Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севастьянов, О проблеме Хаара для знакочувствительных аппроксимаций,
Матем. сб., 1997, том 188, номер 2, 95–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:07:37

УДК 517.51

Е. А. Севастьянов

О проблеме Хаара для знакочувствительных аппроксимаций

Проблема Хаара для знакочувствительных аппроксимаций заключается в отыскании необходимых и достаточных условий на знакочувствительный вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$, $x \in E \subset \mathbb{R}$, и конечномерное подпространство L пространства $C(E)$ непрерывных на компакте E функций f , при которых для любой $f \in C(E)$ в L существует единственный элемент наилучшего приближения со знакочувствительным весом p . Ряд таких условий устанавливается в данной статье. Выясняется, что эти условия существенным образом связаны с топологическими свойствами аннуляторов функций $p_-(x), p_+(x)$, в частности, дается описание знакочувствительных весов $p = (p_-, p_+)$, для которых проблема Хаара имеет решение в форме условия, найденного Хааром для равномерных аппроксимаций, т.е. для случая $p(x) \equiv (1, 1)$.

Библиография: 18 названий.

Введение

Пусть на некотором метрическом компакте E задана линейно независимая система непрерывных действительнозначных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in E$, $\text{card } E \geq n$. Рассмотрим равномерные приближения непрерывных на E функций f элементами $l = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ линейного подпространства L с базисом $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Элементом (полиномом) наилучшего равномерного приближения непрерывной на E функции f называется такой элемент $l^* \in L$, что $\|l^* - f\|_E = \inf\{\|l - f\|_E : l \in L\}$, где $\|\cdot\|_E$ — равномерная норма на E . Существование элемента l^* гарантируется для системы $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ теоремой Э. Бореля [1], для произвольной линейной независимой системы — известным обобщением этой теоремы (см., например, [2, с. 17]).

Проблема Хаара в классической постановке заключается в отыскании необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять система $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ (подпространство L), чтобы для каждой непрерывной на E функции f ее элемент наилучшего равномерного приближения был единственным. Эта проблема была поставлена и решена А. Хааром в работе [3]: для того чтобы каждая непрерывная на E функция f имела в L единственный элемент наилучшего приближения необходимо и достаточно, чтобы каждый полином $c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ имел на E не более $n - 1$ различных нулей. Последнее условие получило название “условие Хаара” (см., например, [4, с. 93]).

Для равномерных аппроксимаций с произвольным полунепрерывным сверху знакочувствительным весом $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ (определение этого понятия см. ниже) проблема Хаара (точнее, соответствующее обобщение ее классической постановки) заключается уже в отыскании необходимых и достаточных условий,

которым должна удовлетворять система (знакочувствительный вес p , конечномерное подпространство L), чтобы для каждой непрерывной на компакте E функции f ее элемент $l(p, L, f)$ наилучшего приближения существовал и был единственным (определение $l(p, L, f)$ дано ниже).

Настоящая работа посвящена решению этой задачи. В § 1 устанавливается общий критерий единственности, в § 2 — теоремы о так называемом чебышёвском продолжении системы функций, в § 3 результаты §§ 1, 2 используются для получения различных аналогов и обобщений классической теоремы Хаара. При этом значительное внимание в работе уделяется возможно более полному описанию весов p , для которых справедливы обобщения теоремы Хаара, приближающиеся по форме к оригинальной формулировке. В связи с этим отметим, что, видимо, первый результат в этом направлении содержится в книге М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [5], в которой на с. 491 отмечается, что теорема Хаара сохраняется в пространстве $B(\varphi_+, \varphi_-)$ с несимметричной нормой, что фактически соответствует равномерным аппроксимациям со знакочувствительным весом $p = (p_-, p_+)$, функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ непрерывны и строго положительны на отрезке $E = [a, b]$. Доказательство этого факта легко получить соответствующими изменениями некоторых деталей доказательства самой теоремы Хаара. Принципиальные трудности при обобщении теоремы Хаара возникают в случае, когда неотрицательные компоненты $p_-(x)$ и $p_+(x)$ знакочувствительного веса $p(x)$, будучи произвольными полунепрерывными сверху функциями, независимо друг от друга обращаются в нуль на тех или иных подмножествах компакта E .

Исходные обозначения и определения (см. [6]). Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = (-a)^+$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$. Упорядоченную пару $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ неотрицательных (принимающих и значение $+\infty$) функций p_- и p_+ , определенных на некотором множестве E , назовем *знакочувствительным весом на E* ; p назовем *ограниченным, полунепрерывным сверху* и т.п., если таковы p_- и p_+ ; $\|p\|_E := \max\{\|p_-\|_E, \|p_+\|_E\}$. Если функция f определена на E и принимает, вообще говоря, значения $+\infty$ и $-\infty$, а $p(x)$ — знакочувствительный вес на E , то положим

$$(f, p)(x) := f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x), \quad |f|_{p, E} = \|(f, p)\|_E$$

(считаем $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$, $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ при $0 < a \leq +\infty$). Очевидно, $|f|_{p, E}$ — положительный сублинейный функционал на линейном пространстве $C(E)$ непрерывных на E функций (вообще говоря, $|-f|_{p, E} \neq |f|_{p, E}$). Напомним, что неотрицательный функционал $P(f)$ на некотором линейном пространстве $\mathcal{L}$ (принимающий и значение $+\infty$) называется *положительным сублинейным*, если $P(\alpha f) = \alpha P(f)$ при любых $f \in \mathcal{L}$, $\alpha > 0$ и $P(f + g) \leq P(f) + P(g)$ при любых $f, g \in \mathcal{L}$ (см. [7, с. 34], [8, с. 125]).

Уклонением $l \in \mathcal{L}$ от $f \in \mathcal{L}$ относительно неотрицательного функционала P назовем величину $P(l - f)$ (вообще говоря, $P(l - f) \neq P(f - l)$); *наименьшим уклонением непустого множества $L \subset \mathcal{L}$ от элемента $f \in \mathcal{L}$ относительно функционала P* называется $E(P; L, f) := \inf\{P(l - f) : l \in L\}$; $l(P; L, f)$ обозначает соответствующий элемент наилучшего приближения (если он существует): $P(l(P; L, f) - f) = E(P; L, f)$. При $P(\cdot) = |\cdot|_{p, E}$ пишем $E(p, L, f)$,

$l(p, L, f)$ вместо $E(P; L, f)$, $l(P; L, f)$, соответственно, а приближение относительно функционала $|\cdot|_{p,E}$ называем *равномерным приближением со знакочувствительным весом p* .

Заметим, что во всех интересующих нас ниже вопросах равномерного приближения со знакочувствительным весом можно ограничиться лишь полунепрерывными сверху весами. Это следует из того, что для любой непрерывной на компакте E (с метрикой d) функции f и любой ограниченной сверху на E функции $p(x)$ имеем

$$\sup\{f(x)p(x) : x \in E\} = \max\{f(x)\tilde{p}(x) : x \in E\},$$

где функция $\tilde{p}(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup\{p(t) : d(t, x) < \delta\}$ полунепрерывна сверху (Р. Бэр [9, с. 77]).

Отметим еще следующее. Следуя С. Н. Бернштейну [10], систему непрерывных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in E$, полиномы по которой на множестве E удовлетворяют условию Хаара, часто называют *системой Чебышёва* или *чебышёвской системой* на E (см., например, [2, с. 85]), а подпространство L , порожденное системой Чебышёва, — *чебышёвским подпространством* (см., например, [11, с. 14]). В то же время чебышёвским подпространством принято также называть подпространство банахова пространства, обладающее в нем свойством существования и единственности (см., например, [12, с. 151]). В контексте рассматриваемой задачи, в которой исследуются свойства существования и единственности системы (p, L) , удобно придерживаться терминологии, идущей от Бернштейна и связывающей с именем Чебышёва свойство элементов n -мерного подпространства L на тех или иных подмножествах иметь не более $n - 1$ нулей. С именем Хаара в статье связываются характеристики знакочувствительного веса p , обеспечивающие указанное свойство на определенных подмножествах (такие, как ядро Хаара веса p , хааровский вес и т.п. — см. § 3).

§ 1. Общий критерий единственности

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве E , $M(f) = M(f, E) := \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ — *носитель функции f на E* , $N(f) = N(f, E) := \{x \in E : f(x) = 0\}$ — *аннулятор функции f на E* (очевидно, $M(f) \cup N(f) = E$). Если L — некоторое семейство функций на E , то $N(L, E) := \{x \in E : f(x) = 0 \ \forall f \in L\}$. Как обычно, замыкание носителя $M(f)$ функции f обозначаем через $\text{supp } f$ и называем *замкнутым носителем функции f* .

Пусть $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ — знакочувствительный вес на множестве E . Будут использованы следующие обозначения и термины: $M(p) = M(p, E) = M(p_-, E) \cup M(p_+, E)$ — *носитель веса p* ; $F(p) = F(p, E) = M(p_-, E) \cap M(p_+, E)$ — *остов веса p* (множество точек невырожденности веса p на E : $F(p) = \{x \in E : p_-(x) > 0, p_+(x) > 0\}$); $M(p) \setminus F(p)$ — *множество полувыврожденности веса p* (очевидно, $M(p) \setminus F(p)$ — симметрическая разность множеств $M(p_-)$ и $M(p_+)$); $N(p) = N(p, E) = N(p_-, E) \cap N(p_+, E)$ — *аннулятор веса p* (множество вырожденности веса p : $N(p) = \{x \in E : p(x) = (0, 0)\}$); $\text{supp } p := \text{supp } p_- \cup \text{supp } p_+ = \overline{M(p, E)}$ — *замкнутый носитель веса p* ; $\Pi(p) = \Pi(p, E) := \text{supp } p_- \cap \text{supp } p_+$ — *(замкнутое) ядро веса p* ; $\Pi^0(p) = \Pi^0(p, E)$ — *открытое ядро веса p* , т.е. открытое ядро множества $\Pi(p)$.

Отметим, что замыкание $\overline{F}(p)$ остова $F(p)$ веса p это, вообще говоря, собственное подмножество его ядра $\Pi(p)$ (например, если $R(x) = 1/q$ при $x = s/q$ (дробь несократимая) и $R(x) = 0$ при иррациональном x , $p(x) = (R(x), R(x + \sqrt{2}))$, то $F(p, \mathbb{R}) = \emptyset$, $\Pi(p, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; очевидно, вес p здесь полунепрерывен сверху на $\mathbb{R}$).

Через $\mathcal{P}(E)$ будем обозначать семейство всех конечных нетривиальных $(p(x) \not\equiv (0, 0))$ полунепрерывных сверху на множестве E знакочувствительных весов $p = (p_-, p_+)$; как обычно, $C(E)$ – пространство непрерывных на некотором множестве E функций с равномерной нормой $\|\cdot\|_E$. Всюду ниже в §1 фраза “ E – компакт” означает, что E – некоторый произвольный метрический компакт.

Отметим еще, что если E – компакт, $f \in C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $|f|_{p,E} > 0$, то множества

$$\begin{aligned} X^- &= \{x \in E : -f(x)p_-(x) = |f|_{p,E}\}, & X^+ &= \{x \in E : f(x)p_+(x) = |f|_{p,E}\}, \\ X &= \{x \in E : |(f, p)(x)| = |f|_{p,E}\} = X^- \cup X^+ \end{aligned}$$

являются замкнутыми множествами.

Следующая теорема является распространением критерия элемента наилучшего приближения А. Н. Колмогорова [13] (доказательство см. также в [11, с. 13]) на равномерные аппроксимации со знакочувствительным весом. Ее доказательство не требует каких-либо новых идей. Однако ввиду важности теоремы для дальнейшего, оно приводится во всех деталях. Отметим также, что обычно в качестве приближающего множества в критерии Колмогорова выступает конечномерное подпространство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – компакт, L – выпуклое подмножество в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $f \in C(E)$, $l_0 \in L$,

$$X(p, l_0) := \{x \in E : |(l_0 - f, p)(x)| = |l_0 - f|_{p,E} > 0\} \quad (1)$$

– множество точек максимального уклонения l_0 от f . Для того чтобы функция l_0 была элементом наилучшего приближения для f необходимо и достаточно, чтобы не нашлось такой функции $l \in L$, что разность $l_0(x) - l(x)$ во всех точках x множества $X(p, l_0)$ принимает значения того же знака, что и функция $l_0(x) - f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим противное. Пусть $l(x)$ – функция из L такая, что $h(x) := l_0(x) - l(x)$ принимает во всех точках множества $X := X(p, l_0)$ значения тех же знаков, что и $g(x) := l_0(x) - f(x)$. Положим $\mu = |h|_{p,E}$, $\lambda = \min\{|h(x)| : x \in X\}$. Так как множество X замкнуто, то $\lambda > 0$. Пусть $\delta > 0$, $X(\delta)$ – пересечение компакта E с открытой δ -окрестностью множества X . Возьмем δ настолько малым, чтобы на $X(\delta)$ функции $g(x)$ и $h(x)$ принимали значения одного знака и чтобы выполнялось неравенство

$$\inf\{|h(x)| : x \in X(\delta)\} \geq \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Поскольку множество $F = E \setminus X(\delta)$ замкнуто и не содержит точек из X (где $X = \{x \in E : |(g, p)(x)| = |g|_{p,E}\}$), то $|g|_{p,F} < |g|_{p,E}$.

Положим $\varepsilon = |g|_{p,E} - |g|_{p,F}$, $m(x) = l_0(x) - \alpha h(x)$, $\alpha = \varepsilon/(2\mu)$. Очевидно, $m = (1 - \alpha)l_0 + \alpha l \in L$. При $x \in F$ имеем

$$\begin{aligned} |(m - f, p)(x)| &\leq |(g, p)(x)| + \frac{\varepsilon |(h, p)(x)|}{2\mu} \\ &\leq |g|_{p,E} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < |g|_{p,E}. \end{aligned}$$

При $x \in X^+(\delta) := \{x : x \in X(\delta), (g, p)(x) = |g|_{p,E}\}$ функции $g(x)$ и $h(x)$ положительны и выполняется неравенство $h(x) \geq \lambda/2$ (см. (2)). Поэтому, если $x \in X^+(\delta)$, то

$$(m(x) - f(x))p_+(x) = \left(g(x) - \frac{\varepsilon h(x)}{2\mu}\right)p_+(x) \leq \left(g(x) - \frac{\varepsilon \lambda}{4\mu}\right)p_+(x) < |g|_{p,E}.$$

Аналогично, при $x \in X^-(\delta) := X(\delta) \setminus X^+(\delta)$ получим неравенство

$$-(m(x) - f(x))p_-(x) < |g|_{p,E},$$

так что $|(m - f, p)(x)| < |g|_{p,E}$ при $x \in X(\delta)$. Итак, во всех точках x компакта E , $E = F \cup X(\delta)$, имеем $|(m - f, p)(x)| < |l_0 - f|_{p,E}$.

