Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Сплетения тензорных произведений и стохастический централизатор динамических систем, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 2, 67–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:26:42

УДК 517.93

В. В. Рыжиков

Сплетения тензорных произведений и стохастический централизатор динамических систем

Динамическая система называется ω -простой, если все ее эргодические джойнинги второго порядка (кроме $\mu \otimes \mu$) суть меры, сосредоточенные на графиках конечнозначных отображений, коммутирующих с системой, причем число таких неэквивалентных графиков не более, чем счетно. Этому классу принадлежат, например, орициклические потоки и перемешивающие действия группы $\mathbb{R}^n$ с частичной циклической аппроксимацией. В работе доказывается, что ω -простые перемешивающие потоки обладают кратным перемешиванием, что есть следствие результатов о стохастических сплетениях потоков. В этом направлении исследуются свойства динамических систем с общим временем, включая действия с дискретным и некоммутативным временем. Полученные результаты зависят от типа систем.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Динамической системой будем называть сохраняющее меру μ действие $\{T_g : g \in G\}$ группы G на пространстве Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$. Оператор $P: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X', \mu')$ называется *бистохастическим*, если выполнены условия

$$P \mathbf{1} = P^* \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

($\mathbf{1}$ — функции на X, X' , тождественно $(\text{mod } 0)$ равные 1) и

$$f(x) \geq 0 \implies (Pf)(x) \geq 0.$$

Полугруппа всех бистохастических операторов $P: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ обозначается через $\mathcal{M}$. Группе всех обратимых сохраняющих меру преобразований пространства Лебега отвечает максимальная группа в $\mathcal{M}$, обозначаемая через $\mathcal{A}$. Отметим, что преобразования, отличающиеся на множестве меры нуль, отождествляются. *Стохастическим централизатором динамической системы* $\{T_g\}$ называется полугруппа всех бистохастических операторов, коммутирующих с группой унитарных операторов в $L_2(\mu)$, индуцированных действием $\{T_g\}$. Для ряда динамических систем (среди которых некоторые преобразования ранга 1 [1], орициклические потоки [2], некоторые перекладывания отрезков [3]) установлено (в терминах теории джойнингов), что их стохастический централизатор является простым. *Простота* централизатора означает, что каждый его элемент является

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № М1Е300).

выпуклой суммой (или интегралом) операторов из $\mathcal{A}$, коммутирующих с системой, и оператора ортопроекции на пространство констант в $L_2(\mu)$. Динамические системы с таким стохастическим централизатором называются *простыми*.

Известно [4], что слабо перемешивающий простой поток T_t не допускает нетривиальных стохастических сплетений с тензорной степенью $T_t \otimes \cdots \otimes T_t$. Из этого результата следует ответ (для потоков) на некоторые вопросы из теории джойнингов (см. [5] и обзор [6]). Отметим следующее приложение к проблеме Рохлина о кратном перемешивании: простой перемешивающий поток перемешивает с любой кратностью (см. [4]).

В настоящей работе это утверждение обобщается на более широкий класс ω -простых потоков (см. §5). В статье также показаны различия в теориях сплетений (джойнингов) потоков и некоммутативных дискретных динамических систем. Так, например, ω -простые действия группы $SL(2, \mathbb{Z})$ могут не обладать свойством тензорной простоты. Общая теория сплетений тензорных произведений динамических систем также представляет интерес; в §§ 3, 4 включены утверждения о сплетениях, которые выполнены для разных типов систем. В §4 рассматриваются D-системы, близкие по свойствам к простым системам. Отметим также, что предлагаемая статья отчасти является продолжением работы [4].

Автор благодарит Д.В. Аносова, Б.М. Гуревича, В.И. Оселедда и А.М. Степина за обсуждения и поддержку. Автор также признателен Р.С. Исмагилову, Ю.А. Неретину и Е.Т. Шавгулидзе за обсуждение некоторых вопросов.

Некоторые обозначения и синтаксические соглашения. Приведем для удобства читателя некоторые из обозначений, часто используемые в статье.

A, B, C (и те же символы с индексами) – измеримые подмножества фазового пространства и одновременно индикаторы (т.е. характеристические функции) этих множеств.

Id – тождественное преобразование (обычно множества X).

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L_2 .

E – тождественный оператор (обычно на $L_2(X, \mu)$).

$\int$ – классический знак интеграла и оператор ортопроекции на пространство констант

$$\int f = \text{Const} \equiv \int f(x) d\mu(x).$$

Хотя правомерно написать $\int X = X$, когда $\mu(X) = 1$, подобные головоломки читателю не предлагаются. Но записи вида

$$\mu \otimes \mu(A \times B) = \left\langle \int A, \int B \right\rangle = \left\langle \int A, \int B \right\rangle = \mu(A)\mu(B)$$

не должны вызывать недоумения.

$\int$ также обозначает бистохастический оператор с образом, являющимся одномерным пространством констант.

R, S, T (и те же символы с индексами) обозначают автоморфизмы пространства Лебега или, когда это видно из контекста, унитарные операторы, отвечающие автоморфизмам.

J, P, Q – бистохастические операторы (обычно они что-нибудь сплетают).

η, ν, θ – меры, которые, как правило, инвариантны относительно тензорных произведений динамических систем. Эти меры заданы на декартовых произведениях фазового пространства изучаемой (исходной) динамической системы.

Полиморфизмы, джойнинги, кратное перемешивание.

Пусть $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$ – динамическая система, где T обозначает обратимое, сохраняющее меру μ преобразование множества X (фазового пространства), $\mathcal{B}$ – алгебра μ -измеримых множеств. В эргодической теории такое преобразование T часто называют *автоморфизмом*. Будем также обозначать через T и называть *автоморфизмом* унитарный оператор в $L_2(\mu)$, отвечающий преобразованию T : $(Tf)(x) = f(Tx)$ для $f \in L_2(\mu)$. Поскольку такие операторы сохраняют неотрицательность функций, образованная ими группа $\mathcal{A}$ вложена в полугруппу $\mathcal{P}$ ограниченных операторов в $L_2(\mu)$, которые переводят неотрицательные функции в неотрицательные. С оператором $P \in \mathcal{P}$ однозначно связана мера ν , заданная на $(X, \mathcal{B}) \times (X, \mathcal{B})$ и называемая *полиморфизмом* [7]. Связь задается формулой

$$\int (f \otimes g) d\nu = \langle Pf, g \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\mu)$ (иногда $\langle \cdot, \cdot \rangle$ также обозначает скалярное произведение в $L_2(\mu \otimes \dots \otimes \mu)$). Частным случаем полиморфизма являются джойнинги. Говорят, что мера η есть *джойнинг* автоморфизмов T и S , если η инвариантна относительно $T \times S$, а проекции этой меры на сомножители в произведении $(X, \mathcal{B}) \times (X, \mathcal{B})$ совпадают с мерой μ . Для полиморфизма требуется только абсолютная непрерывность проекций относительно μ (на самом деле в [7] требуется больше: проекции эквивалентны мере μ). Отвечающий мере η бистохастический оператор J сплетает T и S :

$$JT = SJ.$$

Особый интерес представляет случай, когда S изоморфен тензорной степени автоморфизма T . Теория таких сплетений (и теория джойнингов, отвечающая этим операторам) имеет приложение к проблеме В.А. Рохлина о кратном перемешивании. Напомним частный случай этой проблемы, восходящей к работе [8]. Пусть автоморфизм T пространства Лебега перемешивает, т.е. для любых множеств $A, B \in \mathcal{B}$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mu(T^n A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B).$$

Будет ли автоморфизм перемешивать с кратностью 2? Последнее означает, что для любых измеримых множеств A, B, C при любых последовательностях $m, n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\mu(T^m A \cap T^{m+n} B \cap C) \rightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C).$$

Пусть T перемешивает, но мы не знаем, является ли он перемешивающим с кратностью 2. Предположим, что для некоторых последовательностей $m(i), n(i) \rightarrow \infty$ для любых A, B, C выполнено

$$\mu(T^{m(i)} A \cap T^{m(i)+n(i)} B \cap C) \rightarrow \nu(A \times B \times C),$$

где ν – мера (полиморфизм) на $X \times X \times X$. Пусть A, B, C также обозначают индикаторы соответствующих множеств. С мерой ν связан бистохастический оператор P , действующий из $L_2(\mu \otimes \mu)$ в $L_2(\mu)$; связь задается равенством

$$\nu(A \times B \times C) = \langle P(A \otimes B), C \rangle.$$

Проверяется, что для меры ν выполнены следующие свойства:

$$\nu(TA \times TB \times TC) = \nu(A \times B \times C)$$

(мера инвариантна относительно $T \otimes T \otimes T$) и

$$\nu(X \times A \times B) = \nu(A \times X \times B) = \nu(A \times B \times X)$$

(проекции меры ν на грани декартова куба стандартны). Для оператора P точными аналогами этих свойств являются

$$TP = P(T \otimes T), \quad (1.1)$$

$$P(f \otimes \text{Const}) = P(\text{Const} \otimes f) = \text{Const}_1 = \mathbf{1} \otimes \text{Const} \int f, \quad (1.2)$$

где Const и Const_1 обозначают постоянные функции на X , а $\int$ — оператор ортопроекции на пространство констант $L_2(\mu)$. В дальнейшем *тривиальным* называется оператор P такой, что $\text{Im}(P) = \{\text{Const}\}$.

Итак, возникают два объекта ν и P с отмеченными свойствами. Если автоморфизм T не обладает свойством перемешивания порядка 2, то найдутся последовательности $m(i), n(i) \rightarrow \infty$ такие, что

$$\mu(T^{m(i)}A \cap T^{m(i)+n(i)}B \cap C) \rightarrow \nu(A \times B \times C) \neq \mu(A)\mu(B)\mu(C)$$

для некоторых A, B, C . Следовательно, мера ν и оператор P нетривиальны. Это означает, что

$$\nu \neq \mu \otimes \mu \otimes \mu, \quad \text{Im}(P) \neq \{\text{Const}\}.$$

Если перемешивающий автоморфизм T удовлетворяет свойству: существует единственный (тривиальный) оператор P , удовлетворяющий (1.1), (1.2) (в дальнейшем это свойство обозначается через $\mathbf{S}_3$), то T будет обладать кратным перемешиванием порядка 2. Действительно, оператор, отвечающий мере $\mu \times (\mu \times \mu)$, удовлетворяет (1.1), (1.2). Из единственности такого оператора вытекает свойство кратного перемешивания:

$$\begin{aligned} \mu(T^{m(i)}A \cap T^{m(i)+n(i)}B \cap C) &\rightarrow \langle P(A \otimes B), C \rangle = \left\langle P(A \otimes B), \int C \right\rangle \\ &= \mu(A)\mu(B)\mu(C). \end{aligned}$$

По аналогии определим свойства $\mathbf{S}_n$, $n > 3$: существует единственный оператор Q , удовлетворяющий условиям

$$TQ = Q(T_{(1)} \otimes T_{(2)} \otimes \cdots \otimes T_{(n-1)}) \quad (1.3)$$

и

$$Q(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1}) = \text{Const} = \int f_1 \int f_2 \cdots \int f_{n-1},$$

если одна из функций $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ является постоянной.

