Общероссийский математический портал

Е. П. Кругова, О сдвигах выпуклых мер, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 2, 57–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:18:20

УДК 517.987

Е. П. Кругова

О сдвигах выпуклых мер

Для выпуклой меры Радона μ на локально выпуклом пространстве X и произвольного направления $h \in X$ доказана следующая альтернатива: либо μ дифференцируема по направлению h в смысле Скорохода и справедлива оценка

$$\|\mu_h - \mu\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h \mu\|},$$

либо μ и μ_{th} взаимно сингулярны для всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Библиография: 11 названий.

Согласно классической теореме для всякой гауссовской меры γ на локально выпуклом топологическом векторном пространстве X и всякого вектора $h \in X$ меры γ и $\gamma(\cdot + h)$ либо эквивалентны, либо взаимно сингулярны. Это свойство имеет множество применений как в теории случайных процессов, так и в бесконечномерном анализе. Множество всех векторов h , для которых эти меры эквивалентны, называется *пространством Камерона–Мартина* меры γ . Известно, что для каждого элемента h этого пространства отображение $t \mapsto \gamma(\cdot + th)$ бесконечно дифференцируемо. Этот факт лежит в основе анализа на винеровском пространстве (см. [4]). Естественно возникает вопрос о других классах мер, для которых справедливы подобные утверждения.

С точки зрения различных применений в стохастическом анализе (см. [1], [2]) представляет интерес изучение дифференциальных свойств выпуклых мер. Гауссовская мера является весьма частным случаем выпуклой меры. В данной статье изучается поведение выпуклых мер Радона на локально выпуклом топологическом векторном пространстве при сдвигах. Одним из главных результатов является оценка

$$\|\mu_h - \mu\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h \mu\|}$$

для конечномерных проекций меры μ , где $d_h \mu$ — производная меры μ в смысле А. В. Скорохода по направлению h . Эта оценка, не зависящая от размерности, без изменений переносится и на бесконечномерный случай. Используя ее, мы докажем, что для всякого направления h , которое не является направлением дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода, меры μ и μ_h взаимно сингулярны. Следовательно, вышеупомянутая дихотомия продолжается с гауссовских мер на выпуклые в следующей форме: выпуклая мера либо является дифференцируемой вдоль данного направления в смысле Скорохода, либо все ее сдвиги вдоль этого направления взаимно сингулярны. Из этого вытекает и такая формулировка: либо

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01556) и программы INTAS (грант № 94-0378).

выпуклая мера непрерывна по направлению данного вектора (в смысле соотношения $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mu_{th} - \mu\| = 0$), либо все ее различные сдвиги по этому направлению взаимно сингулярны.

Напомним некоторые определения. Пусть X – локально выпуклое топологическое векторное пространство и $\mathcal{B}(X)$ – его борелевская σ -алгебра. Термин “мера на пространстве X ” означает меру Радона (возможно, знакопеременную) на $\mathcal{B}(X)$ (см., например, [10]). Для всякой меры μ на X обозначим через $|\mu|$ ее вариацию и через $\|\mu\| := |\mu|(X)$ – ее норму. Непрерывные линейные отображения $P: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ называются *конечномерными проекторами*. Множества вида $C = P^{-1}(B)$, где $P: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ – конечномерный проектор и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, называются *цилиндрическими*. Индуцированная мера $\mu \circ P^{-1}$ на $\mathbb{R}^n$ определяется следующим образом: $\mu \circ P^{-1}(B) = \mu(P^{-1}(B))$. Наконец, положим $\mu_h(B) = \mu(B + h)$.

Мера μ на X называется *дифференцируемой в смысле Скорохода вдоль вектора h* , если существует такая (знакопеременная) мера Радона ν , что для всех непрерывных ограниченных функций f на X выполняется следующее равенство:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{f(x - th) - f(x)}{t} \mu(dx) = \int f(x) \nu(dx).$$

Такая мера ν (очевидно, единственная) обозначается символом $d_h \mu$ и называется *производной меры μ вдоль h в смысле Скорохода* (см. [3], [5] о дифференцируемости мер).

