Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Борисович, Бифуркация капиллярной минимальной поверхности в слабом гравитационном поле, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 17–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:05:32

УДК 517

А. Ю. Борисович

Бифуркация капиллярной минимальной поверхности в слабом гравитационном поле

В работе исследуется одна вариационная краевая эллиптическая задача в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с параметром Бонда $\lambda \in \mathbb{R}$, возникшая в гидромеханике и тесно связанная с проблемой Плато. Она описывает поведение эластичной поверхности, разделяющей две жидкие или газообразные среды, при изменении гравитационного поля. При отсутствии силы тяжести $\lambda = 0$ и решением задачи является минимальная поверхность. В работе исследуется поведение этой поверхности при появлении гравитации (потеря устойчивости, бифуркации).

Метод исследования основан на редукции задачи к операторному уравнению в пространствах Гёльдера или Соболева с нелинейным фредгольмовым индекса 0 оператором, зависящим от параметра λ , и на применении к полученному уравнению теоремы Крендала–Рабиновича о простой точке бифуркации, метода конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта, метода ключевой функции Ю. И. Сапронова. В работе получены общие как необходимые, так и достаточные условия бифуркации в данной задаче. Детально исследована ситуация, когда область Ω круг или квадрат.

Библиография: 27 названий.

0. Введение

Уравнение поверхности, разделяющей две жидкие среды, впервые появилось в работах Юнга, Пуассона, Лапласа и Монжа. Они заметили, что средняя кривизна поверхности раздела в каждой ее точке постоянна и пропорциональна разности давлений на эту поверхность с двух сторон. Если две жидкости находятся в капилляре и граница разделяющей их поверхности свободна, т.е. не закреплена в определенном положении, то она соединяется с боковой поверхностью капилляра под определенным углом γ , зависящим от коэффициентов смачивания стенки капилляра этими жидкостями.

Пусть Ω – перпендикулярное сечение капилляра и поверхность раздела задана как график функции $w = w(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Тогда, ее средняя кривизна $H(w)(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$H(w) = -\operatorname{div} T(w), \quad T(w) = (1 + \nabla w^2)^{-1/2} \nabla w. \quad (0.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00413), Международного научного фонда и UG (грант BW 5100-5-0053-6).

Пусть $\bar{n}$ – вектор нормали к поверхности, а $\bar{\eta}$ – вектор внутренней нормали к боковой поверхности капилляра

$$\begin{aligned}\bar{n} &= (1 + \nabla w^2)^{-1/2} (w_x, w_y, -1), & |\bar{n}| &= 1, \\ \bar{\eta} &= (\nu_x, \nu_y, 0), & |\bar{\eta}| &= 1.\end{aligned}$$

Тогда $\bar{\eta}\bar{n} = \nu T(w)$, где $\nu = (\nu_x, \nu_y)$, и капиллярная поверхность $w(x, y)$ определяется следующей краевой задачей

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T(w) = \varkappa \Delta p, & (x, y) \in \Omega, \\ \nu T(w) = \cos \gamma, & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$ – разность давлений на поверхность с двух сторон, $\varkappa = 1/\sigma$, и $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения.

Если две жидкости находятся в капилляре и граница разделяющей их поверхности закреплена в определенном положении, то для самой поверхности получаем задачу типа Дирихле с краевым условием $w|_{\partial\Omega} = \psi$, $\psi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

В некоторых ситуациях разность давлений Δp равна нулю. Например, в условиях невесомости или в случае, когда поверхность $w(x, y)$ разделяет две несмешиваемые жидкости одинаковой плотности. В этом случае средняя кривизна разделяющей поверхности $H(w) \equiv 0$. Такие поверхности называются минимальными, так как одновременно они являются критическими точками функционала площади, определенного на пространстве поверхностей.

Гаусс предложил вариационный подход к описанию капиллярных поверхностей. В задаче со свободной границей (0.2) они ищутся как критические точки функционала потенциальной энергии

$$E_{\text{complet}}(w) = E_\sigma(w) + E_g(w) + E_2(\partial w) + E_1(\partial w), \quad (0.3)$$

где

$$E_\sigma(w) = \sigma \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{1/2} dx dy \quad (0.4)$$

– потенциальная энергия поверхностного натяжения, которая прямо пропорциональна площади поверхности (σ – коэффициент поверхностного натяжения), $E_g(w)$ – потенциальная энергия жидкости в гравитационном поле (g – ускорение свободного падения), $E_2(\partial w)$ и $E_1(\partial w)$ – энергии взаимодействия жидкостей со стенками капилляра, которые зависят только от положения границы поверхности $w(x, y)$ и от коэффициентов смачивания стенки капилляра этими жидкостями. В задаче с фиксированной границей последние два слагаемых в формуле (0.3) являются постоянными и не влияют на форму поверхности раздела. В этом случае гидромеханические модели отличаются друг от друга слагаемым $E_g(w)$.

Проблема существования решения задачи (0.2) для различных гидромеханических моделей исследовалась Релеем, Нейманом, Минковским, Пуанкаре и многими другими авторами, в том числе современными. Обзор этих исследований можно найти в фундаментальных монографиях А. Т. Фоменко [1], [2], V. Dissan, S. Davis [3], [4], R. Finn [5]. В последнее время в связи с развитием космической техники

возрастает интерес к гидромеханике невесомости (см., например, работы [6], [7]). В статьях [8], [9] исследуется движение в условиях невесомости твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью.

С другой стороны, в математике с 1972 года активно исследуется проблема бифуркации минимальных поверхностей при малых возмущениях граничных условий и функционала площади: Т. Poston [10], М. J. Beeson, А. J. Tromba [11], А. Т. Фоменко, А. А. Тужилин [12], [13], J. Buch [14], А. Ю. Борисович [15]. В работе [10] содержится описание физических экспериментов в которых было обнаружено и исследовано явление бифуркации минимальных поверхностей. Она послужила толчком для математического исследования этого явления. В работах [11], [14] для исследования бифуркаций минимальных поверхностей используются методы нелинейного функционального анализа. В работе [12], например, исследуются ветвления графика многозначного функционала площади минимальных поверхностей, определенного на пространстве контуров. В работах [12], [13] развиваются геометрические методы. В [15] автором построен общий функционально-операторный метод исследования бифуркаций параметрически заданных минимальных поверхностей при достаточно общих малых деформациях граничного контура. Метод оказался эффективным в приложениях. Он позволил обнаружить и исследовать целые серии новых бифуркаций на классических минимальных поверхностях: катеноиде, геликоиде, поверхностях Шерка и Эннепера.

В данной работе рассматривается непараметрический случай и исследуются бифуркации минимальной поверхности раздела двух сред при фиксированной границе и квадратичном возмущении функционала площади. Изучаемая модель возникает в различных задачах гидромеханики и теории упругих мембран. Например, при движении в условиях невесомости твердого тела (ракеты) с полостью, заполненной вязкой жидкостью (топливом) и имеющей капиллярное отверстие.

1. Постановка задачи и ее обсуждение

В данной работе исследуются бифуркации семейств решений следующей вариационной краевой задачи

$$E(w, \lambda) = \iint_{\Omega} \left((1 + \nabla w^2)^{1/2} - \frac{\lambda}{2} (w - w_0)^2 \right) dx dy, \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T(w) - \lambda(w - w_0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ w = \psi(\mu), & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

определенной в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, зависящей от основного параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и дополнительного параметра $\mu \in \mathbb{R}_\varepsilon = (-\varepsilon, +\varepsilon)$, который задает малое возмущение граничных условий.

Здесь нижними индексами x и y обозначены частные производные функции $w(x, y)$ по переменным x и y , соответственно,

$$\begin{aligned} \nabla w^2 &= (w_x)^2 + (w_y)^2, \quad T(w) = (1 + \nabla w^2)^{-1/2} \nabla w, \quad \Delta w = w_{xx} + w_{yy}, \\ -\operatorname{div} T(w) &= -(1 + \nabla w^2)^{-3/2} (\Delta w + w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Задача (1.1)–(1.2) исследуется при следующих предположениях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A_1 . $w_0(x, y)$ является минимальной поверхностью с границей $\psi_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta w_0 + w_{0y}^2 w_{0xx} - 2w_{0x} w_{0y} w_{0xy} + w_{0x}^2 w_{0yy} = 0, \\ w_0|_{\partial\Omega} = \psi_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A_2 . Область Ω является выпуклой, а ее граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладким C^2 -подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, гомеоморфным стандартной окружности S^1 .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A_3 . Семейство отображений $\psi: \partial\Omega \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ является достаточно гладким и удовлетворяет начальному условию

$$\psi(0) = \psi_0. \quad (1.5)$$

Предположение A_1 обеспечивает существование при $\mu = 0$ одного семейства решений

$$\Gamma_1 = \{(w_0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad (1.6)$$

и нас будет интересовать наличие других ветвей решений, пересекающих Γ_1 .

Исследуемый функционал $E(w, \lambda)$ может быть записан в виде

$$E(w, \lambda) = A(w) - \lambda Q(w), \quad (1.7)$$

и является квадратичной однопараметрической деформацией функционала площади поверхности

$$A(w) = \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{1/2} dx dy, \quad Q(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (w - w_0)^2 dx dy. \quad (1.8)$$

Эллиптический дифференциальный оператор

$$F(w, \lambda) = -\operatorname{div} T(w) - \lambda(w - w_0) \quad (1.9)$$

является оператором Эйлера–Лагранжа для функционала $E(w, \lambda)$.

Действительно, рассмотрим малую вариацию поверхности $h = \delta w$ при условии $h|_{\partial\Omega} = 0$ и вычислим первую вариацию функционала E

$$\begin{aligned} \delta E &= \iint_{\Omega} ((1 + \nabla w^2)^{1/2} \nabla w \nabla h - \lambda(w - w_0)h) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (-\operatorname{div}((1 + \nabla w^2)^{-1/2} \nabla w) - \lambda(w - w_0))h dx dy. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тогда критические точки (поверхности) функционала E определяются краевой задачей (1.2) с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача (1.2) при $\lambda = \mu = 0$ является непараметрической проблемой Плато и исследовалась многими авторами. Например, первые теоремы существования и единственности были доказаны С. Н. Бернштейном [16]. В работе [17] установлено, что оператор

$$G(w) = (\Delta w + w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy}, w|_{\partial\Omega}) \quad (1.11)$$

является глобальным C^1 -диффеоморфизмом пространств Гёльдера

$$G: C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{m,\alpha}(\partial\Omega) \quad (1.12)$$

с целым $m \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$, если область Ω строго выпукла и ее граница $\partial\Omega$ является гладким подмногообразием класса $C^{m,\alpha}$.