Отметим, что для действий произвольных групп определения аналогичны, нужно лишь учесть, что в условии сплетения (1.3) на место T следует поставить T_g для

всех $g \in G$. Приведем другое (эквивалентное) определение свойства $\mathbf{S}_4$: множество самосопряженных бистохастических операторов J , коммутирующих с $T \otimes T$ и удовлетворяющих условию

$$J\left(E \otimes \int\right) = J\left(\int \otimes E\right) = \int \otimes \int,$$

одноэлементно, т.е. является множеством $\{\int \otimes \int\}$. (Доказательство эквивалентности см. в § 4.) По тем же причинам, как и в случае $n = 2$, перемешивание кратности $n-1$ вместе со свойством $\mathbf{S}_{n+1}$ обеспечивают свойство кратного перемешивания порядка n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидное равенство $(E \otimes \int)(\int \otimes E) = (\int \otimes \int)$ является выражением теоремы Фубини.

В § 3 будет доказано, что все “четные” свойства $\mathbf{S}_{2p}$ эквивалентны (близкий результат получен в [9], явное упоминание – в [10]). Отметим также, что свойство $\mathbf{S}_4$ влечет за собой любое свойство $\mathbf{S}_k$ для всех типов групповых действий (см. [9] и [11, лемма 2.4]). Таким образом, для коммутативной перемешивающей динамической системы свойство $\mathbf{S}_4$ обеспечивает кратное перемешивание всех порядков. Известно, что свойством $\mathbf{S}_4$ обладают орициклические потоки [2] и однопараметрические системы с сингулярным спектром [12]. Перемешивающие $\mathbb{Z}^n$ -действия ($n > 1$) с сингулярным спектром также обладают кратным перемешиванием (B. Host, сообщение). Свойства $\mathbf{S}_3$ и $\mathbf{S}_4$ эквивалентны в классе простых (коммутативных) динамических систем [13] (см. также [4] и [10]).

§ 2. Простые системы и тривиализация джойнингов

Действие $\{T_g : g \in G\}$ на (X, μ) называется *простым*, если коммутирующий с ним оператор $P \in \mathcal{M}$ имеет представление

$$P = a \int_{C(\{T_g\})} S d\theta(S) + (1-a) \int, \quad (2.1)$$

где $C(\{T_g\})$ обозначает групповой централизатор действия; $\int$ – оператор ортогональной проекции на пространство констант. Напомним, что действие называется *слабо перемешивающим*, если мера $\mu \otimes \mu$ эргодична относительно $T \otimes T$ (ее нельзя представить в виде суммы двух различных $T \otimes T$ -инвариантных мер).

С джойнингом и сплетением в ряде случаев можно связать операторнозначную функцию. Рассмотрим следующий пример. Пусть T – простой слабо перемешивающий автоморфизм, а стохастический оператор J удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Оператору J сопоставим измеримую функцию $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – полугруппа бистохастических операторов, действующих из $L_2(\mu)$ в $L_2(\mu)$,

$$\int A(x) \langle \mathcal{J}(x)B, C \rangle d\mu(x) = \langle J(A \otimes B), C \rangle. \quad (2.2)$$

Из (1.1) вытекает

$$T^{-1} \mathcal{J}(x) T \equiv \mathcal{J}(Tx).$$

Запись $A(x) \equiv B(x)$ означает в дальнейшем, что для почти всех $x \in X$ выполнено равенство $A(x) = B(x)$.

Доказательство следующего утверждения покажет причины, из-за которых “тривиализуются” сплетения такого вида, как в (2.2), для систем с простым централизатором.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\{T_j\}$ – некоторая последовательность слабо перемешивающих автоморфизмов, коммутирующих с простым действием $\{\Psi_g\}$ группы G . Пусть $\mathcal{J}(x) \in \mathcal{A}$ для всех x и для всех $g \in G$ выполнено

$$\Psi_g \mathcal{J}(x) \Psi_g \equiv \mathcal{J}(\Psi_g(x)).$$

Тогда найдется автоморфизм S , коммутирующий с действием $\{\Psi_g\}$ такой, что

$$\mathcal{J}(x) \equiv S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторнозначную функцию

$$\mathcal{H}_j(x) \equiv T_j \mathcal{J}(x) T_j^{-1} \mathcal{J}^{-1}(x).$$

С функцией $\mathcal{H}_j$ можно связать динамическую систему $\{T_g \otimes T_g \otimes T_g, X \times X' \times X'', \eta_j\}$, где мера η_j определена формулой

$$\eta(A \times B \times C) = \int A(x) \langle \mathcal{H}_j(x) B, C \rangle d\mu(x).$$

Полученная динамическая система изоморфна системе $\{T_g \otimes T_g, X \times X', \mu \otimes \mu\}$. Изоморфизм осуществляет отображение $F: X \times X' \rightarrow X \times X' \times X''$, определенное формулой

$$F(x, x') = (x, x', \mathcal{H}_j(x)(x')),$$

где $\mathcal{H}_j(x)$ сейчас рассматривается как преобразование, действующее на точку x' . Следовательно, эта система эргодична вместе с (ее факторсистемой) $\{T \otimes T, X' \times X'', \pi\eta_j\}$, где мера $\pi\eta_j$ есть проекция меры η_j на $X' \times X''$. Эргодической мере $\pi\eta_j$ отвечает бистохастический оператор, коммутирующий с действием $\{T_g\}$. Так как этот оператор имеет представление (1.2), а отвечающая ему мера эргодична, имеем два случая:

$$\int \mathcal{H}_j(x) d\mu(x) = \int$$

или

$$\int \mathcal{H}_j(x) d\mu(x) = S,$$

где S – автоморфизм, коммутирующий с нашим действием. Так как при $j \rightarrow \infty$

$$\int \mathcal{H}_j(x) d\mu(x) \rightarrow \int \mathcal{J}(x) \mathcal{J}^{-1}(x) d\mu(x) = E,$$

где E – тождественный оператор, при достаточно больших j первый случай исключается. Из второго случая вытекает, что

$$\mathcal{H}_j(x) \equiv S.$$

Докажем это. Достаточно изучить случай, когда $S = E$, так как вместо $\mathcal{H}_j(x)$ можно рассмотреть $S^{-1}\mathcal{H}_j(x)$. Для любых индикаторов A, B измеримых множеств выполнено

$$\begin{aligned} AB = 0 &\implies \left\langle \left(\int \mathcal{H}_j(x) d\mu(x) \right) A, B \right\rangle = \int \langle \mathcal{H}_j(x) A, B \rangle d\mu(x) = 0 \\ &\implies \langle \mathcal{H}(x) A, B \rangle \equiv 0 \end{aligned}$$

(мы воспользовались неотрицательностью значений $\langle \mathcal{H}(x) A, B \rangle$), тогда

$$\langle \mathcal{H}(x) A, B \rangle \equiv \langle AB + A(1 - B), B \rangle = \langle A, B \rangle.$$

Так как линейные комбинации индикаторов плотны в сепарабельном пространстве $L_2(\mu)$, для счетной всюду плотной в $L_2(\mu)$ системы векторов $\{f_i\}$ получим

$$\langle \mathcal{H}(x) f_i, f_j \rangle \equiv \langle E f_i, f_j \rangle,$$

откуда вытекает, что $\mathcal{H}(x) \equiv E$.

Такие же рассуждения показывают, что тождественный оператор есть крайняя точка в $\mathcal{M}$.

Продолжим доказательство утверждения 2.1. Из $\mathcal{H}_j(x) \equiv S$ получим

$$T_j \mathcal{J}(x) T_j^{-1} \equiv \mathcal{J}(Tx) \equiv S \mathcal{J}(x),$$

что эквивалентно условию

$$SJ = J(T_j \otimes E),$$

где J связан с $\mathcal{J}$ равенством (2.2). Докажем, что из (1.1), (1.2) и последнего равенства вытекает тривиальность оператора J . Для этого рассмотрим оператор P , связанный с J следующим образом:

$$\langle P(A \otimes C), B \rangle = \langle J(A \otimes B), C \rangle.$$

Корректность определения оператора P обеспечивается, например, тем, что мера ν , соответствующая оператору J , обладает стандартными проекциями на грани декартова куба X^3 . Такой мере естественным образом сопоставляются три сплетающих оператора, два из которых суть наши J и P . Из $P = P(T_j \otimes S)$ получим

$$P = P(T_j^n \otimes S^n).$$

Так как автоморфизм T_j слабо перемешивающий, то, как известно, для некоторой последовательности $n(i) \rightarrow \infty$ имеем $T_j^{n(i)}$ слабо сходится к $\int$. Выберем подпоследовательность $\{n(i')\}$ таким образом, чтобы последовательность операторов $S^{n(i')}$ слабо сходилась к некоторому оператору Q . Получим

$$\text{Im}(P) = \text{Im}\left(P\left(\int \otimes Q\right)\right) = \{\text{Const}\},$$

т.е. оператор P и, следовательно, оператор J тривиальны. Тогда из тривиальности J вытекает, что $\mathcal{J}(x) \equiv \int$, что противоречит $\mathcal{J}(x) \in \mathcal{A}$.

ЛЕММА 2.2. а) Если T – слабо перемешивающий автоморфизм, а оператор P удовлетворяет условиям

$$TP = P(E \otimes S),$$

$$P\left(E \otimes \int\right) = P\left(\int \otimes E\right) = P\left(\int \otimes \int\right),$$

то оператор P тривиален: $\text{Im}(P) = \{\text{Const}\}$.

б) Пусть мера ν , заданная на $X \times X' \times X''$, инвариантна относительно $T \otimes E \otimes S$, где T – слабоперемешивающий автоморфизм. Если проекция меры ν на X' есть μ' , а проекция меры на $X \times X''$ есть $\mu \times \mu''$, то $\nu = \mu \times \mu' \times \mu''$.

Варианты этой леммы часто встречаются в теории джойнингов, мы воспользуемся ею также в §5. Относительно ее доказательства отметим, что пункты а) и б) эквивалентны, что видно из обсуждавшейся связи между мерами и операторами. Доказательство пункта а) было изложено перед формулировкой леммы 2.2.