В случае $X = \mathbb{R}^n$ мера μ дифференцируема в смысле Скорохода вдоль вектора h тогда и только тогда, когда ее частная производная $\partial_h \mu$ в смысле обобщенных функций (см. [9], [11]) является ограниченной мерой. Мера на $\mathbb{R}^n$ дифференцируема по Скороходу вдоль n независимых направлений в точности тогда, когда она имеет вид $\mu = f dx$, где f – интегрируемая функция класса $BV(\mathbb{R}^n)$ (см. [11]).

Вероятностная мера μ на X называется *выпуклой* (см. [6]), если

$$\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$$

для всех множеств A и B из σ -алгебры $\sigma(X)$, порожденной цилиндрическими множествами, т.е. порожденной сопряженным пространством X^* .

Это условие равносильно тому, что

$$\mu_*(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$$

для всех $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in [0, 1]$, где $\mu_*(A) = \sup\{\mu(K), K \subset A, K \text{ – компакт}\}$. Ясно, что в случае, когда X – банахово пространство или пространство Фреше, множество $\lambda A + (1 - \lambda)B$ μ -измеримо (поскольку μ имеет сепарабельный носитель), так что можно заменить μ_* на μ .

В работе [6] было доказано, что мера μ выпукла тогда и только тогда, когда все ее конечномерные проекции выпуклы. В той же работе была доказана следующая теорема, описывающая все выпуклые меры на конечномерных пространствах.

ТЕОРЕМА 0. *Вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ является выпуклой в точности тогда, когда существуют целое число k , $0 \leq k \leq n$, вероятностная мера ν на $\mathbb{R}^k$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега m_k , и аффинное отображение $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\mu = \nu \circ h^{-1}$, причем функция $-\log(d\nu/dm_k)$ выпукла при $k > 0$ (где $\log 0 = -\infty$).*

В частности, всякая выпуклая мера на $\mathbb{R}^n$ сосредоточена на некотором аффинном подпространстве, на котором она имеет плотность относительно соответствующей меры Лебега.

Согласно [8] всякая абсолютно непрерывная выпуклая мера на $\mathbb{R}^n$ дифференцируема по Скороходу вдоль всех векторов. В частности, любая такая мера имеет плотность класса $BV(\mathbb{R}^n)$. В отличие от гауссовского случая несингулярный сдвиг произвольной выпуклой меры μ может не быть мерой, эквивалентной мере μ (рассмотрим, например, меру μ на $\mathbb{R}^1$ с плотностью $I_{[0,1]}$, т.е. меру Лебега на $[0,1]$, продолженную на $\mathbb{R}^1$ нулем вне $[0,1]$). Следовательно, необходимо позаботиться о правильном виде гауссовской дихотомии, указанной выше. Естественный кандидат – следующее свойство: либо $\mu \perp \mu_{th}$ для всех $t \neq 0$, либо μ непрерывна вдоль h в том смысле, что $\|\mu_{th} - \mu\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. В действительности мы докажем даже более сильную версию этой дихотомии.

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть μ – вероятностная выпуклая мера на $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. Тогда для всякого $h \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$\|\mu_h - \mu\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h\mu\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Рассмотрим случай $n = 1$. Тогда $\mu = e^{-V(x)} dx$, где $V(x): (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^1$, $V(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha V(x) + (1-\alpha)V(y)$, $x, y \in (a,b)$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Здесь V – абсолютно непрерывная функция, $V'(x) \geq 0$. Следовательно, существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a+} V(x) = V(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-} V(x) = V(b)$, и, кроме того, если a или $b = \pm\infty$, то $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = \infty$ (см. [7], [8]). Положим $V(x) = \infty$, $e^{-V(x)} = 0$ вне отрезка $[a,b]$.

