Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Болтянский, Задерживающие системы для выпуклых тел, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:17:22

УДК 515.1

В. Г. Болтянский

Задерживающие системы для выпуклых тел

Исследуются задерживающие (в смысле П. Мани) и сильно задерживающие системы для компактных выпуклых тел. Основная теорема состоит в том, что для любого компактного выпуклого тела M существует сильно задерживающая система, содержащая не более $\text{md } M + 1$ точек. Исследуются и другие свойства задерживающих систем (для гладких тел, строго выпуклых тел, прямых векторных сумм и т. д.).

Библиография: 12 названий.

Исследуются задерживающие системы для выпуклых тел, введенные П. Мани [1], а также определяемые ниже сильно задерживающие системы. Доказано, что для любого выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^n$ существует задерживающая (а также сильно задерживающая) система, содержащая не более $\text{md } M + 1$ точек. Для гладких тел установлена связь с размерностью максимальной собственной грани. Для выпуклых многогранников найдено точное значение минимальной мощности задерживающих систем. Результаты базируются на основной лемме, которая устанавливает, что тело, удовлетворяющее условию $\text{md } M = m$, содержит “достаточно много” $(n - m)$ -мерных граней.

1. Постановки задач и формулировки результатов

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое тело и $F \subset \text{bd } M$ — некоторое подмножество его границы. Будем говорить, что ненулевой вектор v *отодвигает внутренность тела M от множества F* , если для любого $t > 0$ множество, получающееся из $\text{int } M$ параллельным переносом на вектор tv , не имеет общих точек с F . Иными словами, при непрерывном движении тела M в направлении вектора v внутренность движущегося тела не пересекается с F , т. е.

$$(tv + \text{int } M) \cap F = \emptyset, \quad t > 0.$$

Множество $F \subset \text{bd } M$ называется *фиксирующей системой* для тела M , если не существует вектора $v \neq 0$, отодвигающего внутренность тела M от множества F .

Понятие фиксирующей системы было введено Л. Фейешем Тотом [2]. Обозначим через $\rho(M)$ наименьшее из таких натуральных чисел k , что M имеет фиксирующую систему, состоящую из k точек. С помощью введенного в статье [3] функционала $\text{md } M$ (его определение мы напомним ниже, в конце п. 1) были установлены следующие результаты [4], [5], дающие верхнюю и нижнюю оценки для числа $\rho(M)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166).

ТЕОРЕМА 1. Для любого компактного выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$n + \frac{n}{\text{md } M} \leq \rho(M) \leq 2n + 1 - \text{md } M.$$

Пусть теперь снова F – некоторое множество, содержащееся в границе компактного выпуклого тела M . Будем говорить, что ненулевой вектор v *отодвигает тело M от множества F* , если для любого $t > 0$ тело, получающееся из M параллельным переносом на вектор tv , не имеет общих точек с F , т.е.

$$(tv + M) \cap F = \emptyset, \quad t > 0.$$

Множество $F \subset \text{bd } M$ называется *задерживающей системой* для тела M , если не существует вектор $v \neq 0$, отодвигающий тело M от множества F .

Понятие задерживающей системы было введено П. Мани [1]. Обозначим через $\sigma(M)$ наименьшее из таких натуральных чисел k , что M имеет задерживающую систему, состоящую из k точек. Ясно, что если ненулевой вектор v отодвигает тело M от множества F , то он подавно отодвигает внутренность тела M от множества F . Иначе говоря, если вектор $v \neq 0$ не отодвигает $\text{int } M$ от множества F , то этот вектор подавно не отодвигает M от множества F . Из этого следует, что всякая фиксирующая система $F \subset \text{bd } M$ является в то же время задерживающей системой, и потому $\sigma(M) \leq \rho(M)$.

Неравенство может быть как строгим, так и нестрогим. Например, если $M \subset \mathbb{R}^n$ – шар размерности n , то $\rho(M) = n + 1$ (это вытекает из теоремы 1, поскольку $\text{md } M = n$) и в то же время $\sigma(M) = n + 1$ (это вытекает из доказываемой ниже теоремы 3), т.е. в этом случае $\sigma(M) = \rho(M)$. Далее, если M – параллелепипед размерности n , то $\rho(M) = 2n$ (это вытекает из теоремы 1, поскольку $\text{md } M = 1$) и в то же время $\sigma(M) = 2$ (например, две внутренние точки двух противоположных граней образуют задерживающую систему), т.е. в этом случае $\sigma(M) < \rho(M)$.

Наконец, введем еще один функционал $\sigma'(M)$. При определении задерживающей системы мы рассматривали семейство параллельных переносов T_t , $t \geq 0$, где T_t – параллельный перенос на вектор tv (причем $v \neq 0$ – фиксированный вектор). По определению вектор v отодвигает тело M от множества $F \subset \text{bd } M$, если $T_t(M) \cap F = \emptyset$ при $t > 0$. Мы теперь хотим отказаться от требования, что все параллельные переносы осуществляются в одном и том же направлении (т.е. в направлении вектора v). Это приводит к следующему определению.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело и $F \subset \text{bd } M$ – некоторое подмножество его границы. Пусть, далее, T_t , $t \geq 0$, – некоторое непрерывное семейство параллельных переносов пространства $\mathbb{R}^n$, причем T_0 – тождественное преобразование. Иначе говоря, T_t есть параллельный перенос на некоторый вектор v_t , причем v_t непрерывно зависит от $t \geq 0$ и $v_0 = 0$. Будем говорить, что семейство T_t *отодвигает тело M от множества F* , если $T_t(M) \cap F = \emptyset$ для любого $t > 0$. Далее, будем говорить, что $F \subset \text{bd } M$ есть *сильно задерживающая система для тела M* , если не существует непрерывного семейства параллельных переносов T_t , $t \geq 0$ (где T_0 – тождественное отображение), которое отодвигает тело M от множества F . Обозначим через $\sigma'(M)$ наименьшее из таких натуральных чисел k , что найдется сильно задерживающая система $F \subset \text{bd } M$ для тела M , состоящая из

k точек. Согласно формулируемым ниже теоремам 1, 2 справедливо неравенство $\sigma'(M) \leq \rho(M)$, т.е. $\sigma(M) \leq \sigma'(M) \leq \rho(M)$.

