Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Складенко, О гомологиях окружения, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 2, 129–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:06:51

УДК 515.142.21

Е. Г. Скляренко

О гомологиях окружения

Показывается, что гомологии окружения подпространства, являющегося в объемлющем пространстве слабым окрестностным деформационным ретрактом, со сдвигом в размерности на +1 изоморфны гомологиям связи этого подпространства с его дополнением.

Библиография: 8 названий.

Гомологии множества $W \setminus L$, где W — регулярная окрестность подкомплекса L симплициального комплекса K , не зависят от выбора W , поэтому их естественно называть *гомологиями окружения L в K* . Для меньшей регулярной окрестности $W' \subset W$ имеем

$$H_p(K, L \cup (K \setminus \text{Int } W)) = H_p(K, W' \cup (K \setminus \text{Int } W)) = H_p(W \setminus \text{Int } W', \partial W \cup \partial W').$$

Поскольку $W \setminus \text{Int } W'$ — произведение границы ∂W на сегмент, а $W \setminus L$ стягивается на ∂W , то

$$H_{p+1}(K, L \cup (K \setminus \text{Int } W)) = H_{p+1}(\partial W \times I, \partial W \times \{0\} \cup \partial W \times \{1\}) = H_p(W \setminus L),$$

т.е. гомологии окружения совпадают при сдвиге на единицу размерности с гомологиями связи подкомплекса с его дополнением.

Это наблюдение перестает быть тривиальным сразу за пределами категории полиэдров. Пусть A и $B = X \setminus A$ — дополнительные подпространства пространства X , P и Q — замкнутые в X подпространства, причем $P \subset A$ и $Q \subset B$. Визуально не обнаруживается никакой связи между гомологиями пары $(X, P \cup Q)$ и множества $X \setminus (P \cup Q)$, в том числе и когда A , например, замкнуто (в этом случае естественно полагать $P = A$). Естественно понимать под гомологиями связи $H_p^{\mathcal{G}}(A : B; \mathcal{G})$ в X между дополнительными подпространствами A и B прямой предел групп $H_p^{\mathcal{G}}(X, P \cup Q; \mathcal{G})$ по всем указанным P и Q . Естественность этого определения подтверждается, в частности, тем, что

$$H_p^{\mathcal{G}}(A; \mathcal{G}) = \varinjlim_{P \subset A} \{H_p^{\mathcal{G}}(P; \mathcal{G})\}$$

и

$$H_p^{\mathcal{G}}(B; \mathcal{G}) = \varinjlim_{Q \subset B} \{H_p^{\mathcal{G}}(Q; \mathcal{G})\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00174).

Здесь φ – некоторое семейство носителей, $\mathcal{G}$ – локально постоянные коэффициенты.

Возможен и другой способ изучения связей между A и B . Пусть $V = X \setminus P$, $W = X \setminus Q$ и $U = W \cap V = X \setminus (P \cup Q)$. Фактически W и V – всевозможные окрестности A и B в X . Гомологические связи между A и B отражают, очевидно, обратные пределы по U групп $H_p^\varphi(U; \mathcal{G})$. Однако, с учетом неточности функтора обратного предела $\varprojlim$ (в отличие от $\varinjlim$) естественнее рассматривать гипергомологии (в смысле [1]) для функтора $F = \varprojlim$ проективной системы $\{C_*^\varphi(U; \mathcal{G})\}$ определяющих нужные гомологии цепных комплексов, которая рассматривается как цепной комплекс в категории проективных систем абелевых групп (или модулей). Ясно, что это нетривиальный комплекс (несмотря на нулевое пересечение $\bigcap_U C_*^\varphi(U; \mathcal{G})$). Указанные гипергомологии будем обозначать через $H_p^\varphi(A \mid B; \mathcal{G})$ и называть *гомологиями контакта между A и B в X* . Группы $\varprojlim_U \{H_p^\varphi(U; \mathcal{G})\}$ тесно связаны с ними, связь осуществляется через одну из отвечающих гипергомологиям стандартных спектральных последовательностей.