Тензорная простота динамических систем. Если перемешивающий автоморфизм T не допускает нетривиальных джойнингов со стандартными проекциями на грани куба $X \times \dots \times X$, то он обладает свойством кратного перемешивания. В терминах [5] динамические системы со свойством $\bigcap_{n \geq 2} \mathbf{S}_n$ называются *РІД-системами* (аббревиатура от pairwise independently determined). Другим следствием свойства РІД автоморфизма T является, например, то, что его тензорные степени не имеют нетривиальных факторов, независимых с координатными факторами. Свойство РІД в настоящей статье называется (*четной*) *тензорной простотой*.

Задача о выяснении тензорной простоты перемешивающей системы с нулевой энтропией, как правило, сложна. В качестве интересной задачи отметим установление этого свойства для новых примеров перемешивающих потоков над поворотом окружности, предложенных в [14]. Также было бы интересно выяснить, есть ли среди них простые потоки.

Какие перемешивающие системы не являются тензорно простыми? Примерами служат действия с положительной энтропией. Если X есть тор, то, например, на множестве $\Gamma \subset X \times X \times X$, где $\Gamma = \{(x, y, z) : 3x + 2y + z = 0\}$, можно задать меру ν как образ меры $\mu \otimes \mu$ при отображении $(x, y) \rightarrow (x, y, -3x - 2y)$. Полученная мера ν на Γ есть (гладкий) полиморфизм, инвариантный относительно диагонального действия группы автоморфизмов тора. Следующее утверждение показывает, что подобные естественные полиморфизмы не могут быть джойнингами гладких слабо перемешивающих потоков.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Гладкие слабо перемешивающие потоки не допускают гладких джойнингов с попарной независимостью.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть поток G_t действует на трехмерном многообразии X (пример – геодезический поток на однородном многообразии с мерой μ). Пусть $\Gamma \subset X^4 = X_{(1)} \times X_{(2)} \times X_{(3)} \times X_{(4)}$ – гладкое подмногообразие, на котором сосредоточена мера ν , со стандартными проекциями на грани порядка 3 нашего декартова куба X^4 . Грани порядка 3 – это $(X_{(1)} \times X_{(2)} \times X_{(3)}), \dots$,

$(X_{(2)} \times X_{(3)} \times X_{(4)})$. Тогда из проекционных свойств меры ν вытекает, что размерность Γ не меньше, чем $9 = 3 \dim(X)$. Теперь рассмотрим множество

$$\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq \varepsilon} (G_{t_1} \times G_{t_2} \times G_{t_3} \times \text{Id})\Gamma \subset X^4.$$

Если размерность Γ_ε равна 12, то при достаточно малом ε получим, что инвариантное относительно $G_t \times G_t \times G_t \times G_t$ множество Γ_ε имеет малую положительную меру. Это противоречит эргодичности меры μ^4 относительно $\tilde{G}_t = G_t \times G_t \times G_t \times G_t$. Поэтому размерность Γ_ε должна быть меньше размерности X^4 . В этом случае можно показать, что Γ инвариантно относительно $G_{s_1} \times G_{s_2} \times G_{s_3} \times \text{Id}$ для некоторых фиксированных s_1, s_2, s_3 при условии, что одно из этих чисел не равно 0. Например, пусть выполнено

$$\begin{aligned} \dim(\Gamma) + 1 &= \dim \left(\bigcup_{0 \leq t_1 \leq \varepsilon} (G_{t_1} \times \text{Id} \times \text{Id} \times \text{Id})\Gamma \right) \\ &= \dim \left(\bigcup_{0 \leq t_1, t_2 \leq \varepsilon} (G_{t_1} \times G_{t_2} \times \text{Id} \times \text{Id})\Gamma \right). \end{aligned}$$

Тогда при $z = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Gamma$ и фиксированных $t_1, t_2 \neq 0$ для некоторых t получим

$$(G_{t_1} \times G_{t_2} \times \text{Id} \times \text{Id})z \in (G_t \times \text{Id} \times \text{Id} \times \text{Id})\Gamma.$$

Из множества значений таких t выберем минимальное, которое обозначим через $t(t_1, t_2, z)$. Функция $t(z) = t(t_1, t_2, z)$ инвариантна относительно эргодического потока $\tilde{G}_t$. Следовательно, функция постоянна $t(t_1, t_2, z) = t(t_1, t_2)$. Итак,

$$(G_{t_1 - t(t_1, t_2)} \times G_{t_2} \times \text{Id} \times \text{Id})\Gamma = \Gamma.$$

Отсюда вытекает, что

$$(G_{t_1 - t(t_1, t_2)} \times G_{t_2} \times \text{Id} \times \text{Id})\nu = \nu.$$

Так как G_{t_2} слабо перемешивающий поток, в силу леммы 2.2.b) получаем противоречие с тем, что $\nu \neq \mu^4$.

Заметим, что приведенное рассуждение перестает работать, если размерность фазового пространства больше, чем 3. Доказательство общего случая использует возможность “повысить порядок джойнинга” (см., например, §§ 4, 5). Это означает, что вместе с исходным джойнингом ν мы рассматриваем также некоторый новый джойнинг. При этом обеспечивается следующее: если новый джойнинг тривиален, то тривиален и исходный джойнинг. Но главное в том, что для нового джойнинга размерностные аргументы работают. Тривиализовав новый джойнинг, мы тривиализуем и старый. (Полное доказательство будет изложено в отдельной работе.)

Размерность сплетения. В естественной гладкой ситуации только что рассматривалась размерность джойнинга. Лебегом, Хаусдорфом, Реньи и др. была развита теория размерностей в такой степени, что мы можем определить размерность сплетения в общем случае. Бистохастическому оператору $P: L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ можно сопоставить число, равное размерности меры ν , отвечающей этому оператору. Для определенности будем считать, что X (фазовое пространство) есть отрезок $[0, 1]$. Пусть ξ_n – разбиение отрезка $[0, 1]$ на n отрезков длины $1/n$. Обозначим через ζ_n разбиение $\xi_n \times \xi_n$ квадрата $[0, 1]^2$. Ниже C обозначает атом разбиения ζ_n . Положим

$$\dim(J) = \dim(\nu) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{C \in \zeta_N} -\nu(C) \ln(\nu(C)).$$

Заметим, что мера $\mu \otimes \mu$, соответствующая оператору $\int$, имеет размерность равную 2. Для диагональной меры Δ имеем $\dim(E) = \dim(\Delta) = 1$.

Пусть $SC(\Psi)$ – стохастический централизатор динамической системы Ψ . Назовем *размерностным спектром* динамической системы множество таких d , что для некоторого неразложимого оператора $P \in SC(\Psi)$ выполнено $\dim(P) = d$. Возникает следующий вопрос: какие размерностные спектры бывают. Следующая гипотеза весьма правдоподобна: *если Ψ – бернуллиевское $\mathbb{Z}$ -действие, то его размерностный спектр есть отрезок $[1, 2]$.*

§ 3. Стохастическая дизъюнктность и тензорная простота

Обозначим через $SI(S, T)$ множество бистохастических операторов, сплетающих автоморфизмы (или действия) S и T .

В дальнейшем $\int$ обозначает не только оператор ортопроекции на пространство констант, но и бистохастический оператор (действующий из одного пространства в другое), образ которого есть одномерное пространство констант.

Неразложимые сплетения. Говорим, что бистохастический оператор P *неразложим в семействе бистохастических операторов C* , если из $P = aP_1 + (1-a)P_2$ и $P_1, P_2 \in C$ следует, что $a = 0$, или $(1-a) = 0$, или $P_1 = P_2$.

Будем называть сплетающий оператор $P \in SI(\Psi, \Phi)$ *неразложимым*, если он неразложим в семействе $P \in SI(\Psi, \Phi)$. Такой оператор связан инвариантной мерой:

$$\nu(A \times B) = \langle PA, B \rangle.$$

При этом сопоставлении неразложимому в $SI(\Psi, \Phi)$ оператору P отвечает мера ν , эргодичная относительно $(\Psi \times \Phi)$. Последнее означает, что мера инвариантна относительно $(\Psi \times \Phi)$ и не может быть полусуммой двух таких различных мер. Известно, что инвариантная мера разлагается на эргодические компоненты. Отсюда вытекает, что

$$P = \int_{SI(\Psi, \Phi)} P_\alpha d\theta(\alpha),$$

где θ – некоторая вероятностная мера на $SI(\Psi, \Phi)$, а P_α – неразложимые сплетения.

Дизъюнктность динамических систем. Пусть T и S суть обратимые, сохраняющие меру μ преобразования вероятностного пространства Лебега (X, μ) . Также T и S обозначают унитарные операторы в $L_2(\mu)$. Рассмотрим пространство $C(S, T)$ ограниченных операторов, сплетающих T и S . Заметим, что $C(S, T)$

содержит ортопроекцию на пространство постоянных функций. Если пространство $C(S, T)$ одномерно, то ограничения операторов T и S на пространство, ортогональное пространству констант, имеют только нулевое сплетение. Иначе говоря, они являются дизъюнктивными в смысле теории представлений.

Оператор S называется *æ-перемешивающим*, если для некоторой последовательности $n(i) \rightarrow \infty$ выполняется

$$S^{n(i)} \rightarrow (1 - \alpha)E + \alpha \int,$$

где E обозначает тождественный оператор, $\int$ – оператор ортопроекции на одномерное пространство $\{\text{Const}\}$ постоянных функций. О α -перемешивании см. [15], [16].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. а) При $0 < \alpha < 1$ α -перемешивающий оператор S и перемешивающий оператор T дизъюнктивны.

б) При $0 < \alpha < 1$ α -перемешивающее действие S_g и перемешивающее действие T_g дизъюнктивны.

с) Если для α -перемешивающего действия S_g при $0 < \alpha < 1$ выполнено: действие $S_g \otimes S_g$ метрически изоморфно действию $T_g \otimes T_g$, то действия S_g и T_g также метрически изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. а). Пусть $TJ = JS$. Тогда имеем $J\mathbf{1} = JS^n\mathbf{1} = T^n J\mathbf{1} = \int J\mathbf{1} = a\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ обозначает постоянную функцию на X , равную 1 почти всюду. Пусть $H = \{f \in L_2(\mu) \mid \int f = 0\}$ – пространство функций с нулевым средним, тогда

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\langle Jf, g \rangle &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle S^{n(i)} f, J^* g \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle T^{n(i)} Jf, g \rangle \\ &= \left\langle \int Jf, g \right\rangle = \left\langle \int f, g \right\rangle. \end{aligned}$$

Если $JH \subset H$, то получим $JH = \{0\}$. Тем самым утверждение будет доказано. Чтобы установить $JH \subset H$ достаточно убедиться в том, что $J^*\mathbf{1} = a\mathbf{1}$. Если оператор S эргодический (пространство инвариантных относительно S функций есть пространство констант) получим $J^*\mathbf{1} = J^*T\mathbf{1} = SJ^*\mathbf{1} = a\mathbf{1}$.