Пусть, например, $M \subset \mathbb{R}^2$ – полукруг, a_1 – его точка, наиболее удаленная от диаметра, и a_2 – середина диаметра. Пусть, далее, l – опорная прямая полукруга M , проходящая через a_1 . Множество $F = \{a_1, a_2\}$ является задерживающей системой для M . Обозначим через b_t такую граничную точку полукруга M , что хорда $[a_1, b_t]$ образует с прямой l угол t , а через T_t – параллельный перенос на вектор $2(a_1 - b_t)$. Тогда $T_t(M) \cap F = \emptyset$. Это справедливо для любого $t > 0$, и потому непрерывное семейство параллельных переносов T_t (где T_0 – тождественное преобразование) отодвигает тело $M \subset \mathbb{R}^2$ от множества F . Таким образом, F не является сильно задерживающей системой для тела M . Вообще, никакие две точки тела M не образуют сильно задерживающую систему для M , т.е. $\sigma'(M) > 2$. Легко видеть, что $\sigma'(M) = \rho(M) = 3$. Таким образом, $\sigma'(M) > \sigma(M)$, т.е. функционалы σ и σ' различны.

Вообще, все три функционала σ , σ' , ρ различны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ полуцилиндр, определяемый неравенствами $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $|x_3| \leq 1$. Легко видеть, что $\sigma(M) = 2$, $\sigma'(M) = 3$, $\rho(M) = 4$, чем и устанавливается, что функционалы σ , σ' , ρ попарно различны.

В этой работе мы доказываем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого компактного выпуклого тела M справедливы неравенства $2 \leq \sigma(M) \leq \sigma'(M) \leq \text{md } M + 1 \leq n + 1$.*

ТЕОРЕМА 3. *Если тело M строго выпукло (т.е. его граница не содержит никакого отрезка), то*

$$\sigma(M) = \sigma'(M) = \rho(M) = n + 1.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактный выпуклый многогранник и $e_1, \dots, e_p$ – единичные внешние нормали его $(n - 1)$ -мерных граней. Обозначим через c наименьшее из таких натуральных чисел k , что среди векторов $e_1, \dots, e_p$ имеются $k + 1$ минимально зависимых векторов. Тогда $\sigma(M) = \sigma'(M) = c + 1$.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело, являющееся гладким (т.е. через каждую его граничную точку проходит единственная опорная гиперплоскость). Если наибольшая размерность собственных граней тела M равна s , то $\sigma(M) = n - s + 1$.*

Из теоремы 5 вытекает, в частности, что для любого натурального числа $\sigma = 2, \dots, n + 1$ существует гладкое компактное выпуклое тело $M \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\sigma(M) = \sigma$. В самом деле, пусть A – некоторый $(n - \sigma + 1)$ -мерный шар и B – некоторый n -мерный шар в $\mathbb{R}^n$. Тогда векторная сумма $M = A + B$ является гладким компактным выпуклым телом, и наибольшая размерность его собственной грани равна $s = n - \sigma + 1$. Следовательно, по теореме 5 $\sigma(M) = n - s + 1 = \sigma$. Нетрудно видеть, что также $\sigma'(M) = \sigma$.

Заметим, что для негладких тел утверждение теоремы 5, вообще говоря, неверно. Например, для n -мерного симплекса справедливо равенство $s = n - 1$, но соотношение $\sigma(M) = n - s + 1 = 2$ места не имеет (в самом деле, $\sigma(M) = n + 1$).

Более того, равенство $\sigma(M) = n - s + 1$, вообще говоря, неверно и для *центрально симметричных* выпуклых тел, не являющихся гладкими. В самом деле, пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – объединение двух конгруэнтных прямых круговых конусов с общим основанием. Для тела M справедливо равенство $s = 1$. Однако соотношение $\sigma(M) = n - s + 1$ (т.е. $\sigma(M) = 3$) места не имеет, поскольку никакие три граничные точки тела M не составляют его задерживающую систему. Заметим еще, что и для *поясковых тел* (они были введены в [6], см. также [7]) равенство $\sigma(M) = n - s + 1$, вообще говоря, неверно. Пусть, например, $K \subset \mathbb{R}^2$ – круг радиуса 1 с центром $(2; 2)$ и $a = (0; 3)$, $b = (3; 0)$, $o = (0; 0)$. Тогда

$$M = Q \cap \text{conv}(\{a, b, o\} \cup K),$$

где Q – круг радиуса 3 с центром $(3; 3)$, есть двумерное поясковое тело в $\mathbb{R}^2$, причем $s = 1$. Однако равенство $\sigma(M) = n - s + 1$ места не имеет, поскольку никакие две граничные точки тела M не составляют его задерживающую систему.

ТЕОРЕМА 6. *Функционал $\sigma(M)$ является аффинным инвариантом. Иными словами, если $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – невырожденное аффинное отображение, то $\sigma(f(M)) = \sigma(M)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma'(M)$.*

Заметим, что при применении вырожденного аффинного отображения значение $\sigma(M)$ может измениться, причем оно может как увеличиться, так и уменьшиться. Пусть, например, $B \subset \mathbb{R}^3$ – шар радиуса 2 с центром в начале ортонормированной координатной системы x_1, x_2, x_3 и M_1 – его пересечение с полосой $-1 \leq x_3 \leq 1$. Далее, пусть f – ортогональная проекция на подпространство $\mathbb{R}^2$, представляющее собой координатную плоскость (x_1, x_2) . Тогда $M_1 \subset \mathbb{R}^3$, $f(M_1) \subset \mathbb{R}^2$ – компактные выпуклые тела, причем $\sigma(M_1) = 2$, $\sigma(f(M_1)) = 3$, т.е. $\sigma(f(M_1)) > \sigma(M_1)$. В качестве другого примера рассмотрим выпуклую оболочку M_2 двух шаров радиуса 1 с центрами $(-1; 0; 0)$ и $(1; 0; 0)$. Рассматривая ту же ортогональную проекцию f , мы имеем $\sigma(M_2) = 3$, $\sigma(f(M_2)) = 2$, т.е. $\sigma(f(M_2)) < \sigma(M_2)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $M = M_1 + \dots + M_k$ – векторная сумма компактных выпуклых множеств $M_1, \dots, M_k \subset \mathbb{R}^n$, причем M_1 является телом, т.е. $\dim M_1 = n$. Тогда $\sigma(M) \leq \sigma(M_1)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma'(M)$.*

Заметим, что в условиях теоремы 7 неравенство может быть строгим. Пусть, например, $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ – симплекс размерности n , а M_2 – симплекс, симметричный M_1 относительно начала координат. Тогда $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) = n + 1$, в то время как для центрально симметричного многогранника $M = M_1 + M_2$ мы имеем $\sigma(M) = 2$, т.е. $\sigma(M) < \sigma(M_1)$.