Для такой меры μ найдем $\|d_h\mu\|$ и $\|\mu_h - \mu\|$. Легко видеть, что

$$d_1\mu = -V'(x)e^{-V(x)} dx + e^{-V(a)}\delta(x-a) - e^{-V(b)}\delta(x-b),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|d_1\mu\| &= \int_a^b |V'(x)|e^{-V(x)} dx + e^{-V(a)} + e^{-V(b)} \\ &= \int_a^{x_0} (-V'(x))e^{-V(x)} dx + \int_{x_0}^b V'(x)e^{-V(x)} dx + e^{-V(a)} + e^{-V(b)} \\ &= e^{-V(x_0)} - e^{-V(a)} + e^{-V(x_0)} - e^{-V(b)} + e^{-V(a)} + e^{-V(b)} = 2e^{-V(x_0)}, \end{aligned}$$

где x_0 определяется условием $V(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} V(x)$, $d_h\mu = h d_1\mu$, $h > 0$. Далее, при $h \geq b - a$ имеем $\|\mu_h - \mu\| = 2\|\mu\|$. При $h < b - a$ получаем

$$\|\mu_h - \mu\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-V(x-h)} - e^{-V(x)}| dx = \int_a^{b+h} |e^{-V(x-h)} - e^{-V(x)}| dx.$$

В этом случае функция $V(x) - V(x-h)$ возрастает на интервале $(a+h, b)$, поскольку $V'(x) - V'(x-h) \geq 0$. Если функция $V(x) - V(x-h)$ на интервале $(a+h, b)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то существует число $y_0 \in (a+h, b)$ такое, что $V(y_0) = V(y_0-h)$ (в силу теоремы о среднем значении и непрерывности функции V). Если $V(x) - V(x-h) > 0$ на $(a+h, b)$, положим $y_0 = a+h$, а если $V(x) - V(x-h) < 0$ всюду на $(a+h, b)$, положим $y_0 = b$. В любом из этих случаев получаем $e^{-V(x-h)} \leq e^{-V(x)}$, если $x \geq y_0$, и $e^{-V(x-h)} \geq e^{-V(x)}$, если $x \leq y_0$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_a^{b+h} |e^{-V(x-h)} - e^{-V(x)}| dx \\ &= \int_a^{y_0} (e^{-V(x)} - e^{-V(x-h)}) dx + \int_{y_0}^{b+h} (e^{-V(x-h)} - e^{-V(x)}) dx \\ &= - \int_a^{y_0-h} e^{-V(x)} dx + \int_a^{y_0} e^{-V(x)} dx - \int_{y_0}^b e^{-V(x)} dx + \int_{y_0-h}^b e^{-V(x)} dx \\ &= 2 \int_{y_0-h}^{y_0} e^{-V(x)} dx = 2 \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \mu[\alpha, \alpha+h], \end{aligned}$$

поскольку для всех y , $y_0 - h \leq y \leq y_0$, и $x \notin [y_0 - h, y_0]$ справедлива оценка $V(y) \leq V(x)$.

Получив такие выражения для норм сдвига и производной, рассмотрим меру ν , плотность которой g является перестановкой в неубывающем порядке (см. [9]) плотности меры μ . Точнее, пусть $\lambda(\alpha) = m_1\{x \mid e^{-V(x)} > \alpha\}$ — функция распределения меры μ , тогда $g(x) = \lambda^{-1}(\alpha) = e^{-W(x)}$, где W — тоже выпуклая функция, $W(0) = \min V(x) = V(x_0)$, $W(x) \geq W(y)$, если $x > y > 0$, и $W = \infty$, если $x < 0$ или $x > b-a$.

Функция W может быть получена так: пусть дана выпуклая замкнутая функция V , т.е. надграфик $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq V(x)\}$ функции V является выпуклым замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$. Определим функцию $f(y)$ на $[V(x_0), \infty)$ выражением $f(y) = \max_{(x,y) \in G} x - \min_{(x,y) \in G} x$. Функция $f(y)$ не убывает и

$$f(\alpha y + (1-\alpha)z) \geq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(z).$$

Пусть $W(x) = f^{-1}(y)$. Функция W выпукла и не убывает на $[0, \infty)$, $W(0) = V(x_0)$. По построению функции W имеем

$$m_1\{x \mid W(x) < \beta\} = m_1\{x \mid V(x) < \beta\}$$

для всех $\beta \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, e^{-W} не возрастает и

$$\begin{aligned} m_1\{x \mid e^{-V(x)} > \alpha\} &= m_1\{x \mid V(x) < -\log \alpha\} \\ &= m_1\{x \mid W(x) < -\log \alpha\} = m_1\{x \mid e^{-W(x)} > \alpha\}. \end{aligned}$$