Гомологии связи и контакта подробно изучались в [7], где они включались в разного рода точные гомологические последовательности и составленные такими последовательностями диаграммы. Установлено наличие естественных преобразований $\beta: H_p^\varphi(A \mid B; \mathcal{G}) \rightarrow H_{p-1}^\varphi(A \mid B; \mathcal{G})$. Тщательно анализировались общие условия изоморфизма.

Интерес представляет прежде всего тот случай, когда одно из подпространств, пусть это будет A , замкнуто. В этом случае

$$H_p^\varphi(A \mid B; \mathcal{G}) = \varinjlim_W \{H_p^\varphi(X, A \cup (X \setminus W); \mathcal{G})\},$$

а группы $H_p^\varphi(A \mid B; \mathcal{G})$ – суть гипергомологии для функтора $\varprojlim$ комплекса $\{C_*^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$. Будем обозначать последние через $H_p^\varphi(\langle\langle A \rangle\rangle; \mathcal{G})$ и называть *гомологиями окружения A в X* . В работе [7] установлено, что в случае компактного A преобразования β изоморфны, если либо X локально компактно, либо X паракомпактно, но A имеет в X счетную фундаментальную систему окрестностей. Автор не располагает какими-либо примерами неизоморфности β (в том числе и для произвольных A и B). Вопрос об изоморфности β для некомпактных замкнутых множеств уже в случае классического семейства $\varphi = c$ компактных множеств, в том числе в локально компактных пространствах, оказывается неожиданно сложным: для сравнительно простых подмножеств евклидовой плоскости он, вообще говоря, неразрешим в системе аксиом Цермело–Френкеля с аксиомой выбора [7, § 6].

Как это нередко бывает, когомологический вариант проблемы оказывается проще: для обычных когомологий (φ – семейство всех замкнутых множеств) соответствующие преобразования изоморфны для любых замкнутых подпространств паракомпактных хаусдорфовых пространств, в том числе для любых пучков коэффициентов [7, § 7]. Гомологии (и когомологии) связи и окружения представляют интерес и в том частном случае, когда $A = x$ – одна точка, обеспечивая единый общий подход к теории локальных гомологий (и когомологий) [7, § 8].

В настоящей работе изоморфность β доказывается в случае, когда A – замкнутое подпространство, являющееся слабым окрестностным деформационным ретрактом содержащего его паракомпактного (даже просто нормального) хаусдорфова пространства X (для любой окрестности W подпространства A найдется

меньшая, стягиваемая в A по W таким образом, что в процессе всего стягивания образ A остается в A). Семейство носителей φ предполагается таким, что в процессе рассматриваемых деформаций образы множеств из φ остаются в φ . Это всегда так, например, для классического семейства $\varphi = c$. Вложение $A \subset W$ и результат стягивания W в A обеспечивают соотношения

$$H_n^\varphi(W; \mathcal{G}) = H_n^\varphi(A; \mathcal{G}) \oplus H(W)_n.$$

При $W' \subset W$ слагаемое $H_n^\varphi(A; \mathcal{G})$ в этих группах отображается тождественно, а для окрестности W' , стягивающейся в A по W , образ $H(W')_n$ в $H_n^\varphi(W; \mathcal{G})$ равен нулю. Таким образом, проективная система групп $\{H_n^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ содержит постоянную подсистему $\{H_n^\varphi(A; \mathcal{G})\}$, для которой факторсистема $\{H_n^\varphi(W; \mathcal{G})/H_n^\varphi(A; \mathcal{G})\}$ тривиальна (т.е. с нулевыми проекциями для пар $W' \subset W$ с достаточно малыми относительно W окрестностями W' подпространства A). Будем называть такие проективные системы *почти постоянными*.