Заметим также, что если M_1 не является телом, то заключение теоремы 7, вообще говоря, ложно, т.е. возможно неравенство $\sigma(M) > \sigma(M_1)$, где $\sigma(M_1)$ – значение функционала σ для множества M_1 относительно его несущей плоскости $\text{aff } M_1$. В самом деле, пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^3$ – некоторый отрезок и $M_2 \subset \mathbb{R}^3$ – шар. Тогда для $M = M_1 + M_2$ мы имеем $\sigma(M) = 3$, тогда как $\sigma(M_1) = 2$, т.е. $\sigma(M) > \sigma(M_1)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ – прямая векторная сумма компактных выпуклых множеств. Тогда

$$\sigma(M) = \min(\sigma(M_1), \dots, \sigma(M_k)),$$

где $\sigma(M_i)$ – значение функционала σ для множества M_i относительно его несущей плоскости, $i = 1, \dots, k$. Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma'(M)$.

В заключение рассмотрим еще один вопрос. Пусть $F \subset \text{bd } M$ – фиксирующая система для компактного выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что система F является *примитивной*, если ни одна ее точка не является лишней, т.е. никакое собственное подмножество $F' \subset F$ не является фиксирующей системой для тела M . Пусть, например, $M \subset \mathbb{R}^2$ – правильный шестиугольник. Тогда его вершины образуют примитивную фиксирующую систему для M , причем эта система *максимальна*, т.е. не существует примитивной фиксирующей системы $F \subset \text{bd } M$, содержащей более шести точек. Таким образом, $\rho_{\max}(M) = 6$, где $\rho_{\max}(M)$ означает наибольшую мощность примитивной фиксирующей системы для M . Вообще, для любой компактной двумерной выпуклой фигуры $M \subset \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $\rho_{\max}(M) \leq 6$ [1].

Однако уже в трехмерном пространстве вопрос о максимальных примитивных фиксирующих системах имеет неожиданное решение, впервые найденное Б. Боллобашем [7]. В [8] это решение предложено в более простой форме. Именно, пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ – некоторый шар и a – не принадлежащая ему точка. Тогда компактное выпуклое тело $M = \text{conv}(B \cup \{a\})$ обладает следующим свойством: *для любого натурального $q \geq 4$ существует такая примитивная фиксирующая система $F \subset \text{bd } M$, которая состоит из q точек. Эта фиксирующая система является также и примитивной задерживающей системой для M , т.е. $\rho_{\max}(M) = \sigma_{\max}(M) = \infty$* . Более детальное изложение читатель может найти в [8].

Теперь для полноты формулировок мы напомним определение функционала $\text{md } M$. Векторы $e_0, e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$ называются *минимально зависимыми*, если откладывая эти векторы от начала $o \in \mathbb{R}^n$, мы получаем $k+1$ точек, которые являются вершинами k -мерного симплекса, содержащего начало o в своей относительной внутренности. Иначе говоря, векторы $e_0, e_1, \dots, e_k$ минимально зависимы, если они *положительно зависимы*, т.е. существуют положительные числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, для которых

$$\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = 0,$$

и при этом некоторые k из векторов $e_0, e_1, \dots, e_k$ (следовательно, любые k из этих векторов) линейно независимы.

Напомним, что граничная точка a выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *регулярной*, если существует только одна опорная гиперплоскость тела M , проходящая через точку a . Для регулярной граничной точки a тела M существует однозначно определенная *единичная внешняя нормаль* тела M в точке a , т.е. такой единичный вектор e , что $\langle e, x - a \rangle \leq 0$ для любой точки $x \in M$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело. Через $\text{md } M$ обозначается наибольшее из таких натуральных чисел k , что существуют регулярные граничные точки $a_0, a_1, \dots, a_k$ тела M , для которых соответствующие единичные внешние нормали $e_0, e_1, \dots, e_k$ минимально зависимы. Для любого компактного выпуклого тела $M \subset \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства $1 \leq \text{md } M \leq n$.

Функционал $\text{md } M$ был введен в работе [3] и нашел применения при решении ряда задач комбинаторной геометрии (см., например, [9], [4], [5]). Теорема 2, сформулированная выше, дает еще одно применение этого функционала.

2. Доказательства

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое подпространство размерности m , где $1 \leq m \leq n$. Система векторов $H \subset L$ называется *неодносторонней* в L , если для любого ненулевого вектора $q \in L$ найдется такой вектор $h \in H$, что $\langle q, h \rangle > 0$. Если $H \subset L$ – система векторов, которая является в L неодносторонней, то для любого ненулевого вектора $q \in L$ найдутся векторы $h_1, \dots, h_s \in H$, которые связаны с q положительной зависимостью:

$$q + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_s h_s = 0; \quad \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_s > 0; \quad s \leq m.$$

Более того, число $s \leq m$ и векторы $h_1, \dots, h_s \in H$ можно выбрать так, что векторы $q, h_1, \dots, h_s$ минимально зависимы.

Мы теперь сформулируем и докажем три леммы, которые будут служить основой при установлении справедливости сформулированных теорем.

