z_0} e^{(\lambda - \lambda_0)t} dt = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим функционал

$$S_{\lambda_0} : f \rightarrow \left\langle S, e^{\lambda_0 z} \int_{z_0}^z f(t) e^{-\lambda_0 t} dt \right\rangle,$$

где интеграл берется по любому пути в G с началом в z_0 и концом в $z \in G$. В силу односвязности G интеграл не зависит от выбора пути. Очевидно, что S_{λ_0} — линейный непрерывный функционал на H . Легко проверить, что

$$\langle S_{\lambda_0}, e^{\lambda z} \rangle = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Значит,

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \in P.$$

Импликация (2) доказана.

2) Приступим к доказательству локально равномерной устойчивости P . Поскольку P есть топологическое произведение пространств $P(G_1), \dots, P(G_q)$, пространство P будет локально равномерно устойчивым, если таковыми будут пространства $P(G_1), \dots, P(G_q)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $q = 1$. Итак, пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, $P = P(G)$, $H = H(G)$. Поляра

$$\pi(B) = \{S \in H^* : |\langle S, f \rangle| \leq 1 \ \forall f \in B\}$$

ограниченного множества $B \subset H$ является окрестностью нуля в H^* . Поляры всевозможных ограниченных множеств в H образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в H . Поэтому их образы относительно T , т.е. множества вида $V(B) = T(\pi(B))$, где B — ограничено в H , образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в P . На основании вышеизложенного доказательство сводится к следующему: для любого ограниченного множества $B \subset H$ нужно найти ограниченное множество $B' \subset H$ такое, что

$$\varphi \in V(B'), \ \lambda_0 \in K, \ \lambda - \lambda_0 \mid \varphi \implies \frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in V(B). \quad (3)$$

Приступим к доказательству этой импликации. Пусть B — ограниченное множество в H . Рассмотрим множество

$$B' = \left\{ F : F(z) = e^{\lambda_0 z} \int_{z_0}^z f(t) e^{-\lambda_0 t} dt, \ f \in B, \ \lambda_0 \in K \right\},$$

где z_0 — фиксированная точка в G , интеграл берется по пути в G с началом в z_0 и концом в z . Ограниченность множества B означает, что

$$\sup \{ |f(z)| : f \in B, \ z \in D \} < \infty$$

для любого компакта $D \subseteq G$. Используя этот факт, нетрудно проверить, что множество B' обладает аналогичным свойством:

$$\sup\{|F(z)| : F \in B', z \in D\} < \infty$$

для любого компакта $D \subseteq G$. Последнее означает, что множество B' ограничено в H .

Рассмотрим теперь множество $V(B') = T(\pi(B'))$. Пусть $\varphi \in V(B')$, $\lambda_0 \in K$, $\lambda - \lambda_0 \mid \varphi$. Функция φ является характеристической для функционала S из $\pi(B')$. Как было показано в п. 1) доказательства, $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ — характеристическая функция функционала

$$S_{\lambda_0}: f \rightarrow \langle S, F_{\lambda_0} \rangle,$$

где

$$F_{\lambda_0}(z) = e^{\lambda_0 z} \int_{z_0}^z f(t) e^{-\lambda_0 t} dt.$$

Пусть $f \in B$. Тогда $F_{\lambda_0} \in B'$ и, поскольку $S \in \pi(B')$, то $|\langle S_{\lambda_0}, f \rangle| = |\langle S, F_{\lambda_0} \rangle| \leq 1$. Это верно $\forall f \in B$. Значит, $S_{\lambda_0} \in \pi(B)$ и, следовательно,

$$\frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in V(B).$$

Тем самым для $q = 1$ импликация (3) доказана. В силу соображений, приведенных выше, эта импликация доказана для любого q .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть обобщенная последовательность $f^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, сходится к элементу f в топологии P . Если

$$\frac{f^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \in P, \quad \sigma \in \Sigma,$$

то $f/(\lambda - \lambda_0) \in P$ и обобщенная последовательность

$$\frac{f^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0}, \quad \sigma \in \Sigma,$$

сходится к $f/(\lambda - \lambda_0)$ в топологии P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\varphi^{(\sigma)} = \frac{f^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Покажем, что последовательность $\varphi^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, есть последовательность Коши в P . Пусть V — окрестность нуля в P . В силу локально равномерной устойчивости P (теорема 3.2), существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что справедлива импликация

$$F \in U, \lambda - \lambda_0 \mid F \implies \frac{F}{\lambda - \lambda_0} \in V. \quad (4)$$

Так как последовательность $f^{(\sigma)}$ — сходящаяся, то существует $\sigma_0 \in \Sigma$ такое, что при $\sigma', \sigma'' \succ \sigma_0$ выполняется включение

$$f^{(\sigma')} - f^{(\sigma'')} \in U.$$

Кроме того, ясно, что $(\lambda - \lambda_0) \mid (f^{(\sigma')} - f^{(\sigma'')})$. В силу импликации (4) имеем

$$\varphi^{(\sigma')} - \varphi^{(\sigma'')} = \frac{f^{(\sigma')} - f^{(\sigma'')}}{\lambda - \lambda_0} \in V.$$

Поскольку это верно для любой окрестности нуля V , последовательность $\varphi^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, является последовательностью Коши. Согласно следствию предложения 3.1 P – полное пространство; поэтому последовательность $\varphi^{(\sigma)}$ сходится в P к некоторому элементу $\varphi \in P$. Так как умножение на многочлены, в частности, на двучлен $\lambda - \lambda_0$, непрерывно в P , то последовательность $f^{(\sigma)} = (\lambda - \lambda_0)\varphi^{(\sigma)}$ будет сходиться к $(\lambda - \lambda_0)\varphi$. С другой стороны, последовательность $f^{(\sigma)}$ сходится к f . На основании отделимости пространства P заключаем, что $f = (\lambda - \lambda_0)\varphi$, т.е. $f/(\lambda - \lambda_0) \in P$. Тем самым доказано, что

$$\frac{f^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} = \varphi^{(\sigma)} \rightarrow \varphi = \frac{f}{\lambda - \lambda_0}$$

в топологии P .

3.4. Устойчивость подмодулей. Пусть I – подмодуль в P , $I(\lambda_0)$ – локальный подмодуль, порожденный I в точке λ_0 (п. 2.6). Подмодуль I *устойчив в точке* λ_0 , если

$$f \in I, \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0) \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I.$$

Подмодуль *устойчив*, если он устойчив в любой точке.