Напомним, что на любой постоянной системе функторы $\varprojlim^p$ обращаются в нуль при $p > 0$ (хотя бы в силу теоремы 1.8 из [3]), а на любой тривиальной системе $\varprojlim^p = 0$ при всех p [4, лемма 5]. Из точной последовательности функторов $\varprojlim^p$ для определяющей почти постоянную систему короткой точной последовательности проективных систем вытекает, что $\varprojlim^p \{H_q^\varphi(W; \mathcal{G})\} = 0$ при $p > 0$ и $\varprojlim \{H_q^\varphi(W; \mathcal{G})\} = H_q^\varphi(A; \mathcal{G})$.

Обсуждаемый результат вытекает из следующего чуть более общего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — замкнутое подпространство нормального пространства X , для достаточно малых окрестностей W которого вложения $A \subset W$ индуцируют мономорфизмы $H_n^\varphi(A; \mathcal{G}) \subset H_n^\varphi(W; \mathcal{G})$, превращающие проективные системы групп $\{H_n^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ в почти постоянные. При этом условии преобразования

$$\beta: H_n^\varphi(A : X \setminus A; \mathcal{G}) \rightarrow H_{n-1}^\varphi(\langle\langle A \rangle\rangle; \mathcal{G})$$

— изоморфизмы.

Несколько более слабая версия этой теоремы была представлена в [7, §3]. Намеченное там короткое доказательство апеллировало к известной работе Эйленберга и Мура о пределах и спектральных последовательностях и опиралось на сходимость “второй” спектральной последовательности (отвечающей неограниченной снизу фильтрации) к “сильным” гомологиям двойного комплекса, полная градуировка в котором определялась не прямыми суммами по $p + q = \text{const}$ (как это обычно), а прямыми произведениями однородных составляющих бистепеней (p, q) , что обеспечивало его полноту (в смысле Эйленберга и Мура) по отношению к рассматриваемой фильтрации. Поскольку условия сходимости не были выделены явно (а, как показывает пример g) из [8, §3], ср. там же с теоремой 1.4 и следствием 1.5, такие условия в общих ситуациях очень существенны), использованная сходимость в конечном итоге скорее оказывалась следствием результата, чем основой его доказательства (в доказательстве фактически возник пробел). В соответствии с намеченной в [7] схемой рассуждений не оптимальным образом выбраны

и используемые там вспомогательные фильтрующие подкомплексы “первой” спектральной последовательности.

Теорема доказывается ниже без апелляции к “сильным” гомологиям. Используется практически та же идея, что и в [7], но вторая спектральная последовательность анализируется применительно к обычным гомологиям двойного комплекса, определяющим исследуемые гипергомологии. Подтверждается в конечном итоге и ее сходимости к сильным гомологиям, более того, они оказываются изоморфны обычным. По сравнению с [7] усилено понятие почти постоянной проективной системы. Основная часть доказательства сводится к проверке некоторого общего гомолого-алгебраического утверждения, связанного с взаимозависимостью двух спектральных последовательностей, которое формулируется и проверяется в терминах произвольного точного слева функтора F (вместо конкретного $\varprojlim$ в аналогичных ситуациях в [7]). Из теоремы следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В условиях теоремы 1 проективные системы $\{H_n^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$ почти постоянны, а их постоянные составляющие изоморфны гомологиям окружения $H_n^\varphi(\langle\langle A \rangle\rangle; \mathcal{G})$.*

Доказательство дано в [7, §3].

В силу следствия 2.3 из [7] β тогда и только тогда изоморфизмы, когда гипергомологии для функтора $F = \varprojlim$ проективной системы $\{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ (как цепного комплекса) совпадают с $H_*^\varphi(A; \mathcal{G})$. Докажем это совпадение. Обозначим указанные гипергомологии $\{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ через $H_*^\varphi(A \subset X; \mathcal{G})$. Они определяются как гомологии двойного комплекса в полной градуировке, расположенного в “верхней полуплоскости” и получающегося после применения функтора $\varprojlim$ к любой $\varprojlim$ -ациклической резольвенте в смысле главы XVII в [1] комплекса $\{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ (например, составленной известными резольвентами Рооса входящих в $\{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ проективных систем и оказывающейся резольвентой Картана–Эйленберга для $\{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ в силу функториальности резольвенты Рооса). Поскольку фильтрация по p регулярна, к гипергомологиям сходится “первая” (в терминологии главы XVII в [1]) спектральная последовательность со вторым членом вида

$${}^pE_2^{pq} = H_{-p}(\varprojlim^q \{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\})$$