МАЛАЯ ЛЕММА. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело, $a_1, \dots, a_p$ – его регулярные граничные точки и $e_1, \dots, e_p$ – единичные внешние нормали тела M в этих точках. Обозначим через L подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_p$, и через N – подпространство, являющееся его ортогональным дополнением. Предположим, что векторы $e_1, \dots, e_p \in L$ минимально зависимы. Пусть, наконец, существует такое число $r > 0$, что шар B размерности $n - \dim L$ с центром a_1 и радиусом r , расположенный в плоскости $a_1 + N$, целиком содержится в границе тела M . При этих условиях точки $a_1, \dots, a_p$ составляют задерживающую систему для тела M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – произвольный ненулевой вектор и $v = v_L + v_N$ – его разложение по подпространствам L и N , т.е. $v_L \in L$, $v_N \in N$. Предположим сначала, что $v_L \neq 0$, т.е. v_L – ненулевой вектор подпространства L . Так как $e_1, \dots, e_p$ образуют неодностороннюю систему в L , то найдется такой индекс $i = 1, \dots, p$, что $\langle v_L, e_i \rangle > 0$ и, следовательно, $\langle v, e_i \rangle = \langle v_L, e_i \rangle > 0$ (поскольку $\langle v_N, e_i \rangle = 0$). Неравенство $\langle v, e_i \rangle > 0$ означает, что при достаточно малом $t > 0$ точка a_i находится *внутри* тела $tv + M$ (поскольку a_i – регулярная граничная точка и e_i – единичная внешняя нормаль тела M в этой точке). Следовательно, вектор v не отодвигает внутренность тела M от множества $F = \{a_1, \dots, a_p\}$ и, тем более, не отодвигает тело M от множества F .

Пусть теперь $v_L = 0$, т.е. $v = v_N \in N$. Тогда при достаточно малом $t > 0$ точка $a_1 - tv$ принадлежит шару $B \subset \text{bd } M$, т.е. точка $a_1 - tv$ содержится в M . Это

означает, что $a_1 \in tv + M$, т.е. $(tv + M) \cap F \neq \emptyset$. Следовательно, вектор v не отодвигает тело M от множества F .

Итак, никакой вектор $v \neq 0$ не отодвигает тело M от множества $F = \{a_1, \dots, a_p\}$, т.е. F есть задерживающая система для тела M .

БОЛЬШАЯ ЛЕММА. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактное выпуклое тело, $a_1, \dots, a_p$ – его регулярные граничные точки и $e_1, \dots, e_p$ – единичные внешние нормали тела M в этих точках. Обозначим через L подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_p$, и через N – подпространство, являющееся его ортогональным дополнением. Предположим, что векторы $e_1, \dots, e_p \in L$ минимально зависимы. Пусть, наконец, существуют такие положительные числа r и ε , что для любого $i = 1, \dots, p$ и любой граничной точки $a \in \text{bd } M$, удовлетворяющей условию $|a - a_i| < \varepsilon$, шар B_a размерности $n - \dim L = n - p + 1$ с центром a и радиусом r , расположенный в плоскости $a + N$, целиком содержится в границе тела M . При этих условиях точки $a_1, \dots, a_p$ составляют сильно задерживающую систему для тела M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что существует непрерывное семейство параллельных переносов T_t (где T_0 – тождественное отображение), отодвигающее тело M от множества F . Выберем сходящуюся к нулю последовательность $t_1, t_2, \dots$ положительных чисел и обозначим через $v^{(k)}$ вектор, на который осуществляется параллельный перенос T_{t_k} , $k = 1, 2, \dots$. Тогда тело $v^{(k)} + M$ не имеет общих точек с множеством F ; иначе говоря, $a_i \notin v^{(k)} + M$, т.е. $a_i - v^{(k)} \notin M$, $i = 1, \dots, p$. Пусть $v^{(k)} = v_L^{(k)} + v_N^{(k)}$ – разложение вектора $v^{(k)}$ по подпространствам L и N , т.е. $v_L^{(k)} \in L$, $v_N^{(k)} \in N$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, что $|v_L^{(k)}| < r$ и $|v_N^{(k)}| < \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда $v_L^{(k)} \neq 0$, поскольку в противном случае для любого $i = 1, \dots, p$ мы имеем $a_i - v^{(k)} = a_i - v_N^{(k)} \in B_{a_i} \subset \text{bd } M$ (где B_{a_i} – шар размерности $n - \dim L$ радиуса r с центром a_i , расположенный в плоскости $a_i + N$), и, следовательно, $a_i - v^{(k)} \in M$ вопреки сказанному выше.

Пусть (для каждого $k = 1, 2, \dots$) $v_L^{(k)} = \alpha^{(k)} q^{(k)}$, где $q^{(k)}$ – единичный вектор подпространства L и $\alpha^{(k)}$ – положительное число. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = 0$ (поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$), то $\lim_{k \rightarrow \infty} v_L^{(k)} = 0$, и потому $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, что существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} q^{(k)} = q$, где q – некоторый единичный вектор подпространства L .

Так как система векторов $e_1, \dots, e_p$ является неодносторонней в подпространстве L , то существует такой индекс $i = 1, \dots, p$, что $\langle q, e_i \rangle > 0$. Такой индекс i мы выберем и больше менять его не будем. Из неравенства $\langle q, e_i \rangle > 0$ вытекает существование таких положительных чисел λ, ρ , что шар E радиуса ρ с центром в точке $a_i - \lambda q$ содержится внутри тела M . Следовательно, $\text{conv}(E \cup \{a_i\}) \subset M$. Из этого следует, что для достаточно большого k точка $a_i - \alpha^{(k)} q^{(k)} = a_i - v_L^{(k)}$ содержится внутри тела M . Такое число k мы выберем и более менять его не будем.

Так как $a_i - v_L^{(k)} \in \text{int } M$, $a_i - v^{(k)} \notin M$, то на отрезке $[a_i - v_L^{(k)}, a_i - v^{(k)}]$ имеется граничная точка тела M , обозначим ее через a . Ясно, что $|a_i - a| < |v^{(k)}| < \varepsilon$. Поэтому шар B_a размерности $n - \dim L$ с центром a и радиусом r , расположенный в плоскости $a + N$, целиком содержится в границе тела M .