Пусть $\mu = 0$. Тогда, при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ минимальная поверхность $w_0(x, y)$ будет решением задачи (1.2). При отрицательных и малых положительных λ это решение будет единственным и, более того, устойчивым.

Действительно, вычислим вторую вариацию функционала E

$$\begin{aligned} \delta^2 E &= \delta^2 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{1/2} dx dy - \lambda \delta^2 \iint_{\Omega} 1/2(w - w_0)^2 dx dy \\ &= \iint_{\Omega} ((1 + \nabla w^2)^{-3/2} \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - (\nabla w \nabla h)^2 \} - \lambda h^2) dx dy. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При $\lambda \leq 0$ вторая вариация является положительно определенной квадратичной формой ($\nabla w^2 \nabla h^2 \geq (\nabla w \nabla h)^2$) и, следовательно, w_0 будет точкой минимума функционала E . Подобная ситуация сохранится при малых положительных λ . При росте λ будет увеличиваться влияние второго функционала в формуле (1.8), для которого w_0 — точка максимума. В результате, при некотором положительном значении параметра λ произойдет потеря устойчивости решения w_0 задачи (1.1)–(1.2). В данной работе показано, что потеря устойчивости связана с ответвлением от w_0 других семейств устойчивых решений.

Семейство решений Γ_1 образовано минимальными поверхностями, которые, как известно, являются аналитическими в каждой внутренней точке. Поверхности, образующие другие ветви решений, уже не будут минимальными и вопрос о их регулярности исследуется в данной работе в зависимости от класса гладкости границы $\partial\Omega$, количества и характера угловых точек на ней.

Рассмотрим гидромеханическую проблему, соответствующую задаче (1.1)–(1.2).

В цилиндре с поперечным сечением Ω находятся две жидкие или газообразные среды с плотностью ρ_1 и ρ_2 соответственно (рис. 1), $\rho = \rho_2 - \rho_1 > 0$. Разделяющая их эластичная поверхность

$$w = w(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

зафиксирована на боковой поверхности цилиндра

$$w|_{\partial\Omega} = \psi_0 \quad (1.14)$$

Рис. 1

с помощью непрерывного отображения $\psi_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения.

При отсутствии гравитации поверхность раздела $w_0(x, y)$ будет точкой абсолютного минимума функционала поверхностной энергии $E_\sigma(w) = \sigma A(w)$ и, следовательно, минимальной поверхностью.

При появлении ускорения $g > 0$ к потенциальной энергии поверхностного натяжения $E_\sigma(w)$ добавится потенциальная энергия двух сред в цилиндре $E_g(w)$. Рассматриваемый цилиндр может быть частью различных гидромеханических систем и это определяет соответствующую формулу для E_g . В данной работе исследуется ситуация, когда потенциальная энергия вычисляется по формуле

$$E_g(w) = E_0 - \rho g Q(w), \quad Q(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (w - w_0)^2 dx dy. \quad (1.15)$$

Тогда поверхность раздела двух сред $w(x, y)$ будет критической точкой суммарного функционала энергии

$$E_\sigma + E_g = E_0 + \sigma A(w) - \rho g Q(w) = E_0 + \sigma (A(w) - \lambda Q(w)), \quad (1.16)$$

зависящего от параметра Бонда $\lambda = \rho g / \sigma$, т.е. решением задачи (1.1)–(1.2).

Рассмотрим, в каких гидромеханических моделях возникает функционал (1.15). Пусть цилиндр, изображенный на рис. 1, является капилляром и содержит определенный объем жидкости, удерживаемый капиллярной поверхностью w . Тогда, потенциальная энергия столба жидкости определяется положением его нижней и верхней границ и вычисляется по формуле

$$E_g(w) = E_0 - \rho g \iint_{\Omega} w^2 dx dy + L \iint_{\Omega} w dx dy, \quad (1.17)$$

введенной Гауссом и Лежандром, где L – константа Лежандра. Если капилляр соединен с большим объемом жидкости, то учитывают изменение только нижней

границы и используют функционал (1.17) без последнего слагаемого. Теоретически, это соответствует случаю бесконечного цилиндра. Если жидкость является достаточно вязкой и отклонение $w(x, y) - w_0(x, y)$ мало, то невозможно перемещение объемов жидкости вдоль поверхности w_0 на значительные расстояния. В последней ситуации используют функционал в форме (1.15).

Пусть, например, в условиях невесомости движется твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью, и в нем имеется капиллярное отверстие. Тогда, за счет сил поверхностного натяжения образуется капиллярная поверхность $w_0(x, y)$ (минимальная), прикрепленная к краю отверстия, и препятствующая вытеканию жидкости. При возникновении ускорения g форма этой поверхности будет определяться функционалом (1.15).

2. Редукция задачи к операторному уравнению с нелинейным фредгольмовым индекса 0 оператором

Минимальная поверхность $w_0(x, y)$ будет решением задачи (1.1)–(1.2) при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и проблема ее бифуркаций эквивалентна задаче о ветвлении семейств решений операторного уравнения

$$P(w, \lambda, \mu) \equiv (F(w, \lambda), w|_{\partial\Omega} - \psi(\mu)) = (0, 0) \quad (2.1)$$

в точках $\{(w_0, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $P(w_0, \lambda, 0) = (0, 0)$.

Исследуем задачу (1.1)–(1.2) и операторное уравнение (2.1) в случае гладкой границы $\partial\Omega$. Это позволяет искать ответвляющиеся от w_0 решения в классе функций такой же гладкости, что и сама граница.

Исследуем задачу (1.1)–(1.2) при следующих дополнительных предположениях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A'_2 . Область Ω (поперечное сечение капилляра) строго выпукла и ее граница $\partial\Omega$ является гладким подмногообразием класса $C^{m,\alpha}$ с целым $m \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A'_3 . Отображение ψ_0 принадлежит классу $C^{m,\alpha}(\partial\Omega)$. Семейство отображений $\psi: C^{m,\alpha}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ является аналитическим по совокупности переменных и удовлетворяет начальному условию $\psi(0) = \psi_0$.

ТЕОРЕМА 2.1. При предположениях A_1, A'_2, A'_3 нелинейный оператор P действует в пространствах Гёльдера

$$P: C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{m,\alpha}(\partial\Omega), \quad (2.2)$$

является аналитическим по совокупности переменных и фредгольмовым индекса 0 по основной переменной w , т.е. класса $C^a\Phi_0^{(w)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие оператора P в пространствах (2.2) и его гладкость устанавливаются как и в работе [17]. Вычислим, например, производную Фреше по w . Для этого вторую вариацию (1.13) функционала E запишем в дивергентной форме

$$\delta^2 E = \sigma \iint_{\Omega} (A(w)h - \lambda h)h \, dx \, dy, \quad (2.3)$$

где $A(w)$ – производная Фреше от оператора средней кривизны $H(w)$ и

$$\begin{aligned} A(w)h &= -\operatorname{div} \left((1 + \nabla w^2)^{-3/2} \begin{bmatrix} 1 + w_y^2 & w_x w_y \\ w_x w_y & 1 + w_x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \right) \\ &= -(1 + \nabla w^2)^{-3/2} ((1 + w_y^2)h_{xx} - 2w_x w_y h_{xy} + (1 + w_x^2)h_{yy} \\ &\quad + 2(w_x w_{yy} - w_y w_{xy})h_x + 2(w_y w_{xx} - w_x w_{xy})h_y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда дифференциал Фреше оператора P будет определен по формуле

$$\begin{aligned} P'_w(w, \lambda, \mu)h &= (A(w)h - \lambda h, h|_{\partial\Omega}), \\ P'_w(w, \lambda): C^{m, \alpha}(\overline{\Omega}) &\rightarrow C^{m-2, \alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{m, \alpha}(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Он не зависит от μ и может быть представлен в виде

$$P'_w(w, \lambda)h = (A(w)h, h|_{\partial\Omega}) - (\lambda h, 0). \quad (2.6)$$

Линейный по h дифференциальный оператор $A(w)h = -\operatorname{div}(\dots)$ при каждом $w \in C^{m, \alpha}(\overline{\Omega})$ является равномерно эллиптическим

$$\begin{aligned} \omega(\xi_1, \xi_2) &= (1 + \nabla w^2)^{-3/2} ((1 + w_y^2)\xi_1^2 - 2w_x w_y \xi_1 \xi_2 + (1 + w_x^2)\xi_2^2) \\ &= (1 + \nabla w^2)^{-3/2} (\xi_1^2 + (w_y \xi_1 - w_x \xi_2)^2 + \xi_2^2), \\ (1 + \nabla w^2)^{-3/2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) &\leq \omega(\xi_1, \xi_2) \leq (1 + \nabla w^2)^{-3/2} ((1 + 2w_y^2)\xi_1^2 + (1 + 2w_x^2)\xi_2^2), \\ (1 + 2C^2)^{-3/2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) &\leq \omega(\xi_1, \xi_2) \leq (1 + 2C^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2), \end{aligned}$$

где $C = \max_{(x, y) \in \overline{\Omega}} \{|w_x|, |w_y|\}$. Коэффициенты оператора принадлежат классу $C^{m-2, \alpha}(\overline{\Omega})$.

Первый оператор в формуле (2.6) будет линейным изоморфизмом пространств Гёльдера (см., например, [18]) и, следовательно, линейным фредгольмовым оператором индекса 0. Второй оператор в формуле (2.6) будет вполне непрерывным в силу вполне непрерывного вложения пространств Гёльдера и его добавление не влияет на фредгольмовость и индекс.

Следовательно, производная Фреше $P'_w(w, \lambda, \mu)$ в каждой точке (w, λ, μ) является линейным оператором класса Φ_0 , а P является нелинейным оператором класса $C^a \Phi_0^{(w)}$.

Исследуем задачу (1.1)–(1.2) и операторное уравнение (2.1) в случае кусочно-гладкой границы $\partial\Omega$. Для области с углами будем использовать при $p > 2$ пространства $L_p(\Omega)$, пространства Соболева $W_p^2(\Omega)$ и пространства Бесова $B_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$, которые являются пространствами следов для $W_p^2(\Omega)$.