ЛЕММА. Пусть $f^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, – обобщенная последовательность элементов из подмодуля $I \subset P$, сходящаяся к элементу f в топологии P . Тогда для любой точки λ_0 существуют независимая над $O(\lambda_0)$ система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$ и окрестность ω точки λ_0 такие, что в ω имеют место представления

$$f = \sum_{p=1}^k c_p u^{(p)}, \quad (5)$$

$$f^{(\sigma)} = \sum_{p=1}^k c_p^{(\sigma)} u^{(p)}, \quad (6)$$

где $c_p, c_p^{(\sigma)}$ голоморфны в ω и $c_p^{(\sigma)} \rightarrow c_p$ равномерно внутри ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I(\lambda_0)$ – локальный подмодуль, порождаемый I в точке λ_0 . Известно (п. 2.7), что существует независимая система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$, порождающая $I(\lambda_0)$. Поэтому имеют место представления (6), где $c_p^{(\sigma)} \in O(\lambda_0)$. В силу независимости системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ коэффициенты $c_p^{(\sigma)}$ в (6) определяются по правилу Крамера: $c_p^{(\sigma)} = \Delta_p(f^{(\sigma)})/\Delta$, где Δ – некоторый минор k -го порядка матрицы, составленной из векторов-столбцов элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ и отличный от тождественного нуля, а определитель $\Delta_p(f^{(\sigma)})$ получается из определителя Δ заменой p -го столбца на столбец из соответствующих компонент $f^{(\sigma)}$.

Пусть ω – открытая окрестность точки λ_0 , не содержащая нулей Δ , отличных от λ_0 . Поскольку проекционные отображения $p_i: P \rightarrow P(G_i)$ непрерывны, сходимость $f^{(\sigma)} \rightarrow f$ влечет сходимость $f_i^{(\sigma)} \rightarrow f_i$ компонент для каждого $i = 1, \dots, q$. Далее, топология $P(G_i)$ сильнее топологии равномерной сходимости на компактах; поэтому $\Delta_p(f^{(\sigma)}) \rightarrow \Delta_p(f)$ равномерно на компактах. Так как в ω нет нулей Δ , отличных от λ_0 , и отношение $\Delta_p(f^{(\sigma)})/\Delta$ голоморфно в окрестности λ_0 , то последовательность функций $c_p^{(\sigma)} = \Delta_p(f^{(\sigma)})/\Delta$ будет сходиться к $c_p = \Delta_p(f)/\Delta$ равномерно внутри ω . Очевидно, что

$$f^{(\sigma)} = \sum c_p^{(\sigma)} u^{(p)} \rightarrow \sum c_p u^{(p)}$$

равномерно внутри ω . С другой стороны, $f^{(\sigma)} \rightarrow f$ также равномерно внутри ω . Отсюда следует, что в ω выполняется соотношение (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть I – замыкание подмодуля I в P . Тогда подмодули $I(\lambda_0)$, $\bar{I}(\lambda_0)$, порождаемые I и $\bar{I}$ в точке λ_0 , совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\bar{I}(\lambda_0) \supset I(\lambda_0)$ следует из включения $\bar{I} \supset I$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим произвольный элемент $f \in \bar{I}$. Так как f принадлежит замыканию I , то существует обобщенная последовательность $f^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, сходящаяся к f в P . По лемме имеет место локальное представление (5), где $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$. Это значит, что $f \in I(\lambda_0)$. Итак, $f \in \bar{I} \Rightarrow f \in I(\lambda_0)$. Пусть теперь $f \in \bar{I}(\lambda_0)$, т.е. имеет место представление

$$f = \sum c_p u^{(p)},$$

где $u^{(p)} \in \bar{I}$, $c_p \in O(\lambda_0)$. По доказанному включения $u^{(p)} \in \bar{I}$ влекут $u^{(p)} \in I(\lambda_0)$. Значит, $f \in I(\lambda_0)$. Тем самым установлено включение $\bar{I}(\lambda_0) \subset I(\lambda_0)$. Таким образом, $\bar{I}(\lambda_0) = I(\lambda_0)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Замыкание устойчивого подмодуля $I \subset P$ – устойчивый подмодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим устойчивый подмодуль $I \subset P$; пусть I – его замыкание. Фиксируем произвольный элемент $f \in \bar{I}$, для которого

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in \bar{I}(\lambda_0). \quad (7)$$

Согласно предложению 3.3 $\bar{I}(\lambda_0) = I(\lambda_0)$; поэтому (7) равносильно включению

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0).$$

Так как f принадлежит замыканию I , то существует обобщенная последовательность $f^{(\sigma)}$, $\sigma \in \Sigma$, элементов из I , сходящаяся к f в топологии P . По лемме существует независимая над $O(\lambda_0)$ система элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ из I такая, что в некоторой окрестности ω точки λ_0 имеют место представления

$$f = \sum_{p=1}^k c_p u^{(p)}, \quad (8)$$

$$f^{(\sigma)} = \sum_{p=1}^k c_p^{(\sigma)} u^{(p)}, \quad (9)$$

где $c_p, c_p^{(\sigma)}$ голоморфны в ω и $c_p^{(\sigma)} \rightarrow c_p$ равномерно внутри ω . Также, поскольку по условию $f/(\lambda - \lambda_0) \in I(\lambda_0)$, имеет место представление

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \sum_{p=1}^k d_p u^{(p)}, \quad (10)$$

где d_p голоморфны в некоторой окрестности λ_0 , которую можем предполагать совпадающей с ω . В силу независимости системы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ представления (8)–(10) единственные. Умножая обе части (10) на $\lambda - \lambda_0$, получим

$$f = \sum_{p=1}^k (\lambda - \lambda_0) d_p u^{(p)}.$$

Сравнение с представлением (8) дает $c_p = (\lambda - \lambda_0) d_p$, т.е. $c_p(\lambda_0) = 0, p = 1, \dots, k$. Из того, что $c_p^{(\sigma)} \rightarrow c_p$ внутри ω следует, что $c_p^{(\sigma)}(\lambda_0) \rightarrow 0$. Отсюда имеем, что обобщенная последовательность

$$l^{(\sigma)} = \sum_{p=1}^k c_p^{(\sigma)}(\lambda_0) u^{(p)}$$

сходится к нулю в топологии P , а “подправленная” последовательность $F^{(\sigma)} = f^{(\sigma)} - l^{(\sigma)}$ по-прежнему сходится к f . Так как $l^{(\sigma)} \in I$, то и $F^{(\sigma)} \in I$; более того, из локального представления

$$\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^{(\sigma)} - c_i^{(\sigma)}(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} u^{(i)}$$

следует, что

$$\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0).$$

Поскольку по условию подмодуль I устойчив,

$$\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \in I.$$

Итак, обобщенная последовательность $\{F^{(\sigma)}\}$ сходится к f в P и при этом

$$\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \rightarrow \frac{f}{\lambda - \lambda_0}.$$