Так как отрезок $[a_i - v_L^{(k)}, a_i - v^{(k)}]$ ортогонален подпространству L (поскольку $v^{(k)} - v_L^{(k)} = v_N^{(k)} \perp L$), а длина его, равная $|v_N^{(k)}|$, меньше $|v^{(k)}| < r$, то обе точки $a_i - v_L^{(k)}, a_i - v^{(k)}$ содержатся в шаре B_a и потому содержатся в границе тела M . Но это противоречит включениям $a_i - v_L^{(k)} \in \text{int } M, a_i - v^{(k)} \notin M$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое тело, удовлетворяющее условию $\text{md } M = t$, где $1 \leq t \leq n$. Пусть, далее, $a_1, \dots, a_{m+1}$ — такие регулярные граничные точки тела M , что соответствующие единичные внешние нормали $e_1, \dots, e_{m+1}$ тела M минимально зависимы. Обозначим через $L \subset \mathbb{R}^n$ подпространство размерности t , параллельное векторам $e_1, \dots, e_{m+1}$, а через N — его ортогональное дополнение, $\dim N = n - t$, $0 \in N$. Тогда существуют такие положительные числа r и ε , что для любого $i = 1, \dots, m+1$ и любой граничной точки $a \in \text{bd } M$, удовлетворяющей условию $|a - a_i| < \varepsilon$, шар B_a размерности $n - t$ и радиуса r с центром a , расположенный в плоскости $a + N$, целиком содержится в границе тела M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно установить для каждого $i = 1, \dots, m+1$ существование таких чисел $r_i > 0, \varepsilon_i > 0$, что для любой точки $a \in \text{bd } M$, где $|a - a_i| < \varepsilon_i$, шар размерности $n - t$ с центром a и радиусом r_i , расположенный в плоскости $a + N$, целиком содержится в $\text{bd } M$. Мы проведем доказательство в случае $i = 1$ (для $i = 2, \dots, m+1$ рассуждения аналогичны).

Допустим, что требуемых чисел $r_1 > 0, \varepsilon_1 > 0$ не существует. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots$ найдутся такая точка $a^{(k)} \in \text{bd } M$, находящаяся от a_1 на расстоянии, меньшем $1/k$, и такая точка $x^{(k)} \in a^{(k)} + N$, находящаяся от $a^{(k)}$ на расстоянии, меньшем $1/k$, что $x^{(k)} \notin \text{bd } M$. Ясно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a_1$.

Так как $x^{(k)} \notin \text{bd } M$, то имеет место одно из соотношений: $x^{(k)} \notin M$, $x^{(k)} \in \text{int } M$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем предполагать, что либо для всех $k = 1, 2, \dots$ справедливо соотношение $x^{(k)} \notin M$, либо же для всех $k = 1, 2, \dots$ справедливо включение $x^{(k)} \in \text{int } M$.

Предположим сначала, что $x^{(k)} \notin M$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ выберем такую регулярную граничную точку $b^{(k)}$ тела M , что опорная гиперплоскость тела M , проходящая через точку $b^{(k)}$, отделяет точку $x^{(k)}$ от тела M . Иными словами, обозначая через $h^{(k)}$ единичную внешнюю нормаль тела M в точке $b^{(k)}$, мы имеем $\langle h^{(k)}, x^{(k)} - b^{(k)} \rangle > 0$ и $\langle h^{(k)}, x - b^{(k)} \rangle \leq 0$ для любой точки $x \in M$. Заметим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} h^{(k)} = e_1$, поскольку a_1 — регулярная граничная точка и $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a_1$. Кроме того, вектор $h^{(k)}$ не параллелен плоскости L , поскольку

$$\langle h^{(k)}, a^{(k)} - x^{(k)} \rangle = \langle h^{(k)}, a^{(k)} - b^{(k)} \rangle - \langle h^{(k)}, x^{(k)} - b^{(k)} \rangle < 0,$$

т.е. $\langle h^{(k)}, a^{(k)} - x^{(k)} \rangle \neq 0$, в то время как вектор $a^{(k)} - x^{(k)} \in N$ ортогонален плоскости L .

Предположим теперь, что $x^{(k)} \in \text{int } M$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда точка $y^{(k)} = 2a^{(k)} - x^{(k)}$ (симметричная точке $x^{(k)}$ относительно $a^{(k)}$) не принадлежит телу M , и потому существует такая регулярная граничная точка $b^{(k)}$ тела M , что опорная гиперплоскость тела M , проходящая через $b^{(k)}$, отделяет точку $y^{(k)}$ от тела M . Обозначая через $h^{(k)}$ единичную внешнюю нормаль тела M в точке $b^{(k)}$,

мы, как и в предыдущем случае, получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} h^{(k)} = e_1$ и вектор $h^{(k)}$ не параллелен плоскости L .

Выберем такие регулярные граничные точки $c_1, \dots, c_s$ тела M , что единичные внешние нормали $f_1, \dots, f_s$ тела M в этих точках составляют неодностороннюю векторную систему в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $p: \mathbb{R}^n \rightarrow N$ ортогональную проекцию. Тогда векторы $p(f_1), \dots, p(f_s)$ составляют неодностороннюю векторную систему в N . Мы можем считать, что векторы $p(f_1), \dots, p(f_t)$ отличны от нуля, а остальные векторы $p(f_{t+1}), \dots, p(f_s)$ равны нулю (т.е. $f_{t+1}, \dots, f_s$ параллельны подпространству L), где $t \leq s$.

Для любого $k = 1, 2, \dots$ вектор $p(h^{(k)})$ отличен от нуля, и потому можно из системы векторов $p(f_1), \dots, p(f_t)$ выбрать такую подсистему $H^{(k)} \subset \{p(f_1), \dots, p(f_t)\}$, что вектор $p(h^{(k)})$ и векторы подсистемы $H^{(k)}$ минимально зависимы. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, что для всех $k = 1, 2, \dots$ подсистема $H^{(k)}$ одна и та же. Без ограничения общности можно считать, что $H^{(k)} = \{p(f_1), \dots, p(f_u)\}$ для всех k , где $u \leq t$. Таким образом, для любого $k = 1, 2, \dots$ векторы $p(h^{(k)}), p(f_1), \dots, p(f_u)$ минимально зависимы. Пусть

$$p(h^{(k)}) + \alpha_1^{(k)} p(f_1) + \dots + \alpha_u^{(k)} p(f_u) = 0 \quad (1)$$

— положительная зависимость между этими векторами. Заметим, что векторы $p(f_1), \dots, p(f_u)$ линейно независимы (поскольку векторы $p(h^{(k)}), p(f_1), \dots, p(f_u)$ минимально зависимы).