Достаточность. Предположим противное. Пусть l_0 не является элементом наилучшего приближения для f , т.е. $|l_0 - f|_{p,E} = E(p, L, f) + \sigma$, где $\sigma > 0$. Пусть l — элемент из L такой, что $|l - f|_{p,E} \leq E(p, L, f) + \sigma/2$. Тогда, если $x \in X(p, l_0)$ и $l_0(x) - f(x) > 0$, то

$$(l_0(x) - f(x))p_+(x) = |l_0 - f|_{p,E} > E(p, L, f) + \frac{\sigma}{2} \geq |l - f|_{p,E} \geq (l(x) - f(x))p_+(x),$$

откуда $l_0(x) - l(x) > 0$. Если $x \in X(p, l_0)$, а $l_0(x) - f(x) < 0$, то, аналогично, получим $l_0(x) - l(x) < 0$, так что $l_0(x) - l(x)$ во всех точках множества $X(p, l_0)$ принимает значения того же знака, что и $l_0(x) - f(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 множество L достаточно считать звездным относительно l_0 , т.е. таким, что если $l \in L$, $\alpha \in [0, 1]$, то $\alpha l + (1 - \alpha)l_0 \in L$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в теореме 1 L — n -мерное подпространство, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ — базис в нем, $\sigma(x) := \text{sign}(l_0(x) - f(x))$, то для того чтобы функция l_0 была элементом наилучшего приближения для f необходимо и достаточно, чтобы была несовместна следующая (вообще говоря, континуальная) система линейных неравенств относительно c_i :

$$\sigma(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in X(p, l_0).$$

Следующая ниже лемма позволяет указанную бесконечную систему неравенств свести к конечной системе. Утверждения подобного рода можно отнести к так называемым теоремам об очистке, нашедшем применение в теории приближений — прежде всего в вопросах характеризации элемента наилучшего приближения (см., например, [12, с. 151], [7, с. 120, 164]).

ЛЕММА А. Пусть E – компакт, L – n -мерное подпространство в $C(E)$ и пусть в L нет функций, положительных на E . Тогда найдутся натуральное число $r \leq n + 1$, точки $x_1, \dots, x_r \in E$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ такие, что

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k l(x_k) = 0 \quad \forall l \in L. \quad (3)$$

Таким образом, в L нет функций, положительных на конечном подмножестве $X = \{x_1, \dots, x_r\} \subset E$, $r \leq n + 1$.

Лемма А отличается от аналогичных известных утверждений, главным образом, формой, приближенной к запросам решаемой задачи (ср. ее, например, с предложением 3.3.5 в [4]). Однако целесообразно привести ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ А. Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ – некоторый базис в L , $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{c}, \Phi(x)) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$. По условию система неравенств $(\mathbf{c}, \Phi(x)) > 0$, $x \in E$, несовместна. Это означает, что выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ (компактного) множества векторов $\Phi(x)$, $x \in E$, содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$. По теореме Каратеодори (см., например, [4, с. 76]) найдутся такие натуральное $r \leq n + 1$, векторы $\Phi_k = \Phi(x_k)$, $k = 1, \dots, r$, из множества $\{\Phi(x) : x \in E\}$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$, что $\lambda_1\Phi(x_1) + \dots + \lambda_r\Phi(x_r) = \mathbf{0}$. Записанное покомпонентно последнее равенство имеет вид $\lambda_1\varphi_i(x_1) + \dots + \lambda_r\varphi_i(x_r) = 0$, $i = 1, \dots, n$, из которого следует, что для любой функции $l(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ выполняется (3). Лемма доказана.

Теорема 1 и лемма А позволяют без труда установить критерий элемента наилучшего равномерного приближения со знакочувствительным весом в следующей форме.

ТЕОРЕМА А. Пусть E – компакт, L – n -мерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $f \in C(E)$, $E(p, L, f) > 0$. Для того чтобы элемент $l_0 \in L$ был элементом наилучшего приближения для функции f необходимо и достаточно, чтобы нашлись натуральное число $r \leq n + 1$, точки $x_1, \dots, x_r \in E$, целые числа $\sigma_k = \pm 1$ и положительные числа λ_k , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sigma_k \cdot (l_0 - f, p)(x_k) = |l_0 - f|_{p, E}, \quad k = 1, \dots, r; \\ \text{б) } & \sum_{k=1}^r \lambda_k \sigma_k l(x_k) = 0 \quad \forall l \in L. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть l_0 – элемент наилучшего приближения, множество $X = X(p, l_0)$ определено в теореме 1 равенством (1), $\sigma(x) = \text{sign}(l_0(x) - f(x))$, L_σ – семейство всех функций с областью определения X , имеющих вид $\sigma(x)l(x)$, где $l \in L$. Очевидно, L_σ – подпространство пространства $C(X)$ размерности $\leq n$. По теореме 1 в L_σ нет функций, положительных на X . Применяя теперь к L_σ лемму А, получаем “необходимую” часть теоремы А.

Достаточность. Из условий а) и б), очевидно, следует, что в L нет функций, принимающих на множестве X значения того же знака, что и функция $(l_0 - f, p)(x)$ или, эквивалентно, функция $l_0(x) - f(x)$. Отсюда и из теоремы 1 получаем “достаточную” часть теоремы. Теорема доказана.

Теорема А может быть получена также из общих теорем выпуклого исчисления, приведенных, например, в [7, с. 41, 120]. Однако такой дедуктивный путь в нашем случае вряд ли будет более прямым. Теорема А является непосредственным обобщением известного критерия элемента наилучшего равномерного приближения (см., например, [4, с. 92] и [12, с. 157]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A и L — два непустых подмножества линейного пространства $\mathcal{L}$, P — положительный сублинейный функционал на $\mathcal{L}$. Скажем, что пара $(P; L)$ является *системой (парой) единственности на A* , если для каждого элемента $f \in A$, у которого элемент наилучшего приближения $l(P; L, f)$ существует, этот элемент является единственным, и *при этом множество таких f непусто*. Пару $(P; L)$ назовем *системой существования и единственности на A* , если для каждого $f \in A$ элемент наилучшего приближения $l(P; L, f)$ существует и единственен.

ЛЕММА 1. Пусть P — произвольный полунепрерывный снизу положительный сублинейный функционал на линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$, L — замкнутый выпуклый конечномерный конус в $\mathcal{L}$, $A \subset \mathcal{L}$, $A \neq \emptyset$. Тогда если $(P; L)$ — система единственности на A , то $(P; L)$ является системой существования и единственности на A . В частности, это имеет место, если E — компакт, $\mathcal{L} = C(E)$, L — конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $P(\cdot) = |\cdot|_{p,E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f^* некоторый элемент из A , у которого существует единственный элемент наилучшего приближения $l(P; L, f^*) =: l^*$, l_0 — произвольный ненулевой элемент из L . Тогда

$$E(P; L, f) \leq P((l^* + l_0) - f) \leq P(l^* - f) + P(l_0) = E(P; L, f) + P(l_0).$$

Очевидно, $P(l_0) > 0$ (иначе l^* и $l^* + l_0$ — два различных элемента наилучшего приближения для f).

Пусть теперь f — произвольный элемент из $\mathcal{L}$ (в частности, из A), $L(f) := \{l - f : l \in L\}$. Тогда $P(g) \rightarrow \infty$ при $g \in L(f)$, $\|g\| \rightarrow \infty$ ($\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{L}$). Действительно, возьмем некоторую последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset L(f)$, $\|g_k\| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Очевидно, $g_k = l_k - f$, где $l_k \in L$. Пусть l_0 — какая-либо предельная точка последовательности $\{l_k / \|l_k\|\}$, так что $l_0 \in L$, $\|l_0\| = 1$. По сказанному выше $P(l_0) > 0$. А так как l_0 является предельной точкой и для последовательности $\{g_k / \|g_k\|\}$, то $\liminf P(g_k / \|g_k\|) \geq P(l_0) > 0$. Отсюда следует, что $P(g_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, так что $P(g) \rightarrow \infty$ при $\|g\| \rightarrow \infty$ и $g \in L(f)$.

Таким образом, можно воспользоваться следующим простым замечанием общего характера об условиях существования элемента наилучшего приближения:

если L — такое замкнутое множество в линейном нормированном пространстве $\mathcal{L}$ с нормой $\|\cdot\|$, что его пересечение с любым замкнутым шаром в $\mathcal{L}$ является компактом, $f \in \mathcal{L}$, а P — такой полунепрерывный снизу неотрицательный функционал на $\mathcal{L}$, что $P(g) \rightarrow \infty$ при $\|g\| \rightarrow \infty$, $g \in L(f)$, то у f в L имеется, по крайней мере, один элемент наилучшего приближения $l(P; L, f)$.

Поскольку $(P; L)$ — система единственности на A , то элемент наилучшего приближения $l(P; L, f)$ является единственным. Лемма доказана.

Ниже в качестве множества A будут, наряду с множеством $C(E)$, выступать также множества

$$\begin{aligned} C(E, p, L) &:= \{f \in C(E) : E(p, L, f) > 0\}, \\ C_0(E, p, L) &:= \{f \in C(E) : E(p, L, f) = 0\} \\ (C(E) &= C(E, p, L) \cup C_0(E, p, L)), \end{aligned}$$

что обусловлено спецификой аппроксимаций с вырождающимся на некоторых подмножествах множества E весом p .

Вопрос о необходимых и достаточных условиях на пару (p, L) , при которых она является системой единственности на $C_0(E, p, L)$, решается достаточно просто.

ЛЕММА 2. Пусть E – компакт, $p = (p_-, p_+)$ – произвольный (не обязательно ограниченный) вес на E , L – конечномерное подпространство в $C(E)$. Тогда для того чтобы пара (p, L) была системой единственности на $C_0(E, p, L)$ необходимо и достаточно, чтобы ядро $\Pi(p, E)$ веса p было непусто, и чтобы L не вырождалось на ядре $\Pi(p, E)$ веса p , т.е. чтобы не существовало функции $l \in L$ такой, что $\|l\|_E = 1$, $l(x) = 0 \quad \forall x \in \Pi(p, E)$. Это же условие является также необходимым и достаточным для того, чтобы пара (p, L) была системой существования и единственности на $C_0(E, p, L)$; в частности, для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\text{card } \Pi(p, E) \geq \dim L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Допустим противное: либо $\Pi(p, E) = \emptyset$, либо $\Pi(p, E) \neq \emptyset$ и существует функция $l \in L$ такая, что $0 < \|l\|_E \leq 1$, $l(x) = 0 \quad \forall x \in \Pi(p, E)$. Множество всех таких функций l обозначим через $L(\Pi)$ и положим $\omega(\delta) := \sup\{\omega(l, \delta) : l \in L(\Pi)\}$, $\delta \geq 0$, где $\omega(l, \delta)$ – модуль непрерывности функции l на E (по теореме Арцела $\omega(0+) = 0$). Определим непрерывную на $\text{supp } p$ функцию f следующим образом. Если $\Pi(p, E) = \emptyset$, то полагаем $f(x) = -1$ при $x \in \text{supp } p_-$ и $f(x) = 1$ при $x \in \text{supp } p_+$. Если $\Pi(p, E) \neq \emptyset$, то полагаем $f(x) = -\omega(d(x))$ при $x \in \text{supp } p_-$ и $f(x) = \omega(d(x))$ при $x \in \text{supp } p_+$, где $d(x)$ расстояние от x до $\Pi(p, E)$. Затем возьмем какое-либо непрерывное продолжение f^* функции f с $\text{supp } p$ на весь компакт E (см. [14, с. 134]). Возьмем также какой-нибудь элемент l из $L(\Pi)$, если $\Pi(p, E) \neq \emptyset$, и какой-нибудь элемент l из L , $0 < \|l\|_E \leq 1$, если $\Pi(p, E) = \emptyset$. Тогда в первом случае по определению $\omega(\delta)$ при $-1 \leq t \leq 1$ и $x \in \text{supp } p$ будет выполняться неравенство $|tl(x)| \leq \omega(d(x)) = |f^*(x)|$, а во втором – неравенство $|tl(x)| \leq 1 = |f^*(x)|$. Поэтому $tl(x) - f^*(x) \geq 0$ при $x \in \text{supp } p_-$, $tl(x) - f^*(x) \leq 0$ при $x \in \text{supp } p_+$, так что $|(tl - f^*, p)(x)| = 0$ при $x \in E$, $E(p, L, f^*) = 0$, и $tl(x)$ при любом $t \in [-1, 1]$ является элементом наилучшего приближения для f^* с весом p .

Достаточность. Допустим противное: (p, L) не является системой единственности на $C_0(E, p, L)$. Это означает, что существует функция $f \in C_0(E, p, L)$, имеющая два различных элемента наилучшего приближения, которые ввиду их непрерывности и непрерывности f совпадают с f , а значит, и друг с другом на $\Pi(p, E)$. Это означает, что L вырождается на $\Pi(p, E)$. Из доказанного и из леммы 1 следует вторая часть леммы 2. Лемма доказана.

Таким образом, задача о необходимых и достаточных условиях, при которых (p, L) является системой существования и единственности на $A = C(E)$, сводится к случаю $A = C(E, p, L)$. Именно этому случаю посвящены дальнейшие результаты

параграфа. В силу общности задачи их не всегда удастся представить в достаточно простой форме и при желании можно рассматривать лишь как вспомогательные. Они будут использованы в § 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ определен на множестве E , $X \subset M(p, E)$. *Сигнатурой веса p* на множестве X назовем, вообще говоря, неоднозначную функцию $\sigma(p; x)$, определенную на множестве X , со следующим множеством значений в каждой точке $x \in X$: $\sigma(p; x) = \{-1, 1\}$, если $p_-(x) > 0$, $p_+(x) > 0$; $\sigma(p; x) = \{-1\}$, если $p_-(x) > 0$, $p_+(x) = 0$; $\sigma(p; x) = \{1\}$, если $p_-(x) = 0$, $p_+(x) > 0$. Однозначные фиксированные ветви сигнатуры $\sigma(p; x)$ будем обозначать через $\sigma(x)$. Если $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное упорядоченное множество, то сигнатуру $\sigma(p; x)$ некоторого веса p на таком множестве X назовем также *σ -вектором*, определенным на X . Однозначные ветви σ -вектора будем представлять в виде обычных векторов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, где $\sigma_i := \sigma(x_i)$, так что либо $\sigma_i = -1$, либо $\sigma_i = 1$.

Следующая ниже лемма представляет собой обобщение фрагмента доказательства теоремы Хаара (см., например, [2, с. 81]). Отметим еще, что в соответствии с терминологией, принятой в [8, с. 99], множество $A \subset C(E)$ предкомпактно, если его замыкание в $C(E)$ — компакт.

ЛЕММА 3. Пусть E — компакт, X — конечное множество на E , L — некоторое множество в $C(E)$ такое, что его подмножество

$$L_0(X) = \{l \in L : 0 < \|l\|_E \leq 1, l(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$$

непусто и предкомпактно, $p \in \mathcal{P}(E)$, $M(p, E) \supset X$, и пусть существует однозначная ветвь $\sigma(x)$ сигнатуры веса p на X такая, что не существует функции $l \in L$, у которой $\text{sign} l(x) = -\sigma(x)$ при $x \in X$. Тогда найдется функция $f_0 \in C(E)$ с (непустым) множеством элементов наилучшего приближения, содержащим $L_0(X) \cup \{0\}$, и с положительным наименьшим уклоном $E(p, L, f_0) (= \|p\|_E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно провести доказательство для случая $\|p\|_E = 1$. Пусть $q_+(x)$ ($q_-(x)$) — любая непрерывная мажоранта на E функции $p_+(x)$ (соответственно, функции $p_-(x)$), совпадающая с ней в тех точках множества X , в которых $\sigma(x) = 1$ (соответственно, $\sigma(x) = -1$). Такая мажоранта существует, поскольку X — конечное множество. Пусть $x \in E$, $d(x)$ — расстояние от x до X , $\omega(\delta) := \sup\{\omega(l, \delta) : l \in L_0(X)\}$ ($\omega(0+) = 0$ — по теореме Арцела), $s(x) = \omega(d(x))$, $g_-(x) = -(1 - s(x))/q_-(x)$, $g_+(x) = (1 - s(x))/q_+(x)$. Возьмем любую функцию $g \in C(E)$ такую, что

- 1) $g_-(x) \leq g(x) \leq g_+(x)$, $x \in E$;
- 2) $g(x) = g_-(x) = -1/p_-(x)$ при $\sigma(x) = -1$, $g(x) = g_+(x) = 1/p_+(x)$ при $\sigma(x) = 1$, $x \in X$.