Отсюда, по следствию к теореме 3.2

$$\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \rightarrow \frac{f}{\lambda - \lambda_0}$$

в топологии P . Поскольку все члены последовательности

$$\left\{ \frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \right\}, \quad \sigma \in \Sigma,$$

принадлежат I , ее предел $f/(\lambda - \lambda_0)$ принадлежит замыканию $\bar{I}$. Тем самым, устойчивость установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное выше доказательство применимо к любому модулю P , удовлетворяющему условию локально равномерной устойчивости. Более того, анализ доказательства показывает, что это условие можно заменить более слабым: для любой окрестности нуля $V \subset P$ и любого компакта K существует окрестность нуля $U \subset P$, для которой справедлива импликация

$$F \in U, \quad \lambda_0 \in K, \quad \frac{F}{\lambda - \lambda_0} \in P \Rightarrow \frac{F}{\lambda - \lambda_0} \in V.$$

Действительно, в процессе доказательства импликация локально равномерной устойчивости (1) применяется к членам последовательности $\{F^{(\sigma)}\}$, относительно которых заведомо известно, что $\frac{F^{(\sigma)}}{\lambda - \lambda_0} \in P$.

Для равномерно устойчивых пространств утверждение, аналогичное теореме 3.4, доказано в [61, предложение 4.6]. Доказательство [61] сохраняет силу, если везде в рассуждениях равномерную устойчивость заменить на локально равномерную. Подобным же образом переносится на локально равномерные пространства следующее утверждение [61, предложение 4.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть P – локально равномерное пространство и I – замкнутый подмодуль в P . Если I устойчив в одной точке λ_0 , то I устойчив и в любой другой точке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пересечение семейства устойчивых подмодулей – устойчивый подмодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{I^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, – семейство устойчивых подмодулей. Нужно показать, что пересечение $I = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} I^{(\alpha)}$ – устойчивый подмодуль. Предварительно докажем следующее утверждение. Пусть $I(\lambda_0)$, $I^{(\alpha)}(\lambda_0)$ – локальные подмодули, порожденные I , $I^{(\alpha)}$ в точке λ_0 . Тогда

$$I(\lambda_0) \subset \bigcap I^{(\alpha)}(\lambda_0). \quad (11)$$

Действительно, пусть $f \in I(\lambda_0)$. Существуют элементы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$ такие, что имеет место представление

$$f = \sum c_i u^{(i)}, \quad c_i \in O(\lambda_0).$$

Так как $u^{(i)} \in I \subset I^{(\alpha)}$, то $f \in I^{(\alpha)}(\lambda_0)$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ и, следовательно, $f \in \bigcap I^{(\alpha)}(\lambda_0)$. Тем самым включение (11) установлено.

Пусть теперь $F \in I$, $F/(\lambda - \lambda_0) \in I(\lambda_0)$. Нужно показать, что $F/(\lambda - \lambda_0) \in I$. Имеем $F/(\lambda - \lambda_0) \in I^{(\alpha)}$, так как $I \subset I^{(\alpha)}$.

Кроме того, в силу (11) $F/(\lambda - \lambda_0) \in I^{(\alpha)}(\lambda_0)$. Поскольку по условию подмодуль $I^{(\alpha)}$ – устойчивый, заключаем, что $F/(\lambda - \lambda_0) \in I^{(\alpha)}$. Это верно для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Поэтому

$$\frac{F}{\lambda - \lambda_0} \in \bigcap I^{(\alpha)} = I.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 3.6 следует, что для любого подмодуля $I \subset P$ существует наименьший замкнутый устойчивый подмодуль J , содержащий I ; он представляет собой пересечение всех замкнутых устойчивых подмодулей, содержащих I . С помощью теоремы 3.4 этот подмодуль можно описать и с другой стороны; он представляет собой замыкание в P множества I_0 всех элементов из P вида $(p/q)f$, где p, q — многочлены, $f \in I$ и

$$\frac{p}{q}f \in I_{\text{loc}}$$

(п. 2.6). Действительно, любой устойчивый подмодуль, содержащий I , будет одновременно содержать I_0 ; с другой стороны, легко проверить, что I_0 — устойчивый подмодуль; по теореме 3.4 его замыкание $\bar{I}_0$ — снова устойчивый подмодуль. Из вышесказанного следует, что $\bar{I}_0$ — наименьший замкнутый устойчивый подмодуль, содержащий I .

§ 4. Квазиустойчивость

4.1. Мотивация. Если открытое множество G несвязно, то модуль $P(G)$, ассоциированный с G , уже не является устойчивым, иными словами существует функция $\varphi \in P(G)$, $\varphi(\lambda_0) = 0$, но при этом

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \notin P(G).$$

Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть G представляет собой объединение двух непересекающихся кругов

$$D_1 = \{z : |z - a_1| < \rho\}, \quad D_2 = \{z : |z - a_2| < \rho\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = e^{a_2(\lambda - \lambda_0)} - e^{a_1(\lambda - \lambda_0)}.$$

Функция φ является характеристической для функционала

$$S = e^{-a_2\lambda}\delta_{a_2} - e^{-a_1\lambda}\delta_{a_1},$$

где δ_a — функционал Дирака $f \rightarrow f(a)$. Поскольку $a_1, a_2 \in G$, функционал S является линейным и непрерывным на $H(G)$; поэтому $\varphi \in P(G)$. Более того, $\varphi(\lambda_0) = 0$, так что $\lambda - \lambda_0 \mid \varphi$. Утверждается, что

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \notin P(G).$$

Предположим противное, т.е. $\psi \in P(G)$. Тогда ψ является характеристической функцией некоторого функционала $\hat{S} \in H^*(G)$. Функционал $\hat{S}$ допускает интегральное представление

$$\langle \hat{S}, f \rangle = \int_K f(z) d\mu,$$

где K – компакт в G ; при этом можно предполагать, что дополнение K до $\overline{\mathbb{C}}$ связно. Функция γ , ассоциированная по Борелю с ψ [63, гл. 1, § 20], вычисляется по формуле

$$\gamma(\xi) = \left\langle \widehat{S}, \frac{1}{z - \xi} \right\rangle = \int_K \frac{d\mu}{z - \xi}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что γ – однозначная аналитическая функция вне K ; в частности, γ однозначна на границе $\Gamma_1 = \{z : |z - a_1| = \rho\}$ круга D_1 . С другой стороны, ψ является характеристической функцией функционала

$$\widehat{S}: f \rightarrow \int_{a_1}^{a_2} e^{-\lambda_0 z} f(z) dz.$$

Согласно общей формуле (1) ассоциированная по Борелю γ определяется по формуле

$$\gamma(\xi) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-\lambda_0 z}}{z - \xi} dz.$$

Элементарные вычисления позволяют представить γ в виде суммы $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, где γ_1 – целая функция, а

$$\gamma_2(\xi) = e^{-\lambda_0 \xi} \ln \frac{a_2 - \xi}{a_1 - \xi},$$

$\ln$ – главная ветвь логарифма. Отсюда следует, что γ – многозначная аналитическая функция с двумя особыми точками a_1, a_2 логарифмического типа. При обходе границы Γ_1 круга D_1 происходит переход от одного листа римановой поверхности γ на другой. Это противоречит однозначности γ на Γ_1 .