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} h^{(k)} = e_1$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} (h^{(k)} - e_1) = 0$, то также $\lim_{k \rightarrow \infty} p(h^{(k)} - e_1) = 0$, и следовательно (поскольку $p(e_1) = 0$), справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} p(h^{(k)}) = 0$. Согласно (1) числа $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_u^{(k)}$ являются коэффициентами разложения вектора $-p(h^{(k)})$ по линейно независимым векторам $p(f_1), \dots, p(f_u)$. Поэтому из равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} p(h^{(k)}) = 0$ вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{(k)} = 0, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_u^{(k)} = 0. \quad (2)$$

Равенство (1) означает, что вектор $h^{(k)} + \alpha_1^{(k)} f_1 + \dots + \alpha_u^{(k)} f_u$ параллелен плоскости L (поскольку его образ при проекции p равен нулю). Следовательно, вектор

$$v^{(k)} = (h^{(k)} - e_1) + \alpha_1^{(k)} f_1 + \dots + \alpha_u^{(k)} f_u \quad (3)$$

также параллелен плоскости L . Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (h^{(k)} - e_1) = 0$, то в силу (2) справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = 0$. Пусть

$$v^{(k)} = \beta_2^{(k)} e_2 + \dots + \beta_{m+1}^{(k)} e_{m+1} \quad (4)$$

— разложение вектора $v^{(k)}$ по базису $e_2, \dots, e_{m+1}$ подпространства L . Из равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)} = 0$ вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_2^{(k)} = 0, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{m+1}^{(k)} = 0. \quad (5)$$

Пусть теперь

$$e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{m+1} e_{m+1} = 0 \quad (6)$$

— положительная зависимость между векторами $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$. Тогда справедливо равенство

$$h^{(k)} + \alpha_1^{(k)} f_1 + \dots + \alpha_u^{(k)} f_u + (\lambda_2 - \beta_2^{(k)}) e_2 + \dots + (\lambda_{m+1} - \beta_{m+1}^{(k)}) e_{m+1} = 0, \quad (7)$$

в самом деле, согласно (3) и (4) левая часть в (7) равна

$$v^{(k)} + e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{m+1} e_{m+1} - v^{(k)},$$

т.е. равна нулю в силу (6). Таким образом, (7) есть линейная зависимость между векторами

$$h^{(k)}, f_1, \dots, f_u, e_2, \dots, e_{m+1}. \quad (8)$$

Так как числа $\lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ положительны, то из (5) следует, что при достаточно большом k все коэффициенты в (7) *положительны*. Мы фиксируем такое k и более менять его не будем. Таким образом, (7) есть (при выбранном k) *положительная зависимость* между векторами (8).

В то же время векторы $f_1, \dots, f_u, e_2, \dots, e_{m+1}$ (получающиеся отбрасыванием первого вектора в (8)), как легко видеть, линейно независимы. В самом деле, пусть

$$\nu_1 f_1 + \dots + \nu_u f_u + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_{m+1} e_{m+1} = 0 \quad (9)$$

— некоторая линейная зависимость между этими векторами. Применяя проекцию p , мы получаем $\nu_1 p(f_1) + \dots + \nu_u p(f_u) = 0$, и потому $\nu_1 = \dots = \nu_u = 0$ (поскольку векторы $p(f_1), \dots, p(f_u)$ линейно независимы). Следовательно, линейная зависимость (9) принимает вид

$$\mu_2 e_2 + \dots + \mu_{m+1} e_{m+1} = 0.$$

Но отсюда вытекает, что $\mu_2 = \dots = \mu_{m+1} = 0$ (поскольку векторы $e_2, \dots, e_{m+1}$ подпространства L линейно независимы). Таким образом, любая линейная зависимость между векторами $f_1, \dots, f_u, e_2, \dots, e_{m+1}$ тривиальна, т.е. эти векторы линейно независимы.

Итак, векторы (8) положительно зависимы, а отбрасывая первый из этих векторов, мы получаем линейно независимые векторы. Следовательно, векторы (8) минимально зависимы. Так как все эти векторы являются внешними нормальными телу M в регулярных граничных точках, а число этих векторов равно $1 + u + m$, то отсюда вытекает, что $\text{md } M \geq m + u$. Поэтому $\text{md } M \geq m + 1$ (ибо $u \geq 1$), вопреки предположению $\text{md } M = m$. Полученное противоречие и доказывает основную лемму.

СЛЕДСТВИЕ. Если компактное выпуклое тело $M \subset \mathbb{R}^n$ строго выпукло, то $\text{md } M = n$.

В самом деле, при $\text{md } M < n$ тело M согласно основной лемме содержит шар размерности $n - \text{md } M > 0$, т.е. содержит отрезок на своей границе, и потому не является строго выпуклым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно установить неравенство $\sigma'(M) \leq \text{md } M + 1$. Обозначим число $\text{md } M$ через m . Пусть $a_1, \dots, a_{m+1}$ – такие регулярные граничные точки тела M , что соответствующие единичные внешние нормали $e_1, \dots, e_{m+1}$ тела M минимально зависимы. Обозначим через $L \subset \mathbb{R}^n$ подпространство размерности m , параллельное векторам $e_1, \dots, e_{m+1}$, а через N – его ортогональное дополнение, $0 \in N$. Согласно основной лемме и большой лемме точки $a_1, \dots, a_{m+1}$ составляют задерживающую систему для тела M , и потому $\sigma'(M) \leq m + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть M – компактное выпуклое тело, являющееся строго выпуклым. Согласно приведенному выше следствию $\text{md } M = n$. Теперь из неравенств, содержащихся в теореме 1, непосредственно следует, что $\rho(M) = n + 1$.

Далее, согласно теореме 2 $\sigma(M) \leq n + 1$. Остается доказать, что не существует задерживающей системы для тела M , состоящей из менее чем $n + 1$ точек.