Исследуем задачу (1.1)–(1.2) при следующих дополнительных предположениях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A_2'' . Область Ω (поперечное сечение капилляра) выпуклая. Ее граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладким C^2 -подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, гомеоморфным окружности S^1 и имеющим конечное число K угловых точек. Величины внутренних углов $\omega_i, i = 1, \dots, K$, во всех сингулярных точках границы находятся в интервале $(0, \pi)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ A_3'' . *Отображение ψ_0 принадлежит классу $B_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ при $p > 2$. Семейство отображений $\psi: B_p^{2-1/p}(\partial\Omega) \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ является аналитическим по совокупности переменных и удовлетворяет начальному условию $\psi(0) = \psi_0$.*

ТЕОРЕМА 2.2. *При предположениях A_1, A_2'', A_3'' нелинейный оператор P действует в пространствах*

$$P: W_p^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow L_p(\Omega) \times B_p^{2-1/p}(\partial\Omega), \quad p > 2, \quad (2.7)$$

является аналитическим отображением и его производная Фреше

$$P'(w)h = (H'(w)h, h|_{\partial\Omega})$$

в каждой точке $w \in C^3(\overline{\Omega})$ является линейным фредгольмовым индекса 0 оператором ($P'(w) \in \Phi_0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем два самых существенных элемента доказательства теоремы 2.2. А именно, докажем действие нелинейного оператора P в пространствах (2.7) и установим фредгольмовость (индекса 0) линейного оператора $P'_w(w, \lambda, \mu)$, см. (2.4), (2.5), в тех же пространствах.

1. Для доказательства первого факта воспользуемся теоремами вложения пространств Соболева. Нелинейный оператор Плато $P(w, \lambda, \mu)$ (см. (2.1)) содержит дифференциальный оператор

$$F(w, \lambda) = -(1 + \nabla w^2)^{-3/2} (\Delta w + w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy}) - \lambda(w - w_0).$$

Пусть функция $w \in W_p^2(\Omega)$. Докажем, например, что $w_x w_y w_{xy} \in L_p(\Omega)$. Действительно, $w_x, w_y \in W_p^1(\Omega)$ и в силу включения

$$W_p^m(\Omega) \cdot W_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega), \quad m \geq 1, \quad p \geq 2, \quad (2.8)$$

имеем $w_x w_y \in W_p^1(\Omega)$. Функция $w_{xy} \in L_p(\Omega)$. Используя вложение

$$i: W_p^1(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega), \quad p > 2, \quad (2.9)$$

и включение

$$L_\infty(\Omega) \cdot L_p(\Omega) \subset L_p(\Omega), \quad p \geq 2,$$

получаем необходимое нам включение

$$W_p^1(\Omega) \cdot L_p(\Omega) \subset L_p(\Omega), \quad p > 2. \quad (2.10)$$

Следовательно, элемент $w_x w_y w_{xy} \in L_p(\Omega)$.

2. Докажем второе утверждение. Соответствующая производная Фреше имеет следующий вид

$$P'_w(w, \lambda, \mu)h = (-A(w)h - \lambda h, h|_{\partial\Omega})$$

(см. (2.4), (2.5)) и может быть представлена в форме

$$P'_w(w, \lambda, \mu)h = (L(w)h, h|_{\partial\Omega}) + (M(w, \lambda)h, 0), \quad (2.11)$$

где

$$L(w)h = -(1 + \nabla w^2)^{-3/2}(h_{xx} + h_{yy}).$$

При $w = 0$, например, оператор $L(0)h = -\Delta h$. Фредгольмовость и индекс оператора $-\Delta$ на пространствах Соболева

$$L(0): W_{p0}^m(\Omega) \rightarrow W_p^{m-2}(\Omega), \quad (2.12)$$

при $p = 2$ и $m \geq 2$ хорошо известны. Его индекс $-K(m - 2)$ отрицательный при $m > 2$ и равен 0 только при $m = 2$. Здесь, символом $W_{20}^m(\Omega)$ обозначено подпространство функций с нулевыми следами на границе.

Однако, при $p = m = 2$ отсутствует действие нелинейного оператора P , см. включения (2.9), (2.10). Чтобы обеспечить одновременно действие нелинейного оператора Плато и фредгольмовость индекса 0 оператора Лапласа в одних и тех же пространствах Соболева, необходимо использовать случай $p > 2$ и $m = 2$.

Изоморфизм оператора $L(w)$ в пространствах (2.12) при $p > 2$ и $m = 2$ следует из работы В. А. Кондратьева [19] о разрешимости в этих пространствах соответствующей эллиптической краевой задачи.

Из того, что $W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ является пространством следов для $W_p^2(\Omega)$, следует: первый оператор в разложении (2.11) является изоморфизмом.

Из компактности вложения $i: W_p^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ следует, что второй оператор в разложении (2.11) является вполне непрерывным. Его добавление не влияет на фредгольмовость и индекс оператора $P'_w(w, \lambda, \mu)$.

Пространство $W_p^2(\Omega)$, в котором мы будем искать решения $w(x, y)$ задачи (1.1)–(1.2), вложено только в пространство $C(\bar{\Omega})$ и не вложено в пространство $C^1(\bar{\Omega})$. Следовательно, в случае области с кусочно-гладкой границей, производные $w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$ в задаче (1.1)–(1.2) будем понимать в смысле дифференцирования обобщенных функций.

3. Необходимое и достаточное условия бифуркации в точке однократного вырождения

В банаховом пространстве $W_p^2(\Omega)$, $p > 2$, рассмотрим конечномерное подпространство $N(w, \lambda) = \text{Ker } P'_w(w, \lambda, \mu)$ решений $h(x, y)$ следующей линейной задачи

$$\begin{cases} A(w)h - \lambda h = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ h = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены предположения A_1, A_2'', A_3'' . Тогда, для бифуркации решений уравнения $P(w, \lambda, \mu) = (0, 0)$ в точке $(w_0, \lambda_0, 0)$ необходимо, чтобы

$$\dim N(w_0, \lambda_0) \neq 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim N(w_0, \lambda_0) = 0$. Тогда, линейный оператор $P'_w(w_0, \lambda_0, 0)$ принадлежит классу Φ_0 и будет линейным изоморфизмом пространств Соболева (2.7). Следовательно, по теореме о неявном отображении множество решений уравнения $P(w, \lambda, \mu) = (0, 0)$ в окрестности точки $(w_0, \lambda_0, 0)$ состоит только из семейства $\{(w_0, \lambda, \mu) : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_\varepsilon\}$.

Заметим, что точки λ_0 , в которых выполнено условие (3.2), являются собственными значениями линейного оператора $A(w_0)$ на пространстве функций $W_{p0}^2(\Omega)$ с нулевыми граничными значениями. Из общей теории линейных эллиптических уравнений следует (см. [18]), что оператор $A(w_0)$ имеет только положительные собственные значения и первое из них однократно.

В качестве достаточного условия бифуркации при однократном вырождении дифференциала Фреше применим теорему Crandall–Rabinowitz (см. [20, теорема 1], или [21, теорема 3.2.2]).

ТЕОРЕМА [CR]. В банаховых пространствах X и Y рассмотрим уравнение с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P(w, \lambda) = 0, \quad P: X \times \mathbb{R} \rightarrow Y, \quad P \in C^p, \quad p \geq 3,$$

в малой окрестности $\|w - w_0\|_X < \varepsilon, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

Пусть выполнены следующие условия:

1. $P(w_0, \lambda_0) = 0$,
2. $P'_\lambda(w_0, \lambda_0) = 0$,
3. $\dim \text{Ker } P'_w(w_0, \lambda_0) = 1, P'_w(w_0, \lambda_0)e = 0, e \neq 0$,
4. $\text{codim Im } P'_w(w_0, \lambda_0) = 1$,
5. $P''_{\lambda\lambda}(w_0, \lambda_0) \in \text{Im } P'_w(w_0, \lambda_0)$,
6. $P''_{w\lambda}(w_0, \lambda_0)e \notin \text{Im } P'_w(w_0, \lambda_0)$.

Тогда точка (w_0, λ_0) является точкой бифуркации и множество решений уравнения

$$P(w, \lambda) = 0$$

в окрестности этой точки состоит из двух гладких кривых, которые могут быть заданы параметрически следующим образом

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \in C^{p-2} : \quad & (w(\lambda), \lambda), \quad (w(\lambda_0), \lambda_0) = (w_0, \lambda_0), \\ & (w'(\lambda), 1), \quad (w'(\lambda_0), 1) = (0, 1), \\ \Gamma_2 \in C^{p-2} : \quad & (w(t), \lambda(t)), \quad (w(0), \lambda(0)) = (w_0, \lambda_0), \\ & (w'(t), \lambda'(t)), \quad (w'(0), \lambda'(0)) = (e, \lambda'_0), \end{aligned}$$

и которые пересекаются только в точке (w_0, λ_0) , $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ – параметр.

Сначала исследуем возможность бифуркации по основному параметру λ .

Рассмотрим уравнение (2.1) при $\mu = 0$. В этом случае применение теоремы [CR] к уравнению (2.1) дает следующий результат.

Рис. 2

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены предположения A_1, A_2'', A_3'' . Тогда, для бифуркации решений уравнения $P(w, \lambda, 0) = (0, 0)$ в точке (w_0, λ_0) достаточно, чтобы

$$\dim N(w_0, \lambda_0) = 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что выполнены условия 1–6, необходимые для применения теоремы [CR] о простой точке бифуркации. Первое условие теоремы [CR] выполнено в силу минимальности поверхности w_0 , см. предположение A_1 или (1.4). Третье условие – в силу предположения (3.3), а четвертое – в силу фредгольмовости индекса 0 оператора $P'_w(w_0, \lambda_0, 0)$. Для проверки остальных условий вычислим необходимые нам производные Фреше от оператора P :

$$\begin{aligned} P'_\lambda(w, \lambda) &= (w_0 - w, 0), \\ P'_w(w, \lambda)h &= (A(w)h - \lambda h, h|_{\partial\Omega}), \\ P''_{\lambda\lambda}(w, \lambda) &= (0, 0), \\ P''_{w\lambda}(w, \lambda)h &= (-h, 0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выполнение условий 2 и 5 теоремы [CR] следует из того, что $P'_\lambda(w_0, \lambda_0) = (0, 0)$ и $P''_{\lambda\lambda}(w_0, \lambda_0) = (0, 0)$.