Если подмодуль неустойчивый, то он не может быть локально равномерно устойчив, т.е. импликация (2) § 3 заведомо не верна. Однако незначительное усилениесылки этой импликации позволяет распространить ее на более общий случай.

Пусть P – некоторое локально выпуклое пространство целых q -функций. Пространство P *локально равномерно квазиустойчиво*, если для любой окрестности нуля $V \subset P$ и любого компакта K существует окрестность нуля $U \subset P$ такая, что справедлива импликация

$$f \in U, \xi \in K, \frac{f}{\lambda - \xi} \in P \implies \frac{f}{\lambda - \xi} \in V.$$

Локально равномерная квазиустойчивость влечет локальную квазиустойчивость: для любого ограниченного множества $B \subset P$ и компакта K существует ограниченное множество $B' \subset P$ такое, что

$$f \in B, \xi \in K, \frac{f}{\lambda - \xi} \in P \implies \frac{f}{\lambda - \xi} \in B'.$$

Открытое множество $G \subset \mathbb{C}$ *конечно несвязно*, если оно расщепляется на конечное число связных компонент. Открытое q -множество $G = (G_1, \dots, G_q)$ *конечно несвязно*, если каждая его компонента G_i конечно несвязна. В этом параграфе мы докажем, что модуль P , ассоциированный с конечно несвязным открытым q -множеством G , является локально равномерно квазиустойчивым. В дальнейшем, если противное специально не оговорено, до конца параграфа предполагается, что P – модуль, ассоциированный с конечно несвязным открытым q -множеством.

Подмодуль $I \subset P$ называется *квазиустойчивым*, если справедлива импликация

$$f \in I, \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0), \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I.$$

Мы докажем, что замыкание квазиустойчивого подмодуля в P – квазиустойчивый подмодуль.

4.2. Специальный пучковый гомоморфизм. Пусть $G = (G_1, \dots, G_q)$ – конечно несвязное q -множество Рунге. Каждая компонента G_i расщепляется на конечное число непересекающихся односвязных областей G_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$. Соответствующее множество индексных пар (i, j) обозначим Γ .

Пусть Ω – область в $\mathbb{C}$, $O(\Omega)$ – кольцо функций, голоморфных в Ω . Каждой паре $(i, j) \in \Gamma$ поставим в соответствие кольцо $O_{ij}(\Omega) := O(\Omega)$. Рассмотрим декартово произведение

$$O^\Gamma(\Omega) := \prod_{(i,j) \in \Gamma} O_{ij}(\Omega).$$

Множество $O^\Gamma(\Omega)$ обладает структурой модуля над кольцом $O(\Omega)$.

Если ω – подобласть области Ω , то обозначим через $\rho_{\Omega, \omega}$ гомоморфизм сужения, т.е. отображение $O^\Gamma(\Omega)$ в $O^\Gamma(\omega)$, которое каждому элементу $\varphi = (\varphi_{ij})$ из $O^\Gamma(\Omega)$ ставит в соответствие сужение этого элемента на ω : $\varphi|_\omega = (\varphi_{ij}|_\omega)$. Семейство $\mathfrak{F} = \{O^\Gamma(\Omega), \rho_{\Omega, \omega}\}$ модулей $O^\Gamma(\Omega)$, построенных для всевозможных областей Ω , и соответствующих гомоморфизмов $\rho_{\Omega, \omega}$ является предпучком [64, гл. 1, §6].

Также рассмотрим предпучок модулей $\mathfrak{F} = \{O^q(\Omega), r_{\Omega, \omega}\}$, где $O^q(\Omega)$ – декартово произведение q копий $O(\Omega)$, $r_{\Omega, \omega}$ – гомоморфизм сужения, который элементу $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in O^q(\Omega)$ ставит в соответствие его сужение $\varphi|_\omega := (\varphi_1|_\omega, \dots, \varphi_q|_\omega)$. Фиксируем область Ω и рассмотрим отображение

$$\chi_\Omega: O^\Gamma(\Omega) \rightarrow O^q(\Omega),$$

которое элемент $\hat{u} = (u_{ij})$ из $O^\Gamma(\Omega)$ переводит в элемент $u = (u_1, \dots, u_q)$ из $O^q(\Omega)$, где

$$u_i = \sum_j u_{ij}.$$

Отображение χ_Ω можно построить для любой области Ω . Оно обладает следующими свойствами:

- 1°. $\chi_\Omega(u^{(1)} + u^{(2)}) = \chi_\Omega(u^{(1)}) + \chi_\Omega(u^{(2)})$;
- 2°. если $u \in O^\Gamma(\Omega)$, $\varphi \in O(\Omega)$, то $\chi_\Omega(\varphi u) = \varphi \chi_\Omega(u)$;
- 3°. $\chi_\omega \circ \rho_{\Omega, \omega} = r_{\Omega, \omega} \circ \chi_\Omega$.

Совокупность $\chi = \{\chi_\Omega\}$ отображений χ_Ω , построенных для всевозможных областей Ω , называется *пучковым гомоморфизмом*. Оно отображает предпучок $\mathfrak{F}$ в предпучок $\mathfrak{F}'$. Вместо $\chi_\Omega: O^\Gamma(\Omega) \rightarrow O^q(\Omega)$ будем писать $\chi: O^\Gamma(\Omega) \rightarrow O^q(\Omega)$.

Заметим, что отображение χ порождает отображение локальных модулей, иными словами, для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ определен гомоморфизм $\chi: O^\Gamma(\lambda_0) \rightarrow O^q(\lambda_0)$. Это отображение строится следующим образом. Пусть $\hat{u}$ – “росток” в $O^\Gamma(\lambda_0)$, порождаемый элементом $u \in O^\Gamma(\omega)$, где ω – некоторая окрестность точки λ_0 . Пусть v – образ u относительно χ . Элемент $v \in O^q(\omega)$ порождает росток $\hat{v} \in O^q(\lambda_0)$. Этот росток $\hat{G}$ объявляется образом ростка $\hat{u}$ относительно χ . Легко проверить, что соответствие $\hat{u} \rightarrow \hat{v}$ есть модульный гомоморфизм $O^\Gamma(\lambda) \rightarrow O^q(\lambda)$.