Осталось убедиться в том, что автоморфизм S эргодичен. Действительно, пусть $Sf = f$. Имеем $S^{n(i)}f = f$, следовательно, $Pf = f$, где $P = (1 - \alpha)E + \alpha \int$. Так как $P^m \rightarrow \int$ при $m \rightarrow \infty$ и $P^m f = f$, окончательно получаем $\int f = f$, т.е. $f = a\mathbf{1}$.

Пункт б) доказывается так же, как и пункт а). Пункт с) формально является новым утверждением, однако его доказательство мало отличается от доказательства в случае $\mathbb{Z}$ -действий, которое изложено автором в отдельной работе (представленной в журнал “Математические заметки”). Ограничимся лишь следующими замечаниями.

Задача: *будут ли изоморфны S и T при изоморфизме преобразований $S \times S$ и $T \times T$?* – согласно А. М. Степину была предложена Ж.-П. Туveno (J.-P. Thouvenot). Для класса α -перемешивающих систем ($0 < \alpha < 1$) ответ положительный; доказательство проводится так. Если действие S_g является α -перемешивающим на последовательности $g(i)$, т.е.

$$S_{g(i)} \rightarrow (1 - \alpha)E + \alpha \int,$$

то действие T_g также является æ-перемешивающим на последовательности $g(i)$. Отсюда при $0 < \varepsilon < 1$ несложно доказать, что при изоморфизме Φ , когда $\Phi(S_g \otimes S_g) = (T_g \otimes T_g)\Phi$, образ пространства $\mathbf{1} \otimes L_2(\mu)$ лежит в сумме пространств $\mathbf{1} \otimes L_2(\mu)$ и $L_2(\mu) \otimes \mathbf{1}$. Учитывая, что изоморфизм Φ сохраняет мультипликативную структуру унитарного кольца, получим, что пространство $\mathbf{1} \otimes L_2(\mu)$ совпадает с $\mathbf{1} \otimes L_2(\mu)$ или с $L_2(\mu) \otimes \mathbf{1}$. Таким образом, координатный фактор переходит в координатный, тогда ограничение Φ на координатную алгебру осуществляет изоморфизм действий S_g и T_g .

Дизъюнктность классических динамических систем. Стохастическая дизъюнктность может иметь место даже в том случае, когда системы спектрально изоморфны. Хорошо известно, что геодезический G_t и орициклический H_t потоки спектрально изоморфны. Это означает, что для некоторого унитарного оператора U выполнено $G_t U = U H_t$. Однако, они стохастически дизъюнкты: *если J – бистохастический оператор, то*

$$G_t J = J H_t \implies J = \int.$$

Последнее вытекает из теоремы [17] о дизъюнктности К-системы и системы с нулевой энтропией и следующих фактов: орициклический поток имеет нулевую энтропию [18]; геодезический поток есть К-поток [19], [20]. То, что спектр этих потоков лебеговский, было установлено в [21], [22].

Стохастическая дизъюнктность автоморфизмов, входящих в поток ранга 1. Пусть для некоторой последовательности $t(j) \rightarrow +0$ и целочисленной последовательности $\{h(j)\}$ выполнено $t(j)h(j) \rightarrow \infty$, и некоторая последовательность разбиений

$$\xi_j = \{C_j, T_{t(j)}C_j, T_{2t(j)}C_j, T_{3t(j)}C_j, \dots, T_{h(j)t(j)}C_j, Q_j\}$$

стремится к разбиению на точки: $\xi \rightarrow \varepsilon$. (Последнее означает, что для любого μ -измеримого множества A и любого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших j найдется ξ_j -измеримое множество A_j такое, что $\mu(A \Delta A_j) < \varepsilon$.) В этом случае, следуя [23], говорят, что поток допускает циклическую аппроксимацию (без скорости аппроксимации), или говорят, что поток является действием ранга 1 (см., например, ссылки в [9], [11]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть $\{T_s\}$ – перемешивающий поток ранга 1. Тогда при $s > 0$, $s \neq 1$, операторы T_1 и T_s стохастически дизъюнкты.

Доказательство этого утверждения здесь не приводится. Отметим, что оно мало отличается от доказательства дизъюнктности перемешивающего автоморфизма T ранга 1 и его степени T^n , $n > 1$. Последнее утверждение получается методом, изложенным в [11, § 4], для доказательства свойства $\mathbf{S}_3$ у таких T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для почти всех $s > 0$ операторы T_1 и T_s спектрально дизъюнкты, то спектр потока сингулярный. В [24] установлена сингулярность спектра широкого класса $\mathbb{Z}$ -действий ранга 1.

Сплетения тензорных степеней. Внутренние операторы. В описании множества стохастических сплетений динамической системы с ее тензорной степенью особый интерес представляет следующий частный случай. Пусть $L^{\otimes n}$ обозначает $L_2(\mu) \otimes \cdots \otimes L_2(\mu)$ (n сомножителей).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *внутренним* оператор $P: L^{\otimes n} \rightarrow L^{\otimes m}$, обладающий следующим свойством: для любого набора ограниченных измеримых функций $f_1, \dots, f_{m+n}$, в котором одна из функций константа, выполнено

$$\langle P(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n), f_{n+1} \otimes f_{n+2} \otimes \cdots \otimes f_{n+m} \rangle = \prod_{i=1}^{n+m} \int f_i d\mu.$$

Заметим, что для внутреннего оператора выполнено

$$PH^{\otimes n} \subset H^{\otimes m}, \quad P^*H^{\otimes m} \subset H^{\otimes n},$$

где H — пространство функций с нулевым средним, $H^{\otimes n} = H \otimes \cdots \otimes H$ (n сомножителей).

Определим класс динамических систем, обозначаемый через $\mathbf{S}_{m+n}$. Фиксируем $m+n \geq 3$, $m, n \geq 1$. Сохраняющее меру μ действие Ψ группы G на пространстве Лебега (X, μ) обладает свойством $\mathbf{S}_{m+n}$ (или принадлежит классу $\mathbf{S}_{m+n}$), если существует *единственный* внутренний бистохастический оператор $P: L^{\otimes n} \rightarrow L^{\otimes m}$, удовлетворяющий условию сплетения

$$T_g^{\otimes m} P = P T_g^{\otimes n}$$

для всех T_g из нашего действия. Здесь действие рассматривается как группа унитарных операторов на $L_2(\mu)$, а $T_g^{\otimes m}$ — тензорное произведение m экземпляров T_g .

Отметим, что тривиальный оператор (образ которого есть одномерное пространство констант) является внутренним сплетающим оператором. Принадлежность действия к классу $\mathbf{S}_{m+n}$ означает, что нет нетривиальных внутренних сплетений.

ЛЕММА 3.3. Пусть $p \geq 3$ — фиксированное натуральное число. Класс $\mathbf{S}_{m+n}$ при $m+n = p$ не зависит от выбора m, n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем некоторое действие. Предположим, что оно из класса $\mathbf{S}_{m+n}$. Нам нужно доказать, что оно из класса $\mathbf{S}_{m'+n'}$, $m' + n' = p$. Оператору $P: L^{\otimes m'} \rightarrow L^{\otimes n'}$ сопоставим меру ν на кубе $X^p = X_{(1)} \times \cdots \times X_{(p)}$:

$$\int f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{m'+n'} d\nu = \langle P(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{m'}), f_{m'+1} \otimes f_{m'+2} \otimes \cdots \otimes f_{m'+n'} \rangle. \quad (3.1)$$

Если оператор P нетривиален, то мера нетривиальна: $\nu \neq \mu^p$. Но нетривиальность меры ν влечет нетривиальность всех операторов P в (3.1) независимо от того, какие m', n' мы подставили. Поэтому, если какой-то паре (m, n) можно сопоставить только тривиальный оператор, то в силу (3.1) то же самое верно и для любой пары (m', n') при $m' + n' = m + n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На языке мер (джойнингов) определение класса $\mathbf{S}_p$ звучит так. Действие Ψ принадлежит классу $\mathbf{S}_p$, если μ^p есть единственная мера на X^p со стандартными проекциями на $(p-1)$ -мерные грани куба X^p (эти проекции суть μ^{p-1}), инвариантная относительно диагонального действия $\Psi_{(1)} \times \cdots \times \Psi_{(p)}$. Такие джойнинги (а точнее говоря, причины отсутствия таких нетривиальных джойнингов) стали систематически изучаться после работы [5].

æ-перемешивающее действие как пример действия класса $\mathbf{S}_p$. Свойство æ-перемешивания является инвариантом, из которого легко вывести свойство тензорной простоты.

Пусть действие $\{T_g\}$ является æ-перемешивающим: для некоторой последовательности $\{T_{g(i)}\}$ выполнено

$$T_{g(i)} \rightarrow P_{\mathfrak{a}} = (1 - \mathfrak{a})E + \mathfrak{a} \int .$$

Пусть $0 < \mathfrak{a} < 1$, $J: L \rightarrow L^{\otimes 3}$ – внутренний оператор, сплетающий действие с его тензорным кубом:

$$(T_{g(i)} \otimes T_{g(i)} \otimes T_{g(i)})J = JT_{g(i)}.$$

Имеем

$$JH \subset H^{\otimes 3}, \quad (P_{\mathfrak{a}} \otimes P_{\mathfrak{a}} \otimes P_{\mathfrak{a}})J = JP_{\mathfrak{a}}.$$

Отсюда для $f \in H$ получим

$$(1 - \mathfrak{a})^3 Jf = (1 - \mathfrak{a})Jf,$$

следовательно, $JH = \{0\}$. Таким образом, $J = \int$, значит наше действие обладает свойством $\mathbf{S}_4$ (и всеми $\mathbf{S}_p$, $p > 2$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как æ-перемешивание есть типичное свойство [16], мы доказали, что $\mathbf{S}_4$ является типичным свойством. Впрочем, этот факт вытекает из результата [12], так как æ-перемешивающие автоморфизмы имеют сингулярный спектр, если $0 < \mathfrak{a} < 1$. По теореме Оста автоморфизм с сингулярным спектром является $\mathbf{S}_4$ -простым.

Дель Юнко (del Junco) и Леманчик (Lemanczyk) показали (см. [6]), что æ-перемешивающие автоморфизмы могут служить строительным материалом для конструкций преобразований с необычными свойствами (типа свойств из [1]).

Слабое кратное перемешивание и классы $\mathbf{S}_p$. Слабое кратное перемешивание автоморфизмов рассматривалось в заметке [25]. Пусть $A_0, \dots, A_k$ одновременно обозначают и измеримые подмножества X , и соответствующие им индикаторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действие $\{T_g\}$ на пространстве (X, μ) называется *слабо перемешивающим кратности $k > 1$* , если для любых последовательностей $\{g_0(i)\}, \dots, \{g_k(i)\}$ условие $T_{g_k^{-1}(i)g_l(i)} \rightarrow \int$ при $0 \leq l < m \leq k$ влечет

$$\mu(T_{g_0}A_0 \cap T_{g_1}A_1 \cap \cdots \cap T_{g_k}A_k) \rightarrow \mu(A_0)\mu(A_1) \cdots \mu(A_k)$$

для всех измеримых множеств $A_0, \dots, A_k$.