Для проверки условия 6 рассмотрим ненулевой элемент $e \in N(w_0, \lambda_0)$. Он будет решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} A(w_0)e - \lambda_0 e = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ e = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Предположим, что условие 6 теоремы [CR] не выполнено, т.е.

$$P''_{w\lambda}(w_0, \lambda_0)e \in \text{Im } P'_w(w_0, \lambda_0). \quad (3.6)$$

Это означает, что в пространстве $W_p^2(\Omega)$ существует элемент h такой, что

$$(-e, 0) = P'_w(w_0, \lambda_0)h : \begin{cases} A(w_0)h - \lambda_0 h = e, & \Omega, \\ h = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Тогда, из (3.5), (2.4) и (3.7) получаем равенство

$$-\iint_{\Omega} e^2 dx dy = \iint_{\Omega} (A(w_0)h - \lambda_0 h)e dx dy = \iint_{\Omega} (A(w_0)e - \lambda_0 e)h dx dy = 0,$$

которое противоречит предположению $e \neq 0$.

Следовательно, выполнены все условия теоремы [CR], точка $(w_0, \lambda_0, 0)$ является точкой бифуркации и множество решений операторного уравнения $P(w, \lambda, 0) = (0, 0)$ в окрестности этой точки состоит из двух кривых (см. рис. 2 и теорему [CR]).

Заметим, что к уравнению (2.1) не удастся применить наиболее распространенные теоремы о бифуркациях в точках нечетнократного вырождения производной Фреше – теоремы Красносельского [22], Rabinowitz [23] и теорему Ize [24] (см., например, [21, теоремы 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1]). Действительно, первая теорема применима к операторам вида $I - k$, где k – компактный оператор и I – тождественный. Вторая теорема применима к операторам вида $A - k$, где A – линейный фредгольмов оператор индекса 0. В третьем случае нелинейность имеет порядок $O(|w|^2)$. Оператор Плато P не удовлетворяет этим условиям.

В теореме 3.1 установлено достаточное условие для бифуркации минимальной поверхности раздела двух сред в капилляре при изменении параметра λ .

Исследуем, будет ли условие (3.3) достаточным для бифуркации по параметру μ в точке $(w_0, \lambda_0, 0)$ решений уравнения

$$P(w, \lambda_0, \mu) = (0, 0). \quad (3.8)$$

Для проверки условий теоремы [CR] вычислим необходимые производные Фреше от P :

$$\begin{aligned} P'_\mu(w, \lambda, \mu) &= (0, \psi'_\mu(\mu)), \\ P'_w(w, \lambda, \mu)h &= (A(w)h - \lambda h, h|_{\partial\Omega}), \\ P''_{\mu\mu}(w, \lambda, \mu) &= (0, \psi''_{\mu\mu}(\mu)), \\ P''_{w\mu}(w, \lambda, \mu)h &= (0, 0). \end{aligned} \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема [CR] не обеспечивает достаточное условие бифуркации для уравнения (3.8), так как $P''_{w\mu}(w_0, \lambda_0, 0)e = 0$ и невыполнено предположение 6 этой теоремы.

Пусть граница $w|_{\partial\Omega}$ поверхности раздела претерпевает малые деформации одновременно с изменением главного параметра λ вблизи найденной точки бифуркации λ_0

$$w|_{\partial\Omega} = \psi(\mu), \quad \mu = \mu(\lambda), \quad \mu(\lambda_0) = 0. \quad (3.10)$$

Исследуем, будет ли условие (3.3) достаточным для бифуркации по параметру λ в точке (w_0, λ_0) решений уравнения

$$P(w, \lambda, \mu(\lambda)) = (0, 0). \quad (3.11)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) и операторное уравнение (3.10) при предположениях A_1, A_2'' . Пусть отображение $\psi(\mu)$, $\psi: \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow B_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ и функция $\mu(\lambda)$ являются гладким класса C^p , $p \geq 3$, и для них выполнены следующие условия

1. $\psi(0) = \psi_0$,
2. $\mu(\lambda_0) = 0$,
3. $\mu'(\lambda_0) = 0$,
4. $\psi'(0) \in \Psi$ или $\mu''(\lambda_0) = 0$, где Ψ – подпространство в $B_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$, определенное по формуле

$$\Psi = \{ \psi : \psi = h|_{\partial\Omega}, h \in W_p^2(\Omega), A(w_0)h - \lambda_0 h = 0 \}. \quad (3.12)$$

5. Пусть $\dim N(w_0, \lambda_0) = 1$.

Тогда точка (w_0, λ_0) является точкой бифуркации в задаче (3.11) и множество решений в ее окрестности состоит из двух кривых (см. теорему [CR]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки условий теоремы [CR] вычислим необходимые производные Фреше от P :

$$\begin{aligned} P'_\lambda(w, \lambda) &= ((w - w_0), \psi'(\mu)\mu'(\lambda)), \\ P'_w(w, \lambda)h &= (A(w)h - \lambda h, h|_{\partial\Omega}), \\ P''_{\lambda\lambda}(w, \lambda) &= (0, \psi''(\mu)(\mu'(\lambda))^2 + \psi'(\mu)\mu''(\lambda)), \\ P''_{w\lambda}(w, \lambda)h &= (-h, 0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Вычислим необходимые производные Фреше в точке (w_0, λ_0) :

$$\begin{aligned} P'_\lambda(w_0, \lambda_0) &= (0, 0), \\ P'_w(w_0, \lambda_0)h &= (A(w_0)h - \lambda_0 h, h|_{\partial\Omega}), \\ P''_{\lambda\lambda}(w_0, \lambda_0) &= (0, \psi'(0)\mu''(\lambda_0)), \\ P''_{w\lambda}(w_0, \lambda_0)h &= (-h, 0). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Проверка условий 1, 3, 4 и 6 теоремы [CR] происходит точно также, как и в теореме 3.1. Условия 2 и 5 теоремы [CR] будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} P'_\lambda(w_0, \lambda_0) &= (0, \psi'(\lambda_0)) = (0, 0), \\ P''_{\lambda\lambda}(w_0, \lambda_0) &= (0, \psi'(0)\mu''(\lambda_0)) \in \text{Im } P'_w(w_0, \lambda_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Последнее из условий (3.15) означает: в пространстве $W_p^2(\Omega)$ существует элемент h такой, что

$$\begin{cases} A(w_0)h - \lambda_0 h = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ h = \mu''(\lambda_0)\psi'(0), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.16)$$

Существование такого h обеспечивается предположением 4 данной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Третье из условий теоремы 3.2 означает, что бифуркация минимальной поверхности раздела $w_0(x, y)$, найденная в теореме 3.1, сохранится, если деформация границы будет происходить медленнее, чем рост параметра λ .

4. Метод конечномерной редукции

Для получения более общей информации о возможных перестройках множества решений задачи (1.1)–(1.2) в окрестности простой точки бифуркации $(w_0, \lambda_0, 0)$ при наличии дополнительных возмущений необходимо использовать методы теории особенностей гладких отображений (см., например, [25]).

Для этого, во-первых, операторное уравнение (2.1) с фредгольмовым индексом оператора в окрестности точки $(w_0, \lambda_0, 0)$ редуцируем к проблеме ветвления множества критических точек ключевой функции $\Phi(\xi, \lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ

$$\nabla_{\xi} \Phi(\xi, \lambda, \mu) = 0, \quad (4.1)$$

которая определена локально в окрестности точки $(0, \lambda_0, 0)$ и

$$\Phi: \mathbb{R}_{\varepsilon} \times (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}_{\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla_{\xi} \Phi(0, \lambda_0, 0) = 0.$$

Существует много различных модификаций конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта для вариационных задач. В данной работе будем придерживаться схемы Сапронова [26].

Рассмотрим случай однократного вырождения в точке $(w_0, \lambda_0, 0)$ дифференциала Фреше $P'_w(w_0, \lambda_0, 0)h = (F'_w(w_0, \lambda_0)h, h|_{\partial\Omega})$ в задаче (2.1). Пусть

$$\dim N(w_0, \lambda_0) = 1,$$

и подпространство $N(w_0, \lambda_0)$ порождено элементом $e \neq 0$ таким, что

$$P'_w(w_0, \lambda_0, 0)e = 0, \quad \iint_{\Omega} e^2(x, y) dx dy = 1. \quad (4.2)$$

Тогда по классической схеме Ляпунова–Шмидта (см., например, [27]) от операторного уравнения (2.1) можно перейти к одномерному уравнению разветвления

$$\phi(\xi, \lambda, \mu) \equiv \iint_{\Omega} (w(\xi, \lambda, \mu) - w_0)e dx dy - \xi = 0, \quad (4.3)$$

где функция разветвления $\phi(\xi, \lambda, \mu)$ определена локально

$$\phi: \mathbb{R}_{\varepsilon} \times (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}_{\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(0, \lambda_0, 0) = 0,$$

и является достаточно гладкой (класса C^{∞}), а отображение $w(\xi, \lambda, \mu)(x, y)$ задано неявно как решение следующей нелинейной краевой задачи в Ω

$$\begin{cases} F(w, \lambda) - \left(\iint_{\Omega} (w - w_0)e dx dy - \xi \right) e = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = \psi(\mu), \end{cases} \quad (4.4)$$

с параметрами ξ, λ, μ , определенными локально в окрестности точки $(0, \lambda_0, 0)$.
Отображение

$$\phi: \mathbb{R}_\varepsilon \times (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}_\varepsilon \rightarrow W_p^2(\Omega), \quad w(0, \lambda_0, 0) = w_0,$$

тоже принадлежит классу гладкости C^∞ .

Существование $w(\xi, \lambda, \mu)(x, y)$ следует из теоремы о неявном отображении. Действительно, задачу (4.4) запишем в виде операторного уравнения

$$\hat{P}(w, \lambda, \xi, \mu) = (0, 0), \quad (4.5)$$

где нелинейный оператор $\hat{P}$ определен по формуле

$$\hat{P}(w, \lambda, \xi, \mu) \equiv \left(F(w, \lambda) - \left(\iint_{\Omega} (w - w_0) e \, dx \, dy - \xi \right) e, w|_{\partial\Omega} - \psi(\mu) \right)$$

и действует в пространствах Соболева

$$\hat{P}: W_p^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\varepsilon^2 \rightarrow B_p^{2-1/p}(\partial\Omega), \quad \hat{P}(w_0, \lambda_0, 0, 0) = (0, 0).$$

Тогда его дифференциал Фреше в точке $(w_0, \lambda_0, 0)$

$$\hat{P}'_w(w_0, \lambda_0, 0, 0)h = \left(F'_w(w_0, \lambda_0)h - \left(\iint_{\Omega} h e \, dx \, dy \right) e, h|_{\partial\Omega} \right)$$

будет изоморфизмом пространств Соболева и к уравнению (4.5) применима теорема о неявном отображении.