4.3. Сведение к топологическому произведению модулей, ассоциированных с односвязными областями. Пусть G_{ij} , $(i, j) \in \Gamma$, – семейство областей, определенных в п. 4.2. Рассмотрим топологические произведения

$$\mathcal{P} = \prod_{(i,j) \in \Gamma} P(G_{ij}), \quad P = \prod_{i=1}^q P(G_i).$$

Так как G_{ij} – области, то по теореме 3.2 модуль $\mathcal{P}$ является локально равномерно устойчивым, в частности, $\mathcal{P}$ является просто устойчивым

$$\varphi \in \mathcal{P}, \lambda - \lambda_0 \mid \varphi \implies \frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} \in \mathcal{P}.$$

Для любой области Ω имеют место вложения

$$\mathcal{P} \subset O^\Gamma(\Omega), \quad P \subset O^q(\Omega).$$

Это позволяет рассмотреть сужение пучкового гомоморфизма χ , введенного в п. 4.2, на $\mathcal{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Сужение χ на $\mathcal{P}$ есть топологический изоморфизм $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим топологическое произведение

$$\mathcal{H} := \prod_{(i,j) \in \Gamma} H(G_{ij}).$$

Легко видеть, что отображение

$$u: H \rightarrow \mathcal{H},$$

которое каждому элементу $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ ставит в соответствие элемент $\hat{f} = (f_{ij}) \in \mathcal{H}$, где $f_{ij} = f_i|_{G_{ij}}$, есть топологический изоморфизм. Поэтому и сопряженное отображение $u^*: \mathcal{H}^* \rightarrow H^*$ – топологический изоморфизм. Известно [53, гл. V], что пространство $\mathcal{H}^*$ совпадает с топологическим произведением

$$\prod_{(i,j) \in \Gamma} H^*(G_{ij}),$$

а пространство H^* – с топологическим произведением

$$H^*(G_1) \times \dots \times H^*(G_q).$$

При этом действие функционала $\hat{S} = (S_{ij})$ из $\mathcal{H}^*$ на элемент $\hat{f} = (f_{ij}) \in \mathcal{H}$ происходит по правилу

$$\langle \hat{S}, f \rangle = \sum_{(i,j) \in \Gamma} \langle S_{ij}, f_{ij} \rangle,$$

а действие функционала $S = (S_1, \dots, S_q) \in H^*$ на элемент $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$ – по правилу

$$\langle S, f \rangle = \sum \langle S_i, f_i \rangle.$$

Выясним, как действует сопряженное отображение u^* . Это отображение функционал $\widehat{S} = (S_{ij}) \in \mathcal{H}^*$ переводит в функционал $S = (S_1, \dots, S_q)$ такой, что

$$\langle S, f \rangle = \langle \widehat{S}, u(f) \rangle.$$

Учитывая, что $u(f) = (f_{ij})$, где $f_{ij} = f_i|_{G_{ij}}$, имеем

$$\sum_i \langle S_i, f_i \rangle = \sum_{ij} \langle S_{ij}, f_i|_{G_{ij}} \rangle = \sum_i \sum_j \langle S_{ij}, f_i|_{G_{ij}} \rangle.$$

Это верно для любого элемента $f = (f_1, \dots, f_q) \in H$. Выбрав в качестве f элемент, у которого все компоненты, кроме i -й, — нулевые, получим соотношение

$$\langle S_i, f_i \rangle = \sum_j \langle S_{ij}, f_i|_{G_{ij}} \rangle.$$

Это значит, что

$$S_i = \sum_j S_{ij}.$$

Таким образом, оператор u^* переводит функционал $\widehat{S} = (S_{ij})$ в функционал $S = (S_1, \dots, S_q)$, где $S_i = \sum_j S_{ij}$, $i = 1, \dots, q$.

Пусть $T_{ij}: H^*(G_{ij}) \rightarrow P(G_{ij})$ — каноническое отображение (см. п. 2.5), переводящее функционал $S_{ij} \in H^*(G_{ij})$ в его характеристическую функцию $\varphi_{ij}(\lambda) = \langle S_{ij}, e^{\lambda z} \rangle$. Так как по условию G_{ij} — односвязная область, то T_{ij} — топологический изоморфизм (п. 2.4). Рассмотрим теперь отображение $\mathcal{I}: \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{P}$, которое функционал $S = (S_{ij})$ переводит в элемент $\varphi = (\varphi_{ij})$, где $\varphi_{ij} = T(S_{ij})$. Поскольку отображения T_{ij} — топологические изоморфизмы, $\mathcal{I}$ — также топологический изоморфизм. Далее, поскольку G — q -множество Рунге (п. 2.4), каноническое отображение $T: H^* \rightarrow P$ есть топологический изоморфизм. Рассмотрим “дуальное” отображение

$$u^{(\circledast)} = T \circ u^* \circ \mathcal{I}^{-1}: \mathcal{P} \rightarrow P.$$

Поскольку все отображения $\mathcal{I}$, u^* , T — топологические изоморфизмы, отображение $u^{(\circledast)}$ — также топологический изоморфизм. Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что

$$u^{(\circledast)} = \chi|_{\mathcal{P}}. \quad (2)$$

Пусть $\widehat{\varphi} = (\varphi_{ij})$ — элемент из $\mathcal{P}$. Отображение $\mathcal{I}^{-1}$ переводит $\widehat{\varphi}$ в функционал $\widehat{S} = (S_{ij})$ из $\mathcal{H}^*$, где φ_{ij} — характеристическая функция функционала S_{ij} . Далее, отображение u^* переводит функционал $\widehat{S}$ в функционал $S = (S_1, \dots, S_q) \in H^*$, где $S_i = \sum_j S_{ij}$, $i = 1, \dots, q$. Наконец, отображение T переводит функционал S в элемент $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in P$, где

$$\varphi_i(\lambda) = \langle S_i, e^{\lambda z} \rangle = \sum_j \langle S_{ij}, e^{\lambda z} \rangle = \sum_j \varphi_{ij}.$$

Таким образом, $u^{(\circledast)}(\widehat{\varphi}) = \chi(\widehat{\varphi})$ для любого элемента $\widehat{\varphi} \in \mathcal{P}$. Соотношение (2) установлено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\widehat{f}$ – прообраз элемента f относительно изоморфизма $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$. Тогда

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P \iff \lambda - \lambda_0 \mid \widehat{f},$$

причем, если хотя бы одно из этих условий выполнено, то

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \chi\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi = f/(\lambda - \lambda_0) \in P$. Так как χ отображает $\mathcal{P}$ на P , то существует элемент $\widehat{\varphi} \in \mathcal{P}$ такой, что $\varphi = \chi(\widehat{\varphi})$. Умножая обе части этого соотношения на $\lambda - \lambda_0$, получим

$$f = \chi((\lambda - \lambda_0)\widehat{\varphi}).$$

Поскольку $f = \chi(\widehat{f})$ и отображение $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$ взаимно однозначно, $\widehat{f} = (\lambda - \lambda_0)\widehat{\varphi}$. Значит, $\lambda - \lambda_0 \mid \widehat{f}$. Более того,

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \varphi = \chi(\widehat{\varphi}) = \chi\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right). \quad (4)$$

Пусть теперь $\lambda - \lambda_0 \mid \widehat{f}$. В силу устойчивости $\mathcal{P}$ (теорема 3.2) элемент $\widehat{\varphi} = \widehat{f}/(\lambda - \lambda_0)$ принадлежит $\mathcal{P}$.