В наших определениях тождественное действие обладает слабым кратным перемешиванием. Поэтому необходимо дать некоторые разъяснения. Сразу отметим, что свойство кратного перемешивания порядка k эквивалентно выполнению обычного перемешивания (перемешивания кратности 1) вместе со слабым кратным перемешиванием порядка k . (Вводя новое кратное перемешивание, мы не теряем старого.) Наше понятие содержательно также для слабо перемешивающих автоморфизмов. То обстоятельство, что в класс слабо кратно перемешивающих действий попадают, например, системы с дискретным спектром, имеет некоторое обоснование. После работы [12] стало отчетливо видно, что “плохие” перемешивающие свойства являются причиной кратного перемешивания. Когда перемешивающие свойства системы настолько слабые, что нет обычного перемешивания, кажется бессмысленным говорить о кратном перемешивании. Из желания распространить “причину” кратного перемешивания и на этот случай возникает свойство слабого кратного перемешивания. Это свойство типично в отличие от свойства обычного кратного перемешивания.

Как бы мы широко не смотрели на проблему Рохлина, основной интерес представляют перемешивающие действия групп $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$. (Обычно вместо того, чтобы говорить о свойствах действия группы $\mathbb{Z}$, говорят о свойствах автоморфизма пространства Лебега, который это действие порождает.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Автоморфизм T перемешивает с кратностью k , если для любых $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ при $|z_m - z_n| \rightarrow \infty$, $0 \leq m < n \leq k$, выполняется

$$\mu(T^{z_0} A_0 \cap T^{z_1} A_1 \cap \dots \cap T^{z_k} A_k) \rightarrow \mu(A_0) \mu(A_1) \dots \mu(A_k).$$

Около полувека остается нерешенной проблема: влечет ли перемешивание кратности 1 перемешивание кратности k ?

Аналогично кратное перемешивание определяется для действий групп $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$. Ледрашье (F. Ledrappier) нашел изящные контрпримеры в случае действий $\mathbb{Z}^2$. Однако, открыт вопрос для $\mathbb{R}^2$ -поток. Автор предполагает, что действия Ледрашье не включаются в поток.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть $C(\Psi)$ – централизатор действия Ψ (группа всех автоморфизмов, коммутирующих с Ψ). Если $C(\Psi)$ обладает свойством S_{k+1} , то действие Ψ является слабо перемешивающим кратности k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $k = 2$. Пусть для некоторых B_0, B_1, B_2 существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(T_{g_0(i)} B_0 \cap T_{g_1(i)} B_1 \cap T_{g_2(i)} B_2) \neq \mu(B_0) \mu(B_1) \mu(B_2),$$

причем при $k < l$

$$T_{g_1^{-1}(i)g_0(i)} \rightarrow \int, \quad T_{g_2^{-1}(i)g_0(i)} \rightarrow \int, \quad T_{g_2^{-1}(i)g_1(i)} \rightarrow \int.$$

Выбрав подпоследовательность i' так, чтобы предел существовал для всех троек измеримых множеств, определим оператор $P: L_2(\mu) \otimes L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$,

$$\langle P(A_0 \otimes A_1), A_2 \rangle = \lim_{i' \rightarrow \infty} \mu(T_{g_0(i')} A_0 \cap T_{g_1(i')} A_1 \cap T_{g_2(i')} A_2).$$

Заметим, что оператор P является внутренним, так как, например,

$$\begin{aligned}\langle P(A_0 \otimes \mathbf{1}), A_2 \rangle &= \lim_{i' \rightarrow \infty} \mu(T_{g_0(i')} A_0 \cap T_{g_2(i')} A_2) \\ &= \langle T_{g_0(i')} A_0, T_{g_2(i')} A_2 \rangle \\ &= \langle T_{g_2(i')}^{-1} T_{g_0(i')} A_0, A_2 \rangle \rightarrow \left\langle \int A_0, A_2 \right\rangle = \mu(A_0) \mu(A_2).\end{aligned}$$

Оператор P сплетает централизатор с его тензорным квадратом, так как для любого автоморфизма R , коммутирующего с действием, выполнено

$$\mu(T_{g_0(i')} R A_0 \cap T_{g_1(i')} R A_1 \cap T_{g_2(i')} R A_2) = \mu(T_{g_0(i')} A_0 \cap T_{g_1(i')} A_1 \cap T_{g_2(i')} A_2),$$

следовательно,

$$\langle P(R A_0 \otimes R A_1), R A_2 \rangle = \langle P(A_0 \otimes A_1), A_2 \rangle.$$

Так как оператор нетривиален ($P \neq \int$), получим, что централизатор не обладает свойством $\mathbf{S}_3$. Рассуждения в случае $k > 2$ аналогичны.

Из результатов этого параграфа непосредственно вытекает, что для $\mathfrak{A}$ -перемешивающего автоморфизма T при $\mathfrak{A} \in (0, 1)$, например, из $T^{n(i)} \rightarrow \int, T^{2n(i)} \rightarrow \int$ следует, что для любых A, B, C

$$\mu(A \cap T^{n(i)} B \cap T^{2n(i)} C) \rightarrow \mu(A) \mu(B) \mu(C), \quad i \rightarrow \infty.$$

Хотя этот результат следует из теоремы [12], мы показали одно из кратчайших его доказательств.

Основной интерес в исследовании кратного перемешивания сосредоточен вокруг перемешивающих действий групп $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Для них, чтобы установить свойство кратного перемешивания всех порядков, ввиду утверждений 3.3 и 3.4, достаточно установить свойство $\mathbf{S}_{2p}$ для какого-нибудь $p > 1$. Иногда (т.е. при некоторых дополнительных условиях, наложенных на систему) для этой цели достаточно установить свойство $\mathbf{S}_3$.

Отметим также и то, что в проблеме Рохлина о кратном перемешивании можно ограничиться лишь рассмотрением действий с нулевой энтропией. Если перемешивающий автоморфизм не обладает кратным перемешиванием, то фактордействие на алгебре Пинскера (максимальный фактор с нулевой энтропией) также не обладает свойством кратного перемешивания. Эта теорема вытекает из [26, лемма 2'].

§4. Четная и нечетная тензорная простота

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. а) Для любых $q \geq 2$ и $k \geq 3$ свойство $\mathbf{S}_{2q}$ влечет свойство $\mathbf{S}_k$.

б) Для всех $q, r > 1$ выполнено $\mathbf{S}_{2q} = \mathbf{S}_{2r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно установим, что свойство $\mathbf{S}_4$ влечет свойство $\mathbf{S}_k$. Рассмотрим случай $k = 5$. Нам нужно показать, что для внутреннего оператора P , сплетающего тензорный квадрат и тензорный куб действия из класса $\mathbf{S}_4$, выполнено

$$\langle P(f_1 \otimes f_2), f_3 \otimes f_4 \otimes f_5 \rangle = 0,$$

как только одна функция из набора $f_1, f_2, \dots, f_5$ имеет нулевое среднее. Это равносильно следующему: для любых f_1, f_2 при $\int f_1 \int f_2 = 0$ выполнено $P(f_1 \otimes f_2) = 0$ (оператор P тривиален). Чтобы доказать это, установим

$$\langle P(f_1 \otimes f_2), P(f_1 \otimes f_2) \rangle = 0$$

для всех таких пар f_1, f_2 . Заметим, что

$$\langle P^*P(f_1 \otimes f_2), (f'_1 \otimes f'_2) \rangle = 0,$$

если одна из функций f_1, f_2, f'_1, f'_2 является постоянной функцией. Следовательно, оператор P^*P является внутренним. Так как он коммутирует с тензорным квадратом действия, а действие из класса $\mathbf{S}_4$, то оператор P^*P тривиален. Последнее влечет за собой, что тривиален и P . Так как выбор P был произвольным, получили, что действие принадлежит классу $\mathbf{S}_5$. Те же рассуждения показывают, что $\mathbf{S}_4$ влечет $\mathbf{S}_k$.

Для доказательства теоремы осталось установить, что $\mathbf{S}_{2q}$ влечет $\mathbf{S}_4$ для всех $q \geq 2$. Пусть $n \geq 4$ – четное число. Установим для всех таких n , что каждое из свойств $\mathbf{S}_4, \mathbf{S}_6, \dots, \mathbf{S}_{2n-2}$ влечет $\mathbf{S}_n$. Пусть $l + m = n, m \geq 2$, и $T \in \mathbf{S}_{2m}$. Наша цель – доказать, что тогда $T \in \mathbf{S}_n$. Пусть $P: L^{\otimes m} \rightarrow L^{\otimes l}$ является внутренним оператором, сплетающим $T^{\otimes r}$ и $T^{\otimes m}$. Тогда оператор $P^*P: L^{\otimes r} \rightarrow L^{\otimes r}$ также является внутренним. Поясним это. Если одна из функций $f'_1, \dots, f'_r$ является константой, то $P(f'_1 \otimes \dots \otimes f'_r)$ есть постоянная функция. При условии, что одна из функций $f_1, \dots, f_r$ имеет нулевое среднее, получим, что $P(f_1 \otimes \dots \otimes f_r)$ также имеет нулевое среднее значение. Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} \langle P^*P(f_1 \otimes \dots \otimes f_r), f'_1 \otimes \dots \otimes f'_r \rangle &= \langle P(f_1 \otimes \dots \otimes f_r), P(f'_1 \otimes \dots \otimes f'_r) \rangle \\ &= \langle P(f_1 \otimes \dots \otimes f_r), \text{Const} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Так как P^*P сплетает $T^{\otimes m}$ с $T^{\otimes m}$, а действие принадлежит классу $\mathbf{S}_{2m}$, получим P^*P – тривиальный оператор. Последнее эквивалентно тривиальности оператора P .

Теперь, пользуясь тем, что $\mathbf{S}_4, \mathbf{S}_6, \dots, \mathbf{S}_{2n-2}$ влекут за собой $\mathbf{S}_n$ докажем, что $\mathbf{S}_{20}$ влечет $\mathbf{S}_4$. Действительно, мы имеем

$$\mathbf{S}_{20} \implies \mathbf{S}_{12} \implies \mathbf{S}_8 \implies \mathbf{S}_6 \implies \mathbf{S}_4.$$

Таким образом, установлено, что свойство $\mathbf{S}_{2m}$ влечет свойство $\mathbf{S}_4$, следовательно, они эквивалентны.