Положим $f_0(x) = -g(x)$. Если $E(p, L, f_0) < 1$, то для некоторой функции $f \in L$ имеем $|f - f_0|_{p, E} < 1$,

$$\frac{-1}{p_-(x)} < f(x) + g(x) < \frac{1}{p_+(x)} \quad \forall x \in X.$$

Поэтому, если $\sigma(x) = -1$, то (см. 2)) $-1/p_-(x) = g(x)$ и, следовательно, $f(x) > 0$, если же $\sigma(x) = 1$, то $1/p_+(x) = g(x)$, и $f(x) < 0$. Таким образом, $\text{sign } f(x) = -\sigma(x)$, что противоречит условию леммы. Итак, $E(p, L, f_0) \geq 1$.

Возьмем теперь $\forall l \in L_0(X) \cup \{0\}$. Тогда при любом $x \in E$ имеем

$$|l(x) - f_0(x)|_p \leq |l(x)|_p + |g(x)|_p \leq s(x) \max\{p_-(x), p_+(x)\} + 1 - s(x) \leq 1.$$

Итак, $l \in L_0(X) \cup \{0\}$ является элементом наилучшего приближения для f_0 , $E(p, L, f_0) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть E – компакт, L – конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$. Если (p, L) является системой единственности на $C(E, p, L)$ или если $C(E, p, L)$ пусто, то для любого замкнутого подмножества $X \subset M(p, E)$ выполняется одно из следующих двух условий:

А) множество $L(X) := \{l \in L \setminus \{0\} : l(x) = 0 \quad \forall x \in X\}$ пусто;

В) множество $L(X)$ непусто и для каждой непрерывной на X однозначной ветви $\sigma(x)$ сигнатуры веса p найдется функция $l \in L$ такая, что $\text{sign } l(x) = -\sigma(x) \quad \forall x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Именно, пусть найдется замкнутое множество $X \subset M(p, E)$ такое, что $L(X)$ непусто и для некоторой непрерывной на X однозначной ветви $\sigma(x)$ сигнатуры веса p в L не существует функций, принимающих на X значения того же знака, что и $-\sigma(x)$. Другими словами, в семействе $\Sigma := \{-\sigma(x)f(x) : f \in L\}$ нет функций всюду положительных на X . По лемме А найдется такое конечное подмножество $Y \subset X$, что в Σ нет функций положительных на Y или, что то же, в L нет функций, принимающих на Y значения того же знака, что и $-\sigma(x)$. Поскольку $L_0(Y) := \{l \in L : 0 < \|l\|_E < 1, l(x) = 0 \quad \forall x \in Y\}$ – непустое предкомпактное множество, то по лемме 3 получаем, что $C(E, p, L)$ непусто и что (p, L) не является системой единственности на $C(E, p, L)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть E – компакт, L – выпуклый конус в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$. Если для любого замкнутого подмножества $X \subset M(p, E)$ выполняется одно из условий А) или В) леммы 4, то либо (p, L) является системой единственности на $C(E, p, L)$, либо $C(E, p, L)$ пусто. Если L – n -мерное подпространство, то множество X достаточно считать состоящим не более чем из $n + 1$ точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(E, p, L)$ непусто. Если в $C(E, p, L)$ нет функций, у которых элемент наилучшего приближения существует, то доказывать нечего. Предположим, что для некоторой функции $g \in C(E, p, L)$ существуют в L два различных элемента l_1 и l_2 наилучшего приближения. Тогда $(l_1 + l_2)/2$ также элемент наилучшего приближения функции g . Положив $f = g - (l_1 + l_2)/2$, получим функцию f , у которой в сдвинутом конусе $L^* = L((l_1 + l_2)/2)$ один из элементов наилучшего приближения $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 \in L^*$, и есть еще два ненулевых элемента наилучшего приближения $\varphi_1 = (l_1 - l_2)/2$ и $\varphi_2 = -\varphi_1 = (l_2 - l_1)/2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in L^*$. Нетрудно видеть, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ равны нулю всюду на множестве $X(p, \varphi_0)$ точек максимального отклонения функции $\varphi_0(x) \equiv 0$ от $f(x)$, $X(p, \varphi_0) \subset M(p, E)$. Действительно, пусть $x \in X(p, \varphi_0)$ и пусть, для определенности, $f(x) < 0$, так что $-f(x)p_+(x) = E(p, L^*, f) = E(p, L, g) > 0$. Тогда, если

$\varphi_1(x) \neq 0$, то либо $\varphi_1(x)$, либо $\varphi_2(x)$ положительно, например, $\varphi_1(x) > 0$, и мы получим $(\varphi_1(x) - f(x))p_+(x) > E(p, L^*, f)$, что невозможно. Аналогично приходим к противоречию в случае $x \in X(p, \varphi_0)$, $f(x) > 0$.

Итак, множество $L^*(X) = \{l \in L^* \setminus \{0\} : l(x) = 0 \ \forall x \in X(p, \varphi_0)\}$ непусто. А поскольку $\varphi_0 \equiv 0$ является элементом наилучшего приближения для f , то по теореме 1 не существует в L^* функции, принимающей во всех точках $X(p, \varphi_0)$ значения того же знака, что и $f(x)$. Если L — n -мерное подпространство, то по лемме А это же свойство выполняется и для подмножества $X \subset X(p, \varphi_0)$, состоящего не более чем из $n + 1$ точек. Положив $\sigma(x) = -\operatorname{sign} f(x)$, $x \in X(p, \varphi_0)$ ($x \in X$, если L — n -мерное подпространство), получим непрерывную однозначную ветвь сигнатуры веса p , для которой не существует в L^* , а значит и в L ($L \subset L^*$, так как L — выпуклый конус) функции, принимающей во всех точках множества $X(p, \varphi_0)$ (соответственно, множества X , если L — n -мерное подпространство) значения того же знака, что и $-\sigma(x)$. Это противоречит условию леммы. Доказательство закончено.

Из леммы 4 и 5 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E — компакт, L — n -мерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $C(E, p, L)$ непусто. Для того чтобы пара (p, L) являлась системой единственности на $C(E, p, L)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества $X \subset M(p, E)$, состоящего не более чем из $n + 1$ точек, выполнялось одно из следующих условий:

- А) множество $L(X) := \{l \in L \setminus \{0\} : l(x) = 0 \ \forall x \in X\}$ пусто;
- В*) для любой ветви $\sigma(x)$ сигнатуры веса p на X найдется функция $l \in L$ такая, что $\operatorname{sign} l(x) = -\sigma(x) \ \forall x \in X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие А) может выполняться лишь в случае $\operatorname{card} X \geq n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если для любого множества $X \subset M(p, E)$, $\operatorname{card} X \leq n + 1$, выполняется условие В*), то пусто множество функций $f \in C(E, p, L)$, у которых существует хотя бы один элемент наилучшего приближения $l_0 = l(p, L, f)$.

Действительно, пусть $E(p, L, f) > 0$, $X(p, l_0)$ — множество точек максимального отклонения l_0 от f , $X(p, l_0) \subset M(p, E)$. Тогда $\sigma(x) = \operatorname{sign}(l_0(x) - f(x))$ ($x \in X(p, l_0)$) — однозначная ветвь сигнатуры веса p , и по теореме 1 не существует $l \in L$ такой, что $\operatorname{sign} l(x) = \sigma(x) \ \forall x \in X(p, l_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условия на пару (p, L) , необходимые для того, чтобы она была системой единственности на $C(E, p, L)$, существенно отличаются от условий, при которых она является системой единственности на $C(E)$.

Приведем пример пары (p, L) , которая является системой единственности на $C(E, p, L)$ при пустом ядре $\Pi(p, E)$, так что (p, L) не является системой единственности на $C_0(E, p, L)$, а, следовательно, и на $C(E)$ (напомним, что по лемме 2, если (p, L) — система единственности на $C_0(E, p, L)$, то $\operatorname{card} \Pi(p, E) \geq \dim L$).

ПРИМЕР 1. Положим $E = [-3, 3]$, $p_-(x) \equiv 0$, $p_+(-2) = p_+(0) = p_+(2) = 1$, $p_+(x) = 0$ при $x \neq \pm 2$ и $x \neq 0$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1 - x^2$, $L = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, $M(p, E) = \{-2, 0, 2\}$. Если $f(x) \equiv -1$, то $l(x) \equiv 0$ — элемент наилучшего приближения для f (так как, очевидно, не существует положительной на $M(p, E)$ функции $l \in L$ — см. теорему 1). Поэтому $E(p, L, f) = 1$ и

$C(E, p, L)$ непусто. Нетрудно также увидеть, что для $X = \{-2, 0, 2\}$, $X = \{-2, 0\}$, $X = \{0, 2\}$ и $X = \{-2, 2\}$ выполняется условие А), а для одноточечных множеств $X \subset M(p, E)$ – условие В*) теоремы 2. По теореме 2 пара (p, L) является системой единственности на $C(E, p, L)$, тогда как $\Pi(p, E)$ пусто.

Приведем еще некоторые простые примеры применения теоремы 2, которыми в дальнейшем воспользуемся.

ПРИМЕР 2. Пусть $E = [-1, 1]$, $\alpha_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, – произвольные полунепрерывные сверху на E функции, положительные на $(-1, 1)$ и равные нулю в точках -1 и 1 лишь в следующих случаях: $\alpha_1(-1) = 0$, $\alpha_2(1) = 0$, $\alpha_3(-1) = \alpha_3(1) = 0$ (так что $\alpha_4(x) > 0 \ \forall x \in E$). Выбирая эти функции в качестве компонент знакочувствительных весов, образуем следующие веса: $p = (\alpha_1, \alpha_2)$, $q = (\alpha_3, \alpha_4)$, $r = (\alpha_1, \alpha_4)$, $s = (\alpha_1, \alpha_3)$. Далее, пусть L_1 – произвольное чебышёвское на $[-1, 1]$ подпространство непрерывных функций (см. ниже определение 5), принимающих на концах отрезка E равные значения (так что подпространство L_1 уже не является чебышёвским на E). Напомним, что размерность такого подпространства может быть только нечетной (см., например, [5, с. 52]). Подпространство L_2 определим как линейную оболочку функций $\varphi_1(x) = x$ и $\varphi_2(x) = 1 - x^2$, $x \in E$. Очевидно, L_2 является чебышёвским на промежутках $[-1, 1)$ и $(-1, 1]$, но не на всем отрезке $E = [-1, 1]$. Теорема 2 без труда позволяет проверить, что пары (p, L_2) , (q, L_1) , (s, L_1) , (s, L_2) являются системами единственности на $C(E)$, а пары (p, L_1) , (q, L_2) , (r, L_1) , (r, L_2) не являются.

Число примеров легко увеличить, если воспользоваться следующим замечанием: если $p = (p_-, p_+)$, $p^* = (p_+, p_-)$, то пары (p, L) и (p^*, L) или одновременно являются системами единственности, соответственно, на $C(E, p, L)$ и $C(E, p^*, L)$, или не являются таковыми.

Сделаем теперь некоторые замечания, облегчающие в иных случаях проверку условий А) и В). Прежде всего, дополним определение 2 следующими определениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $p(x)$ – невырожденный вес на $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ($p_-(x) > 0$, $p_+(x) > 0 \ \forall x \in X$), то соответствующий ему σ -вектор назовем *полным* на X . Если σ_0 – m -мерный σ -вектор, одна из координат которого есть одноточечное множество (либо $\{-1\}$, либо $\{1\}$), а остальные составляют полный $(m-1)$ -мерный σ -вектор, то σ_0 назовем *квазиполным* σ -вектором. Очевидно, квазиполный σ -вектор соответствует весу $p(x)$, $x \in X$, полувырожденному в единственной точке множества X и невырожденному в остальных его точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть A – некоторое множество элементов (векторов) $(a_1, \dots, a_m)$ в $\mathbb{R}^m$, а σ – некоторый m -мерный σ -вектор. Множество A_σ всех элементов вида $(a_1\sigma_1, \dots, a_m\sigma_m)$, где $(a_1, \dots, a_m)$ пробегает все множество A , а $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – все однозначные ветви σ -вектора σ , назовем *σ -производным* от множества A .

Очевидно, если σ – полный m -мерный σ -вектор, а A – произвольное непустое множество в $\mathbb{R}^m$, то в множестве A_σ найдется элемент, у которого все координаты неотрицательны. Аналогично, если σ – квазиполный m -мерный σ -вектор, A – множество центрально симметричное в $\mathbb{R}^m$, $A \neq \{0\}$, то в множестве A_σ найдется ненулевой вектор, у которого все координаты неотрицательны.

ЛЕММА 6. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, σ – некоторый σ -вектор на множестве X , $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – некоторая система функций, определенных на X , A – множество решений $(a_1, \dots, a_m)$ системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m a_k \varphi_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

A_σ – σ -производное множество от A , r – ранг системы (4). Для того чтобы система неравенств относительно c_i , $i = 1, \dots, n$,

$$\sigma(x_k) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_k) > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5)$$

была совместной для любой однозначной ветви $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)) =: \sigma(x)$ данного вектора σ необходимо и достаточно, чтобы нулевой элемент был единственным общим элементом множества A_σ и неотрицательного ортанта $\{(a_1, \dots, a_m) : a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0\}$. В частности, если σ – полный или квазиполный σ -вектор, то необходимым и достаточным условием совместности системы неравенств (5) является условие $r = m \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно альтернативе Фредгольма для линейных алгебраических систем уравнений система неравенств (5) при каждом выборе ветви $\sigma(x)$ многозначного вектора σ совместна тогда и только тогда, когда существует m -мерный вектор (зависящий от $\sigma(x)$) с положительными координатами, ортогональный подпространству решений $(b_1, \dots, b_m)$ системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m b_k \sigma(x_k) \varphi_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Отсюда и из того, что решения $(b_1, \dots, b_m)$ связаны с решениями $(a_1, \dots, a_m)$ системы (4) равенствами $b_k = a_k \cdot \sigma(x_k)$, $k = 1, \dots, m$, получим утверждение леммы.

Рассматриваемая задача о необходимых и достаточных условиях на пару (p, L) , при которых она является системой единственности, требует небольшого обобщения понятия “чебышёвское пространство”. Напомним общепринятые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Конечномерное подпространство L пространства $C(E)$ функций, непрерывных (не обязательно ограниченных) на некотором абстрактном множестве E , называется *чебышёвским подпространством на E* , если $\text{card } E \geq \dim L =: n$ и каждая функция $l \in L$, не тождественная нулю, имеет на E не более $n-1$ нулей. Систему $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ линейно независимых функций, $n \geq 1$, определенных и непрерывных на множестве E , $\text{card } E \geq n$, называют *системой Чебышёва на E* или *чебышёвской (на E)*, если чебышёвским (на E) является линейное подпространство, порожденное этой системой.