(${}^pE_2^{pq} = 0$ при $p > 0$). Поскольку

$$\varprojlim \{C_*^\varphi(W; \mathcal{G})\} = \bigcap_W C_*^\varphi(W; \mathcal{G}) = C_*^\varphi(A; \mathcal{G}),$$

имеем ${}^pE_2^{p0} = H_{-p}^\varphi(A; \mathcal{G})$. Теорема будет доказана, если окажется, что ${}^pE_2^{pq} = 0$ при $q > 0$ (в этом случае $H_{-p}^\varphi(A \subset X; \mathcal{G}) = {}^pE_2^{p0}$).

Для второй спектральной последовательности имеем (сохраняя прежний смысл индексов p и q)

$${}^{''}E_2^{qp} = \varprojlim^q \{H_{-p}^\varphi(W; \mathcal{G})\}.$$

В соответствии со сделанными выше наблюдениями ${}^{''}E_2^{qp} = 0$ при $q > 0$ и ${}^{''}E_2^{0p} = H_{-p}^\varphi(A; \mathcal{G})$. В частности, имеем ${}^pE_2^{p0} = {}^{''}E_2^{0p}$. Поскольку фильтрация по q не

регулярна, не выяснен пока вопрос о сходимости второй спектральной последовательности к нужным гипергомологиям (которая, если и сходится, то обычно к упоминавшимся выше “сильным” гомологиям).

Возникающая задача становится более прозрачной при рассмотрении вместо конкретного функтора $\varprojlim$ любого точного слева аддитивного функтора F . Пусть $\mathcal{C}^* = \{\mathcal{C}^q, -\infty < q < \infty\}$ – коцепной комплекс (в случае цепного полагаем $\mathcal{C}^q = \mathcal{C}_{-q}$), $\mathcal{J}^*\mathcal{C}^* = \bigoplus_{p,q} \mathcal{J}^p \mathcal{C}^q$ – некоторая F -ацикличная (не обязательно инъективная) резольвента Картана–Эйленберга [1, гл. XVII] этого комплекса. Гипергомологии $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}^*)$ комплекса $\mathcal{C}^*$ для функтора F совпадают с когомологиями рассматриваемого в полной градуировке $p + q = n$ комплекса $F(\mathcal{J}^*\mathcal{C}^*)$ (см., например, [8, предложение 2.2]). Имеем

$$'E_2^{qp} = H^q F^p(\mathcal{C}^*), \quad ''E_2^{pq} = F^p H^q(\mathcal{C}^*).$$

В частности,

$$'E_2^{q0} = H^q F(\mathcal{C}^*), \quad ''E_2^{0q} = F H^q(\mathcal{C}^*).$$

ЛЕММА 3. *Имеется естественное преобразование $\alpha: 'E_2^{q0} \rightarrow ''E_2^{0q}$.*

В самом деле, в соответствии с п. 4.5 гл. I в [2] имеются эпиморфизмы

$$'E_2^{q0} \rightarrow 'E_3^{q0} \rightarrow \dots \rightarrow 'E_\infty^{q0} = \varinjlim_r \{ 'E_r^{q0} \}$$

и включение

$$'E_\infty^{q0} \subset \mathbb{H}^q(\mathcal{C}^*).$$

Кроме того (см. [2, гл. I, п. 4.5]), $\mathbb{H}^q(\mathcal{C}^*)$ эпиморфно отображается на

$$''E_\infty^{0q} \subset \dots \subset ''E_r^{0q} \subset ''E_{r-1}^{0q} \subset \dots \subset ''E_2^{0q}.$$