Пусть $\varphi = \chi(\widehat{\varphi})$. Умножая обе части этого соотношения на $\lambda - \lambda_0$, получим

$$(\lambda - \lambda_0)\varphi = \chi((\lambda - \lambda_0)\widehat{\varphi}) = \chi(\widehat{f}) = f.$$

Тем самым установлено, что

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \varphi \in P.$$

Соотношение (3) следует из (4).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\widehat{I}$ – прообраз подмодуля I относительно отображения $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$; $I(\lambda_0)$, $\widehat{I}(\lambda_0)$ – локальные подмодули, порожденные I , $\widehat{I}$ в точке λ_0 .

Тогда

$$I(\lambda_0) = \chi(\widehat{I}(\lambda_0)). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{f} \in \widehat{I}(\lambda_0)$. Это значит, что $\widehat{f}$ допускает представление в виде конечной линейной комбинации

$$\widehat{f} = \sum c_i v^{(i)},$$

где $v^{(i)} \in \widehat{I}$, $c_i \in O(\lambda_i)$.

Пусть $f = \chi(\widehat{f})$. Пользуясь тем, что χ – пучковый гомоморфизм, действие которого распространяется на локальные модули, имеем

$$f = \chi(f) = \sum c_i \chi(v^{(i)}) = \sum c_i u^{(i)},$$

где $u^{(i)} = \chi(v^{(i)}) \in \chi(\widehat{I}) = I$. Отсюда следует, что $f \in I(\lambda_0)$. Тем самым доказано, что $\chi(\widehat{I}(\lambda_0)) \subset I(\lambda_0)$.

Установим обратное включение. Пусть $f \in I(\lambda_0)$, т.е. имеет место локальное представление

$$f = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)},$$

где $u^{(i)} \in I$, $c_i \in O(\lambda_0)$. Пусть $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ — прообразы $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ относительно χ . Так как $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in I$, то $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \widehat{I}$; следовательно, элемент

$$\widehat{f} = \sum_{i=1}^k c_i v^{(i)}$$

принадлежит $\widehat{I}(\lambda_0)$. Поскольку χ — пучковый гомоморфизм, имеем

$$\chi(f) = \sum_{i=1}^k c_i \chi(v^{(i)}) = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)} = f.$$

Таким образом, для любого $f \in I(\lambda_0)$ существует $\widehat{f} \in \widehat{I}(\lambda_0)$ такой, что $\chi(\widehat{f}) = f$. Это значит, что $\chi(\widehat{I}(\lambda_0)) \supset I(\lambda_0)$. Из вышеизложенного следует (5).

4.4. Квазистойчивые модули. Напомним, что P — модуль, ассоциированный с открытым конечно несвязным q -множеством.

ТЕОРЕМА 4.2. *Модуль P является локально равномерно квазистойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3.1 модуль P идентичен модулю, ассоциированному с наименьшим q -множеством Рунге, содержащим G . Поэтому без ограничения общности можем предполагать, что G — конечно несвязное q -множество Рунге. Пусть V — окрестность нуля в P и K — компакт в $\mathbb{C}$. Нужно показать, что существует окрестность нуля $U \subset P$, для которой справедлива импликация

$$f \in U, \lambda_0 \in K, \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in V. \quad (6)$$

Пусть $\mathcal{P}$ — модуль, ассоциированный с системой областей $\{G_{ij}\}$, $(i, j) \in \Gamma$, построенной в п. 4.2. Воспользуемся тем, что $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$ — топологический изоморфизм (предложение 4.1). Пусть $\widehat{V}$ — прообраз V относительно χ , $\widehat{V}$ — окрестность нуля в $\mathcal{P}$. По теореме 3.2 модуль $\mathcal{P}$ является локально равномерно устойчивым. Поэтому существует окрестность нуля $\widehat{U} \subset P$, для которой справедлива импликация

$$\widehat{f} \in \widehat{U}, \lambda_0 \in K, \lambda - \lambda_0 \mid \widehat{f} \implies \frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0} \in \widehat{V}. \quad (7)$$

Образ $U = \chi(\widehat{U})$ есть окрестность нуля в P . Покажем, что для этой окрестности выполняется импликация (6). Пусть

$$f \in U, \quad \lambda_0 \in K, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P.$$

Рассмотрим прообраз $\widehat{f}$ элемента f относительно χ . По следствию 1 предложения 4.1 $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \mathcal{P}$; более того, $f/(\lambda - \lambda_0) = \chi(\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0))$. Так как $f \in U$, то $\widehat{f} \in \widehat{U}$ и в силу импликации (7) $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{V}$. Тогда

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \chi\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right) \in \chi(\widehat{V}) = V.$$

Тем самым импликация (6) установлена.

4.5. Квазиустойчивые подмодули. Пусть P – модуль целых q -функций. Подмодуль $I \subset P$ называется *квазиустойчивым*, если справедлива импликация

$$f \in I, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0), \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P \implies \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I.$$

Отметим, что каждый устойчивый подмодуль (см. п. 3.1) автоматически является квазиустойчивым: так что класс квазиустойчивых подмодулей шире класса устойчивых подмодулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\widehat{I}$ – прообраз подмодуля I относительно отображения $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$. Подмодуль I квазиустойчив в точке λ_0 тогда и только тогда, когда $\widehat{I}$ устойчив в той же точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I квазиустойчив в точке λ_0 . Утверждается, что $\widehat{I}$ устойчив в точке λ_0 . Пусть $\widehat{f} \in \widehat{I}$, $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{I}(\lambda_0)$. Нужно показать, что $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{I}$. В силу устойчивости $\mathcal{P}$ условие $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{I}(\lambda_0)$ влечет $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \mathcal{P}$.