Условимся говорить, что конечномерное подпространство L функций f , определенных на множестве E , *не вырождается на подмножестве $X \subset E$* , если его сужение $L|_X$ на X имеет ту же размерность что и L : $\dim L|_X = \dim L$. В противном случае будем говорить, что L *вырождается на X* (в этом и только в этом случае существует не тождественная нулю на E функция $f \in L$, всюду равная нулю

на X). Очевидно, n -мерное подпространство $L \subset C(E)$ является чебышёвским на E тогда и только тогда, когда оно не вырождается на любом подмножестве $X \subset E$, состоящем из n точек. Напомним, что согласно лемме 2, если L — n -мерное подпространство в $C(E)$ (E — компакт), $p = (p_-, p_+)$ — произвольный (не обязательно ограниченный) вес на E , (p, L) — система единственности на $C(E)$, то сужение подпространства L на $\Pi(p, E)$ также n -мерно (так что $\text{card } \Pi(p, E) \geq n$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что n -мерное подпространство $L \subset C(E)$ является *чебышёвским на подмножестве* $X \subset E$, $\text{card } X \geq n$, если L не вырождается на X и его сужение $L|_X$ является чебышёвским (на X).

Наряду с определением 5 в некоторых случаях будем пользоваться определением чебышёвского подпространства, в котором не накладывается ограничение на число точек множества E , $E \neq \emptyset$. В этом определении не предполагается также конечномерность подпространства L . Если $\dim L < \infty$, $\text{card } E \geq \dim L$, то это определение совпадает с определением 5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем подпространство *чебышёвским на E* , если для любого конечного подмножества $X \subset E$ имеем

$$\dim(L|_X) = \min\{\dim L, \text{card } X\}.$$

ЛЕММА 7. Пусть E — компакт, L — конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$. Если (p, L) является системой единственности на $C(E, p, L)$, то подпространство L является чебышёвским на каждом множестве вида $F(p, E) \cup \{\xi\}$, где $\xi \in M(p, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset F(p, E) \cup \{\xi\}$. Если выполняется условие А) леммы 4, то $\dim(L|_X) = \dim L$. Если же выполняется условие В), то система неравенств (5) совместна, и поскольку сигнатура $\sigma(p; x)$ веса p представляет собой либо полный, либо квазиполный σ -вектор, то по лемме 6 выполняется условие $r = m \leq n$, так что $\dim(L|_X) = r = m = \text{card } X$. Итак, $\dim(L|_X) \leq \min\{\dim L, \text{card } X\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть E — компакт, L — конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $C(E, p, L) \neq \emptyset$. Если подпространство L является чебышёвским на $M(p, E)$, то (p, L) — система единственности на $C(E, p, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \subset M(p, E)$. Если $\text{card } X = n + 1$, то в обозначениях леммы 4 $L(X) = \emptyset$ (по определению чебышёвского подпространства) и выполняется условие А). Если $\text{card } X \leq n$, то на множестве X имеет решение любая интерполяционная задача и выполняется условие В). Остается воспользоваться леммой 5.

Параграф закончим следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E — компакт, L — n -мерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $F(p, E) = M(p, E) =: F$, $\text{card } F \geq n$. Для того чтобы пара (p, L) была системой существования и единственности на $C(E)$ необходимо и достаточно, чтобы подпространство L было чебышёвским на F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 7 и 8 получаем, что L – чебышёвское подпространство на F тогда и только тогда, когда (p, L) – система единственности на $C(E, p, L)$. Отсюда, из леммы 2 и леммы 1 следует требуемое. Теорема доказана.

В теореме 3 отражен простейший случай, когда у веса p отсутствуют точки полувыврожденности. Общий случай будет рассмотрен в ряде утверждений § 3.

§ 2. Чебышёвское продолжение системы функций

Пусть система $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ непрерывных на множестве $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций $\varphi_i(x)$ является системой Чебышёва на некотором его подмножестве E . Скажем, что система Φ имеет *чебышёвское продолжение на $E_1 \subset \Delta$* , если $E \subset E_1$ и Φ является системой Чебышёва на E_1 .

В этом параграфе изучаются наиболее общие условия чебышёвского продолжения, использующие, в основном, свойства участвующих в нем множеств (E, E_1, Δ и т.п.). Выясняется, что эти условия выражаются, главным образом, через топологические характеристики этих множеств. Впрочем, здесь не всегда бывает возможным избежать использования характеристик и самой системы Φ . В связи с этим наряду с обычным аннулятором системы Φ вводится, так называемый, хааровский аннулятор системы, совпадающий в некоторых, представляющих интерес для приложений, частных случаях с обычным. Полученные результаты используются в следующем параграфе при дальнейшем исследовании проблемы единственности элемента наилучшего равномерного приближения со знакочувствительным весом.

При формулировке и доказательстве лемме 9 и 10 воспользуемся следующими обозначениями: если действительная функция $f(x)$ определена на некотором множестве Δ , $F \subset \Delta$, $y \in \mathbb{R}$, то

$$N(f, \Delta; y) := \{x \in \Delta : f(x) = y\} \quad (7)$$

(так что $N(f, \Delta) = N(f, \Delta; 0)$ – см. начало § 1),

$$Y(f, \Delta, F) := \{y : N(f, \Delta; y) \neq \emptyset, N(f, \Delta; y) \subset F\}; \quad (8)$$

в случае, когда функция f фиксирована, используем также обозначения $N(\Delta; y)$ и $Y(\Delta, F)$ вместо $N(f, \Delta; y)$ и $Y(f, \Delta, F)$, соответственно.

ЛЕММА 9. Если $f(x)$ – действительная непрерывная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функция, не постоянная ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset \Delta$, F – множество нигде не плотное на Δ , то множество $Y(\Delta, F)$ нигде не плотно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y^* \in Y := Y(\Delta, F)$, $x^* \in F$, $f(x^*) = y^*$. Тогда в любой окрестности $U = U(x^*)$ точки x^* имеется интервал $V = V(U)$, не содержащий точек множества F . Поэтому из непрерывности функции f в точке x^* и из ее непостоянства ни на каком интервале следует, что в любой окрестности точки y^* имеется невырожденный в точку промежуток $f(V)$ – образ некоторого интервала V , не содержащего точек множества F . Очевидно, $f(V)$ не содержит точек множества Y , так что Y нигде не плотно на $\mathbb{R}$. Лемма доказана.

Напомним, что множество E на промежутке Δ называется *остаточным на Δ* , если $\Delta \setminus E$ является множеством первой категории на Δ , т.е. счетным объединением нигде не плотных на Δ множеств. Через $f(E)$ будем, как обычно, обозначать *множество значений*, принимаемых функцией f на множестве E .

ЛЕММА 10. Если $f(x)$ – действительнoзначная непрерывная на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функция, не постоянная ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset \Delta$, а E – остаточное множество на Δ , то $f(E)$ является остаточным множеством на $f(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множества F_n , $n = 1, 2, \dots$, нигде не плотны на Δ , $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, $E_n = \Delta \setminus F_n$,

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \Delta \setminus F. \quad (9)$$

Через $J_n = \{\Delta_{n,k}\}$ обозначим множество всех промежутков – назовем их промежутками n -го ранга – дополнительных на Δ к множеству F_n (индекс k пробегает конечную или бесконечную последовательность номеров $1, 2, \dots$, зависящую от n). Пусть S – множество концов всех промежутков $\Delta_{n,k}$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем (см. (7), (8)), что

$$Y(\Delta, F) \setminus f(S) \subset Y(\Delta, F_1) \cup \left(\bigcup_{n,k} Y(\Delta_{n,k}, F_{n+1}) \right), \quad (10)$$

где второе объединение берется по всем $n = 1, 2, \dots$ и всем k таким, что $\Delta_{n,k} \in J_n$. Возьмем $y^* \in Y(\Delta, F) \setminus f(S)$. Пусть множество $N(\Delta_{1,k}; y^*)$ пусто для каждого промежутка $\Delta_{1,k}$. Тогда $N(\Delta; y^*) \subset F_1$, так что $y^* \in Y(\Delta, F_1)$. Пусть теперь для некоторого промежутка Δ_1 1-го ранга, $\Delta_1 \in J_1$, множество $N(\Delta_1; y^*)$ непусто. Тогда либо $N(\Delta_1; y^*) \subset F_2$ и, тем самым,

$$y^* \in Y(\Delta, F_2) \subset \bigcup_k Y(\Delta_{1,k}, F_2),$$

либо для некоторого промежутка Δ_2 2-го ранга, содержащегося в Δ_1 , множество $N(\Delta_2; y^*)$ непусто. В последнем случае либо $N(\Delta_2; y^*) \subset F_3$ и, тем самым,

$$y^* \in Y(\Delta_2, F_3) \subset \bigcup_k Y(\Delta_{2,k}, F_3),$$

либо для некоторого промежутка Δ_3 3-го ранга, содержащегося в Δ_2 , множество $N(\Delta_3; y^*)$ непусто и т.д.

При некотором конечном m получим $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta_m$, $\Delta_n \in J_n$,

$$y^* \in Y(\Delta_m, F_{m+1}) \subset \bigcup_k Y(\Delta_{m,k}, F_{m+1}). \quad (11)$$

Действительно, пусть такого конечного m нет. Тогда $N(\Delta_n; y^*)$ непусто при каждом $n = 1, 2, \dots$. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in N(\Delta_n; y^*) \subset \Delta_n$. Пусть x^* – некоторая ее предельная точка. Тогда

$f(x^*) = y^*$. Так как $y^* \notin f(S)$, то точка x^* является внутренней для каждого из промежутков Δ_n и потому $x^* \in \bigcap \Delta_n \subset E$, что противоречит тому, что $x^* \in N(\Delta; y^*) \subset F = \Delta \setminus E$.

Итак, (10) доказано. По лемме 9 каждое из множеств $Y(\Delta, F_1)$, $Y(\Delta_{n,k}, F_{n+1})$ нигде не плотно, а множество $f(S)$, очевидно, не более чем счетно. Поэтому из (10) получаем, что $Y(\Delta, F) = \{y : y \in f(\Delta), N(\Delta; y) \subset F\}$ – это множество первой категории. Остаточное множество $f(\Delta) \setminus Y(\Delta, F)$, очевидно, совпадает с $f(E)$. Лемма доказана.

Следующая лемма является основным инструментом доказательства теоремы 4 этого параграфа. В ней и всюду ниже слова “достижимая граничная точка открытого множества” означают, что эта точка является концом одного из интервалов, составляющих данное открытое множество (которое предполагается лежащим на $\mathbb{R}$).

ЛЕММА 11. Пусть Δ – либо некоторое открытое множество Δ^0 на $\mathbb{R}$, либо множество, полученное присоединением к Δ^0 какой-либо его достижимой граничной точки, F – множество первой категории на Δ , f и g – функции, непрерывные на Δ , $N(f) := N(f, \Delta)$, $N(g) := N(g, \Delta)$, $k = \text{card}(N(f) \setminus F) < \infty$, $s = \text{card}((N(f) \setminus N(g)) \cap F) < \infty$. Тогда найдется такое $t \in \mathbb{R}$, что $\text{card } N(g + tf, \Delta \setminus F) \geq k + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = \text{card}((N(f) \cap N(g)) \setminus F)$, $q = \text{card}(N(f) \setminus N(g))$, $x_1, \dots, x_q$ – точки, составляющие множество $N(f) \setminus N(g)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_q$. Очевидно, что $p + q = k + s$ и $x_1, \dots, x_q$ – изолированные точки множества $N(f)$.

Рассмотрим промежутки $\Delta_{2j-1} = [x_j - \delta, x_j]$, $\Delta_{2j} = (x_j, x_j + \delta]$, $\delta > 0$, $j = 1, \dots, q$, исключив, возможно, из рассмотрения один из них в случае, если при некотором s окажется, что $x_s \in \Delta \setminus \Delta^0$. Именно, в этом случае исключим из рассмотрения тот единственный промежуток $[x_s - \delta, x_s]$ или $(x_s, x_s + \delta]$, на котором точка x_s может оказаться недостижимой со стороны множества Δ^0 . Выберем δ настолько малым, чтобы все оставшиеся промежутки Δ_i лежали на Δ , не пересекались, не содержали точек из $N(f)$, и чтобы на них функция $g(x)$ сохраняла знак. Положим $I = \{i : \Delta_i \subset \Delta\}$, $G = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$. Очевидно, $2q - 1 \leq \text{card } I \leq 2q$.

На каждом из промежутков Δ_i , $i \in I$, функция $\lambda(x) = g^2(x)/f^2(x)$ непрерывна, положительна и стремится к $+\infty$, когда x , оставаясь на промежутке Δ_i , стремится к его открытому концу. Считаем, что $\lambda(x) \neq \text{const} = c$ ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset \Delta$. Действительно, в противном случае $g^2(x) - cf^2(x) = 0$ на бесконечном множестве точек $(\alpha, \beta) \setminus F$, и одна из функций $g(x) - \sqrt{c}f(x)$, $g(x) + \sqrt{c}f(x)$ имеет на $(\alpha, \beta) \setminus F$ бесконечное число нулей. Утверждение леммы в этом случае становится очевидным.

По лемме 10 образ $\lambda(\Delta_i \setminus F)$ каждого из множеств $\Delta_i \setminus F$, $i \in I$, является остаточным множеством на промежутке $\lambda(\Delta_i) = [m_i, +\infty)$, $m_i := \min\{\lambda(x) : x \in \Delta_i\}$. Поэтому множество

$$\Lambda = \bigcap_{i \in I} \lambda(\Delta_i \setminus F)$$

является остаточным на $\bigcap \lambda(\Delta_i) = [m, +\infty)$, $m = \max\{m_i : i \in I\}$, а уравнение $g^2(x) - \lambda f^2(x) = 0$ для всякого $\lambda \in \Lambda$ имеет на каждом из множеств $\Delta_i \setminus F$, $i \in I$, по крайней мере, один корень.

Таким образом, общее число корней уравнения $g^2(x) - \lambda f^2(x) = 0$ на множестве $G \setminus F$ или, что то же, уравнения $(g(x) - \sqrt{\lambda}f(x)) \cdot (g(x) + \sqrt{\lambda}f(x)) = 0$ на том же множестве не менее $\text{card } I$. При этом на множестве $(N(f) \cap N(g)) \setminus F$ (не пересекающемся, очевидно, с $G \setminus F$) каждый из сомножителей $g(x) - \sqrt{\lambda}f(x)$, $g(x) + \sqrt{\lambda}f(x)$ имеет еще p нулей. Поскольку $\text{card } I \geq 2q - 1$, то одна из функций $g(x) - \sqrt{\lambda}f(x)$, $g(x) + \sqrt{\lambda}f(x)$ имеет не менее q нулей на $G \setminus F$ и не менее $p + q = k + s$ нулей на $\Delta \setminus F$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $E \subset \Delta \subset \mathbb{R}$, $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на Δ функций, чебышёвская на E . Через $N(\Phi, \Delta, E)$ обозначим множество точек $x_0 \in \Delta \setminus E$ таких, что для каждой точки x_0 найдется полином по системе Φ , имеющий нуль в точке x_0 и $n - 1$ нулей на E . Множество $N(\Phi, \Delta, E)$ назовем *хааровским аннулятором системы Φ на $\Delta \setminus F$* .