Таким образом, функции распределения e^{-V} и e^{-W} совпадают, поэтому функция e^{-W} является перестановкой в неубывающем порядке функции e^{-V} . Пусть

$\nu = e^{-W(\cdot)} dx$. Тогда, как было показано выше,

$$\begin{aligned} \|d_1 \nu\| &= 2e^{-\min W} = 2e^{-\min V} = \|d_1 \mu\|, \\ \|\nu_h - \nu\| &= 2 \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \nu[\alpha, \alpha + h] = 2 \int_0^h e^{-W(x)} dx = 2 \max_{\alpha \in \mathbb{R}} \mu[\alpha, \alpha + h] = \|\mu_h - \mu\|, \\ \|\mu\| &= \|\nu\|. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно рассматривать меры μ следующего специального вида: $\mu = e^{-V(\cdot)} dx$, где V – выпуклая функция, не убывающая на интервале $[0, \infty)$. В этом случае $\|d_h \mu\| = 2|h|e^{-V(0)}$ и

$$\|\mu_h - \mu\| = 2 \int_0^h e^{-V(x)} dx, \quad \|\mu\| = 1 = \int_0^\infty e^{-V(x)} dx.$$

Чтобы получить желаемую оценку, зафиксируем h и $\|d_h \mu\|$ (т.е. значение $V(0)$). Мы найдем функцию V_0 , для которой значение интеграла $\int_0^h e^{-V_0(x)} dx$ минимально при ограничении $\|\mu\| = \int_0^\infty e^{-V_0(x)} dx = 1$. Докажем, что эта функция V_0 – линейная функция с соответствующей нормировкой, т.е.

$$e^{-V_0(x)} = \frac{\|d_1 \mu\|}{2} e^{-\frac{1}{2}\|d_1 \mu\|x}.$$

Действительно, пусть $V_0(x) = \frac{1}{2}\|d_1 \mu\|x - \log(\frac{1}{2}\|d_1 \mu\|)$ и пусть V – произвольная выпуклая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям.

(i) Если $V(h) = \infty$, тогда

$$\int_0^h e^{-V(x)} dx = 1 > \int_0^h e^{-V_0(x)} dx.$$

(ii) Пусть $V_0(h) < V(h) < \infty$. Тогда

$$V(h) = V(0) + \int_0^h V'(x) dx \leq V(0) + V'(h)h,$$

так как V' не убывает на $[0, \infty)$ (здесь $V'(h)$ означает $\sup_{x < h} V'(x)$). Следовательно,

$$V'(h) \geq \frac{V(h) - V(0)}{h} > \frac{V_0(h) - V_0(0)}{h} = V'_0(h),$$

так как $V(h) > V_0(h)$, $V(0) = V_0(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_h^\infty e^{-V(x)} dx &\leq \int_h^\infty e^{-V'(h)(x-h) - V(h)} dx \\ &< \int_h^\infty e^{-V'_0(h)(x-h) - V_0(h)} dx = \int_h^\infty e^{-V_0(x)} dx \end{aligned}$$

и, так как $\int_0^\infty e^{-V(x)} dx = \int_0^\infty e^{-V_0(x)} dx = 1$, имеем

$$\int_0^h e^{-V(x)} dx > \int_0^h e^{-V_0(x)} dx.$$

(iii) Пусть $V(h) \leq V_0(h)$. Тогда для всякого $0 < x < h$, $x = \alpha h$,

$$V(x) \leq (1 - \alpha)V(0) + \alpha V(h) \leq (1 - \alpha)V_0(0) + \alpha V_0(h) = V_0(\alpha h) = V_0(x),$$