Согласно схеме в работе [26] множество решений уравнения разветвления $\phi(\xi, \lambda, \mu) = 0$ в окрестности точки $(0, \lambda_0, 0)$ можно рассматривать как множество критических точек ключевой функции $\Phi(\xi, \lambda, \mu)$ с параметрами λ, μ ,

$$\nabla_\xi \Phi(\xi, \lambda, \mu) = \phi(\xi, \lambda, \mu), \quad (4.6)$$

которая может быть вычислена по формуле

$$\Phi(\xi, \lambda, \mu) = E(w(\xi, \lambda, \mu), \lambda) + \frac{1}{2} \left(\iint_{\Omega} (w(\xi, \lambda, \mu) - w_0) e \, dx \, dy - \xi \right)^2, \quad (4.7)$$

где $w(\xi, \lambda, \mu)(x, y)$ – неявное отображение, найденное из уравнения (4.5).

Тогда исследование бифуркации решений уравнения (2.1) эквивалентно изучению перестройки множества критических точек ключевой функции [26] $\Phi_0(\xi) = \Phi(\xi, \lambda_0, 0)$ при ее двупараметрической деформации

$$\Phi_0(\xi) + \delta\Phi(\xi, \lambda, \mu) = 0, \quad (4.8)$$

где $\delta\Phi(\xi, \lambda, \mu) = \Phi(\xi, \lambda, \mu) - \Phi(\xi, \lambda_0, 0)$ и $\delta\Phi(\xi, \lambda_0, 0) = 0$.

Естественен вопрос об устойчивых (находящихся в общем положении) перестройках множества критических точек функции $\Phi_0(\xi)$ при ее всевозможных деформациях. Для ответа на него (см. [25]) необходимо определить тип особенности критической точки $\xi_0 = 0$ функции $\Phi_0(\xi)$, коразмерность особенности M (число Милнора) и вид миниверсальной деформации.

ТЕОРЕМА 4.1. *Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) при наиболее общих условиях A_1, A_2'', A_3'' , при которых она эквивалентна операторному уравнению (2.1) в пространствах Соболева (2.7). Пусть $(w_0, \lambda_0, 0)$ – точка однократного вырождения дифференциала Фреше $P'_w(w_0, \lambda_0, 0)$ в уравнении (2.1), т.е. $\dim N(w_0, \lambda_0) = 1$, и подпространство $N(w_0, \lambda_0)$ порождено элементом $e \neq 0$, удовлетворяющим условиям (4.2).*

Тогда

1. *Проблема бифуркации в точке $(w_0, \lambda_0, 0)$ решений уравнения (2.1) эквивалентна задаче (4.1) о ветвлении критических точек ключевой функции $\Phi(\xi, \lambda, \mu)$, определенной равенством (4.7) и операторным уравнением (4.5).*

2. *Если функции $w_0(x, y)$ и $e(x, y)$ таковы, что в каждой точке $(x, y) \in \Omega$ выполнено условие*

$$\nabla w_0 \nabla e \neq 0, \quad (4.9)$$

то ключевая функция $\Phi_0(\xi)$, определенная равенством (4.8), в своей критической точке $\xi_0 = 0$ имеет особенность типа A_2 (“складка”) с коразмерностью (число Милнора) $M = 1$.

3. *Если функции $w_0(x, y)$ и $e(x, y)$ таковы, что в каждой точке $(x, y) \in \Omega$ выполнены условия*

$$\begin{aligned} \nabla w_0 \nabla e &= 0, \\ (\nabla e)^2 + \nabla w_0 \nabla w_0'' &\neq 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где элемент w_0'' является решением краевой задачи в области Ω

$$\begin{cases} A(w_0)w_0'' - \left(\iint_{\Omega} w_0'' e \, dx \, dy \right) e - \lambda_0 w_0'' = -F_0^{(2)} ee, \\ w_0''|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

правая часть которой определяется равенством

$$F_0^{(2)} ee = 3 \operatorname{div}((1 + \nabla w_0^2)^{-5/2} \{ \nabla e^2 + \nabla w_0^2 \nabla e^2 - (\nabla w_0 \nabla e)^2 \} \nabla w_0), \quad (4.12)$$

то ключевая функция $\Phi_0(\xi)$, определенная равенством (4.8), в своей критической точке $\xi_0 = 0$ имеет особенность типа A_3 (“сборка”) с коразмерностью (число Милнора) $M = 2$.

4. *Если функции $w_0(x, y)$ и $e(x, y)$ таковы, что в каждой точке $(x, y) \in \Omega$ выполнены условия*

$$\begin{aligned} \nabla w_0 \nabla e &= 0, \\ (\nabla e)^2 + \nabla w_0 \nabla w_0'' &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

то ключевая функция $\Phi_0(\xi)$ в своей критической точке $\xi_0 = 0$ имеет особенность типа A_k с некоторым $k > 3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Из условий (4.10) и (4.2) следует, что если $w_0(x, y) = \text{const}$ – плоская поверхность раздела, направленная перпендикулярно ускорению g , то в однократных точках бифуркации $(w_0, \lambda_0, 0)$ всегда будет особенность типа A_3 (“сборка”).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если задачу (1.1)–(1.2) рассматривать в области Ω с гладкой границей при предположениях A_1, A'_2, A'_3 , то для операторного уравнения (2.1) в пространствах Гёльдера (2.2) будет справедлива теорема 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисление типа особенности построено на разложении функций и отображений в ряды Тейлора в точке бифуркации.

Рассмотрим случай $\xi_0 = 0$ и $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ и $\mu \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Из формулы (4.3) для функции $\phi(\xi, \lambda, \mu)$ следует, что

$$\begin{aligned} \phi(0, \lambda, \mu) &= \iint_{\Omega} (w(0, \lambda, \mu) - w_0) e \, dx \, dy, \\ \phi'_\xi(0, \lambda, \mu) &= \iint_{\Omega} w'_\xi(0, \lambda, \mu) e \, dx \, dy - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \phi^{(n)}_\xi(0, \lambda, \mu) &= \iint_{\Omega} w^{(n)}_\xi(0, \lambda, \mu) e \, dx \, dy, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Коэффициент $\omega^{(0)} = \omega(0, \lambda, \mu)$ находится из (4.4) или (4.5) при $\xi = 0$

$$\left(F(w^{(0)}, \lambda) - \left(\iint_{\Omega} w^{(0)} e \, dx \, dy - 1 \right) e, w^{(0)}|_{\partial\Omega} \right) = (0, \psi(\mu)).$$

Для нахождения остальных коэффициентов $w^{(n)} = w^{(n)}_\xi(0, \lambda, \mu)$, $n = 1, 2, 3$, будем дифференцировать по ξ в точке $\xi_0 = 0$ равенство (4.5). Получаем

$$\begin{aligned} &\left(F^{(1)} w' - \left(\iint_{\Omega} w' e \, dx \, dy - 1 \right) e, w'|_{\partial\Omega} \right) = (0, 0), \\ &\left(F^{(1)} w'' - \left(\iint_{\Omega} w'' e \, dx \, dy \right) e + F^{(2)} w' w', w''|_{\partial\Omega} \right) = (0, 0), \\ &\left(F^{(1)} w''' - \left(\iint_{\Omega} w''' e \, dx \, dy \right) e + 3F^{(2)} w' w'' + F^{(3)} w' w' w', w'''|_{\partial\Omega} \right) = (0, 0), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где символом $F^{(n)} h_1 \dots h_n = D_w^{(n)} F(w_0, \lambda) h_1 \dots h_n$ обозначен дифференциал Фреше от F по переменной w порядка n в точке (w_0, λ) , вычисленный на элементах $h_1, \dots, h_n$.

Используя тот факт, что линейный оператор $\hat{P}'_w(w_0, \lambda, \mu, 0)$, определенный по правилу

$$\hat{P}'_w(w_0, \lambda, \mu, 0)h = \left(A(w_0)h - \left(\iint_{\Omega} h e \, dx \, dy \right) e - \lambda h, h|_{\partial\Omega} \right), \quad (4.16)$$

является обратимым при $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ и $\mu \in \mathbb{R}_\varepsilon$ (изоморфизмом пространств Соболева), получаем рекуррентные формулы для w' , w'' , w''' :

$$\begin{aligned} w' &= \hat{P}'_w(w_0, \lambda, \mu, 0)^{-1}(-e, 0), \\ w'' &= \hat{P}'_w(w_0, \lambda, \mu, 0)^{-1}(-F^{(2)}w'w', 0), \\ w''' &= \hat{P}'_w(w_0, \lambda, \mu, 0)^{-1}(-3F^{(2)}w'w'' - F^{(3)}w'w'w', 0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в равенства (4.14), можно получить рекуррентные формулы первых коэффициентов ряда Тейлора для функции разветвления.

Формулы (4.14)–(4.17) можно существенно упростить, если коэффициенты функции разветвления и коэффициенты $w_0^{(n)} = w_\xi^{(n)}(0, \lambda_0, 0)$, $n = 0, 1, 2, 3$, вычислять только в одной точке $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, 0)$.

Например,

$$\begin{aligned} w_0^{(0)} &= w_0, \\ w_0' &= e, \end{aligned} \quad (4.18)$$

и элемент w_0'' является решением краевой задачи в области Ω

$$\begin{cases} A(w_0)w_0'' - \left(\iint_{\Omega} w_0'' e \, dx \, dy \right) e - \lambda_0 w_0'' = -F_0^{(2)}ee, \\ w_0''|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Заметим, что в силу (4.15) все функции $w^{(n)}(x, y)$ равны нулю на границе области Ω , т. е. принадлежат подпространству $W_{p0}^2(\Omega)$, на котором справедлива формула

$$\iint_{\Omega} F_0^{(1)} h e \, dx \, dy = \iint_{\Omega} F_0^{(1)} e h \, dx \, dy = 0, \quad (4.20)$$

где $F_0^{(1)} = A(w_0) - \lambda_0 I$ и $A(w_0)h = -\operatorname{div}(\vec{p}(w_0)\nabla h)$ – дифференциальный эллиптический оператор, определенный по формуле (2.4). Условие (4.20) означает, что для отображения $F_0^{(1)}: W_{p0}^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ подпространство $\operatorname{Im} F_0^{(1)}$ является ортогональным к подпространству $\operatorname{Ker} F_0^{(1)}$ относительно скалярного произведения в более широком гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, для которого справедливы всюду плотные вложения $L_2(\Omega) \supset L_p(\Omega) \supset W_{p0}^2(\Omega)$.