Отметим следующие очевидные свойства хааровского аннулятора:

- 1) $\Delta \setminus N(\Phi, \Delta, E)$ – это максимально широкое подмножество множества Δ , на котором система Φ может быть чебышёвской;
- 2) $N(\Phi, \Delta, E)$ содержит в себе (обычный) аннулятор

$$N(\Phi, \Delta) := \{x \in \Delta : \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0\};$$

- 3) если $E \subset \Delta_1 \subset \Delta$, то $N(\Phi, \Delta_1, E) \subset N(\Phi, \Delta, E)$;
- 4) если $E_1 \subset E \subset \Delta$, то $N(\Phi, \Delta, E_1) \subset N(\Phi, \Delta, E)$.

В качестве простейшей иллюстрации к этому определению рассмотрим систему $\Phi = \{x, 1 - x^2\}$, $x \in \Delta = [-1, 1]$. Тогда, если $E = (-1, 1)$, то $N(\Phi, \Delta, E) = \{-1\}$, если $E = [-1, 1)$, то $N(\Phi, \Delta, E) = \{1\}$, если же $E = (-a, a)$, где $0 < a \leq 1$, то $N(\Phi, \Delta, E) = \emptyset$.

Заметим, что далеко не всегда существует чебышёвское продолжение системы Φ с E на E^* , для которого $E^* \cup N(\Phi, \Delta, E^*) = \Delta$. Ниже будут указаны некоторые условия, когда такое продолжение существует (теорема 4).

Следующая лемма показывает, что в одном нетривиальном частном случае, важном для дальнейших приложений, хааровский аннулятор устроен очень просто.

ЛЕММА 12. Если Δ – либо некоторое открытое множество Δ^0 на $\mathbb{R}$, либо множество, полученное присоединением к Δ^0 какой-либо его достижимой граничной точки, $E \subset \Delta$, $F := \Delta \setminus E$ – множество первой категории, $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на Δ функций, чебышёвская на E , то $N(\Phi, \Delta, E) = N(\Phi, \Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $N := N(\Phi, \Delta, E) \subset N(\Phi, \Delta)$. Пусть N не пусто, $x_0 \in N$, и f такой полином, что $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_{n-1}) = 0$, где $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset E$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Такой полином существует по определению множества $N(\Phi, \Delta, E)$. Пусть g – произвольный полином. Предположим, что $g(x_0) \neq 0$. Поскольку $\text{card}(N(f) \setminus F) = n - 1$, $\text{card}((N(f) \setminus N(g)) \cap F) \geq \text{card}(\{x_0\}) = 1$, то по лемме 11 полином $g + tf$ при некотором $t \in \mathbb{R}$ имеет на $\Delta \setminus F = E$ не менее $(n - 1) + 1$ нулей, что невозможно. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Обратим внимание на то, что в лемме 12 условие $E \subset \Delta$ весьма существенно, и что при непустом $E \setminus \Delta$ равенство $N(\Phi, \Delta, E) = N(\Phi, \Delta)$ не может быть обобщено до равенства $N(\Phi, \Delta \cup E, E) = N(\Phi, \Delta \cup E)$. Действительно, пусть $\Delta = (-1, 1)$, $E = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \{2\}$, $\Phi_1 = \{1, x(2 - x)\}$. Тогда Φ_1 – система непрерывных на $\Delta \cup E$ функций, чебышёвская на E , $N(\Phi, \Delta \cup E, E) = \{0\}$, $N(\Phi_1, \Delta \cup E) = \emptyset$. Таким образом, даже в случае, когда $\Delta \setminus E$ и $E \setminus \Delta$ это одноточечные множества, указанное обобщение, вообще говоря, невозможно.

Еще один пример: $\Delta = (-1, 1/2)$, $E = (-1, 0) \cup (0, 1/2) \cup \{1\} \cup \{2\}$, $\Phi_2 = \{1, x, x(1 - x)(2 - x)\}$. Здесь Φ_2 – система непрерывных на $\Delta \cup E$ функций, чебышёвская на E , $N(\Phi_2, \Delta \cup E, E) = \{0\}$, $N(\Phi_2, \Delta \cup E) = \emptyset$.

Эти примеры поясняют также роль, которую хааровский аннулятор играет в следующей ниже теореме 4. Для ее формулировки воспользуемся понятиями, введенными Бэром в [15].

Говорят, что множество A (любого топологического пространства) *обладает свойством Бэра*, если существует открытое множество G такое, что $A \setminus G$ и $G \setminus A$ – множества первой категории. Если множество A обладает свойством Бэра, то в качестве G может быть взято *регулярное открытое множество*, т.е. множество, совпадающее с открытым ядром своего замыкания. Это множество единственно и является максимальным из открытых множеств G , участвующих в определении множества A со свойством Бэра (см. [16, с. 40, 41]). Обозначим его через B и назовем *ядром Бэра* множества A .

Роль свойства Бэра в топологии аналогична роли измеримости (множеств или функций) в анализе. Ниже эта роль естественным образом проявляется также в задаче чебышёвского продолжения системы функций.

ТЕОРЕМА 4. Пусть множество E на $\mathbb{R}$ обладает свойством Бэра, B – либо ядро Бэра множества E , либо ядро Бэра с присоединенной к нему какой-либо его достижимой граничной точкой, $\Delta := E \cup B$, $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на Δ функций, чебышёвская на E , $N := N(\Phi, \Delta, E)$ – хааровский аннулятор системы Φ на $\Delta \setminus E$. Тогда Φ – система Чебышёва на $E \cup (B \setminus N)$. В частности, если $E \subset B$, то Φ – система Чебышёва на $B \setminus N(\Phi, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть существует полином f с n нулями $x_1, \dots, x_n$ на $E \cup (B \setminus N) = (B \setminus N) \cup P$, где $P := E \setminus B$. Пусть при этом $n - \nu$, $1 \leq \nu \leq n$, из них, для определенности, $x_{\nu+1}, \dots, x_n$ лежат на P ($\nu \neq 0$, поскольку на P система Φ – чебышёвская). Возьмем произвольный полином g с $n - 1$ нулями на E , в том числе с нулями в точках $x_{\nu+1}, \dots, x_n$, такой полином существует в силу чебышёвности Φ на E . Очевидно, полином g не равен нулю в тех точках из множества $\{x_1, \dots, x_\nu\}$, которые лежат на $F := B \setminus E$ – иначе эти точки были бы точками хааровского аннулятора N . Обозначим через k число нулей полинома f на $E \cap B = B \setminus F$, через s – число точек на $N(f) \cap F$, в которых полином g не равен нулю, – их по сказанному не менее $\nu - k$, $N(f) = N(f, \Delta)$ – множество нулей функции f на Δ . Вспомним теперь, что F – множество первой категории. По лемме 11 найдется полином вида $g + tf$, имеющий на $B \setminus F = E \cap B$ не менее $k + s \geq k + (\nu - k) = \nu$ нулей. Общее число нулей этого полинома на $E = (E \cap B) \cup P$ не менее $\nu + (n - \nu) = n$, что невозможно. Итак, Φ – система Чебышёва на $(B \setminus N) \cup P$.

Если $E \subset B$, т.е. $\Delta = B$, то по лемме 12 $N = N(\Phi, B, E) = N(\Phi, B)$, так что $E \cup (B \setminus N) = B \setminus N(\Phi, B)$. Теорема доказана.

Установим еще одну теорему о чебышёвском продолжении, но уже несколько иной природы, чем теорема 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G и F два множества на $\mathbb{R}$, G – открытое, F – плотное на G ; $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на $G \cup F$ функций, чебышёвская на F . При этих условиях Φ является системой Чебышёва на $G \cup F$ тогда и только тогда, когда пусть ее хааровский аннулятор $N(\Phi, G \cup F, F)$, т.е. когда любой полином по системе Φ , имеющий $n-1$ нулей на F , не имеет нулей на $G \setminus F$.

Доказательству предположим лемму.

ЛЕММА 13. Пусть G и F два множества на $\mathbb{R}$, G – открытое, F – плотное на G , $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на $G \cup F$ функций, чебышёвская на F и такая, что любой полином φ по системе Φ , имеющий $n-1$ нулей на F , не имеет нулей на $G \setminus F$. Тогда все нули каждого такого полинома φ , лежащие на $F \cap G$, нечетные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует лишь проследить за тем, что при доказательстве хорошо известного частного случая $F = G = (a, b)$ этой леммы (см., например, [17, с. 22, 23]) фактически используется только непрерывность полиномов на G и плотность множества F на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. 1) Покажем вначале, что, каковы бы ни были точки $x_1, \dots, x_\nu \in G$ и $x_{\nu+1}, \dots, x_{n-1} \in F \setminus G$, $0 \leq \nu \leq n-1$, найдется полином φ с нулями в этих точках такой, что все его нечетные нули, лежащие на G , исчерпываются точками $x_1, \dots, x_\nu$ (априори пока допускаются у φ четные нули в других точках множества G). Для этого возьмем последовательность векторов $(x_1(k), \dots, x_\nu(k)) \rightarrow (x_1, \dots, x_\nu)$, $k \rightarrow \infty$, с координатами $x_i(k) \in F$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi(k, x) &= \lambda(k) \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(x_1(k)) & \dots & \varphi_1(x_\nu(k)) & \varphi_1(x_{\nu+1}) & \dots & \varphi_1(x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_1(k)) & \dots & \varphi_n(x_\nu(k)) & \varphi_n(x_{\nu+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(k) \varphi_i(x), \end{aligned}$$

где $\lambda(k)$ – нормирующий множитель такой, что $a_1(k)^2 + \dots + a_n(k)^2 = 1$. Очевидно, $\varphi(k, x)$ – полином с нулями в точках $x_1(k), \dots, x_\nu(k)$, $x_{\nu+1}, \dots, x_{n-1}$. По условию теоремы $\varphi(k, x)$ других нулей на $G \cup F$ не имеет. По лемме 13 его нули, лежащие на $F \cap G$, нечетные. Пусть вектор $(a_1, \dots, a_n)$ – предельный для последовательности $(a_1(k), \dots, a_n(k))$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда полином $\varphi(x) = a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$ – искомый. Действительно, при каждом $j = 1, \dots, \nu$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x_j) &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_i(k)) \varphi_i(x_j) + \sum_{i=1}^n a_i(k) \varphi_i(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_i(k)) \varphi_i(x_j) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$, так что $\varphi(x_j) = 0$ при всех $j = 1, \dots, n-1$. Из нечетности нулей $x_j(k)$, $j = 1, \dots, \nu$, приближающих полиномов $\varphi(k, x)$ и того, что их у $\varphi(k, x)$ ровно ν на G , следует, очевидно, нечетность нулей x_j , $j = 1, \dots, \nu$, и отсутствие у $\varphi(x)$ на G других нечетных нулей.

2) Предположим, что существует нетривиальный полином $f(x) = b_1\varphi_1(x) + \dots + b_n\varphi_n(x)$ с нулями $z_1, \dots, z_m$, $m \geq n$, на $G \cup F$, и что ранг системы векторов $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m)\}$ равен $n-1$. Пусть $z_1, \dots, z_s \in G$, $z_{s+1}, \dots, z_{s+p} \in F \setminus G$, $s+p = m$. Очевидно, $0 \leq p \leq n-2$, так что $s \geq 2$. Выберем в системе $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m)\}$ максимальную линейно независимую подсистему векторов так, чтобы в нее вошли векторы $\Phi(z_{s+1}), \dots, \Phi(z_{s+p})$ (они, очевидно, образуют линейно независимую систему) и еще $\nu = n-1-p$, $1 \leq \nu \leq n-1$, $\nu < s$, векторов из множества $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_s)\}$. Пусть, для определенности, это векторы $\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_\nu)$. Аналогично тому, как по точкам $x_1, \dots, x_\nu, x_{\nu+1}, \dots, x_{n-1}$ в п. 1) доказательства был найден полином φ , найдем по точкам $z_1, \dots, z_\nu, z_{s+1}, \dots, z_{s+p}$, $\nu+p = n-1$, полином φ_1 . Поскольку $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_\nu), \Phi(z_{s+1}), \dots, \Phi(z_{s+p})\}$ — линейно независимая система из $n-1$ векторов, то полином φ_1 определяется с точностью до множителя, и поэтому с точностью до множителя совпадает с полиномом f , коэффициенты которого образуют вектор $(b_1, \dots, b_n)$ (также находящийся с точностью до множителя), ортогональный векторам $\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m)$. Полином φ_1 имеет нечетные нули в точках $z_1, \dots, z_\nu$ и четные в точках $z_{\nu+1}, \dots, z_s$, лежащих на G (напомним, что $\nu+1 \leq s$). Поэтому $z_1, \dots, z_\nu$ — нечетные нули полинома f , а $z_{\nu+1}, \dots, z_s$ — четные.

Выберем теперь в системе векторов $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m)\}$ максимальную линейно независимую подсистему так, чтобы в нее вошел вектор $\Phi(z_{\nu+1})$, а в остальном произвольно. Аргументы векторов выбранной подсистемы составляют некоторый набор $n-1$ точек, взятых из множества $\{z_1, \dots, z_m\}$, в который войдет и точка $z_{\nu+1} \in G$. По этому набору найдем полином φ_2 аналогично тому, как по набору точек $z_1, \dots, z_\nu, z_{s+1}, \dots, z_{s+p}$ был найден полином φ_1 . Для φ_2 точка $z_{\nu+1}$ — нечетный нуль. Поэтому $z_{\nu+1}$ — нечетный нуль и для полинома f . Противоречие говорит о том, что предположение п. 2) не имеет места.

3) Предположим теперь, что для полинома $f(x) = b_1\varphi_1(x) + \dots + b_n\varphi_n(x)$ с нулями $z_1, \dots, z_m$, $m \geq n$, на $G \cup F$ ранг r системы $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m)\}$ не превосходит $n-2$. Возьмем на F точки $y_1, \dots, y_{n-1-r}$ так, чтобы ранг системы векторов $\{\Phi(z_1), \dots, \Phi(z_m), \Phi(y_1), \dots, \Phi(y_{n-1-r})\}$ равнялся $n-1$ (это, очевидно, можно сделать). Пусть g — полином, коэффициенты которого образуют вектор, ортогональный всем векторам вновь образованной системы. Очевидно, точки $z_1, \dots, z_m$, $y_1, \dots, y_{n-1-r}$ — это нули полинома g . Тем самым, для функции g выполняются те же предположения, которые были сделаны для функции f в п. 2), и противоречивость которых выше была установлена. Теорема доказана.

В связи с теоремой 5 возникает вопрос: не является ли хааровский аннулятор N системы Φ , чебышёвской на множестве F , той естественной границей, вплоть до которой система Φ *всегда* имеет чебышёвское продолжение при условии, что множество F всюду плотно в некоторой окрестности U хааровского аннулятора? Точнее, обязана ли Φ быть системой Чебышёва на множестве $U \setminus N$? Теорема 5 дает положительный ответ на этот вопрос в случае $N = \Phi$. Из доказываемой далее леммы 16 следует отрицательный ответ на этот вопрос в общем случае ($N \neq \emptyset$) — см. ниже следствие 2.

Лемме 16 предположим две леммы.