В самом деле, пусть $a_1, \dots, a_k$ – граничные точки тела M , где $k \leq n$. Положим $F = \{a_1, \dots, a_k\}$ и покажем, что F не является задерживающей системой для тела M .

Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ – какие-либо опорные гиперплоскости тела M в точках $a_1, \dots, a_k$ соответственно и $e_1, \dots, e_k$ – единичные внешние нормали к этим гиперплоскостям, т.е. $\langle e_i, x - a_i \rangle \leq 0$ для любой точки $x \in M$, $i = 1, \dots, k$. Так как $k \leq n$, то существует такой вектор $q \neq 0$, что $\langle q, e_i \rangle \leq 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Следовательно, для любого $t > 0$ точка $a_i - tq$ лежит в полупространстве $\{x : \langle e_i, x - a_i \rangle \geq 0\}$. Это полупространство имеет с телом M единственную общую точку a_i (поскольку M строго выпукло), и потому $a_i - tq \notin M$ при $t > 0$. Иначе говоря, $a_i \notin tq + M$, т.е. вектор $v = q$ отодвигает тело M от системы $F = \{a_1, \dots, a_k\}$. Следовательно, F не является задерживающей системой для M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть для определенности векторы $e_1, \dots, e_{c+1}$ минимально зависимы, и пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{c+1}$ – такие $(n - 1)$ -мерные грани многогранника M , что $e_1, \dots, e_{c+1}$ являются внешними нормальными этими гранями. Пусть, далее, $a_1, \dots, a_{c+1}$ – внутренние точки этих граней, т.е. $a_i \in \text{ri } \Delta_i$, $i = 1, \dots, c + 1$. Обозначим через L подпространство размерности c , параллельное векторам $a_1, \dots, a_{c+1}$ (напомним, что эти векторы минимально зависимы), а через N – его ортогональное дополнение, $0 \in N$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, c + 1$ шар размерности $n - c$ с центром a_i (и некоторым положительным радиусом), расположенный в плоскости $a_i + N$, целиком содержится в границе многогранника M (поскольку e_i – внешняя нормаль грани $\Delta_i \subset \text{bd } M$). Следовательно, согласно малой лемме точки $a_1, \dots, a_{c+1}$ образуют задерживающую систему для тела M , и потому $\sigma(M) \leq c + 1$, а согласно большой лемме $\sigma'(M) \leq c + 1$.

Остается доказать неравенство $\sigma(M) \geq c + 1$. Допустим, напротив, что существуют точки $a'_1, \dots, a'_c$, образующие задерживающую систему для тела M . Пусть $i_1, \dots, i_c$ – такие индексы, что $a'_1 \in \Delta_{i_1}, \dots, a'_c \in \Delta_{i_c}$. Легко видеть, что векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_c}$ образуют *строго одностороннюю систему*, т.е. существует вектор $q \neq 0$, для которого $\langle q, e_{i_1} \rangle < 0, \dots, \langle q, e_{i_c} \rangle < 0$. В самом деле, в противном случае можно было бы выбрать среди $e_{i_1}, \dots, e_{i_c}$ такие векторы, которые образуют неод-

ностороннюю систему векторов в некотором подпространстве размерности $d < c$, а потому можно было бы выбрать из них минимально зависимую систему векторов, содержащую не более $d + 1$ элементов, что однако противоречит минимальности числа c .

Итак, существует вектор q , для которого $\langle q, e_{i_j} \rangle < 0$, $j = 1, \dots, c$. Следовательно, для любого $t > 0$ справедливо неравенство $\langle tq, e_{i_j} \rangle < 0$, т.е. точка $a'_j - tq$ лежит в открытом полупространстве $\{x : \langle e_{i_j}, x - a_j \rangle < 0\}$, и потому $a'_j - tq \notin M$. Иначе говоря, $a'_j \notin tq + M$, $j = 1, \dots, c$, т.е. вектор $v = q$ отодвигает многогранник M от системы $F' = \{a'_1, \dots, a'_c\}$. Следовательно, F' не является задерживающей системой для M вопреки предположению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $\Delta \subset \text{bd } M$ – грань тела M , имеющая размерность s , и a_1 – точка, принадлежащая относительной внутренности этой грани. Обозначим через N несущую плоскость грани Δ , а через L – ее ортогональное дополнение. Подпространство L имеет размерность $m = n - s$. Пусть e_1 – единичная внешняя нормаль тела M в точке a_1 . Тогда $e_1 \in L$ и мы выберем такие единичные векторы $e_2, \dots, e_{m+1} \in L$, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ минимально зависимы. Пусть, наконец, $a_2, \dots, a_{m+1}$ – такие граничные точки тела M , что $e_2, \dots, e_{m+1}$ являются внешними нормальями тела M в этих точках (такие точки $a_2, \dots, a_{m+1}$ существуют, поскольку тело M является гладким). Теперь согласно малой лемме точки $a_1, \dots, a_{m+1}$ образуют задерживающую систему для тела M , и потому $\sigma(M) \leq m + 1 = n - s + 1$.

Докажем обратное неравенство. Допустим, напротив, что существует задерживающая система $F' = \{a'_1, \dots, a'_k\}$ для тела M , где $k \leq m$. Пусть $e'_1, \dots, e'_k$ – единичные внешние нормали тела M в точках $a'_1, \dots, a'_k$. Обозначим через L' подпространство, порожденное векторами $e'_1, \dots, e'_k$, а через N' – его ортогональное дополнение. Если векторы $e'_1, \dots, e'_k$ линейно независимы, то существует ненулевой вектор $v \in L'$, который образует отрицательное скалярное произведение с каждым из векторов $e'_1, \dots, e'_k$, и потому вектор v отодвигает тело M от множества F' (см. предыдущее доказательство). Но это противоречит тому, что F' – задерживающая система для M .