Пусть $f \in \chi(\widehat{f})$. Тогда $f \in I$ и в силу следствия 1 предложения 4.1 $f/(\lambda - \lambda_0) \in P$; более того,

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in \chi\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right). \quad (8)$$

По условию $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{I}(\lambda_0)$; поэтому по следствию 2 предложения 4.1

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \chi\left(\frac{\widehat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right) \in \chi(\widehat{I}(\lambda_0)) = I(\lambda_0).$$

Таким образом, элемент f удовлетворяетсылке импликации квазиустойчивости

$$f \in I, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0), \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P.$$

Поскольку по предположению I квазиустойчив, заключаем, что $f/(\lambda - \lambda_0) \in I$. Из (8) следует, что $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \widehat{I}$. Устойчивость $\widehat{I}$ в точке λ_0 установлена.

Пусть теперь $\widehat{I}$ устойчив в точке λ_0 . Покажем, что I квазиустойчив в этой точке. Пусть

$$f \in I, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0), \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P.$$

Утверждается, что $f/(\lambda - \lambda_0) \in I$. Рассмотрим прообраз $\widehat{f}$ элемента f относительно χ . Так как $f \in I$, то $\widehat{f} \in \widehat{I}$. По следствию 1 предложения 4.1 $\widehat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \mathcal{P}$

и $f/(\lambda - \lambda_0) = \chi(\hat{f}/(\lambda - \lambda_0))$. По следствию 2 включение $f/(\lambda - \lambda_0) \in I(\lambda_0)$ влечет включение $\hat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \hat{I}(\lambda_0)$. Таким образом, $\hat{f}$ удовлетворяет посылке импликации устойчивости

$$\hat{f} \in \hat{I}, \quad \frac{\hat{f}}{\lambda - \lambda_0} \in \hat{I}(\lambda_0).$$

Поскольку по предположению подмодуль $\hat{I}$ устойчив, заключаем, что $\hat{f}/(\lambda - \lambda_0) \in \hat{I}$. Тогда

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \chi\left(\frac{\hat{f}}{\lambda - \lambda_0}\right) \in \chi(\hat{I}) = I.$$

Тем самым квазиустойчивость I в точке λ_0 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того чтобы подмодуль $I \subset P$ был квазиустойчив необходимо и достаточно, чтобы его прообраз $\hat{I} \subset \mathcal{P}$ относительно χ был устойчив.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если замкнутый подмодуль $I \subset P$ квазиустойчив в одной точке λ_0 , то он будет квазиустойчив.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{I}$ – прообраз I относительно χ . Так как $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$ – топологический модульный изоморфизм, то $\hat{I}$ – замкнутый подмодуль в $\mathcal{P}$. Согласно предложению 4.3 квазиустойчивость I в точке λ_0 влечет устойчивость I в той же точке. В силу предложения 3.5 $\hat{I}$ – устойчив в любой точке. По предложению 4.3 подмодуль I также устойчив в любой точке, т.е. устойчив.

ТЕОРЕМА 4.4. *Замыкание квазиустойчивого подмодуля $I \subset P$ – квазиустойчивый подмодуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – квазиустойчивый подмодуль в P , $\bar{I}$ – его замыкание. Рассмотрим прообразы $J, \bar{J}$ подмодулей $I, \bar{I}$ относительно χ . Поскольку отображение $\chi: \mathcal{P} \rightarrow P$ – топологический изоморфизм, $\bar{J}$ есть замыкание J . В силу предложения 4.3 квазиустойчивость I влечет устойчивость J ; по теореме 3.4 устойчивость J влечет устойчивость $\bar{J}$; наконец, по следствию 1 предложения 4.3 устойчивость $\bar{J}$ влечет квазиустойчивость $\bar{I}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пересечение семейства квазиустойчивых подмодулей – квазиустойчивый подмодуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{I^\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, – семейство квазиустойчивых подмодулей в P . Нужно показать, что подмодуль $I = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} I^\alpha$ – квазиустойчивый. Пусть $I(\lambda_0), I^\alpha(\lambda_0)$ – локальные подмодули, порождаемые в точке λ_0 подмодулями I, I^α . Так же, как и при доказательстве предложения 3.6, обосновывается включение

$$I(\lambda) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} I^\alpha(\lambda_0).$$

Приступим к доказательству квазиустойчивости I . Пусть

$$f \in I, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I(\lambda_0), \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P. \quad (9)$$

Утверждается, что $f/(\lambda - \lambda_0) \in I$. Поскольку $I \subset I^\alpha$ и $I(\lambda_0) \subset I^\alpha(\lambda_0)$, включения (9) влекут включения

$$f \in I^\alpha, \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in I^\alpha(\lambda_0), \quad \frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in P.$$

Таким образом, элемент f удовлетворяетсылке импликации квазиустойчивости для подмодуля I^α . По условию I^α – квазиустойчивый подмодуль. Следовательно, $f/(\lambda - \lambda_0) \in I^\alpha$. Это верно для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Поэтому

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} I^\alpha = I.$$

Квазиустойчивость I установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 4.5 следует утверждение: для любого подмодуля $I \subset P$ существует наименьший замкнутый квазиустойчивый подмодуль J , содержащий I , – пересечение семейства всех замкнутых квазиустойчивых подмодулей, содержащих I . Теорема 4.4 позволяет описать этот наименьший подмодуль другим способом. Обозначим I_0 множество всех элементов из P вида $(p/q)f$, где $f \in I$, p, q – многочлены, принадлежащие I локально,

$$\frac{p}{q}f \Big|_{\text{loc}} \in I$$

(п. 2.5). Тривиальной проверкой можно убедиться, что I_0 – квазиустойчивый подмодуль. По теореме 4.4 замыкание $\overline{I_0}$ – квазиустойчивый подмодуль. Подмодуль $\overline{I_0}$ совпадает с J , т.е. $\overline{I_0}$ – наименьший замкнутый квазиустойчивый подмодуль, содержащий I .

4.6. Устойчивые подмодули. Вне зависимости от того, устойчив модуль P или нет, он всегда содержит устойчивые подмодули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Подмодуль $I \subset P$, алгебраически порожденный независимой системой элементов $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$, является устойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подмодуль I представляет собой совокупность линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^k p_i u^{(i)}$$

с коэффициентами $p_i \in \mathbb{C}[\lambda]$.

Покажем, что I устойчив. Пусть $f \in I$, $f/(\lambda - \lambda_0) \in I(\lambda_0)$. Утверждается, что $f/(\lambda - \lambda_0) \in I$. Напишем представления

$$f = \sum_{i=1}^k p_i u^{(i)}, \quad p_i \in \mathbb{C}[\lambda], \quad (10)$$

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \sum_{i=1}^k c_i u^{(i)}, \quad c_i \in O(\lambda). \quad (11)$$

Умножая обе части (11) на $\lambda - \lambda_0$ и сравнивая полученное соотношение с (10), получим в силу независимости $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ $p_i = (\lambda - \lambda_0)c_i$. Это означает, что $p_i(\lambda_0) = 0$ и, следовательно, $q_i = p_i/(\lambda - \lambda_0)$ — многочлены. Отсюда следует

$$\frac{f}{\lambda - \lambda_0} = \sum_{i=1}^k q_i u^{(i)} \in I.$$

Естественным дополнением к предложению 4.6 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Замыкание устойчивого подмодуля $I \subset P$ — устойчивый подмодуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. проводится по схеме доказательства теоремы 3.4 с учетом сопровождающего замечания.