Тогда, в равенствах (4.15) при $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, 0)$ умножим первые компоненты на функцию $e(x, y)$ и проинтегрируем по области Ω . Получим следующие формулы.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} w_0' e \, dx \, dy &= 1, \\ \iint_{\Omega} w_0'' e \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} F_0^{(2)} w_0' w_0' e \, dx \, dy, \\ \iint_{\Omega} w_0''' e \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} (3F_0^{(2)} w_0' w_0'' + F_0^{(3)} w_0' w_0' w_0') e \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из представления (1.1) функционала $E(w, \lambda)$ и формулы (1.10) для его первой вариации следует, что

$$D'_w E(w, \lambda)h = \iint_{\Omega} F(w, \lambda)h \, dx \, dy, \quad (4.22)$$

для любого $h \in W_{p0}^2(\Omega)$. Дифференцируя по w равенство (4.22), получаем формулы

$$D_w^{(n+1)} E(w, \lambda)h_1 \dots h_n h_{n+1} = \iint_{\Omega} (D_w^{(n)} F(w, \lambda)h_1 \dots h_n)h_{n+1} \, dx \, dy, \quad (4.23)$$

справедливые при $n = 1, 2, 3, \dots$ и для $h_1, \dots, h_{n+1} \in W_{p0}^2(\Omega)$.

Подставляя (4.18), (4.21) и (4.23) в формулы (4.14) получаем формулы первых коэффициентов ряда Тейлора ключевой функции

$$\begin{aligned} \Phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) = E_0^{(3)}eee, \\ \Phi'''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) = 3E_0^{(3)}ee w''_0 + E_0^{(4)}eeee, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $E_0^{(n)}h_1 \dots h_n = D_w^{(n)} E(w_0, \lambda_0)h_1 \dots h_n$ и элемент w''_0 является решением краевой задачи (4.19).

Вычислим первые производные Фреше $E^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, функционала E по переменной w :

$$\begin{aligned} E(w, \lambda) &= \iint_{\Omega} \left((1 + \nabla w^2)^{1/2} - \frac{\lambda}{2}(w - w_0)^2 \right) dx \, dy, \\ E^{(1)}(w, \lambda)h &= \iint_{\Omega} ((1 + \nabla w^2)^{-1/2}(\nabla w \nabla h) - \lambda(w - w_0)h) \, dx \, dy, \\ E^{(2)}(w, \lambda)h_1 h_2 &= \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{-3/2} \{ (1 + \nabla w^2)(\nabla h_1 \nabla h_2) - (\nabla w \nabla h_1)(\nabla w \nabla h_2) \} - \lambda h^2 \} \, dx \, dy, \\ E^{(3)}(w, \lambda)h_1 h_2 h_3 &= \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{-5/2} \{ 3(\nabla w \nabla h_1)(\nabla w \nabla h_2)(\nabla w \nabla h_3) - (1 + \nabla w^2) \{ (\nabla w \nabla h_1)(\nabla h_2 \nabla h_3) + (\nabla w \nabla h_2)(\nabla h_1 \nabla h_3) + (\nabla w \nabla h_3)(\nabla h_1 \nabla h_2) \} \} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для вариации $\delta w = h$ аргумента w вычислим первые вариации функционала $\delta^n E = D^{(n)} E(w, \lambda)h, \dots, h, n = 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} \delta^2 E &= \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{-3/2} \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - (\nabla w \nabla h)^2 - \lambda h^2 \} \, dx \, dy, \\ \delta^3 E &= -3 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{-5/2} (\nabla w \nabla h) \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - (\nabla w \nabla h)^2 \} \, dx \, dy, \\ \delta^4 E &= -3 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w^2)^{-7/2} \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - (\nabla w \nabla h)^2 \} \\ &\quad \times \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - 5(\nabla w \nabla h)^2 \} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для вычисления $F^{(2)}hh$ воспользуемся представлением (4.26) для третьей вариации $\delta^3 E$ и формулой (4.23). Получаем

$$\begin{aligned}\delta^3 E &= 3 \iint_{\Omega} \operatorname{div}((1 + \nabla w^2)^{-5/2} \{ \nabla h^2 + \nabla w^2 \nabla h^2 - (\nabla w \nabla h)^2 \} \nabla w) h \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Omega} (F^{(2)}hh) h \, dx \, dy\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$F_0^{(2)}ee = 3 \operatorname{div}((1 + \nabla w_0^2)^{-5/2} \{ \nabla e^2 + \nabla w_0^2 \nabla e^2 - (\nabla w_0 \nabla e)^2 \} \nabla w_0). \quad (4.27)$$

Для вычисления коэффициентов ключевой функции подставим найденные формулы в (4.24) и (4.19). Получаем окончательные формулы:

$$\begin{aligned}\Phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi'(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi'''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) \\ &= -3 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w_0^2)^{-5/2} (\nabla w_0 \nabla e) \\ &\quad \times \{ \nabla e^2 + \nabla w_0^2 \nabla e^2 - (\nabla w_0 \nabla e)^2 \} \, dx \, dy, \\ \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_0, 0) &= \phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) \\ &= -3 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w_0^2)^{-7/2} \{ 3(1 + \nabla w_0^2) (\nabla w_0 \nabla e)^2 (\nabla w_0 \nabla w_0'') \\ &\quad - (1 + \nabla w_0^2)^2 \{ 2(\nabla w_0 \nabla e) (\nabla e \nabla w_0'') + (\nabla w_0 \nabla w_0'') \nabla e^2 \} \\ &\quad - \{ \nabla e^2 + \nabla w_0^2 \nabla e^2 - (\nabla w_0 \nabla e)^2 \} \\ &\quad \times \{ \nabla e^2 + \nabla w_0^2 \nabla e^2 - 5(\nabla w_0 \nabla e)^2 \} \} \, dx \, dy,\end{aligned} \quad (4.28)$$

где элемент w_0'' является решением задачи (4.19) с правой частью (4.27).

Сделаем дополнительное предположение, что

$$\nabla w_0 \nabla e \equiv 0, \quad (4.29)$$

тогда коэффициенты ряда Тейлора ключевой функции вычисляются по более простым формулам

$$\begin{aligned}\Phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) &= \phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_0, 0) &= \phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) \\ &= 3 \iint_{\Omega} (1 + \nabla w_0^2)^{-3/2} \nabla e^2 (\nabla w_0 \nabla w_0'' + \nabla e^2) \, dx \, dy,\end{aligned} \quad (4.30)$$

где w_0'' — решение линейной краевой задачи (4.19) с правой частью

$$F_0^{(2)}ee = 3 \operatorname{div}((1 + \nabla w_0^2)^{-3/2} \nabla e^2 \nabla w_0). \quad (4.31)$$

В случае, если $w_0(x, y) \equiv \text{const}$ (плоская минимальная поверхность, направленная перпендикулярно ускорению g), имеем $\nabla w_0 \equiv 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi'_\xi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi'''_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi''_\xi(0, \lambda_0, 0) = 0, \\ \Phi^{(4)}_\xi(0, \lambda_0, 0) &= \phi'''_\xi(0, \lambda_0, 0) = 3 \iint_{\Omega} |\nabla e|^4 dx dy > 0,\end{aligned}\tag{4.32}$$

критическая точка $\xi_0 = 0$ ключевой функции $\Phi_0(\xi)$ будет иметь особенность типа A_3 (“сборка”) с коразмерностью $M = 2$.

Теорема 4.1 доказана.

Теорема [CR] (M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz), которая дает достаточное условие бифуркации в данной работе, получена с использованием леммы Морса и конечномерной редукции для фредгольмовых индекса 0 отображений банаховых пространств. В ней не содержится информация о расположении второй ветви решений в зависимости от параметра λ и о количестве решений при $\lambda < \lambda_0$ и при $\lambda > \lambda_0$.

Возможны следующие ситуации:

- 1) совпадение в точке (w_0, λ_0) двух ветвей решений $w_0(\lambda) \equiv w_0$ и $w_1(\lambda)$;
- 2) слияние в точке (w_0, λ_0) трех семейств решений $w_0(\lambda) \equiv w_0$, $w_1(\lambda)$ и $w_2(\lambda)$ в одно семейство $w_0(\lambda) \equiv w_0$.

Исследование бифуркаций в параметрической проблеме Плато [15] показало, что возможны обе ситуации. Для их распознавания необходимо дополнительное исследование задачи (1.1)–(1.2) и операторного уравнения (2.1). Оказалось, что расположение ветвей и их первая асимптотика по λ зависят от коэффициентов ключевой функции $\Phi^{(k)}_\xi(0, \lambda_0, 0)$, $k = 2, 3, \dots$, и, следовательно, от типа особенности ее критической точки $\xi_0 = 0$. Будет справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) при наиболее общих условиях A_1, A_2'', A_3'' , при которых она эквивалентна операторному уравнению (2.1) в пространствах Соболева (2.7). Пусть $(w_0, \lambda_0, 0)$ – точка однократного вырождения дифференциала Фреше $P'_w(w_0, \lambda_0, 0)$ в уравнении (2.1), т.е. $\dim N(w_0, \lambda_0) = 1$, и подпространство $N(w_0, \lambda_0)$ порождено элементом $e \neq 0$, удовлетворяющим условиям*

$$P'_w(w_0, \lambda_0, 0)e = 0, \quad \iint_{\Omega} e^2(x, y) dx dy = 1.\tag{4.33}$$

Тогда точка (w_0, λ_0) является точкой бифуркации для операторного уравнения (2.1) и множество решений в ее окрестности состоит из двух кривых $\Gamma_1 = \{(w_0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ и Γ_2 , пересекающихся трансверсально (см. теоремы [CR] и 3.1).

1. *Если ключевая функция $\Phi_0(\xi)$, определенная равенством (4.8), в своей критической точке $\xi_0 = 0$ имеет особенность типа A_2 (“складка”), см. теорему 4.1, то имеет место бифуркация, изображенная на рис. 3а, и семейство*

Γ_2 может быть параметризовано следующим образом:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} w_2(\lambda) = w_0 + \frac{e}{\lambda_1^*}(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \\ \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon), \end{cases} \quad (4.34)$$

где

$$\lambda_1^* = \frac{1}{2} \Phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) \neq 0, \quad (4.35)$$

см. формулы (4.28).