Композиция всех этих отображений и определяет α .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Преобразование α определено в лемме, очевидно, для любого двойного комплекса (не обязательно построенного в связи с гипергомологиями), однородные составляющие которого равны нулю при $p < 0$. Как преобразование $H^q F(\mathcal{C}^*) \rightarrow F H^q(\mathcal{C}^*)$ оно может быть определено и независимо от спектральных последовательностей. Если $\mathcal{Z}^q, \mathcal{B}^q$ – ядра и образы дифференциала в $\mathcal{C}^*$, то из точности F слева имеем точную последовательность $0 \rightarrow F(\mathcal{B}^q) \rightarrow F(\mathcal{Z}^q) \rightarrow F H^q(\mathcal{C}^*)$. В силу точности F слева $F(\mathcal{Z}^q)$ – коциклы комплекса $F(\mathcal{C}^*)$. Кроме того, точность последовательности $0 \rightarrow F(\mathcal{Z}^{q-1}) \rightarrow F(\mathcal{C}^{q-1}) \rightarrow F(\mathcal{B}^q)$ с учетом точности F слева обеспечивает включение в $F(\mathcal{B}^q)$ кограниц $F(\mathcal{C}^*)$, что и определяет отображение $H^q F(\mathcal{C}^*)$ в $F H^q(\mathcal{C}^*)$. Это отображение совпадает с α : в соответствии с общим описанием членов $'E_2^{q0}$ (см. [2, гл. I, п. 4.2]) эти группы получают именно факторизацией $F(\mathcal{Z}^q)$ по кограницам $F(\mathcal{C}^*)$, использованное же выше отображение $F(\mathcal{Z}^q) \rightarrow F H^q(\mathcal{C}^*)$ при аналогичной “расшифровке” $F H^q(\mathcal{C}^*)$ как члена $''E_2^{0q}$ спектральной последовательности совпадает с фигурирующим в

лемме. Определяемое таким образом преобразование α применялось для непосредственных (т.е. без спектральных последовательностей) доказательств формул типа Кюннета (точных последовательностей)

$$0 \rightarrow F^1 H^{n-1}(\mathcal{C}^*) \rightarrow H^n F(\mathcal{C}^*) \rightarrow F H^n(\mathcal{C}^*) \rightarrow 0$$

и их обобщений вида

$$0 \rightarrow F^1(\mathcal{X}^{n-1}) \rightarrow H^n F(\mathcal{C}^*) \rightarrow F H^n(\mathcal{C}^*) \rightarrow F^2(\mathcal{X}^{n-1}) \rightarrow 0$$

(см. обзор подобного типа результатов в [6, гл. 8, § 1] и обсуждения в связи с леммой 1.2 в [5]).

Отметим, что в интересующем нас конкретном случае изоморфизм

$$'E_2^{p0} = H_{-p}^\varphi(A; \mathcal{G}) = ''E_2^{0p}$$

осуществляется как раз посредством α , поскольку гомологии обратного предела комплексов (члены $'E_2^{p0}$) всегда отображаются в обратный предел гомологий этих комплексов (члены $''E_2^{0p}$).

Теорема была сведена выше к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Из условия, что $\alpha: 'E_2^{q0} \rightarrow ''E_2^{0q}$ — изоморфизмы, при $''E_2^{pq} = 0$ для $p > 0$ вытекает, что $'E_2^{qp} = 0$ при $p > 0$, и, следовательно, что $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}^*) = H^*F(\mathcal{C}^*)$.*

Заметим, что обращение в нуль $''E_2^{pq}$ при $p > 0$ еще не означает сходимость второй спектральной последовательности к гомологиям двойного комплекса, т.е. к $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}^*)$ (см. пример 2.7 и пример f) из [8, § 3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала фиксируем внимание на некотором отдельном члене $'E_2^{m1}$. Пусть $\mathcal{C}^*(m)$ — комплекс, для которого $\mathcal{C}^q(m) = \mathcal{C}^q$ при $q \geq m$, $\mathcal{C}^{m-1}(m) = \mathcal{B}^m$ (образ дифференциала $\mathcal{C}^{m-1} \rightarrow \mathcal{C}^m$) и $\mathcal{C}^q(m) = 0$ при $q \leq m-2$. Очевидно наличие эпиморфизма $j(m): \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^*(m)$, тождественного при $q \geq m$ и совпадающего с дифференциалом в размерности $m-1$. Он порождает аналогичный эпиморфизм резольвент Картана–Эйленберга $\mathcal{J}^*\mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{J}^*\mathcal{C}^*(m)$ (вторая из которых естественным образом определяется первой), а поскольку F сохраняет точность точных последовательностей, составленных F -ациклическими объектами, то $j(m)$ порождает также и эпиморфизм двойных комплексов $F(\mathcal{J}^*\mathcal{C}^*) \rightarrow F(\mathcal{J}^*\mathcal{C}^*(m))$, определяющих гипергомологии.