ЛЕММА 14. Пусть A и B нигде не плотные множества на интервале $(0, 1)$, $I = [0, 1]$, H — множество автоморфизмов отрезка I , оставляющих неподвижными его концы. Тогда для любого $g \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется автоморфизм $h \in H$ такой, что множества A и $h(B)$ не пересекаются и $\|g - h\|_I < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать множества A и B замкнутыми. Определим δ из равенства $\omega(g, \delta) = \varepsilon$ и разобьем отрезок I на конечное число промежутков I_i длины $|I_i| \leq \delta$ так, чтобы их концы не лежали на B . Положим $J_i = g(I_i)$; очевидно, $|J_i| \leq \varepsilon$. Через G_i обозначим наименьший отрезок, содержащий $g(B \cap I_i)$. Очевидно, G_i лежит строго внутри J_i . Также строго внутри J_i возьмем какой-нибудь отрезок F_i , не содержащий точек множества A . Пусть φ_i — кусочно-линейный гомеоморфизм отрезка J_i на себя, оставляющий неподвижными концы и отображающий G_i на F_i . Все вместе эти φ_i определяют некоторое отображение $\varphi \in H$. Автоморфизм $h = \varphi \circ g$ обладает нужными свойствами: $h(B) = \varphi \circ g(B) \subset (0, 1) \setminus A$, $\|g - h\|_I < \varepsilon$. Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть A и B — множества первой категории на интервале $(0, 1)$. Тогда существует автоморфизм h отрезка $I = [0, 1]$, оставляющий неподвижными его концы, такой, что A и $h(B)$ не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем на $(0, 1)$ возрастающие последовательности замкнутых нигде не плотных множеств $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ такие, что $A \subset \bigcup_n A_n$, $B \subset \bigcup_n B_n$. Пусть H — множество автоморфизмов отрезка I , оставляющих неподвижными его концы. Известно, что H является G_δ -множеством в $C(I)$ и топологически полно, т.е. становится полным после некоторой метризации (см. [16, с. 85, 89], [14, с. 419]).

Положим $H_n := \{h \in H : A_n \cap h(B_n) = \emptyset\}$. Нетрудно увидеть, что H_n — множество, открытое в пространстве $C(I)$. По лемме 14 H_n плотно в H . Следовательно, множество $H^* = \bigcap_n H_n$ является остаточным в H . Возьмем $h \in H^*$. Тогда для любого n имеем $h \in H_n$, так что $A_n \cap h(B_n) = \emptyset$. Отсюда без труда заключаем, что $A \cap h(B) = \emptyset$. Лемма доказана.

ЛЕММА 16. Пусть $-\infty < a < \alpha < \beta < b < \infty$, F — произвольное множество первой категории, лежащее на (α, β) , k — натуральное число. Тогда существует непрерывная на $\Delta = [a, b]$ функция $\varphi(x)$ такая, что уравнение $\varphi(x) = c$ при любом $c \in \mathbb{R}$ имеет не более одного корня на $F \cup (\Delta \setminus (\alpha, \beta))$ и не менее k корней на $[\alpha, \beta]$ при $c \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq 3$, n — любое четное число такое, что $n \geq k - 1$, $x_1, \dots, x_n$ — точки, не лежащие на F , такие, что $\alpha =: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := \beta$. Определим непрерывную на отрезке $\Delta = [a, b]$ функцию $\psi(x)$ так, чтобы она была линейной на каждом из отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, $[x_n, b]$ и принимала следующие значения: $\psi(\alpha) = 0$, $\psi(x_1) = 1$, $\psi(x_2) = 0, \dots$, $\psi(x_{n-1}) = 1$, $\psi(x_n) = 0$, $\psi(\beta) = 1$. Положим $E_i = \psi(F \cap [x_{i-1}, x_i])$, $i = 1, \dots, n+1$, $h_1(x) \equiv x$. Очевидно, $h_1(E_1) = E_1$.

По лемме 15 существует такой автоморфизм h_2 отрезка $[0, 1]$, оставляющий неподвижными его концы, что $h_1(E_1) \cap h_2(E_2) = \emptyset$. Аналогично, существует автоморфизм h_3 отрезка $[0, 1]$ такой, что $(h_1(E_1) \cup h_2(E_2)) \cap h_3(E_3) = \emptyset$ и т.д. Автоморфизм h_{n+1} отрезка $[0, 1]$, оставляющий неподвижными точки 0 и 1, определим

условием

$$(h_1(E_1) \cup \dots \cup h_n(E_n)) \cap h_{n+1}(E_{n+1}) = \emptyset.$$

Положим $\varphi(x) = \psi(x)$ при $x \in [a, \alpha]$, $\varphi(x) = h_i \circ \psi(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n+1$, $\varphi(x) = \psi(x)$ при $x \in [\beta, b]$. Очевидно, $\varphi(F) = h_1(E_1) \cup h_2(E_2) \cup \dots \cup h_{n+1}(E_{n+1}) \subset (0, 1)$, $h_i(E_i) \cap h_j(E_j) = \emptyset$, $i \neq j$. Пусть $c \in (0, 1)$. Если при этом $c \in \varphi(F)$, то c принадлежит только одному из множеств $h_i(E_i)$, и поэтому уравнение $\varphi(x) = c$ имеет единственный корень на F . Если же $c \in (0, 1) \setminus \varphi(F)$, то уравнение $\varphi(x) = c$, очевидно, не имеет корней на F и на $\Delta \setminus (a, b)$. Очевидно также, что при $c \in (0, 1)$ оно имеет $n+1 \geq k$ корней на (α, β) . И, наконец, при $c \notin (0, 1)$ уравнение $\varphi(x) = c$ имеет единственный корень на $\Delta \setminus (\alpha, \beta)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Лемма 16 указывает на неулучшаемость теоремы 4 в следующем смысле: каков бы ни был интервал (α, β) , содержащий точки множества E из теоремы 4, но не пересекающийся с его ядром Бэра, существует система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ непрерывных на некотором отрезке $[a, b] \supset E$ функций, $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, чебышёвская на E (а, по теореме 4, и на $E \cup (B \setminus N)$), но не являющаяся таковой на $(\alpha, \beta) \setminus N$, $N = N(\Phi, \Delta, E)$. Действительно, пусть F – порция множества E на (α, β) , $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) \equiv \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – функция из леммы 16. Тогда нетрудно увидеть, что множество $(\alpha, \beta) \cap N$ совпадает с полным прообразом множества $\varphi(F)$, и что на дополнении $(\alpha, \beta) \setminus N$ к нему любой полином вида $c - \varphi(x)$, где $c \in (0, 1) \setminus \varphi(F)$, имеет не менее k нулей.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Каково бы ни было всюду плотное на (α, β) множество F первой категории существует система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ непрерывных на $J = [\alpha, \beta]$ функций, чебышёвская на F , и такая, что*

- a) *ее хааровский аннулятор $N := N(\Phi, J, F)$ – это всюду плотное на J множество (первой категории),*
- b) *каково бы ни было множество $E \supset F$ со свойством Бэра, на котором система Φ является чебышёвской, разность $J \setminus (E \cup N)$ – множество второй категории (т.е. не первой категории).*

Действительно, положим $\Phi = \{1, \varphi(x)\}$, $x \in J$, где $\varphi(x)$ – функция из леммы 16. Тогда аннулятор $N = N(\Phi, J, F)$ является полным прообразом множества $\varphi(F)$, так что N – множество первой категории, плотное на J . Если E – произвольное множество со свойством Бэра, содержащее F , и на E система Φ является чебышёвской, то по теореме 4 Φ является чебышёвской на $E \cup (B \setminus N)$, где B – ядро Бэра множества E . Если бы B совпало с (α, β) , то система Φ была бы чебышёвской на $(\alpha, \beta) \setminus N$, что не верно. Поэтому множество $J \setminus E$ не может быть первой категории.

Заметим еще, что из леммы 16 без труда получается также такое следствие: каким бы ни было всюду плотное на отрезке $J = [\alpha, \beta]$ множество F первой категории (F – может иметь при этом меру $\beta - \alpha$) и положительное $\mu < \beta - \alpha$ существует подпространство $L \subset C(J)$, $\dim L = 2$, чебышёвское на F и не являющееся таковым на любом интервале $(\alpha', \beta') \subset J$ длины $\beta' - \alpha' \geq \mu$. (Надо лишь в доказательстве леммы 16 точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ взять так, чтобы выполнялись неравенства $x_{i+1} - x_i < \mu$, $i = 0, 1, \dots, n$).

Таким образом, в общем случае для существования чебышёвского продолжения системы функций, чебышёвской на множестве E , с E до некоторых естественных границ необходимо, чтобы множество E было в топологическом смысле достаточно массивным.

§ 3. Обобщения и аналоги теоремы Хаара

Теорема Хаара дает исчерпывающий признак тех линейных конечномерных подпространств $L \subset C(E)$, которые с весом $p(x) \equiv (1, 1)$ составляют пару (p, L) , являющуюся системой единственности на $C(E)$, E – компакт. В общем случае возникает задача описать веса p , при которых этот замечательный по простоте признак сохраняется для пары (p, L) в виде, достаточно близком к классическому. В конце § 1 мы видели, что к таким весам можно отнести веса без точек полувыврожденности (см. теорему 3). Результаты § 2 позволяют нам теперь продвинуться дальше. При этом проблема состоит, прежде всего, в том, чтобы на основании условия “ (p, L) – система единственности”, сделать возможно более общие выводы о подмножествах компакта E , на которых подпространство L является чебышёвским.

Для дальнейшего отметим следующие свойства носителей и аннуляторов компонент $p_-(x)$ и $p_+(x)$ полунепрерывного веса. Если неотрицательная функция $q(x)$ полунепрерывна сверху на компакте $E \subset \mathbb{R}$, то ее носитель

$$M(q, E) = \bigcup_k \left\{ x \in E : q(x) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

представляет собой объединение замкнутых множеств, т.е. $M(q, E)$ – множество типа F_σ , а аннулятор $N(q, E)$ есть множество типа G_δ . Поэтому, если E содержит интервал, на котором $N(q, E)$ плотно, то $N(q, E)$ – остаточное множество на таком интервале. Если Δ – это промежуток, $p = (p_-, p_+) \in \mathcal{P}(\Delta)$, то аннулятор $N(p, \Delta)$ веса p является множеством первой категории на Δ тогда и только тогда, когда $N(p, \Delta)$ нигде не плотно на Δ .

Пусть $G \subset E \subset \mathbb{R}$. Через $\mathcal{H}\mathcal{P}(G)$ обозначим семейство весов $p = (p_-, p_+) \in \mathcal{P}(E)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- 1) носители $M(p_-, E)$, $M(p_+, E)$ всюду плотны на G ;
- 2) аннулятор $N(p, E)$ веса p нигде не плотен на G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $p \in \mathcal{P}(E)$, где E – компакт на $\mathbb{R}$ с непустым открытым ядром E^0 . Максимальное открытое подмножество G множества E такое, что $p \in \mathcal{H}\mathcal{P}(G)$, назовем *хааровским ядром веса p на E* и обозначим через $H(p) = H(p, E)$.

Если $H(p, E) = E^0$, то хааровское ядро веса p назовем *максимальным*.

Очевидно, хааровское ядро $H(p, E)$ является максимальным тогда и только тогда, когда $E^0 = \Pi^0(p, E)$, а аннулятор $N(p, E)$ веса p нигде не плотен на E^0 . Нетрудно увидеть, что хааровское ядро $H(p, E)$ – регулярное открытое множество.

В приводимых ниже леммах 17–19 используются следующие обозначения: $\Pi := \Pi(p, E)$ – ядро веса p , Π^0 – открытое ядро множества Π , $\overline{N}$ – замыкание аннулятора $N(p, E)$, $(\overline{N})^0$ – открытое ядро множества $\overline{N}$, $(\overline{(\overline{N})^0})$ – замыкание множества $(\overline{N})^0$, $F := F(p, E)$, $(\overline{F})^0$ – открытое ядро замыкания $\overline{F}$ множества F .

Непосредственно из определения хааровского ядра вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 17. *Справедливо равенство $H(p, E) = \Pi^0 \setminus \overline{(\overline{N})^0}$.*

ЛЕММА 18. *Пусть $G = \Pi^0 \setminus \overline{N}$. Тогда F плотно на G , и при этом $(\overline{F})^0 \setminus \overline{N} = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что F плотно на любом интервале, на котором плотны носители $M_- := M(p_-, E)$ и $M_+ := M(p_+, E)$ и который не содержит точек из $N(p, E)$.

Предположим, что существует интервал $I = (\alpha, \beta)$, не содержащий точек из F , из N , и на котором M_- и M_+ плотны. С одной стороны это означает, что множества $A := I \cap M_+$ и $B := I \cap M_-$ не пересекаются и плотны на I . С другой, поскольку $A = I \cap N(p_-, E)$, а $B = I \cap N(p_+, E)$, множества A и B являются множествами типа G_δ . Поэтому множества A и B остаточные на I и, следовательно, пересекаются. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 19. *Пусть $G = \Pi^0 \setminus \overline{N}$. Тогда ядро Бэра множества $G \cup F$ совпадают с хааровским ядром $H(p, E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $F \setminus G$ плотно на каком-либо интервале. Тогда в силу равенства $(\overline{F})^0 \setminus \overline{N} = G$ (см. лемму 18) на этом интервале плотно также N , так что N – остаточное множество на этом интервале. Следовательно, множество F на этом интервале – первой категории. С другой стороны, ядро Бэра множества G совпадает с $H(p, E)$ (ср. равенство в лемме 17 с определением G). Лемма доказана.

Хааровским аннулятором $N(L, E, A)$ конечномерного подпространства $L \subset C(E)$ на $E \setminus A$ назовем хааровский аннулятор $N(\Phi, E, A)$ системы Φ на $E \setminus A$, где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – базис в L (см. определение 8).

В следующей лемме рассматривается взаимное расположение хааровского аннулятора подпространства L и аннулятора веса p в случае, когда пара (p, L) является системой единственности.

ЛЕММА 20. *Пусть E – компакт на $\mathbb{R}$, L – конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, (p, L) – система единственности на $C(E, p, L)$. Тогда для любого подмножества $A \subset E$, $\text{card } A \geq \dim L$, на котором L является чебышёвским подпространством, имеем $N(L, E, A) \subset N(p, E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in N(L, E, A)$. Это означает, что существуют различные точки $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ и полином $l \in L$ такой, что $l(x_0) = l(x_1) = \dots = l(x_{n-1}) = 0$. Поэтому, если $\Phi(x) = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ – базис в L , а r – ранг системы векторов $\{\Phi(x_0), \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_{n-1})\}$, то $r < n$. По лемме 4 на множестве $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ для каждой однозначной ветви $\sigma(x)$ сигнатуры веса p найдется функция $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ такая, что

$$\sigma(x_k) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_k) > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если допустить, что $x_0 \notin N(p, E)$, то сигнатура $\sigma(p; x)$ веса p на X является полным или квазиполным σ -вектором (см. определение 3). По лемме 6 в этом случае $r = \text{card } X$, т.е. $r = n$. Противоречие говорит о том, что $x_0 \in N(p, E)$. Лемма доказана.

Следующая теорема решает задачу чебышёвского продолжения подпространства L вплоть до точек вырожденности веса p (не включая в это продолжение самих этих точек).