Список литературы

1. *Euler L.* De integratione aequationum differentialum altiorum gradum // *Miscellanea Berol.* 1743. V. 7. P. 193–242.
2. *Schmidt E.* Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen // *Math. Ann.* 1911. V. 70. № 4. P. 499–524.
3. *Hilb E.* Zur Theori der linearen funktionalen Differentialgleichungen // *Math. Ann.* 1917. V. 78. P. 137–170.
4. *Ritt J. F.* On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1917. V. 18. P. 27–49.
5. *Valiron D. G.* Sur les solutions des équations différentielles lineaires d'ordre infini et a coefficients constants // *Ann. Ecole Norm. Supérieure.* 1929. V. 46. P. 25–53.
6. *Sheffer J. M.* Systems of linear differential equations of infinite order with constant coefficients // *Ann. of Math.* 1929. V. 30. P. 250–264.
7. *Kitagawa T.* On the theory of linear functional equations and Cauchy's series // *Japan. J. Math.* 1937. V. 13. № 3. P. 233–331.
8. *Muggli H.* Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit constanten Koeffizienten // *Comment. Math. Helv.* 1938. V. 11. P. 151–179.
9. *Леонтьев А. Ф.* Дифференциально-разностные уравнения // *Матем. сб.* 1949. Т. 24. № 3. С. 347–374.
10. *Леонтьев А. Ф.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // *Труды МИАН.* 1951. Т. 39.
11. *Carlson L.* On infinite differential equations with constant coefficients. I // *Math. Scand.* 1953. V. 1. P. 31–38.
12. *Леонтьев А. Ф.* Об уравнениях бесконечного порядка с аналитическими решениями // *Матем. заметки.* 1971. Т. 10. № 3. С. 260–278.
13. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и асимптотические периоды целых функций // *Труды МИАН.* 1951. Т. 38. С. 42–67.
14. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // *Матем. сб.* 1951. Т. 29. № 3. С. 477–500.
15. *Dickson D. G.* Expansion in series of solutions of linear difference-differential equations with constant coefficients // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1957. № 23.
16. *Dickson D. G.* Infinite order differential equations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1964. V. 15. № 4. P. 638–641.
17. *Davis H. T.* The theory of linear operators from the standpoint of differential equations. Bloomington. Ind.: Principia Press, 1936.
18. *Carmichael R. D.* Linear differential equations of infinite order // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1936. V. 42. № 4. P. 193–218.

19. Леонтьев А. Ф. Ряды Дирихле, последовательности полиномов Дирихле и связанные с ними функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1975. С. 5–55.
20. Delsart J. Les fonctions moyenne-périodique // J. Math. Pures Appl. 1935. V. 9. P. 403–453.
21. Schwartz L. Théorie generale des fonctions moyenne-périodique // Ann. of Math. 1947. V. 48. P. 857–929.
22. Schwartz L. Etude des sommes d'exponentielles. Paris: Actualités Scientifiques et Industrielles, 1935.
23. Kahane J.-P. Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. Thèses. Paris: Durant, 1954.
24. Kahane J.-P. Sur les fonctions moyenne périodiques bornées // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1957. V. 7. P. 292–314.
25. Verblunsky S. On an expansion in exponential series // Quart. J. Math. Oxford. 1956. V. 7. № 27. P. 231–240.
26. Седлецкий А. М. О функциях, периодических в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 6. С. 1394–1415.
27. Леонтьев А. Ф. Решение обобщенного уравнения свертки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 342–366.
28. Ehrenpreis L., Malliaven P. Invertible operators and interpolation in AU spaces // J. Math. Pures Appl. 1974. V. 53. P. 165–182.
29. Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 2. С. 269–328.
30. Леонтьев А. Ф. О способах решения уравнения бесконечного порядка в действительной области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 4. С. 820–849.
31. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. V. 33. P. 109–143.
32. Berenstein C. A., Taylor B. A. Mean-periodic functions // Internat. J. Math. Math. Sci. 1980. V. 3. P. 199–236.
33. Shapiro H. S. The expansion of mean periodic functions in series of exponentials // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 12. № 1. P. 1–21.
34. Dickson D. G. Analytic mean periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 110. № 2. P. 361–374.
35. Dickson D. G. Convolution equations and harmonic analysis in spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 184. P. 373–385.
36. Леонтьев А. Ф. О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 1. С. 132–144.
37. Коробейник Ю. Ф. Уравнение свертки в комплексной области // Матем. сб. 1985. Т. 127. № 2. С. 171–193.
38. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
39. Ткаченко В. А. Спектральные разложения в пространстве аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 654–713.
40. Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порожденных умножением на независимую переменную // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 421–466.
41. Ehrenpreis L. A fundamental principal and some applications // Proc. of Intern. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem. 1961.
42. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley Interscience Publishers, 1970.
43. Паламодов В. П. Об общем виде решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 4. С. 774–777.
44. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
45. Berenstein C. A., Dostal M. Analytically uniform spaces and their applications to convolution equations // Lecture Notes in Math. V. 256. New York: Springer-Verlag, 1972.
46. Berenstein C. A., Taylor B. A. Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis // J. Anal. Math. 1980. V. 38. P. 188–254.

47. *Кривошеев А. С.* Представление решений однородного уравнения свертки в выпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 72–92.
48. *Struppa D. C.* The fundamental principle for systems of convolution equations // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. № 273.
49. *Гуревич Д. И.* Контрпримеры к проблеме Л. Шварца // Функци. анализ и его прим. 1957. Т. 9. № 2. С. 29–35.
50. *Леонтьев А. Ф.* Об однозначности сопоставления функции ее ряда Дирихле // Труды МИАН. 1975. Т. 134. С. 161–179.
51. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 1. С. 3–41.
52. *Себастьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. № 1:1. С. 60–77.
53. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
54. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
55. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза // Матем. сб. 1980. Т. 112 (154). № 1 (5). С. 94–114.
56. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 3. С. 384–401.
57. *Ehrenpreis L.* Mean periodic functions. I // Amer. J. Math. 1955. V. 77. № 2. P. 292–328.
58. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
59. *Дьедонне Ж., Шварц Л.* Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–102.
60. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
61. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
62. *Красичков-Терновский И. Ф.* Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1640–1657.
63. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
64. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.

Институт математики с ВЦ, Уфа

Поступила в редакцию
23.01.1996