и, следовательно,

$$\int_0^h e^{-V(x)} dx \geq \int_0^h e^{-V_0(x)} dx.$$

Таким образом, для всякого фиксированного значения $\|d_h \mu\|$ минимум нормы $\|\mu_h - \mu\|$ достигается на мере μ с плотностью e^{-V_0} и равен

$$2 \int_0^h \frac{\|d_1 \mu\|}{2} e^{-\frac{1}{2}\|d_1 \mu\|x} dx = 2e^{-\frac{1}{2}\|d_1 \mu\|x} \Big|_0^h = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_1 \mu\|h} = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h \mu\|}.$$

Следовательно, для произвольной вероятностной выпуклой меры на $\mathbb{R}^1$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, справедлива следующая оценка:

$$\|\mu_h - \mu\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h \mu\|}.$$

Шаг 2. Теперь продолжим это утверждение на меры, определенные на пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть μ – вероятностная выпуклая мера на $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега m_n . Тогда $\mu = e^{-V(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n$, где V – выпуклая функция (т.е. ее надграфик является выпуклым множеством). Кроме того, мы можем переопределить функцию V на множестве нулевой меры Лебега таким образом, чтобы ее надграфик стал замкнутым множеством. Следовательно, мы можем считать надграфик замкнутым. Пусть $\text{dom } V = C = \{(x_1, \dots, x_n) \mid V(x) < \infty\}$ – область определения функции V и пусть $G = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid y \geq V(x)\}$ – ее надграфик. В работе [8] было доказано, что в этом случае $V(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль любого направления и ее производная в смысле Скорохода равна

$$d_h \mu = \left(-\frac{\partial V}{\partial h}(x) \right) e^{-V(x)} dx - e^{-V(x)} (n_x, h) \Big|_{x \in \partial C} d\sigma,$$

где $d\sigma$ – поверхностная мера на ∂C , n_x – внешняя нормаль к поверхности ∂C . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|d_h \mu\| &= \int_C \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| e^{-V(x)} dx + \int_{\partial C} e^{-V(x)} |(n_x, h)| d\sigma \\ &= 2|h| \int_{h^\perp} \exp\left(-\min_{t \in \mathbb{R}} V(x + th)\right) m_{n-1}(dx). \end{aligned}$$

Действительно, пусть $h = |h|e_1$. Обозначим $c_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$ и $c_2(x_1, \dots, x_n) = c_2$ точки на поверхности ∂C . Тогда

$$\begin{aligned} \|d_h \mu\| &= |h| \int_C \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| e^{-V(x)} dx + |h| \int_{\partial C} e^{-V(x)} |(n_x, h)| d\sigma \\ &= |h| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{c_1}^{c_2} \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right| dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &\quad + |h| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (e^{-V(c_2, x_2, \dots, x_n)} + e^{-V(c_1, x_2, \dots, x_n)}) dx_2 \dots dx_n \\ &= 2|h| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\min_{x_1} V(x_1, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Для сдвига меры μ в направлении $h = |h|e_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mu_h - \mu\| &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-V(x_1-h, x_2, \dots, x_n)} - e^{-V(x_1, \dots, x_n)}| dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^1} |e^{-V(x_1-h, x_2, \dots, x_n)} - e^{-V(x_1, \dots, x_n)}| dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+h} e^{-V(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 \right\} dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Теперь построим функцию $W(x_1, \dots, x_n)$ точно так же, как и в одномерном случае. Обозначим

$$G = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \geq V(x_1, \dots, x_n)\}$$

надграфик функции V (который является выпуклым замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^{n+1}$). Пусть

$$G' = \{(x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_1: V(x_1, \dots, x_n) \leq y\}$$

— его проекция на $\mathbb{R}^n(x_2, \dots, x_n, y)$. Пусть, далее,

$$\begin{aligned} F_1(x_2, \dots, x_n, y) &= \max_{(x_1, \dots, x_n, y) \in G} x_1, \\ F_2(x_2, \dots, x_n, y) &= \min_{(x_1, \dots, x_n, y) \in G} x_1, \\ F(x_2, \dots, x_n, y) &= F_1 - F_2. \end{aligned}$$

Функция F определена на G' , неотрицательна и вогнута. Положим

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_1 \leq F(x_2, \dots, x_n, y)\}.$$

Тогда D — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$; оно является надграфиком некоторой функции $W(x_1, \dots, x_n)$. Действительно, если $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in D$, то $(x_1^0, \dots, x_n^0, y) \in D$ для всякого $y > y^0$.