ТЕОРЕМА 6. Пусть E – компакт на $\mathbb{R}$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $F := F(p, E)$, L – конечномерное подпространство в $C(E)$, $\dim L \leq \text{card } F$. Тогда если (p, L) – система единственности на $C(E)$, то подпространство L является чебышёвским на множестве $F \cup (H \setminus N)$, где H – хааровское ядро $H(p, E)$ с любой присоединенной к нему его достижимой граничной точкой, $N = N(p, E)$ – аннулятор веса p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 7 подпространство L при каждом $\xi \in M := M(p, E)$ является чебышёвским на множестве $F \cup \{\xi\}$ и, таким образом, $N(L, M, F) = \emptyset$. Положим $G = \Pi^0 \setminus \overline{N}$, где Π^0 – открытое ядро множества $\Pi(p, E)$, $\overline{N}$ – замыкание $N(p, E)$. Очевидно, $G \subset M$, $N(L, G, F) = \emptyset$. По лемме 18 множество F плотно на G .

2) Поэтому по теореме 5 подпространство L является чебышёвским на $A := G \cup F$, а по теореме 4 также и на $A \cup (B \setminus N_1)$, где B – это ядро Бэра множества A с любой присоединенной к нему его достижимой граничной точкой, $N_1 := N(L, B \cup A, A)$. По лемме 19 ядро Бэра множества A совпадает с $H(p, E)$, так что будем считать $B = H$. Так как $B \cup A \subset E$, то $N_1 \subset N(L, E, A)$, а по лемме 20 $N(L, E, A) \subset N$, откуда $N_1 \subset N$. В итоге получаем

$$A \cup (B \setminus N_1) = (G \cup F) \cup (H \setminus N_1) = F \cup (H \setminus N_1) \supset F \cup (H \setminus N).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Delta = [a, b]$, $p \in \mathcal{P}(\Delta)$, $H(p, \Delta) = (a, b)$, L – конечномерное подпространство в $C(\Delta)$. Тогда если (p, L) – система единственности на $C(\Delta)$, то подпространство L является чебышёвским на $[a, b] \setminus N(p, \Delta)$ и $(a, b] \setminus N(p, \Delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. То, что здесь не может быть гарантирована чебышёвость подпространства L на $[a, b] \setminus N(p, \Delta)$ (в том числе и при пустом аннуляторе $N(p, \Delta)$) демонстрируют пары (p, L_2) и (q, L_1) из примера 2 (§1).

Из теоремы 6 и лемм 2 и 8 непосредственно получим следующее утверждение, в котором ∂E , как обычно, обозначает границу множества E .

ТЕОРЕМА 7. Пусть E – компакт на $\mathbb{R}$, $p \in \mathcal{P}(E)$, $E^0 = H(p, E)$, x^* – какая-либо достижимая граничная точка множества E^0 , $\partial E \setminus \{x^*\} \subset F(p, E)$, L – конечномерное подпространство в $C(E)$, $\dim L \leq \text{card } F(p, E)$. Тогда для того чтобы пара (p, L) была системой единственности на $C(E)$ необходимо и достаточно, чтобы подпространство L было чебышёвским на $M(p, E)$, в частности, если $N(p, E) = \emptyset$, то на всем множестве E .

Всюду ниже $a \vee b \in F$ обозначает, как обычно, что хотя бы одна из точек a или b принадлежит F .

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\Delta = [a, b]$, $p \in \mathcal{P}(\Delta)$, $H(p, \Delta) = (a, b)$, $a \vee b \in F(p, \Delta)$, L – конечномерное подпространство в $C(\Delta)$. Тогда для того чтобы (p, L) была системой единственности на $C(\Delta)$ необходимо и достаточно, чтобы L было чебышёвским на $M(p, \Delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Рассматривая приближения непрерывных функций на компакте E элементами подпространства $L \subset C(E)$, можно считать, по существу не ограничивая общности, что открытое ядро N^0 аннулятора $N(p, E)$ веса p пусто. Действительно, если $N^0 \neq \emptyset$ и подпространство L не вырождается на $E^* = E \setminus N^0$ (т.е. если линейная размерность сужения $L|_{E^*}$ подпространства L на E^* равна $\dim L$), то интересующие нас вопросы единственности элемента наилучшего приближения можно решать, приближая непрерывные функции на компакте E^* элементами подпространства $L|_{E^*}$. Если $N^0 = \emptyset$, то замыкание $\overline{M}(p, E) = \text{supp } p$ носителя $M(p, E)$ совпадает с E , и подпространство L никогда не вырождается на $M(p, E)$. Это и будет предполагаться в дальнейшем.

Поставим теперь задачу получения чебышёвского продолжения подпространства L , включающего в себя также точки вырожденности веса p , т.е. точки аннулятора $N(p, E)$. Заметим, что эти точки на компакте E могут составлять множество положительной меры (даже при условии, что открытое ядро множества $N(p, E)$ пусто). Простые примеры показывают, что ситуация здесь может быть существенно различной в зависимости от того, является ли компакт E связным множеством или нет. Действительно, пусть $E = [-1, 1] \cup \{2\}$, $L = \{c_1 + c_2 x(x - 2)\}$, $p_-(x)$, $p_+(x)$ – любые полунепрерывные сверху, положительные на $E \setminus \{0\}$ функции, $p_-(0) = p_+(0) = 0$. Тогда на носителе $M(p, E) = E \setminus \{0\}$ подпространство L чебышёвское, (p, L) – система единственности на $C(E)$, $N(L, E) = \emptyset$, но на E подпространство L чебышёвским не является. Таким образом, чебышёвского продолжения с носителя $M(p, E)$ на E здесь не существует, хотя “особенность” (обусловленной вырожденностью веса p) является единственная внутренняя точка множества E (при пустом аннуляторе $N(L, E)$ подпространства L). В то же время отметим, что L является чебышёвским подпространством на множестве $[-1, 1] = E \setminus \{2\}$, содержащем внутри себя $N(p, E) (\neq \emptyset)$.

Заметим также, что в этом примере $N(p, E)$ совпадает с хааровским аннулятором $N(L, E, F)$, где $F = F(p, E) = M(p, E)$. Очевидно, одно это определяет невозможность чебышёвского продолжения, включающего точки из $N(p, E)$. Это, наряду с теоремой 4, позволяет предположить, что в решении поставленной задачи на произвольном компакте E существенную роль должна сыграть такая характеристика, как хааровский аннулятор $N(L, E, F)$, с тем или иным множеством F , на котором тем или иным образом (на основании того, что (p, L) – система единственности) уже установлена чебышёвность подпространства L . Однако ниже мы отдаем предпочтение формулировкам, в которых участвует лишь обычный аннулятор $N(L, E) := \{x \in E : l(x) = 0 \ \forall l \in L\}$ подпространства L на E – характеристика значительно более прозрачная. За хааровским аннулятором сохраняется роль промежуточной характеристики, полезной при доказательствах.

Следующая теорема показывает также, что хааровское ядро $H(p, E)$ – это максимальное открытое множество для данного веса p , на котором для любого приближающего конечномерного подпространства L выполняется необходимое условие Хаара единственности элемента наилучшего приближения.

ТЕОРЕМА 8. 1) Пусть E – компакт на $\mathbb{R}$ с непустым открытым ядром E^0 , L – конечномерное подпространство в $C(E)$, $p \in \mathcal{P}(E)$, H – хааровское ядро $H(p, E)$ с любой присоединенной к нему его достижимой граничной точкой, $H(p, E) \neq \emptyset$. Тогда если (p, L) – система единственности на $C(E)$, то подпространство L является чебышёвским на $H \setminus N(L, E)$, в частности, при

$N(L, E) = \emptyset$ на всем множестве H .

2) При этом если $H(p, E) \neq E^0$ и $\tilde{G}$ – произвольное открытое подмножество множества E^0 , содержащее $H(p, E)$ в качестве собственного подмножества, то существует такое подпространство $L_0 \subset C(E)$, $\dim L_0 \geq 2$, $N(L_0, E) = \emptyset$, что (p, L_0) является системой единственности на $C(E)$, но L_0 не является чебышёвским подпространством на $\tilde{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первая часть теоремы фактически установлена выше при доказательстве теоремы 6. Надо лишь в п. 2) этого доказательства под F понимать ту часть остова $F = F(p, E)$ веса p , которая лежит на G . Тогда все, что есть в п. 2) остается в силе, но зато теперь по лемме 12 $N_1 = N(L, B)$, так что L является чебышёвским на множестве $A \cup (B \setminus N_1) = H \setminus N(L, B) = H \setminus N(L, E)$. (Предостережем от ошибки считать, что в общем случае $N_1 := N(L, B \cup A, A) \subset N(L, B, G)$ – см. замечание 5.)

2) Доказательству второй части теоремы предпошлим две леммы.

ЛЕММА 21. Пусть n – натуральное число, $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ – система Чебышёва на $\Delta = [a, b]$, $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – система непрерывных на Δ функций φ_i таких, что $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$ при $x \in \Delta \setminus (\alpha, \beta)$ и $\varphi_i(x)$ линейна на $[\alpha, \beta]$, $i = 1, \dots, n$, L – линейное подпространство в $C(\Delta)$ с базисом Φ , $p = (p_-, p_+)$ – вес из $\mathcal{P}(\Delta)$ такой, что на $[\alpha, \beta]$ либо функция $p_-(x)$, либо $p_+(x)$ тождественна нулю, в остальном вес p произвольный. Тогда если $C(\Delta, p, L)$ непусто, то (p, L) – система единственности на $C(\Delta, p, L)$. При $n \geq 3$ подпространство L не является чебышёвским на Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждая функция из L линейна на $[\alpha, \beta]$, то для полинома $l(x) = a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$ могут представиться только следующие три возможности:

- 1) $l(x) \neq 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$;
- 2) $l(x) = 0$ в единственной точке x_1 интервала (α, β) ;
- 3) $l(x) \equiv 0$ на (α, β) ,

В случае 1) все нули $l(x)$ лежат на множестве $\Delta \setminus (\alpha, \beta)$, на котором система Φ совпадает с системой Чебышёва Ψ . Поэтому всегда существует полином $c_1\psi_1(x) + \dots + c_n\psi_n(x)$, принимающий в этих нулях наперед заданные значения. Тем же свойством в случае 1) обладает соответствующий ему полином $f(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ из L .

В случае 2) полином $g(x) = a_1\psi_1(x) + \dots + a_n\psi_n(x)$, совпадающий с $l(x) = a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$ на $\Delta \setminus (\alpha, \beta)$, принимает в точках α и β значения разных знаков и имеет, таким образом, на (α, β) по крайней мере один нуль. Поэтому на $\Delta \setminus [\alpha, \beta]$ полином $l(x)$, как и $g(x)$, имеет не более $n - 2$ нулей. Добавим к этим нулям точки α и β . Полученное множество X_0 состоит не более чем из n точек и содержится в множестве $\Delta \setminus (\alpha, \beta)$, на котором Φ , совпадая с Ψ , является системой Чебышёва. Поэтому существует полином $f(x) \in L$, принимающий в точках множества X_0 любые значения, в частности, в точках α и β положительные значения, если $p_+(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, и отрицательные значения, если $p_-(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, значения соответствующего знака функция $f(x)$ как функция, линейная на $[\alpha, \beta]$, принимает также в нуле $x_1 \in (\alpha, \beta)$ полинома $l(x)$.

В случае 3) множество X нулей полинома $l(x)$ состоит из отрезка $[\alpha, \beta]$ и еще не более чем из $n - 3$ нулей, лежащих на $\Delta \setminus [\alpha, \beta]$. Присоединим к этим $(n - 3)$ -ем нулям

точки α и β . Полученное множество X_0 состоит не более чем из $n-1$ точек и лежит на множестве $\Delta \setminus (\alpha, \beta)$. Поэтому существует полином $f \in L$, принимающий в точках множества X_0 любые наперед заданные значения. Потребуем, в частности, чтобы в точках α и β , а следовательно, и всюду на $[\alpha, \beta]$ он принимал значения того знака, который является индексом компоненты веса $p = (p_-, p_+)$, тождественной нулю на $[\alpha, \beta]$.

Итак, во всех трех случаях выполняются условия леммы 5, при которых (p, L) является системой единственности на $C(\Delta, p, L)$. Очевидно, что при $n \geq 3$ множество полиномов из L , тождественных нулю на $[\alpha, \beta]$, образует подпространство размерности $n-2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 22. Пусть $a < \alpha < \beta < b$, $\gamma = (\beta - \alpha)/4$, $\psi(x) = x(1 - x^2)$, $\varphi(x) = \psi((x - (\alpha + \beta)/2)/\gamma)$, $L = \{c_1 + c_2\varphi(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $x \in \Delta = [a, b]$, $p = (p_-, p_+)$ — полунепрерывный сверху на Δ вес такой, что на (α, β) либо функция $p_-(x)$, либо $p_+(x)$ тождественна нулю, в остальном вес произвольный. Тогда если $C(\Delta, p, L)$ непусто, то (p, L) — система единственности на $C(\Delta, p, L)$. При этом подпространство L не является чебышёвским на Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку уравнение $\psi(x) = c = \text{const}$ вне отрезка $[-2, 2]$ имеет не более одного корня и при этом (если корень есть) не имеет корней на $[-2, 2]$, то это же свойство выполняется и для уравнения $\varphi(x) = c$ и отрезка (α, β) . Поэтому, пользуясь леммой 5, заключаем, что если $C(\Delta, p, L) \neq \emptyset$, то (p, L) — система единственности. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 8. Поскольку $H(p, E)$ — регулярное открытое множество, то существует непустой интервал $(c, d) \subset \tilde{G} \setminus H(p, E)$. По определению хааровского ядра на (c, d) найдется такой подинтервал (α, β) , что либо а) одна из функций $p_-(x)$, $p_+(x)$ тождественна нулю на (α, β) , либо б) оба множества $N(p_-, E)$, $N(p_+, E)$ плотны на (α, β) (и, тем самым, являются на нем остаточными). Будем считать функции $p_-(x)$ и $p_+(x)$ продолженными нулем вне E , и пусть Δ — это любой отрезок, содержащий E .

В случае а) согласно леммам 21 и 22, а также лемме 2 при каждом $n \geq 2$ найдется подпространство $L_0 \subset C(E)$ такое, что $\dim L_0 = n$, $N(L_0, E) = \emptyset$, (p, L_0) — система единственности на $C(E)$, но подпространство L_0 не является чебышёвским на (α, β) .