Заметим, что $H^q(\mathcal{C}^*(m)) = H^q(\mathcal{C}^*)$ при $q \geq m$ и $H^q(\mathcal{C}^*(m)) = 0$ при $q < m$. Следовательно, $''E_2^{pq}(m) = ''E_2^{pq}$ при $q \geq m$ и $''E_2^{pq}(m) = 0$ при $q < m$. Но для $\mathcal{C}^*(m)$ обе фильтрации в двойном комплексе регулярны, поэтому обе спектральные последовательности должны сходиться к $FH^q(\mathcal{C}^*(m)) = ''E_2^{0q}(m)$.

Рассмотрим поведение при $j(m)$ первой спектральной последовательности. Согласно [2, гл. I, п. 4.2]

$$'E_2^{qp} = Z_2^{qp} / (Z_1^{q+1, p-1} + B_1^{qp}),$$

где Z_r^{qp} — элементы полной степени $q+p$ двойного комплекса $F(\mathcal{J}^*\mathcal{C}^*)$, принадлежащие q -му подкомплексу фильтрации по q , полный дифференциал от которых попадает в $(q+r)$ -й подкомплекс фильтрации, а B_1^{qp} — элементы степени $q+p$ из q -го подкомплекса фильтрации, служащие образами дифференциала

из $(q - 1)$ -го подкомплекса. Из этого описания видно, что $j(m)$ индуцирует изоморфизмы $'E_2^{qp} \rightarrow 'E_2^{qp}(m)$ при $q \geq m$. В частности, $'E_2^{q0} = H^q F(\mathcal{C}^*)$ при $q \geq m$. Поскольку α коммутирует с отображениями комплексов, преобразования $\alpha: 'E_2^{q0}(m) \rightarrow ''E_2^{0q}(m)$ при $q \geq m$ — изоморфизмы. Таким образом, первая спектральная последовательность двойного комплекса $F(\mathcal{J}^* \mathcal{C}^*(m))$ должна сходиться к $FH^q(\mathcal{C}^*(m))$, т.е. к $H^q F(\mathcal{C}^*(m)) = 'E_2^{q0}(m)$ при $q \geq m$ и к нулевым группам при $q < m$.

В частности, поскольку необходимо, чтобы $'E_2^{q0}(m) = 'E_3^{q0}(m)$ при $q \geq m$, дифференциал $d_2: 'E_2^{m1}(m) \rightarrow 'E_2^{m+2,0}(m) = H^{m+2} F \mathcal{C}^*(m)$ должен быть нулевым. По построению комплекса $\mathcal{C}^*(m)$ имеем $'E_2^{m-2,0}(m) = 0$. Это означает, что $'E_2^{m1}(m) = 'E_3^{m1}(m) = \dots = 'E_\infty^{m1}(m)$. Поскольку спектральная последовательность при $q \geq m$ сходится к $H^q F(\mathcal{C}^*)$, то должно быть $'E_\infty^{m1}(m) = 0$. Следовательно, $'E_2^{m1} = 'E_2^{m1}(m) = 0$.

Таким образом, $'E_2^{q1} = 0$ для всех q . Ясно, однако, что такие же аргументы применимы к членам $'E_2^{q2}, 'E_2^{q3}, \dots$. Тем самым, $'E_2^{qp} = 0$ при $p > 0$. Предложение доказано.