Рассмотрим меру $\nu = e^{-W(\cdot)} dx_1 \dots dx_n$. Для этой меры имеем

$$\|\nu_h - \nu\| = \|\mu_h - \mu\|, \quad \|d_h \nu\| = \|d_h \mu\|, \quad \|\nu\| = \|\mu\|.$$

Из равенства выражений

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \int_{\alpha}^{\alpha+|h|} e^{-V(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)} dx_1 = \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \int_{\alpha}^{\alpha+|h|} e^{-W} dx_1$$

и

$$\exp\left(-\min_{x_1} V(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)\right) = \exp\left(-\min_{x_1} W(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)\right)$$

следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{-V(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)} dx_1 = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-W(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)} dx_1$$

для всякого фиксированного $(x_2^0, \dots, x_n^0)$, как это было доказано в одномерном случае. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\nu_h - \nu\| &= 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{|h|} e^{-W(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= 2 \int_0^{|h|} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-W(x_1, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 = 2 \int_0^{|h|} e^{-U(x_1)} dx_1, \end{aligned}$$

$$\|d_h \nu\| = 2|h| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-W(0, x_2, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n = 2|h|e^{-U(0)},$$

$$\begin{aligned} \|\nu\| &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-W(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-W(x_1, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} e^{-U(x_1)} dx_1 = \int_0^{\infty} e^{-U(x_1)} dx_1 = 1 \end{aligned}$$

по построению функции W и теореме Фубини. Здесь

$$e^{-U(x_1)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-W(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_2 \dots dx_n.$$

В работе [7] было показано, что функция $U(x_1)$ в этом случае тоже выпукла. Кроме того, функция $e^{-U(x_1)}$ не возрастает на $[0, \infty)$, так как все функции $e^{-W(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)}$ не возрастают для любого фиксированного $(x_2^0, \dots, x_n^0)$. Следовательно, мы можем рассмотреть выпуклую меру $\lambda = e^{-U(x_1)} dx_1$ на $\mathbb{R}^1$, для которой

$$\begin{aligned} \|\lambda_{|h|} - \lambda\| &= \|\nu_h - \nu\| = \|\mu_h - \mu\|, \\ \|d_{|h|} \lambda\| &= \|d_h \nu\| = \|d_h \mu\|, \\ \|\lambda\| &= \|\nu\| = \|\mu\| = 1. \end{aligned}$$

Для меры λ требуемое утверждение уже было доказано, следовательно, оно справедливо и для меры μ . Доказательство завершено.

В качестве следствия мы получим следующую теорему о направлениях дифференцируемости выпуклой меры на бесконечномерном пространстве.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ – выпуклая вероятностная мера Радона на локально выпуклом пространстве X . Тогда для всякого направления h , не являющегося направлением дифференцируемости меры μ в смысле Скорохода, меры μ и μ_h взаимно сингулярны, тогда как для любого направления дифференцируемости выполняется следующее неравенство:

$$\|\mu_h - \mu\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_h \mu\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для всякой меры Радона ν на X ее норма совпадает с супремумом $\|\nu \circ P^{-1}\|$ по всем конечномерным проекциям P . Действительно, пусть $X = A^+ \cup A^-$ и $P(X) = A_P^+ \cup A_P^-$ – множества из разложения Хана мер ν и $\nu \circ P^{-1}$, соответственно. Тогда

$$\|\nu \circ P^{-1}\| = \nu \circ P^{-1}(A_P^+) - \nu \circ P^{-1}(A_P^-) \leq \nu(A^+) - \nu(A^-) = \|\nu\|.$$

С другой стороны, так как ν – мера Радона, для всякого n существует множество $A_n = P_n^{-1}B_n$, где $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и P_n – конечномерная проекция такая, что $|\nu|(A^+ \triangle A_n) \leq 1/n$. В этом случае

$$|\nu|(A^- \triangle (X \setminus A_n)) = |\nu|(A^+ \triangle A_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\nu \circ P_n^{-1}\| &\geq \nu \circ P_n^{-1}(B_n) - \nu \circ P_n^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus B_n) \\ &\geq \nu(A^+) - \frac{1}{n} - \nu(A^-) - \frac{1}{n} = \|\nu\| - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\nu \circ P_n^{-1}\| \rightarrow \|\nu\|$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим конечномерные проекции меры μ . Возможны два случая.