Вопрос: может ли динамическая система обладать нечетной тензорной простотой, но при этом не являться системой класса $\mathbf{S}_4$? Внутри некоторых классов динамических систем установлено совпадение этих инвариантов.

Случай, когда $S_{2p+1} \Rightarrow S_{2q+1}$. D-системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действие Ψ группы G обладает D-свойством, если для любого неразложимого стохастического оператора J , который сплетает Ψ с другим произвольным действием Φ , выполняется одно из условий:

- 1) $\text{Im}(P^*) = \{\text{Const}\}$, что равносильно $P = \int$;
- 2) образ $\text{Im}(P^*)$ плотен в $L_2(\mu)$.

Такое действие называем также D-системой.

Примерами D-систем служат автоморфизмы с минимальным стохастическим централизатором. Поясним, в каком смысле централизатор минимален. Очевидно, что выпуклая сумма $\int: L_2 \rightarrow L_2$ со степенями T коммутирует с действием, порожденным автоморфизмом T . Если других бистохастических операторов, коммутирующих с действием, нет, то говорим, что стохастический централизатор минимален. В теории джойнигов принято обозначать класс таких действий через MSJ(2). В [10] показано, что для T из класса MSJ(2) и неразложимого нетривиального сплетающего оператора P такого, что $PT = SP$, выполнено

$$P^*P = aE + (1-a)\int.$$

Приведем более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Простая динамическая система, не имеющая нетривиальных факторов, является D-системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — неразложимое сплетение систем T_g и R_g , а ν обозначает полиморфизм, отвечающий оператору P . Мера ν является джойнингом, эргодическим относительно $T_g \otimes R_g$.

Теперь рассмотрим меру η на $X \times X' \times X''$, где $X = X' = X''$, определенную следующим образом:

$$\eta(C \times A \times B) = \int C(PA)(PB) d\mu$$

(A, B, C в правой части равенства обозначают индикаторы множеств).

Из определения видно, что мера η инвариантна относительно $R_g \otimes T_g \otimes T_g$.

Отметим другое свойство меры η : проекции $\pi'\eta$ и $\pi''\eta$ меры η , соответственно, на $X \times X'$ и $X \times X''$ совпадают с мерой ν . Так как мера ν эргодична относительно $R_g \otimes T_g$, получим, что почти все эргодические (относительно $R_g \otimes T_g \otimes T_g$) компоненты меры η обладают этим свойством. Выберем одну из таких компонент, обозначив ее через σ .

Проекция эргодической меры σ на $X' \times X''$ есть эргодическая (относительно $T_g \otimes T_g$) мера $\pi\sigma$. В силу простоты действия имеем альтернативу: или эта мера равна $\mu \otimes \mu$, или она сосредоточена на графике автоморфизма, коммутирующего с действием. В первом случае имеем

$$\pi\sigma = \mu \otimes \mu, \quad P^*P = \int, \quad P = \int.$$

Так как мы предполагаем, что $P \neq \int$, первый случай исключен.

Рассмотрим второй случай. Мера σ сосредоточена на множестве $X \times \Gamma_S$, где Γ_S – график автоморфизма S , коммутирующего с действием T_g . Так как проекции меры σ на $X \times X'$ и $X \times X''$ совпадают с ν , получим, что $\nu = (E \times S)\nu$, что эквивалентно $S^{-1}P = P$. Если автоморфизм S эргодичен, то $P = \int$, что противоречит предположению. Если же S не эргодичен, но отличен от E , получим, что нетривиальная алгебра S -инвариантных множеств является T_g -инвариантной сигма-алгеброй (следствие того, что S коммутирует с нашей системой). Таким образом, наше действие имеет нетривиальный фактор, что противоречит условиям теоремы.

Подводя итог сказанному выше, получим, что мера $\pi\eta$ есть сумма мер $\mu \otimes \mu$ и диагональной меры Δ , отвечающей тождественному преобразованию: $\Delta(A \times B) = \langle A, B \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} a\mu \otimes \mu + (1-a)\Delta &= \pi\eta(A \times B) = \langle PA, PB \rangle = \langle P^*PA, B \rangle \\ &= \left\langle \left(a \left(\int \right) + (1-a)E \right) A, B \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый неразложимый сплетающий оператор P удовлетворяет условию $P^*P = a(\int) + (1-a)E$, что влечет D-свойство нашей системы.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для D-систем свойство S_{2n+1} влечет свойство S_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что S_5 влечет S_3 . Предположим, что динамическая система Ψ не обладает свойством S_3 . Тогда она не обладает свойством S_4 , что пояснялось выше. Следовательно, найдутся внутренние операторы $J: L_2^{\otimes 2} \rightarrow L_2$ и $P: L_2^{\otimes 3} \rightarrow L_2$, сплетающие, соответственно, $(\Psi \otimes \Psi)$ и $(\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi)$ с действием Ψ , причем образы операторов J и P будут всюду плотны в L_2 . Тогда, очевидно, оператор P^*J является внутренним нетривиальным оператором, сплетающим $\Psi \otimes \Psi$ и $\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi$.

Докажем, что P^*J в наших предположениях должен быть нетривиальным. Так как оператор P^* нетривиален, некоторую функцию f он переводит в непостоянную функцию; у оператора J образ всюду плотен в $L_2(\mu)$, следовательно, некоторую функцию f_1 он переводит в функцию, близкую по норме к f . Таким образом, получим, что P^*Jf_1 не является постоянной функцией. Но это противоречит тому, что система Ψ обладает свойством S_5 . Итак, получили, что оператор P^*J нетривиален. Общий случай $n > 5$ доказывается аналогично.

Независимый фактор. Если выполнено

$$PT = SP, \quad P^*P = E,$$

говорят, что T является фактором S . А в случае, когда при этом P является внутренним оператором и $S = T \otimes T$, говорят, что S имеет независимый T -фактор (независимый по отношению к координатным факторам). Из определений вытекает, что $T \notin S_3$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Если $S = T \otimes T$ имеет независимый T -фактор, то T не обладает ни одним из свойств S_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем рассуждение при $p = 5$. Случай нечетных $p > 5$ рассматривается аналогично. Для четных p уже все доказано: $\mathbf{S}_{2m}$ влечет свойство $\mathbf{S}_3$, которым T не обладает.

Пусть внутренний оператор P сплетает $T \otimes T$ с T . Нужно показать, что из свойства $\mathbf{S}_5$ нашей системы Ψ вытекает отсутствие независимого Ψ -фактора у системы $\Psi \otimes \Psi$.

1) Предположим, что такой фактор найдется и ему отвечает внутренний оператор $P: L_2^{\otimes 2} \rightarrow L_2$. Рассмотрим новый оператор $J: L_2^{\otimes 4} \rightarrow L_2$, определенный через P при помощи подстановок

$$\langle J(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4), f \rangle = \langle P(f_1 \otimes P(f_2 \otimes P(f_3 \otimes f_4))), f \rangle.$$

2) Проверим, что J есть внутренний оператор (для этого нам достаточно знать только то, что P внутренний оператор.) Если, скажем, f_4 есть константа, то

$$P(f_3 \otimes \text{Const}) = \text{Const} \int f_3,$$

так как оператор P внутренний. Теперь последовательно получим

$$\begin{aligned} P(f_2 \otimes P(f_3 \otimes \text{Const})) &= \text{Const} \int f_2 \int f_3, \\ P(f_1 \otimes P(f_2 \otimes P(f_3 \otimes \text{Const}))) &= \text{Const} \int f_1 \int f_2 \int f_3. \end{aligned}$$

Таким образом, если одна из функций f_1, f_2, f_3, f_4 есть константа, то

$$J(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4) = \int f_1 \int f_2 \int f_3 \int f_4.$$

Это означает, что оператор J внутренний.

3) Убедимся в том, что построенный оператор J нетривиален. Это непосредственно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4.5. Пусть образы внутренних операторов $P: L_2(\mu) \otimes L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ и $Q: L_2(\mu) \otimes L_2(\mu') \rightarrow L_2(\mu)$ плотны в $L_2(\mu)$. Тогда оператор J , определенный подстановкой

$$\langle J(f_1 \otimes f_2 \otimes f'), f \rangle = \langle P(f_1 \otimes Q(f_2 \otimes f')), f \rangle,$$

также имеет образ, плотный в $L_2(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ использует несложные аппроксимационные рассуждения, основанные на том, что линейные комбинации функций вида $Q(f \otimes f')$ плотны в $L_2(\mu)$ (то же самое выполнено для оператора P). Так как образ Q всюду плотен в $L_2(\mu)$, получим, что любая функция из $L_2(\mu)$ с любой точностью приближается линейными комбинациями вида

$$\sum_{m,n}^N P\left(h_m \otimes Q\left(\sum_{i,j}^N f_{i,n} \otimes f_{j,n}\right)\right) = \sum_{m,n,i,j}^N J(h_m \otimes f_{i,n} \otimes f_{j,n}).$$

Таким образом, $\text{Im}(J)$ всюду плотен в $L_2(\mu)$.

4) Теперь приходим к противоречию с тем, что Ψ принадлежит классу S_5 . Действительно, если внутренний оператор J сплетает $\Psi^{\otimes 4}$ с Ψ , то оператор J тривиален.

Выше мы использовали операцию подстановки для построения новых сплетений из старых. По аналогии с известной (см. [27], [28]) задачей о суперпозициях непрерывных функций сформулируем вопрос о суперпозициях внутренних операторов (сплетений).

Можно ли бистохастические внутренние операторы высоких порядков представить в виде подстановочных суперпозиций

- а) операторов вида $P: L_2(\mu) \otimes L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$;
- б) операторов вида $P: L_2(\mu) \otimes L_2(\mu) \otimes L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$?

Интересен тот же вопрос при условии, что операторы сплетают тензорные степени динамической системы.

§ 5. Тензорная простота ω -простых систем

Результаты этого параграфа показывают следующее: *если поток не является тензорно простым, то его стохастический централизатор устроен сложным образом.*

Будем писать $P \geq Q$, если для операторов P, Q для всех неотрицательных функций f, g выполнено $Pf \geq Qf$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действие $\{T_g\}, g \in G$, называется ω -простым, если выполнено следующее условие: бистохастический централизатор действия содержит счетный набор операторов $\{P_i\}$ и счетный набор положительных чисел $a(i) > 0$, для которых имеет место

$$P_i^* P_i > a(i)E, \quad P_i P_i^* > a(i)E, \quad (5.1)$$

причем каждый неразложимый оператор $J \neq \int$ из стохастического централизатора действия $\{T_g\}$ имеет вид $J = SP_i$ для некоторого автоморфизма S , коммутирующего с действием.