В случае б), очевидно, можно считать, что на (α, β) каждый из носителей $M(p_-, E)$, $M(p_+, E)$ также плотен на (α, β) . Множество

$$F := (M(p_-, E) \cap M(p_+, E)) \cap (\alpha, \beta)$$

в этом случае является множеством первой категории на (α, β) . Рассмотрим систему $\{1, \varphi(x)\}$, $x \in \Delta$, где $\varphi(x)$ — функция, определенная в лемме 16. Порождаемое ею пространство L_0 вместе с весом p образует пару (p, L_0) , являющуюся системой единственности на $C(E)$. Действительно, так как $M(p, E) \subset F \cup (\Delta \setminus (\alpha, \beta))$, то по лемме 16 на $M(p, E)$ любая функция из $L_0 \setminus \{0\}$ имеет не более одного нуля. Поэтому очевидным образом выполняются условия леммы 5, так что (p, L) — система единственности на $C(E, p, L)$, а следовательно, и на $C(E)$ (лемма 2). В то же время указанное подпространство L_0 не является чебышёвским на $\tilde{G}$ ($\varphi(x)$ имеет на (α, β) не менее $k \geq 3$ нулей). Теорема 8 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\Delta = [a, b]$, $p \in \mathcal{P}(\Delta)$, $H(p, \Delta) = (a, b)$, L – конечномерное подпространство в $C(\Delta)$. Тогда если (p, L) – система единственности на $C(\Delta)$, то подпространство L является чебышёвским на $[a, b] \setminus N(L, \Delta)$ и на $(a, b] \setminus N(L, \Delta)$. Если при этом $N(L, \Delta) = \emptyset$, то L является чебышёвским на каждом из промежутков $[a, b)$ и $(a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Будем говорить, что вес $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ в точках a и b одинаково полувыврожден, если либо $p_-(a) = p_-(b) = 0$, $p_+(a)p_+(b) > 0$, либо $p_+(a) = p_+(b) = 0$, $p_-(a)p_-(b) > 0$. Если же либо $p_-(a) = p_+(b) = 0$, $p_+(a)p_-(b) > 0$, либо $p_+(a) = p_-(b) = 0$, $p_-(a)p_+(b) > 0$, то будем говорить, что вес p в точках a и b противоположно полувыврожден.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\Delta = [a, b]$, L – конечномерное подпространство в $C(\Delta)$, $N(L, \Delta) = \emptyset$, $p \in \mathcal{P}(\Delta)$, $H(p, \Delta) = (a, b)$, и пусть при нечетной размерности $\dim L$ вес p в точках a и b одинаково полувыврожден, а при четной – противоположно полувыврожден. Тогда для того чтобы пара (p, L) была системой единственности на $C(\Delta)$ необходимо и достаточно, чтобы подпространство L было чебышёвским на каждом из промежутков $[a, b)$ и $(a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость уже установлена – см. следствие 5.

Достаточность. Поскольку L является чебышёвским на $[a, b)$ и $(a, b]$, то согласно лемме 5 достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 23. Пусть L – n -мерное чебышёвское подпространство на каждом из промежутков $[a, b)$ и $(a, b]$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где σ_i принимает либо значение 1, либо -1 , причем $\sigma_1 \sigma_n = 1$ при нечетном n и $\sigma_1 \sigma_n = -1$ при четном n . Тогда каким бы ни был вектор σ с наложенными на него выше условиями существует полином $l \in L$ такой, что $\text{sign } l(x_i) = \sigma_i$ при всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $x \in \Delta = [a, b]$, – базис в L . Требуется доказать совместность системы неравенств

$$\sigma_i \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

относительно неизвестных $c_1, \dots, c_n$. Предположим, что система несовместна. Тогда (см., например, [18, с. 216]) существуют числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим определитель, $x \in \Delta$,

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \varphi_1(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \varphi_n(x_i) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n-1}) & \dots & \varphi_n(x_{n-1}) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Очевидно, он равен нулю. Представляя (12) в виде суммы n определителей, первые строки которых в сумме дают первую строку определителя (12), и отбрасывая определители с двумя одинаковыми строками, получим

$$\lambda_1 \sigma_1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n-1}) & \dots & \varphi_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} + \lambda_n \sigma_n \begin{vmatrix} \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n-1}) & \dots & \varphi_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Введем обозначение

$$D(y_1, y_2, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} \varphi_1(y_1) & \dots & \varphi_n(y_1) \\ \varphi_1(y_2) & \dots & \varphi_n(y_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(y_n) & \dots & \varphi_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Если во втором определителе в (13) первую строку поставить на последнее место, то (13) перепишется в виде

$$\lambda_1 \sigma_1 D(x_1, x, x_2, \dots, x_{n-1}) + \lambda_n \sigma_n D(x, x_2, \dots, x_n) (-1)^{n-1} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что при $x_1 < x < x_2$ знаки определителей $D(x_1, x, x_2, \dots, x_{n-1})$ и $D(x, x_2, \dots, x_n)$ совпадают. Действительно, из чебышёвости системы $\Phi(x)$ на $[a, b]$ следует, что определитель $D(x_1, x, x_2, \dots, x_{n-1})$, $x_1 < x < x_2$, отличен от нуля и что при всевозможных изменениях положения точек $x_1, x, x_2, \dots, x_{n-1}$, $x_1 < x < x_2 < \dots < x_{n-1}$, не меняющих порядка их следования на промежутке $[a, b]$, знак этого определителя не меняется. То же относится и к определителю $D(x, x_2, \dots, x_n)$ на $(a, b]$. Поэтому оба эти определителя имеют тот же знак, что и определитель $D(y_1, y_2, \dots, y_n)$, где y_i — произвольно взятые точки такие, что $a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b$.

Поскольку $\Phi(x) = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ — система Чебышёва на (a, b) , то ранг системы векторов $\Phi(x_2), \dots, \Phi(x_{n-1})$ равен $n - 2$, и система уравнений

$$\sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \sigma_i \varphi_k(x_i) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

относительно неизвестных $\lambda_i \sigma_i$, $i = 2, \dots, n - 1$, имеет лишь нулевое решение. Так как не все λ_i равны нулю, то отсюда и из (14) получим, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_n > 0$. Итак, величины $\lambda_1 D(x_1, x, x_2, \dots, x_{n-1})$ и $\lambda_n D(x, x_2, \dots, x_n)$ в равенстве (14) одного знака, откуда следует, что σ_1 и σ_n одного знака при четном n и разных знаков при нечетном n . Это противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 9 также завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Полином l в лемме 23 не может быть получен посредством интерполяции в точках $x_1 = a, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, поскольку при отсутствии чебышёвности L на всем отрезке $[a, b]$ имеется, вообще говоря, определенная связь значений искомого полинома l в этих точках. Например, пусть $L = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\}$, где $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = 1 - x^2, [a, b] = [-1, 1], x_1 = -1, x_2 = 1, \sigma = (1, -1)$. Тогда если $l \in L, \text{sign } l(-1) = 1, \text{sign } l(1) = -1$, то $l(-1) = -l(1)$.

В заключение приведем две теоремы, дающие описание весов $p \in \mathcal{P}(E)$, при которых классическая формулировка теоремы Хаара либо сохраняется полностью (теорема 10), либо сохраняется в несколько более общей форме (теорема 11). Введем необходимые обозначения и определения. Пусть E – компакт; $p \in \mathcal{P}(E); \mathcal{Z}(E)$ – множество всех конечномерных подпространств в $C(E); \mathcal{Z}T(E)$ – множество всех подпространств $L \in \mathcal{Z}(E)$, чебышёвских на E (см. определение 7); $\mathcal{Z}(p, E)$ – множество всех подпространств $L \in \mathcal{Z}(E)$ таких, что (p, L) – система единственности на $C(E)$; $\mathcal{Z}^*(p, E)$ – множество всех подпространств $L \in \mathcal{Z}(E)$ с пустым аннулятором $N(L, E)$ и таких, что (p, L) – система единственности на $C(E)$.

Очевидно, $\mathcal{Z}^*(p, E) \subset \mathcal{Z}(p, E)$. Согласно лемме 2, если $L \in \mathcal{Z}(p, E)$ (или $L \in \mathcal{Z}^*(p, E)$), то $\dim L \leq \text{card } \Pi(p, E)$. Отметим также, что если $\text{card } \Pi(p, E) = \infty$, то $\mathcal{Z}T(E) \subset \mathcal{Z}^*(p, E) \subset \mathcal{Z}(p, E)$ (см. леммы 2 и 8); кроме того, если $N(p, E) = \emptyset$, то $\mathcal{Z}^*(p, E) = \mathcal{Z}(p, E)$ (см. лемму 20).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Будем называть вес $p \in \mathcal{P}(E)$ *хааровским (обобщенно-хааровским)* на компакте E , состоящем из бесконечного числа точек, если $\mathcal{Z}T(E) = \mathcal{Z}(p, E)$, соответственно, $\mathcal{Z}T(E) = \mathcal{Z}^*(p, E)$.

Отметим, что если p – хааровский (обобщенно-хааровский) вес на компакте E , $\text{card } E = \infty$, то $\text{card } \Pi(p, E) = \infty$ (см. лемму 2).

ТЕОРЕМА 10. Для того чтобы вес $p \in \mathcal{P}(\Delta)$ был хааровским на отрезке $\Delta = [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

- 1) $H(p, \Delta) = (a, b)$;
- 2) $N(p, \Delta) = \emptyset$;
- 3) $a \vee b \in F(p, \Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* 1) Пусть $H(p, \Delta) \neq (a, b)$. Тогда по второй части теоремы 8 $\mathcal{Z}(p, \Delta) \neq \mathcal{Z}T(\Delta)$, что противоречит условию теоремы ($\mathcal{Z}(p, \Delta) = \mathcal{Z}T(\Delta)$).

2) Пусть $N(p, \Delta) \neq \emptyset$, так что при некотором $x_0 \in \Delta$ имеем $p_-(x_0) = p_+(x_0) = 0$. Пусть $L^* \in \mathcal{Z}T(\Delta)$, $\alpha(x)$ – непрерывная на Δ функция такая, что $\alpha(x_0) = 0, \alpha(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Тогда $L_\alpha := \{l(x)\alpha(x) : l \in L^*\} \in \mathcal{Z}(p, \Delta)$ (см. лемму 8). В то же время, очевидно, $L_\alpha \notin \mathcal{Z}T(\Delta)$, что противоречит условию теоремы.

3) Пусть условие $a \vee b \in F(p, \Delta)$ не выполняется. Тогда по уже доказанному точки a и b являются точками полувыврожденности. Пусть L_1 – произвольное чебышёвское на $[a, b]$ подпространство непрерывных на $[a, b]$ функций, принимающих в точках a и b равные значения (так что $\dim L_1$ – нечетное число, а L_1 не является чебышёвским на $[a, b]$), L_2 – любое подпространство непрерывных на Δ функций четной размерности $\dim L_2$, чебышёвское на каждом из промежутков $[a, b]$ и $(a, b]$

и не являющееся чебышёвским на $[a, b]$ (например, $L_2 = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, где $\varphi_1(x) = x - (a+b)/2$, $\varphi_2(x) = (a-x)(b-x)$).

Если в точках a и b вес p одинаково полувыврожден, то возьмем пару (p, L_1) , а если противоположно полувыврожден, то — пару (p, L_2) . Эти пары по теореме 9 являются системами единственности на $C(\Delta)$, так что либо подпространство L_1 , либо подпространство L_2 принадлежит $\mathcal{Z}(p, \Delta)$. В то же время ни L_1 , ни L_2 не принадлежит $\mathcal{Z}T(\Delta)$, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. 1) Поскольку $H(p, \Delta) = (a, b)$, $N(p, \Delta) = \emptyset$, то по следствию 3 если подпространство L принадлежит $\mathcal{Z}(p, \Delta)$, то L является чебышёвским на промежутках $[a, b]$ и (a, b) . Если $\dim L = 1$, то очевидно, что L является чебышёвским на $[a, b]$.

2) Предположим, что найдется такое подпространство L_0 , $\dim L_0 \geq 2$, что $L_0 \in \mathcal{Z}(p, \Delta)$, но $L_0 \notin \mathcal{Z}T(\Delta)$. Тогда существует такой полином $l_0 \in L_0$, $\|l_0\|_\Delta > 0$, что $l_0(x_1) = l_0(x_2) = \dots = l_0(x_n) = 0$, где $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Поскольку (p, L_0) — система единственности на $C(\Delta)$, а точки a и b принадлежат носителю $M(p, \Delta)$, $N(p, \Delta) = \emptyset$, то по лемме 4 для каждой однозначной на $X = \{a, b\}$ ветви $\sigma(x)$ сигнатуры веса p найдется полином $l \in L_0$ такой, что $\text{sign } l(x) = -\sigma(x) \forall x \in X$. Если $n := \dim L_0$ — нечетное число, то возьмем полином $l(x)$, принимающий в точках a и b значения противоположного знака, если n — четное число, то — одного знака (это всегда можно сделать в силу условия $a \vee b \in F(p, \Delta)$). Нетрудно увидеть, что и в том и в другом случае полином $l + tl_0$ при некотором (достаточно большом по модулю) $t \in \mathbb{R}$ имеет на (a, b) не менее n нулей, что невозможно, так как подпространство L_0 — чебышёвское на (a, b) . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы вес $p \in \mathcal{P}(\Delta)$ был обобщенно-хааровским на отрезке $\Delta = [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

- 1) $H(p, \Delta) = (a, b)$;
- 2) $N(p, \Delta) \subset (a, b)$;
- 3) $a \vee b \in F(p, \Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. 1) Пусть $H(p, \Delta) \neq (a, b)$. Тогда по второй части теоремы 8 $\mathcal{Z}^*(p, E) \neq \mathcal{Z}T(E)$.

2) Пусть $a \vee b \in N(p, \Delta)$. Возьмем подпространство $L \in \mathcal{Z}(\Delta)$ такое, что L — чебышёвское на каждом из промежутков $[a, b]$ и (a, b) , но не чебышёвское на $[a, b]$ (в остальном произвольное). Тогда пара (p, L) принадлежит множеству $\mathcal{Z}^*(p, \Delta)$ (см. леммы 2 и 8), но не принадлежит $\mathcal{Z}T(\Delta)$. Противоречие.

3) См. соответствующий пункт доказательства необходимости в теореме 10 (в нем следует лишь $\mathcal{Z}(p, \Delta)$ заменить на $\mathcal{Z}^*(p, \Delta)$).

Достаточность. Поскольку $H(p, \Delta) = (a, b)$, $N(p, \Delta) \subset (a, b)$, то по следствию 5 если подпространство L принадлежит $\mathcal{Z}^*(p, \Delta)$, то L является чебышёвским на промежутках $[a, b]$ и (a, b) . Далее доказательство проходит так же, как в п. 2) доказательства достаточности теоремы 10 (с заменой $\mathcal{Z}(p, \Delta)$ на $\mathcal{Z}^*(p, \Delta)$). Теорема доказана.

Возвращаясь к исходной задаче описания всех пар (p, L) , являющихся системами единственности, отметим, что теоремы этого параграфа, выделяя определенный аспект проблемы, показывают достаточную эффективность установленного в

§ 1 общего критерия единственности (теорема 2). Еще один аспект проблемы выделен в следующей нерешенной задаче: дать описание всех конечномерных подпространств L в $C(E)$, E — компакт, для каждого из которых существует вес $p \in \mathcal{P}(E)$ с пустым открытым ядром своего аннулятора $N(p, E)$ (см. замечание 8) такой, что пара (p, L) является системой единственности на $C(E)$.

Список литературы

1. *Borel E.* Lecons sur les fonctions de variables réelles. Paris: Gauthier-Villars, 1905.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматгиз, 1965.
3. *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann. 1918. V. 78. P. 293–311.
4. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
6. *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы // Докл. АН. 1993. Т. 332. № 6. С. 686–689.
7. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1989.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1932.
10. *Бернштейн С., Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
11. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
12. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
13. *Колмогоров А. Н.* Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышёва, наименее уклоняющихся от заданной функции // УМН. 1948. Т. 3. № 1. С. 216–221.
14. *Кураковский К.* Топология. М.: Мир, 1966.
15. *Baire R.* Thèse Ph. Sur les fonctions de variables réelles // Ann. De Math. TURA ed. Appl. Sér. 3. V. 3, 1899.
16. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
17. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
18. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Московский институт
коммунального хозяйства и строительства

Поступила в редакцию
13.09.1995