2. Если ключевая функция $\Phi_0(\xi)$, определенная равенством (4.8), в своей критической точке $\xi_0 = 0$ имеет особенность типа A_3 (“сборка”), см. теорему 4.1, то имеет место бифуркация, изображенная на рис. 3b или 3c, и семейство Γ_2 состоит из двух ветвей

$$\Gamma_2 : \begin{cases} w_2^\pm(\lambda) = w_0 \pm e \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_2^*} \right)^{1/2} + o|\lambda - \lambda_0|^{1/2}, \\ \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon), \text{ если } \lambda_2^* > 0, \\ \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0], \text{ если } \lambda_2^* < 0, \end{cases} \quad (4.36)$$

где

$$\lambda_2^* = \frac{1}{3!} \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_0, 0) \neq 0, \quad (4.37)$$

см. формулы (4.28), (4.19) и (4.27).

$$P(w, \lambda) = 0$$

Рис. 3a

Рис. 3b

Рис. 3c

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы [CR] следует, что второе семейство решений, которое пересекает $\Gamma_1 = \{(w_0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ в точке (w_0, λ_0) , может быть задано параметром $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} w(t) = w_0 + w_0' t + \frac{1}{2} w_0'' t^2 + \dots, \\ \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_0' t + \frac{1}{2} \lambda_0'' t^2 + \dots \end{cases} \quad (4.38)$$

Подставим параметрическое представление (4.38) кривой Γ_2 в операторное уравнение (2.1) при $\mu = 0$. Получим тождество

$$(F(w(t), \lambda(t)), w(t)|_{\partial\Omega} - \psi_0) = (0, 0), \quad t \in (-\varepsilon, +\varepsilon). \quad (4.39)$$

Заметим, что дифференциальный оператор F имеет следующий вид

$$\begin{aligned} F(w, \lambda) &= H(w) - \lambda(w - w_0), \\ F'_w(w, \lambda) &= A(w) - \lambda I, \\ F_w^{(n)}(w, \lambda) &= H_w^{(n)}(w), \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (4.40)$$

см. формулы (0.1), (1.3) и (2.4).

С учетом (4.40) продифференцируем тождество (4.39) по t в точке $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} (A(w)w' - \lambda'(w - w_0) - \lambda w', w'|_{\partial\Omega}) &= (0, 0), \\ (A_0 w'_0 - \lambda_0 w'_0, w'_0|_{\partial\Omega}) &= (0, 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Решение $w'_0 = Ce$ линейной задачи (4.41) может быть выбрано с точностью до константы $C \in \mathbb{R}$. Это свидетельствует о возможности нескольких параметризаций кривой Γ_2 . В силу теорем [CR] и 3.1 от кривой Γ_1 в точке бифуркации (w_0, λ_0) ответвляется единственное семейство решений Γ_2 . Следовательно, его асимптотика по основному параметру λ не зависит от выбора константы и способа параметризации кривой Γ_2 . Выберем $w'_0 = e$.

После второго дифференцирования по t получим

$$\begin{aligned} (F^{(2)}(w')^2 + A(w)w'' - \lambda''(w - w_0) - 2\lambda'w' - \lambda w'', w''|_{\partial\Omega}) &= (0, 0), \\ (A_0 w''_0 - \lambda_0 w''_0, w''_0|_{\partial\Omega}) &= (2\lambda'_0 e - F_0^{(2)} ee, 0). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Задача (4.42) разрешима только при $(2\lambda'_0 e - F_0^{(2)} ee) \in \text{Im } F_0^{(1)}$, что обеспечивается условием

$$\iint_{\Omega} (2\lambda'_0 e - F_0^{(2)} ee) e \, dx \, dy = 0. \quad (4.43)$$

Из формулы (4.42) при

$$\lambda'_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (F_0^{(2)} ee) e \, dx \, dy = \frac{1}{2} E_0^{(3)} eee = \frac{1}{2} \Phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) \quad (4.44)$$

находится элемент w''_0 .

Если ключевая функция $\Phi_0(\xi) = \Phi(\xi, \lambda_0, 0)$ имеет в точке $\xi_0 = 0$ особенность типа A_2 , то $\lambda'_0 = \frac{1}{2} \Phi_\xi'''(0, \lambda_0, 0) \neq 0$. Тогда в параметрическом задании (4.38) кривой Γ_2 можно исключить t следующим способом:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} t = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda'_0} + o(\lambda - \lambda_0), \\ w(\lambda) = w_0 + \frac{e}{\lambda'_0}(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \\ \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon). \end{cases} \quad (4.45)$$

Если ключевая функция $\Phi_0(\xi)$ имеет в точке $\xi_0 = 0$ особенность типа A_3 , то $\lambda'_0 = \frac{1}{2}\Phi''_{\xi}(0, \lambda_0, 0) = 0$ и тождество (4.39) необходимо третий раз продифференцировать по t . Получаем

$$\begin{aligned} & (F^{(3)}(w')^3 + 3F^{(2)}w'w'' + A(w)w''') \\ & - \lambda'''(w - w_0) - 3\lambda''w' - 3\lambda'w'' - \lambda w''', \quad w'''|_{\partial\Omega} - \psi'' = (0, 0), \\ & (A_0w''' - \lambda_0w''', w'''|_{\partial\Omega}) = (3\lambda''e - F_0^{(3)}e^3 - 3F_0^{(2)}ew'', 0). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Задача (4.46) разрешима только при $(3\lambda''e - F_0^{(3)}e^3 - 3F_0^{(2)}ew'') \in \text{Im } F_0^{(1)}$, что обеспечивается условием

$$\iint_{\Omega} (3\lambda''e - F_0^{(3)}e^3 - 3F_0^{(2)}ew'')e \, dx \, dy = 0. \quad (4.47)$$

Из формулы (4.46) при

$$\begin{aligned} \lambda''_0 &= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} (F_0^{(3)}eee)e \, dx \, dy + \iint_{\Omega} (F_0^{(2)}ew''_0)e \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{3}E_0^{(4)}eeee + E_0^{(3)}ee''_0 = \frac{1}{3}\Phi_{\xi}^{(4)}(0, \lambda_0, 0) \end{aligned} \quad (4.48)$$

находится элемент w'''_0 .

Если ключевая функция $\Phi_0(\xi)$ имеет в точке $\xi_0 = 0$ особенность типа A_3 , то $\lambda''_0 = \frac{1}{3}\Phi_{\xi}^{(4)}(0, \lambda_0, 0) \neq 0$. Тогда в параметрическом задании (4.38) кривой Γ_2 можно исключить t следующим способом:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} t^2 = \frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\lambda''_0} + o(\lambda - \lambda_0), \\ w(\lambda) = w_0 + e\sqrt{\frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\lambda''_0}} + o|\lambda - \lambda_0|^{1/2}, \\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon. \end{cases} \quad (4.49)$$

Заметим, что

$$\lambda_1^* = \lambda'_0 = \frac{1}{2}\Phi''_{\xi}(0, \lambda_0, 0), \quad \lambda_2^* = \frac{1}{2}\lambda'''_0 = \frac{1}{3!}\Phi_{\xi}^{(4)}(0, \lambda_0, 0). \quad (4.50)$$

Теорема 4.2 доказана.

5. Исследование бифуркаций для капилляров с круглым и квадратным сечениями

Исследуем краевую задачу (1.1)–(1.2) и операторное уравнение (2.1) при предположении, что область Ω (поперечное сечение капилляра) – круг радиуса 1 $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, а граница поверхности раздела зафиксирована на боковой поверхности капилляра и задана функцией $\psi_0 \equiv 0$. Тогда $w_0(x, y) \equiv 0$ – минимальная поверхность раздела при отсутствии гравитации ($\lambda = 0$).

Найдем значения параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ при которых выполнено необходимое условие бифуркации (3.2) в лемме 3.1. В данном случае дифференциал Фреше имеет наиболее простой вид

$$P'_w(0, \lambda)h = (-\Delta h - \lambda h, h|_{\partial\Omega}), \quad (5.1)$$

и подпространство $N(0, \lambda)$ определяется следующей краевой задачей

$$\begin{cases} -\Delta h = \lambda h, & (x, y) \in \Omega, \\ h = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Следовательно, в силу леммы 3.1 бифуркационными значениями λ могут быть только собственные значения оператора $A(0)h = -\Delta h$ на подпространстве $C_0^{m, \alpha}(\overline{\Omega})$. Собственные значения оператора $A(0)$ на круге хорошо известны. Это $\{\lambda_{kj} : k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$ – множество нулей функций Бесселя

$$J_k(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda \sin t - kt) dt.$$

Если $k = 0$, то $\dim N(0, \lambda_{0j}) = 1$ для всех $j = 1, 2, \dots$ и подпространство $N(0, \lambda_{0j})$ определяется базисным элементом

$$e_j(x, y) = C_j J_0(\lambda_{0j} r), \quad C_j = \left(\iint_{\Omega} J_0^2(\lambda_{0j} r) dx dy \right)^{-1}, \quad (5.3)$$

где r – полярный радиус точки (x, y) , см. рис. 4а.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\lambda = \lambda_{0j}$, где $j = 1, 2, \dots$ и $e_j(x, y) = C_j J_0(\lambda_{0j} r)$.

Тогда $(0, \lambda_{0j})$ – точка бифуркации для уравнения $P(w, \lambda) = (0, 0)$, в которой от семейства решений

$$\Gamma_0 = \{(0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

отделяются две ненулевые ветви (см. рис. 5) Γ_{1j}^* и Γ_{2j}^* , которые пересекают ветвь Γ_0 под прямым углом и имеют следующее асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^* &= \{(w_{ij}^*(\lambda), \lambda) : \lambda \in [\lambda_{0j}, \lambda_{0j} + \varepsilon)\}, \\ w_{ij}^*(\lambda) &= (-1)^{i+1} \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j^*}} (\lambda - \lambda_{0j})^{1/2} + o(\lambda - \lambda_{0j})^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $i = 1, 2$ и

$$\lambda_j^* = \frac{1}{3!} \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_{0j}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\nabla e_j(x, y)|^4 dx dy > 0. \quad (5.5)$$

Рис. 4а

Рис. 4б

Рис. 5

СЛЕДСТВИЕ. В критической точке $(0, \lambda_{0j})$, $j = 1, 2, \dots$, ключевая функция $\Phi(\xi, \lambda_{0j})$ имеет особенность типа A_3 ("сборка")

$$\begin{aligned} \Phi(0, \lambda_{0j}) &= \pi, \quad \Phi'_\xi(0, \lambda_{0j}) = \Phi''_\xi(0, \lambda_{0j}) = \Phi'''_\xi(0, \lambda_{0j}) = 0, \\ \Phi^{(4)}_\xi(0, \lambda_{0j}) &= 3C_j^4 \iint_\Omega |\nabla J_0(\lambda_{0j} r)|^4 dx dy \neq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Теорема 5.1 и ее следствие доказываются непосредственной проверкой условий теорем 2.2, 3.1, 4.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если граница $w|_{\partial\Omega}$ поверхности раздела претерпевает малые деформации при изменении параметра μ вблизи точки бифуркации $(0, \lambda_0, 0)$, то будет справедлива теорема 4.2.