Свойство (5.1) эквивалентно конечности полиморфизма, отвечающего оператору P_i . Мера θ , отвечающая такому оператору, является относительно дискретной. При разложении

$$\int (f \otimes g) d\theta = \int f(x) \left(\int g(y) d\theta_x(y) \right) d\mu(x)$$

меры θ в систему условных мер получим, что почти все условные меры θ_x являются дискретными мерами. Более того, для некоторого $m = m(x)$ условные меры имеют вид:

$$\theta_x = \frac{1}{m} (\delta_{y(1,x)} + \delta_{y(2,x)} + \dots + \delta_{y(m,x)}),$$

где $\delta_{y(i,x)}$ — нормированная точечная мера с носителем в точке $y(i, x)$. Из эргодичности потока вытекает, что почти все меры ν_x устроены одинаково в следующем смысле: они имеют одно и то же число точечных компонент (m не зависит от x). Действительно, пусть X_n обозначает множество $\{x \in X : m(x) = n\}$, тогда получим $\mu(X_n) = 0$ или $\mu(X_n) = 1$, так как X_n инвариантно относительно эргодического действия $\{T_g\}$.

Пример ω -простого некоммутативного действия. Рассмотрим двумерный тор X как группу с мерой Хаара μ . Автоморфизмы двумерного тора образуют ω -простое действие Ψ группы $GL(2, \mathbb{Z})$. Это непосредственно вытекает из результатов [29] о джойнингах второго порядка действия Ψ . Типичным примером неразложимого оператора служит оператор P , заданный условием $(Pf)(2x) = f(5x)$ (для всех функций f на X). Однако, действие Ψ не является тензорно простым. Действительно, оператор $J: L_2 \otimes L_2 \rightarrow L_2$, которому отвечает мера, распределенная равномерно на множестве $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ является нетривиальным внутренним оператором, сплетающим Ψ и $\Psi \otimes \Psi$. Такие операторы можно задавать явно. Например, оператор $J: L_2 \otimes L_2 \rightarrow L_2$, заданный равенством

$$(Jf)(y) = \int_X f(py - qx, my - nx) dx$$

(F – функция из $L_2 \otimes L_2$) при подходящем выборе $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, является внутренним.

Свойства дискретного некоммутативного действия Ψ контрастируют со свойствами потоков.

Коммутативный непрерывный случай (действия групп $\mathbb{R}^n$). Следующая теорема обобщает утверждение 6.3 из [10] и дает положительный ответ для потоков и перемешивающих действий на вопрос авторов [5]: влечет ли простота порядка 2 простоту всех порядков (в смысле [5]) (см. также [4]).

Напомним, что *поток* называется действие группы $\mathbb{R}^n$, являющееся непрерывным: операторы T_r слабо стремятся к тождественному оператору E , если $r \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Слабо перемешивающий ω -простой поток является тензорно простым.*

СЛЕДСТВИЕ. *Перемешивающий ω -простой поток является перемешивающим всех порядков.*

ЛЕММА 5.2. *Пусть J и J_s , $s \in (0, \varepsilon)$, суть неразложимые операторы, сплетающие ω -простой поток T_t с некоторым потоком S_t . Если выполнено $J \neq \int J_s \rightarrow J$ при $s \rightarrow 0$, то для некоторых различных $s, s' \in (0, \varepsilon)$ найдется такой автоморфизм R , коммутирующий с T_t , что выполнено равенство $J_{s'} = J_s R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Пусть $X' = X$, поток $\{T_t\}$ действует на пространстве (X, μ) , а поток $\{S_t\}$ – на (Y, λ) . Рассмотрим меру η_s на $X \otimes X' \otimes Y$, определенную следующим образом:

$$\eta_s(A \otimes B \otimes C) = \int_Y (JA) (J_s B) C d\lambda,$$

где операторы J, J_s действуют из пространства $L_2(\mu)$ в пространство $L_2(\lambda)$. Операторам J_s соответствуют меры ν_s на $X' \times Y$, связь между ними задается формулой

$$\nu_s(B \times C) = \langle J_s B, C \rangle.$$

Наша цель – доказать, что для некоторых различных s' , s и некоторого автоморфизма R , коммутирующего с потоком, выполнено

$$\nu_{s'} = (R \times \text{Id})\nu_s, \quad (5.2)$$

откуда непосредственно вытекает утверждение леммы.

Проекция $\pi\eta_s$ и $\pi'\eta_s$ меры η_s , соответственно, на $X \times Y$ и $X' \times Y$ суть меры ν и ν_s , отвечающие сплетениям J и J_s . Так как эти операторы неразложимы, меры ν и ν_s эргодичны относительно $T_t \otimes S_t$. Следовательно, почти все эргодические компоненты меры ν_s обладают такими же проекциями (те меры, которые не попали в “почти все” мы не рассматриваем).

Так как бистochasticкий оператор $J_s^* J$ коммутирует с потоком, из определения ω -простоты потока получим

$$J_s^* J = a_s \left(\sum_i J_i \left(\int_{\text{SC}} R d\sigma_{(s,i)}(R) \right) \right) + (1 - a_s) \int,$$

где $\sigma_{(s,i)}$ – некоторые положительные, не обязательно нормированные меры на стохастическом централизаторе SC нашего потока. Для всех достаточно малых s выполнено $a_s \neq 0$, так как $J_s^* J \rightarrow J^* J \neq \int$. Напомним, что неразложимому оператору $\int$ отвечает мера $\mu \otimes \mu$.

Заметим, что проекция $\pi_{12}\eta_s$ меры η_s на $X \times X'$ отвечает оператору $J_s^* J$, следовательно, $\pi_{12}\eta_s$ имеет вид:

$$\pi_{12}\eta_s = a_s \left(\sum_i \int_{\text{SC}} (\text{Id} \times R) \theta_i d\sigma_{(s,i)}(R) \right) + (1 - a_s) \mu \otimes \mu,$$

где θ_i – полиморфизмы, отвечающие операторам P_i , которые участвуют в определении ω -простоты потока. Таким образом, для достаточно малых s инвариантные относительно $\{T_t \times T_t\}$ меры $\pi_{12}\eta_s$ содержат эргодические компоненты вида

$$(\text{Id} \times R_s) \theta_{i(s)}. \quad (5.3)$$

Для достаточно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ сказанное выше выполнено при всех $s \in (0, \varepsilon)$. Сопоставим каждому s эргодическую компоненту β_s меры η_s , потребовав, чтобы β_s имела вид (5.3). Так как неэквивалентных полиморфизмов θ_i только счетное число, найдется несчетное множество $W \subset (0, \varepsilon)$ такое, что для всех $w \in W$ для некоторого фиксированного n выполнено $i(s) = n$. Тогда для всех $w \in W$ имеем

$$\pi_{12}\beta_w = (\text{Id} \times R_w) \theta_n.$$

Из относительной дискретности меры θ_s вытекает относительная дискретность меры β_s , т.е. мера β_s имеет следующее представление. Пусть $Z = X \times Y$, тогда

$$\beta_s(F \otimes f) = \int_Z \left(\int_{X'} f(x') d\beta_{s,z}(x') \right) F(z) d\pi_{13}\eta_s(z),$$

где $z \in Z$, а условные меры $\beta_{s,z}$ являются дискретными мерами.

Вспомним, что $\pi_{13}\eta_s = \nu_s$, и заметим, что из эргодичности (неразложимости) меры β_s вытекает, что для ν -почти всех z условные меры $\beta_{s,z}$ имеют вид:

$$\beta_{s,z} = \frac{1}{p}(\delta_{x'(1,z)} + \dots + \delta_{x'(p,z)}),$$

где $\delta_{x'(i,z)}$ обозначает точечную меру на X' , т.е. $\delta_{x'(i,z)}(\{x'(i,z)\}) = 1$ (подразумевается, что точки $x'(i,z)$ зависят от s).

Пусть Γ – график полиморфизма $\theta = \theta_n$. Рассмотрим меру $\tilde{\theta}$ на $X \times X' \times Y$, которая является поднятием меры ν на множество $\Gamma \times Y$. Формально мера $\tilde{\theta}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\theta}(F \otimes f) = \int_Z \left(\int_{X'} f(x') d\tilde{\theta}_{(x,y)}(x') \right) F(x, y) d\nu,$$

где $\tilde{\theta}_{(x,y)} = \theta_x$ по определению, а θ_x – условная мера, возникающая при разложении меры θ .

Заметим, что мера β_s , абсолютно непрерывна относительно меры $\tilde{\theta}_s = (\text{Id} \times R_s^{-1} \times \text{Id})\tilde{\theta}$. Это есть следствие следующих фактов:

- 1) проекции мер на $X \times Y$ совпадают;
- 2) проекции мер на $X \times X'$ совпадают;
- 3) проекции мер на $X \times X'$ относительно дискретны.

Если θ является мерой, отвечающей (однозначному) автоморфизму, то β_s и $\tilde{\theta}_s$ совпадают. Если же θ отвечает конечнозначному полиморфизму, график последнего можно представить в виде конечного объединения графиков Γ_j обычных отображений. Мера β_s есть сумма дизъюнктивных мер $\beta_{s,j}$ таких, что Γ_j является носителем меры $\pi_{12}\beta_{s,j}$. Очевидно, что π -проекция меры $\beta_{s,j}$ на $X \times Y$ абсолютно непрерывна относительно меры ν . “Подняв” меру ν на график $\bigcup_j \Gamma_j \times Y$ и получив тем самым меру $\tilde{\theta}_s$, замечаем, что меры $\beta_{s,j}$ абсолютно непрерывны относительно $\tilde{\theta}_s$.

Вспоминая определение множества W , замечаем, что все меры β_w при $w \in W$ абсолютно непрерывны относительно $(\text{Id} \times R_w^{-1} \times \text{Id})\tilde{\theta}$. Так как таких мер несчетное число, то среди них найдутся две недизъюнктивные меры. (На самом деле, в нашем случае в наборе из $p+1$ таких мер найдется недизъюнктивная пара.) В силу эргодичности эти меры совпадут.

Подведем итог. Мы доказали, что для некоторых различных $s, s' \in W$ мера $(\text{Id} \times R_s \times \text{Id})\beta_s$ равна мере $(\text{Id} \times R_{s'} \times \text{Id})\beta_{s'}$ для некоторых автоморфизмов $R_s, R_{s'}$. Тогда равны проекции мер на $X' \times Y$:

$$(R_s \times \text{Id})\nu_s = (R_{s'} \times \text{Id})\nu_{s'}.$$

Отсюда непосредственно вытекает (5.2), что завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть внутренний оператор $J: L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu^3)$ есть неразложимое сплетение потока с его тензорным кубом. Положим

$$J_s = (T_s \otimes E \otimes E)J,$$

тогда выполнены условия леммы 5.2. Следовательно, для некоторого $s \neq 0$ имеем равенство

$$(T_s \otimes \tilde{E})JR = J,$$

где $\tilde{E} = E \otimes E$ – тождественный оператор на пространстве $(\tilde{X}, \tilde{\mu}) = (X \times X, \mu \otimes \mu)$. Учитывая, что T_s – слабо перемешивающий оператор, и то, что оператор J внутренний, по лемме 2.2 получим, что J – тривиальный оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выше мы рассматривали оператор вида $J^*(E \otimes T_s)J = P$, где J – гипотетический нетривиальный оператор, сплетающий поток T_t с потоком $T_t \otimes T_t$. Так как оператор P коммутирует с потоком, мы располагали информацией о виде оператора P , затем делали выводы о том, каким может быть J . Если же вместо потока рассмотреть некоммутативную динамическую систему, то оператор P , вообще говоря, не коммутирует со всей системой. Это препятствует перенесению результатов на некоммутативный случай. Ниже будет сказано также об особенностях коммутативного дискретного случая.