(i) $\sup_P \|d_{Ph} \mu \circ P^{-1}\| = \infty$. Сначала предположим, что $\|d_{Ph} \mu \circ P^{-1}\| = \infty$ для некоторой конечномерной проекции P . В этом случае согласно теореме 0 и теореме 1 получаем

$$2 = \|(\mu \circ P^{-1})_{Ph} - \mu \circ P^{-1}\| \leq \|\mu_h - \mu\|.$$

Таким образом, меры μ и μ_h взаимно сингулярны. Теперь пусть $\|d_{Ph} \mu \circ P^{-1}\| < \infty$ для всех P . Тогда существует последовательность $\{P^n\}$ такая, что $\|d_{h_n} \mu^n\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, где $h_n = P_n h$ и $\mu_n = \mu \circ P_n^{-1}$. В этом случае согласно теореме 1 имеем

$$\|\mu_{h_n}^n - \mu^n\| \geq 2 - 2e^{-\frac{1}{2}\|d_{h_n} \mu^n\|} \rightarrow 2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\|\mu_h - \mu\| = 2$, и меры μ и μ_h снова взаимно сингулярны.

(ii) $\|d_{Ph} \mu \circ P^{-1}\| \leq C$, где C – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\|(\mu \circ P^{-1})_{tPh} - \mu \circ P^{-1}\| \leq C|t|$$

для всех t и всех конечномерных проекций P (см. [3] или [5, следствие леммы 2.4]). Следовательно, $\|\mu_{th} - \mu\| \leq C|t|$ для всех t , что в силу теоремы 1 в [3] (см. также теорему 2.7 в [5]) влечет дифференцируемость меры μ по направлению h в смысле Скорохода. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}\|\mu_h - \mu\| &= \sup_P \|(\mu \circ P^{-1})_{Ph} - \mu \circ P^{-1}\| \\ &\geq \sup_P \left(2 - 2 \exp \left(- \frac{\|d_{Ph}\mu \circ P^{-1}\|}{2} \right) \right) = 2 - 2 \exp \left(- \frac{\|d_h\mu\|}{2} \right).\end{aligned}$$

Отметим, что в случае, когда мера μ не дифференцируема вдоль h , она не дифференцируема вдоль th для всякого ненулевого t . Следовательно, меры μ и μ_{th} взаимно сингулярны. Доказательство завершено.

Список литературы

1. Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Dirichlet operators via stochastic analysis // J. Funct. Anal. 1995. V. 128. P. 102–138.
2. Antonjuk A. V., Kondratiev Yu. G. Log-concave smooth measures on Hilbert spaces and some properties of the corresponding Dirichlet operators // BiBos Preprint № 478, 1991.
3. Богачев В. И. О дифференцируемости мер в смысле Скорохода // Теория вероятн. и ее прим. 1988. Т. 33. №2. С. 330–334.
4. Богачев В. И. Гауссовские меры на линейных пространствах // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1995.
5. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений // УМН. 1990. Т. 45. №3. С. 3–83.
6. Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Mat. 1974. V. 12. №2. P. 239–252.
7. Brascamp H. J., Lieb E. H. On extensions of the Brunn–Minkowski and Prekopa–Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation // J. Funct. Anal. 1976. V. 22. №4. P. 366–389.
8. Кругова Е. П. Дифференцируемость выпуклых мер // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №6. С. 862–871.
9. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
10. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
11. Ziemer W. P. Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation. New York: Springer-Verlag, 1989.

Московская обл.,
пос. Менделеево

Поступила в редакцию
27.02.1996