Число Милнора, коразмерность особенности, равно двум: $M = 2$. Следовательно, найденная бифуркационная поверхность топологически неустойчива и будет разрушаться при возникновении дополнительных малых возмущений. Причина неустойчивости – недостаточное количество параметров. Бифуркационная поверхность $\xi^3 - \xi\lambda + \eta = 0$ для миниверсальной деформации типа A_3 показана на рис. 6а. Бифуркационная поверхность типа $\xi^3 - \xi(\lambda - \lambda_0) = 0$, найденная по теореме Крендала–Рабиновича (см. рис. 6б), является ее однопараметрической частью. Следовательно, однопараметрическое семейство уравнений

$P(w, \lambda) = (0, 0)$ может быть включено в большее двупараметрическое семейство уравнений $Q(w, \lambda, \eta) = (0, 0)$ такое, что $Q(w, \lambda, 0) = P(w, \lambda)$ и бифуркационная поверхность в пространстве $C^{m\alpha}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}^2$ в окрестности точки $(0, \lambda_0, 0)$ является топологически устойчивой при возникновении дополнительных малых возмущений и подобна поверхности типа $\xi^3 - \xi(\lambda - \lambda_0) + \eta = 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Рис. 6а

Рис. 6b

Если $k = 1, 2, \dots$, то $\dim N(0, \lambda_{kj}) = 2$ для всех $j = 1, 2, \dots$ и подпространство $N(0, \lambda_{kj})$ определяется базисными элементами

$$\begin{aligned} e_{1kj}(x, y) &= C_{1kj} J_k(\lambda_{kj} r) \cos(k\varphi), \\ e_{2kj}(x, y) &= C_{2kj} J_k(\lambda_{kj} r) \sin(k\varphi), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где (r, φ) – полярные координаты точки (x, y) . С другой стороны, это же подпространство может быть представлено в виде

$$N(0, \lambda_{kj}) = \{C J_k(\lambda_{kj} r) \sin(k\varphi + \varphi_0) : C, \varphi_0 \in \mathbb{R}\}. \quad (5.8)$$

Представление (5.8) означает, что $N(0, \lambda_{kj})$ инвариантно относительно действия группы $SO(2)$ на пространстве $\mathbb{R}^2(x, y)$, см. рис. 4b. Если функция $w(x, y) \in N(0, \lambda_{kj})$, тогда $w(g(x, y)) \in N(0, \lambda_{kj})$ для всех матриц $G \in SO(2)$, где

$$g(x, y) = \left(G \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^\top.$$

Вопрос о бифуркации в этом случае остается открытым.

Исследуем случай, когда область Ω – квадрат (см. рис. 7а)

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}. \quad (5.9)$$

Подпространство $N(0, \lambda)$ в $W_p^2(\Omega)$, $p > 2$, определяется краевой задачей (5.2). Следовательно, в силу леммы 3.1 бифуркационными значениями λ могут быть

Рис. 7а

Рис. 7б

только собственные значения оператора $A(0)h = -\Delta h$ на подпространстве $W_{p0}^2(\Omega)$ функций с нулевыми следами на границе.

Собственные значения оператора $A(0)$ на квадрате хорошо известны. Это

$$\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{2}\right)^2, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad (5.10)$$

и $\dim N(0, \lambda_{k,m})$ равна числу различных пар натуральных чисел (p, q) таких, что $p^2 + q^2 = k^2 + m^2$. Например, $\dim N(0, \lambda_{1,7}) = 3$ в силу $1^2 + 7^2 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.

Если $k = m$ и $\dim N(0, \lambda_{kk}) = 1$, то подпространство $N(0, \lambda_{kk})$ определяется базисным элементом

$$e_k(x, y) = C_k v_k(x) v_k(y), \quad (5.11)$$

см. рис. 7б, где $\|e_k\| = 1$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и

$$v_k(t) = \begin{cases} \cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right), & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right), & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

В случае однократного вырождения применимы теоремы 3.1, 3.2, 4.1. Получаем следующие теоремы о бифуркациях.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\lambda = \lambda_{kk}$ и $\dim N(0, \lambda_{kk}) = 1$, см. (5.10)–(5.11).

Тогда $(0, \lambda_{kk})$ – точка бифуркации для уравнения $P(w, \lambda) = (0, 0)$, в которой от семейства решений

$$\Gamma_0 = \{(0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

отделяются две ненулевые ветви (см. рис. 8) Γ_{1k}^* и Γ_{2k}^* , которые пересекают ветвь Γ_0 под прямым углом и имеют следующее асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^* &= \{(w_{ik}^*(\lambda), \lambda) : \lambda \in [\lambda_{0k}, \lambda_{0k} + \varepsilon)\}, \quad i = 1, 2, \\ w_{1k}^*(\lambda) &= +\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k^*}}(\lambda - \lambda_{kk})^{1/2} + o(\lambda - \lambda_{kk})^{1/2}, \\ w_{2k}^*(\lambda) &= -\frac{e_k}{\sqrt{\lambda_k^*}}(\lambda - \lambda_{kk})^{1/2} + o(\lambda - \lambda_{kk})^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где

$$\lambda_k^* = \frac{1}{3!} \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_{kk}) = \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla e_k(x, y)|^4 dx dy = \frac{3}{64} k\pi. \quad (5.13)$$

Рис. 8

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\dim N(0, \lambda_{kk}) = 1$. Тогда, в критической точке $\xi_0 = 0$ ключевая функция $\Phi(\xi, \lambda_{kk})$ имеет особенность типа A_3 (“сборка”)

$$\begin{aligned} \Phi(0, \lambda_{kk}) &= \pi, \quad \Phi'_\xi(0, \lambda_{kk}) = 0, \quad \Phi''_\xi(0, \lambda_{kk}) = 0, \\ \Phi'''_\xi(0, \lambda_{kk}) &= 0, \quad \Phi_\xi^{(4)}(0, \lambda_{kk}) = \frac{9}{32} k\pi. \end{aligned} \quad (5.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если граница $w|_{\partial\Omega}$ поверхности раздела претерпевает малые деформации при изменении параметра μ вблизи точки бифуркации $(0, \lambda_0, 0)$, то будет справедлива теорема 4.2.

Из непосредственного исследования формулы (2.5) для второй вариации $\delta^2 E$ вытекает, что тривиальное решение $w_0(x, y) \equiv 0$ теряет свою устойчивость после первой точки бифуркации λ_{11} , в которой от него ответвляются два семейства устойчивых решений (см. рис. 8).

Однако, в остальных однократных точках бифуркации λ_{kk} , $k = 2, 3, \dots$, от $w_0(x, y) \equiv 0$ тоже могут ответвляться устойчивые решения (5.11), имеющие k продольных и k поперечных волн (см. рис. 7b). В физических экспериментах такие поверхности раздела могут возникнуть, если параметр λ изменился достаточно быстро (скачком).

Если $k \neq m$ и $\dim N(0, \lambda_{km}) = 2$, то подпространство $N(0, \lambda_{km})$ определяется базисными элементами (см. рис. 7b)

$$\begin{aligned} e_1(x, y) &= v_k(x)v_m(y), \\ e_2(x, y) &= v_m(x)v_k(y). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заметим, что в этом случае подпространство $N(0, \lambda_{km})$ инвариантно относительно действия инволюции x и y . Если функция $w(x, y) \in N(0, \lambda_{km})$, тогда $w(y, x) \in N(0, \lambda_{km})$.

Вопрос о бифуркации в этом случае остается открытым.

Список литературы

1. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности, стратифицированные многообразия и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
2. Фоменко А. Т. Вариационные проблемы в топологии. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Dissan V. E. B. On the spreading of liquids on solid surfaces: Static and dynamic contact lines // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 371–400.
4. Dissan V. E. B., Davis S. H. Stability in systems with moving contact lines // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 115–130.
5. Finn R. Equilibrium capillary surfaces: Springer-Verlag, 1986.
6. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Туптсов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1975.
7. Babskii V. G., Kopachevskii N. D., Myshkis A. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D. On some unsolved problems of zero dimensional hydromechanics // Nonlinear Anal. 1980. V. 4. P. 607–621.
8. Румянцев В. В., Владимиров В. А. Теорема Лагранжа для твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53. № 4. С. 608–612.
9. Румянцев В. В., Владимиров В. А. Теорема Лагранжа для твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54. № 2. С. 190–200.
10. Poston T. A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications // Contrib. Nonlinear Fcl. Anal.: Academic Press, 1971. P. 11–36.
11. Beeson M. J., Tromba A. J. The cusp catastrophe of Thom in the bifurcation on minimal surfaces // Manuscripta Math. 1984. V. 46. № 1–3. P. 273–308.
12. Фоменко А. Т., Тужилин А. А. Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки // Вестн. МГУ. Сер. I, матем., мех. 1986. Т. 3. С. 3–12.
13. Тужилин А. А. О бифуркации двумерных минимальных поверхностей при двухпараметрической вариации контура // Геометрия, дифференциальные уравнения, механика. М.: Изд-во МГУ, 1986. P. 140–145.
14. Buch J. Bifurcation von Minimalflächen und elementare katastrophen // Manuscripta Math. 1986. V. 55. № 3–4.
15. Borisovich A. Yu. Functional-Topological Properties of the Plateau Operator and Applications to the Study of Bifurcations in Problems of Geometry and Hydrodynamics // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 287–330.
16. Бернштейн С. Н. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
17. Борисович А. Ю., Звягин В. Г. О глобальной обратимости нелинейных операторов, порождаемых краевыми задачами // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: КГУ, 1983. P. 27–33.
18. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order: Springer-Verlag, 1983.
19. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–293.
20. Crandall M. G., Rabinowitz P. H. Bifurcation from simple eigenvalues // Funct. Anal. 1971. V. 8. P. 321–340.
21. Nirenberg L. Topics in nonlinear functional analysis. New York: Courant Inst. of Math. Sci., 1974.
22. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
23. Rabinovich P. H. The Problem of Plateau, an introduction to the whole Mathematics. Mimeographical Notes. Summer conference, Trieste, 1972.
24. Ize I. A. Bifurcation theory for Fredholm operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1976. V. 174.

25. *Арнольд В. И., Гусейн-Заде С. М., Варченко А. Н.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. I, II. М.: Наука, 1982.
26. *Sapronov Yu. I.* Branching of solutions of smooth Fredholm equations // Lecture Notes in Math. 1982. V. 1108. P. 31–54.
27. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

г. Воронеж

Поступила в редакцию
28.05.1996