Неперемешивающий случай. Будем говорить, что действие является *почти простым*, если оно является ω -простым, причем для любого $a > 0$ только конечный набор операторов из $\{P_i\}$ (фигурирующих в определении ω -простоты) удовлетворяет условию

$$P_i^* P_i > aE, \quad P_i P_i^* > aE.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. а) *Слабо перемешивающий почти простой автоморфизм, не обладающий перемешиванием, является тензорно простым.*

б) *Для почти простого автоморфизма свойство тензорной простоты (свойство S_4) эквивалентно любому из свойств S_{2p+1} , $p \geq 1$.*

Это утверждение несложно доказать, используя методы этой работы.

ТЕОРЕМА 5.4. *Если простое действие коммутирует со слабо перемешивающим неперемешивающим автоморфизмом, то это действие является тензорно простым.*

ЛЕММА 5.5. а) *Слабое замыкание подгруппы в $\mathcal{A}$ есть полугруппа в $\mathcal{M}$.*

б) *Если $S_{g(i)} \rightarrow P$, то найдется целочисленная последовательность $m(i)$ такая, что $S_{g^{-1}(i)g(m(i))} \rightarrow P^*P$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с этой леммой отметим, что замыкание $\mathcal{A}$ есть вся полугруппа $\mathcal{M}$. Доказательство этого интересного факта из [7] основано на следующих соображениях. Пусть задан оператор $P \in \mathcal{M}$, действующий на $L_2(X, \mu)$. Разобьем X (фазовое пространство) на n непересекающихся множеств $C_1, \dots, C_n$ меры $1/n$. Всегда можно найти автоморфизм T_n такой, что

$$\mu(TC_i \cap C_j) = a_{ij} = \langle PC_i, C_j \rangle$$

(необходимое и достаточное условие – бистохастичность матрицы $\|na_{ij}\|$). Последовательности таких разбиений, стремящихся к разбиению на точки, будут соответствовать последовательность автоморфизмов T_n , слабо сходящаяся к нашему оператору P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.5. Докажем п. б). Пусть фиксированы функции $f_1, f_2 \in L_2(\mu)$, натуральное i и $\varepsilon > 0$. Тогда из определений слабой сходимости имеем, что для некоторого натурального числа $m(i)$ для всех $t > m(i)$ выполнено

$$|\langle S_{g(i)} f_1, S_{g(m)} f_2 \rangle - \langle P f_1, P f_2 \rangle| < \varepsilon.$$

Таким образом, для некоторой подпоследовательности $m'(i)$ имеем

$$\langle S_{g(i)}f_1, S_{g(m'(i))}f_2 \rangle \rightarrow \langle Pf_1, Pf_2 \rangle.$$

Используя сепарабельность пространства $L_2(\mu)$, применяем диагональную процедуру и получаем, что для всех $f_1, f_2 \in L_2(\mu)$ для некоторой (“диагональной”) подпоследовательности $m''(i)$

$$\langle S_{g(i)}f_1, S_{g(m''(i))}f_2 \rangle = \langle S_{g^{-1}(m''(i))}S_{g(i)}f_1, f_2 \rangle \rightarrow \langle P^*Pf_1, f_2 \rangle.$$

Пункт а), приведенный здесь только для полноты формулировки, доказывается аналогичным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. Пусть действие коммутирует со слабо перемешивающим S , который не является перемешивающим. Будем считать, что наша система является $\mathbb{Z}$ -действием, порожденным автоморфизмом T . Случай действия произвольной группы рассматривается без изменений. Предположим, что J сплетает T и $T \otimes T \otimes T$, причем J – внутренний неразложимый нетривиальный оператор. Теперь, в отличие от случая потоков, требуется другая аргументация того, что найдется $m \neq 0$, для которого оператор $J^*(E \otimes S^m \otimes E)J$ нетривиален.

Пусть последовательность $n(i)$ такова, что $S^{n(i)} \rightarrow Q \neq \int$, тогда по лемме 5.5 имеем $S^{m(j)} \rightarrow Q^*Q \neq \int a > 0$. Так как

$$J^*(E \otimes S^{m(j)} \otimes E)J \rightarrow J^*(E \otimes Q^*Q \otimes E)J,$$

нам достаточно доказать, что

$$U = J^*(E \otimes Q^*Q \otimes E)J \neq \int.$$

Учитывая то, что $V = (E \otimes Q \otimes E)J \neq \int$ влечет

$$U = V^*V \neq \int,$$

достаточно убедиться в том, что оператор V нетривиален. Это легко вытекает из свойства простоты централизатора T . Действительно, стохастический оператор $Q \neq \int$ коммутирует с простым действием, следовательно, он имеет вид

$$Q = a \left(\int R d\sigma(R) \right) + (1-a) \int,$$

где $a > 0$. Если оператор J нетривиален и неразложим, то операторы $J_R = (E \otimes R \otimes E)J$ также неразложимы и нетривиальны. Представление тривиального оператора в виде интеграла $\int_{C(T)} J_R d\sigma(R)$ невозможно, так как тривиальный оператор является неразложимым. (Напомним, что тривиальному оператору отвечает мера μ^4 , эргодическая относительно $T^{\otimes 4}$.)

Таким образом, доказано, что $J^*(E \otimes Q^*Q \otimes E)J \neq \int$. Так как $S^{m(j)} \rightarrow Q^*Q$, для некоторого $m = m(j) \neq 0$ получим

$$J^*(E \otimes S^m \otimes E)J \neq \int.$$

Определим меру η формулой

$$\eta(A \otimes B \otimes C) = \int_Y (JA)(J'B)C d\lambda, \quad \lambda = \mu^3,$$

где $J' = (E \otimes S^m \otimes E)J$. Ввиду равенства

$$J^*J' = a \left(\int_{SC} R d\sigma_n(R) \right) + (1-a) \int,$$

выполненного вместе с условием $a > 0$, найдется эргодическая компонента β меры η такая, что

$$\pi_{12}\beta = (R \times \text{Id})\Delta,$$

где Δ – диагональная мера (отвечающая тождественному оператору). Пусть ν – проекция меры β на $X \times Y$, а ν' – проекция меры β на $X' \times Y$. Тогда, очевидно,

$$(R \times \text{Id})\nu = \nu',$$

но мерам ν и ν' соответствуют операторы J и J' . Следовательно, эти операторы связаны равенством $J' = JR$, которое переписывается в виде

$$(E \otimes S^m \otimes E)J = JR.$$

Так как S^m – слабо перемешивающий оператор, а J – внутренний оператор, по лемме 2.2 получим, что J есть тривиальный оператор.

Список литературы

1. *Rudolph D.* An example of a measure-preserving map with minimal self-joinings, and applications // J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 97–122.
2. *Ratner M.* Horocycle flows, joinings and rigidity problems // Ann. of Math. 1983. V. 118. P. 277–313.
3. *del Junco A.* A family of counter-examples in ergodic theory // Israel J. Math. 1983. V. 44. P. 160–188.
4. *Ryzhikov V. V.* Stochastic intertwining and multiple mixing of dynamical systems // J. Dynamical and Control Systems. 1996. V. 2. №1. P. 1–19.
5. *del Junco A., Rudolph D.* On ergodic action whose self-joinings are graphs // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. P. 531–557.
6. *Thouvenot J.-P.* Some properties and applications of joinings in ergodic theory // LMS Lecture notes series 205. Ergodic theory and its connections with harmonic analysis. Proc. of the 1993 Alexandria Conference K. Petersen and I. Salama editors.. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
7. *Вершик А. М.* Многочисленные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские процессы // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 72. С. 26–62.
8. *Рохлин В. А.* Эндоморфизмы компактных коммутативных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 329–340.
9. *King J.* Ergodic properties where order 4 implies infinite order // Israel J. Math. 1992. V. 80. P. 65–86.
10. *Рыжиков В. В.* Джойнинги, сплетения, факторы и перемешивающие свойства динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1993. Т. 57. №1. С. 102–128.
11. *Рыжиков В. В.* Перемешивание, ранг и минимальное самоприсоединение действий с инвариантной мерой // Матем. сб. 1992. Т. 183. №3. С. 133–160.

12. *Host B.* Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum // Israel J. Math. 1991. V. 76. P. 289–298.
13. *Glasner E., Host B., Rudolph D.* Simple systems and their higher order self-joinings // Israel J. Math. 1992. V. 78. P. 131–142.
14. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Перемешивание некоторых классов специальных потоков над поворотом окружности // Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. №3. С. 1–21.
15. *Оселедец В. А.* Автоморфизмы с простым непрерывным спектром без группового свойства // Матем. заметки. 1969. Т. 5. №3. С. 323–326.
16. *Степин А. М.* Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. С. 801–834.
17. *Furstenberg H.* Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation // Math. Systems Theory. 1967. V. 1. P. 1–49.
18. *Гуревич Б. М.* Энтропия потока орициклов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. №4. С. 768–770.
19. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90.
20. *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие динамические системы // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 107–172.
21. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны // УМН. 1952. Т. 7. №1. С. 118–137.
22. *Парасюк О. С.* Поток орициклов на поверхностях постоянной отрицательной кривизны // УМН. 1953. Т. 8. №3. С. 125–126.
23. *Каток А. Б., Степин А. М.* Аппроксимации в эргодической теории // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 81–106.
24. *Bourgain J.* On the spectral type of Ornstein's class one transformations // Israel J. Math. 1993. V. 84. P. 53–63.
25. *Рыжиков В. В.* Замечание о кратном перемешивании // УМН. 1989. Т. 44. №1. С. 205–206.
26. *Thouvenot J.-P.* Une classe de systemes pour lesquels la conjecture de Pinsker est vraie // Israel J. Math. 1975. V. 21. №2–3. P. 208–214.
27. *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108. №2. С. 179–182.
28. *Арнольд В. И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. №4. С. 679–681.
29. *Park K.* $GL(2, \mathbb{Z})$ action on a two torus // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 144. №4. P. 955–963.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
27.11.1995