Поскольку в изучаемой ситуации $''E_2^{pq} = \dots = ''E_r^{pq} = \dots$, при этом всегда $''E_\infty^{pq} \subset ''E_r^{pq}$, очевидным следствием проведенных рассуждений является сходимость к $\mathbb{H}^*(\mathcal{C}^*) = H^* F(\mathcal{C}^*)$ и второй спектральной последовательности (в том числе равенство $''E_\infty^{pq} = ''E_2^{pq}$). Как правило, вторая спектральная последовательность сходится к упоминавшимся выше “сильным” когомологиям двойного комплекса, в том числе в ситуациях, когда они отличаются от обычных (пример 2.7 и пример f) из [8, §3]). Одним из признаков такой сходимости второй спектральной последовательности (применимым как раз в нашем случае) является обращение в нуль при некотором r членов $''E_r^{pq}$ для $p > p_0$ (более общие условия даны в теореме 1.4 и следствии 1.5 в [8]). В сходимости к сильным когомологиям можно убедиться и непосредственно. Они определяются (рассматриваемым в полной градуировке) комплексом

$$N^* = \varprojlim_{m \rightarrow -\infty} \{F(\mathcal{J}^* \mathcal{C}^*(m))\},$$

для когомологий которого имеют место известные точные последовательности (вариант соотношений Кюннета)

$$0 \rightarrow \varprojlim_{m \rightarrow -\infty}^1 \{H^{n-1} F(\mathcal{J}^* \mathcal{C}^*(m))\} \rightarrow H^n(N^*) \rightarrow \varprojlim_{m \rightarrow -\infty} \{H^n F(\mathcal{J}^* \mathcal{C}^*(m))\} \rightarrow 0.$$

Поскольку при $m < n$ группы $H^n F(\mathcal{J}^* \mathcal{C}^*(m))$ не зависят от m и равны $H^n F(\mathcal{C}^*)$, функторы $\varprojlim^1$ обращаются в нуль и $H^n(N^*) = H^n F(\mathcal{C}^*) = ''E_2^{0q}$. В частности, в изучаемой ситуации сильные когомологии двойного комплекса совпадают с обычными. Отметим, что это совпадение, по-видимому, не является следствием довольно общих условий изоморфизма обычных и сильных гиперкогомологий, представленных в теореме 2.9 в [8].

В заключение замечание о гомологиях окружения для рассматриваемого $A \subset X$. Нетрудно убедиться, что система $\{H_n^\varphi(W; \mathcal{G})\}$ почти постоянна тогда и только

тогда, когда таковой оказывается проективная система $\{H_n^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$ [7, лемма 3.2]. Было бы естественно, очевидно, постоянную часть $H_n^\varphi(\langle\langle A \rangle\rangle; \mathcal{G})$ системы $\{H_n^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$ считать (по определению) гомологиями окружения A в X . Однако для того, чтобы установить их изоморфизм группам $H_{n+1}^\varphi(A : X \setminus A; \mathcal{G})$, необходима интерпретация $H_n^\varphi(\langle\langle A \rangle\rangle; \mathcal{G})$ как гипергомологий системы $\{H_n^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$ для функтора $\varprojlim$. Такая интерпретация постоянной части проективной системы $\{H_n^\varphi(W \setminus A; \mathcal{G})\}$ может рассматриваться в качестве одного из следствий работы.

Список литературы

1. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
2. Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
3. Jensen C. U. Les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules // Lect. Notes in Math. V. 254, 1972.
4. Кузьминов В. И. Производные функторы проективного предела и классы расширений // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. № 2. С. 384–396.
5. Скляренко Е. Г. Некоторые применения функтора $\varprojlim^1$ // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 3. С. 369–390.
6. Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии общих пространств // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 50. М.: ВИНТИ, 1989. С. 129–266.
7. Скляренко Е. Г. Гомологии и когомологии связи между множествами. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 5. С. 1040–1071.
8. Скляренко Е. Г. Гипер(ко)гомологии для точных слева ковариантных функторов и теория гомологий топологических пространств // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 109–146.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.01.1996