Таким образом, векторы $e'_1, \dots, e'_k$ линейно зависимы и, следовательно, $\dim L' < k \leq m$. Обозначим через Γ'_i опорную гиперплоскость тела M в точке a'_i , а через $\Delta'_i = M \cap \Gamma'_i$ – соответствующую грань тела M , $i = 1, \dots, k$. Тогда $\dim \Delta'_i \leq s = n - m$, т.е. $\dim \Delta'_i < \dim N'$. Следовательно, каждое подпространство $-a'_i + \text{aff } \Delta'_i$, содержащееся в N' , имеет размерность, меньшую $\dim N'$, $i = 1, \dots, k$, и потому существует вектор $v' \in N'$, который не содержится ни в одном из этих подпространств. Но тогда вектор v' отодвигает тело M от множества F' вопреки тому, что F' – задерживающая система для M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 непосредственно вытекает из того, что понятие вектора, отодвигающего тело M от множества $F \subset \text{bd } M$, является аффинно инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Положим $\sigma(M_1) = q$ и выберем точки $a_1^{(1)}, \dots, a_q^{(1)} \in \text{bd } M_1$, которые образуют задерживающую систему для тела M_1 . Пусть $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_q^{(1)}$ – какие-либо опорные гиперплоскости тела M_1 в этих точках,

а $e_1, \dots, e_q$ — соответствующие единичные внешние нормали. Для каждого выпуклого множества M_i , $i = 2, \dots, k$, рассмотрим опорные гиперплоскости $\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_q^{(i)}$, соответственно параллельные $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_q^{(1)}$, и выберем точки $a_1^{(i)} \in \Gamma_1^{(i)} \cap M_i, \dots, a_q^{(i)} \in \Gamma_q^{(i)} \cap M_i$. Таким образом, для любой точки $x \in M_i$ справедливы неравенства $\langle e_j, x - a_j^{(i)} \rangle \leq 0$, $i = 1, \dots, k$. Положим теперь $a_j = a_j^{(1)} + \dots + a_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, q$. Тогда $a_1, \dots, a_q$ — граничные точки тела $M = M_1 + \dots + M_k$.

Пусть теперь v — произвольный ненулевой вектор. Так как $\{a_1^{(1)}, \dots, a_q^{(1)}\}$ — задерживающая система для тела M_1 , то найдется такой индекс $j = 1, \dots, q$ и такое $t > 0$, что $a_j^{(1)} - tv \in M_1$. Следовательно,

$$a_j - tv = (a_j^{(1)} - tv) + a_j^{(2)} + \dots + a_j^{(k)} \in M_1 + M_2 + \dots + M_k = M.$$

Это означает, что $\{a_1, \dots, a_q\}$ — задерживающая система для M , и потому $\sigma(M) \leq q$, т.е. $\sigma(M) \leq \sigma(M_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Будем считать, что $\sigma(M_1) \leq \dots \leq \sigma(M_k)$, и докажем, что $\sigma(M) = \sigma(M_1)$. Обозначим число $\sigma(M_1)$ через q , и пусть $a_1, \dots, a_q \in \text{gbd } M_1$ — точки, образующие задерживающую систему для M_1 (относительно его несущей плоскости). Пусть, далее, b — точка, принадлежащая относительной внутренности выпуклого множества $M_2 + \dots + M_k$. Тогда $a_1^* = a_1 + b, \dots, a_q^* = a_q + b$ — граничные точки тела $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. Покажем, что они составляют задерживающую систему для тела M .

В самом деле, пусть v — произвольный ненулевой вектор. Представим его в виде $v = v_1 + \dots + v_k$, где v_i — вектор, параллельный несущей плоскости $\text{aff } M_i$ множества M_i , $i = 1, \dots, k$.

Если $v_1 \neq 0$, то при некотором $j = 1, \dots, q$ и при достаточно малом $t > 0$ точка $a_j - tv_1$ принадлежит множеству M_1 , а потому точка

$$a_j^* - tv = (a_j - tv_1) + (b - t(v_2 + \dots + v_k))$$

принадлежит M , поскольку $b \in \text{ri}(M_2 + \dots + M_k)$. Это означает, что вектор v не отодвигает тело M от множества $F^* = \{a_1^*, \dots, a_q^*\}$.

Если же $v_1 = 0$, то при любом $j = 1, \dots, q$ точка $a_j^* - tv$ принадлежит (при достаточно малом $t > 0$) телу M , поскольку $a_j^* = a_j + b$ и $b \in \text{ri}(M_2 + \dots + M_k)$. Таким образом, как при $v_1 \neq 0$, так и при $v_1 = 0$ вектор $v \neq 0$ не отодвигает тело M от множества F^* . Итак, F^* есть задерживающая система для тела M , и потому $\sigma(M) \leq q$, т.е. $\sigma(M) \leq \sigma(M_1)$. Легко видеть, что строгое неравенство невозможно.

Список литературы

1. *Mani P.* On polytopes fixed by their vertices // Acta Math. Hungar. 1971. V. 22. P. 269–273.
2. *Fejes Toth L.* On primitive polyhedra // Acta Math. Hungar. 1962. V. 13. P. 379–383.
3. *Болтянский В. Г.* Теорема Хелли для H -выпуклых множеств // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 2. С. 249–252.
4. *Boltyanski V. G., Martini H.* Combinatorial geometry of belt bodies // Results Math. 1995. V. 28. P. 224–249.
5. *Boltyanski V. G., E. Morales Amaya.* Minimal fixing systems for convex bodies // J. Appl. Analysis. 1955. V. 1. № 1. P. 1–13.
6. *Болтянский В. Г.* Решение проблемы освещения для поясковых тел // Матем. заметки. 1996. Т. 58. № 4. С. 505–511.
7. *Баладзе Э. Д., Болтянский В. Г.* Поясковые тела и размерность Хелли // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 3–20.
8. *Boltyanski V. G., Martini H.* On maximal primitive fixing systems // Beiträge Algebra Geom. 1996. V. 37. № 1. P. 199–207.
9. *Болтянский В. Г.* Обобщение одной теоремы Секефальви-Надя // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228. № 2. С. 265–268.
10. *Bollobás B.* Fixing system for convex bodies // Studia Sci. Math. Hungar. 1967. V. 2. P. 351–354.
11. *Болтянский В. Г.* Несколько теорем комбинаторной геометрии // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 1. С. 117–124.
12. *Boltyanski V. G.* A new step in the solution of the Szökefalvi-Nagy problem // Discrete Comput. Geom. 1992. V. 8. № 1. P. 27–49.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
16.04.1996