Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Васин, В. Л. Камынин, Асимптотическое поведение решений обратных задач для параболических уравнений с нерегулярными коэффициентами, *Матем. сб.*, 1997, том 188, номер 3, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:30:59

УДК 517.956

И. А. Васин, В. Л. Камынин

Асимптотическое поведение решений обратных задач для параболических уравнений с нерегулярными коэффициентами

Изучается вопрос об асимптотической при больших временах близости решений обратной задачи для параболического уравнения с неизвестной правой частью и решения предельной стационарной обратной задачи в ограниченной области. Условия переопределения задаются в интегральной форме. Требования близости коэффициентов уравнений в нестационарной и стационарной задачах задается в некотором весьма слабом смысле, допускающем, в частности, осциллирование этих коэффициентов.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

В работе изучается вопрос об асимптотической при $t \rightarrow \infty$ близости решений $\{u(t, x), f(t)\}$ эволюционной обратной задачи

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(t, x) u_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} + \alpha u = f(t)g(t, x) + h_0(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j(t, x)}{\partial x_j}, \quad (t, x) \in Q_\infty, \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (1.3)$$

$$\int_{\Omega} u(t, x) \eta(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1.4)$$

и решения $\{v(x), q\}$ стационарной обратной задачи

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^\infty(x) v_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) v_{x_i} + \alpha v = qg^\infty(x) + h_0^\infty(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^\infty(x)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.6)$$

$$\int_{\Omega} v(x) \eta(x) dx = \varphi^\infty. \quad (1.7)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00289) и фонда ИНТАС (грант № 94-2187).

Здесь $Q_\infty \equiv (0, +\infty) \times \Omega$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. В обратной задаче (1.1)–(1.4) функции $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$, $g(t, x)$, $h_j(t, x)$, $\eta(x)$, $\varphi(t)$, $u_0(x)$ и константа α заданы, а пара функций $\{u(t, x), f(t)\}$ является искомой. В обратной задаче (1.5)–(1.7) функции $a_{ij}^\infty(x)$, $b_i^\infty(x)$, $g^\infty(x)$, $h_j^\infty(x)$, $\eta(x)$ и числа α , φ^∞ заданы, а функция $v(x)$ и константа q подлежат определению.

Дополнительная информация о решении в рассматриваемых обратных задачах дается в виде условий интегрального переопределения (1.4) и (1.7), соответственно, что с физической точки зрения может, например, означать измерение температуры $u(t, x)$ и $v(x)$ с помощью датчика, производящего усреднение по области пространственных переменных Ω .

Отметим, что обратная задача для параболического уравнения с интегральным переопределением (1.4) и вопросы ее однозначной разрешимости изучались многими авторами (см., например, [1]–[4] и др.). Теорема существования и единственности решения задачи (1.5)–(1.7) в виде, достаточном для целей настоящей работы, установлена в §2. Она имеет также и самостоятельный интерес.

Теорема о близости решений задач (1.1)–(1.4) и (1.5)–(1.7) доказывается при условии близости соответствующих коэффициентов уравнений (1.1) и (1.5) в некотором слабом смысле: накладываемые условия допускают, в частности, осциллирующие коэффициенты в уравнении (1.1). При более жестких ограничениях на исходные данные асимптотическое при $t \rightarrow +\infty$ поведение решений обратных задач вида (1.1)–(1.4) исследовано ранее в [5].

Заметим, что в случае прямых задач для параболических уравнений в ограниченной области вопросы асимптотического поведения решений при больших временах широко изучены при различных предположениях относительно исходных данных; укажем здесь обзорные работы [6]–[9], где имеются дальнейшие ссылки. Кроме того, результаты (для прямых задач) при близких к предлагаемым в настоящей работе предположениях относительно коэффициентов рассматриваемых уравнений были получены в [10], [11].

В случае же обратных задач проблема асимптотического поведения решений при больших временах ранее практически не исследовалась. Помимо упомянутой выше работы [5] авторам известна лишь еще одна недавняя работа [12], где имеется результат по стабилизации решения обратной задачи в одном специальном частном случае.

Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем. Положим $Q_T = (0, T] \times \Omega$, $Q_{t_2}^{t_1} = (t_1, t_2] \times \Omega$, $Q_\infty^T = (T, +\infty) \times \Omega$,

$$G(t) = \int_{\Omega} g(t, x) \eta(x) dx, \quad G^\infty = \int_{\Omega} g^\infty(x) \eta(x) dx.$$

Обозначение функциональных пространств $L_2(\Omega)$, $L_2(Q_{t_2}^{t_1})$,

$$\begin{aligned} L_r(t_1, t_2; L_2(\Omega)), \quad \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad W_2^1([0, T]), \quad C(0, T; L_2(\Omega)), \\ L_2(t_1, t_2; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \quad W_2^{-1}(\Omega), \quad L_2(t_1, t_2; W_2^{-1}(\Omega)), \quad C^{0,\gamma}(Q_{t_2}^{t_1}) \end{aligned}$$

с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле. Положим

$$\|v\| \equiv \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v(x) \in L_2(\Omega);$$

$$\|\sigma\|_{Q_T} = \sup_{t \in [0, T]} \|\sigma(t, \cdot)\| + \|\sigma_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\sigma_t\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))}, \quad \sigma(t, x) \in C^\infty(Q_T).$$

Через $\varkappa$ обозначим константу из неравенства Пуанкаре–Стеклова

$$\|u\| \leq \varkappa \|u_x\|, \quad (1.8)$$

которое справедливо для любой $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Известно, что $\varkappa \equiv \varkappa(\Omega, n) > 0$. Здесь

$$\|u_x\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные обратных задач, измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

А) для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij}^\infty = a_{ji}^\infty$ и для любых $(t, x) \in Q_\infty$

$$\Lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\infty(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

В) $\eta(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, причем $\|\eta\|_{W_2^1(\Omega)} \leq K_1$;

С) $\|g\|_{L_\infty(0, \infty; L_2(\Omega))}, \|g^\infty\|, \|h_j^\infty\| \leq K_2, j = 0, 1, 2, \dots, n$;

$$\left| \int_{\Omega} g(t, x) \eta(x) dx \right|, \left| \int_{\Omega} g^\infty(x) \eta(x) dx \right| \geq g_0, \quad t \in [0, +\infty);$$

Д) $|b_i(t, x)|, |b_i^\infty(x)| \leq K_3, i = 1, 2, \dots, n, (t, x) \in Q_\infty$;

Е) $u_0(x) \in L_2(\Omega), \varphi(t) \in W_2^1([0, T])$ для любого $T > 0$,

$$\int_{\Omega} u_0(x) \eta(x) dx = \varphi(0);$$

Ф) $\beta \equiv \alpha + \frac{\Lambda_0}{2\varkappa^2} - \frac{2n}{\Lambda_0} \left[K_3^2 + n \left(\frac{\Lambda_1 K_1 K_2}{g_0} \right)^2 + \left(\frac{K_1 K_2 K_3}{g_0} \right)^2 \right] > 0$;

Г) $h_j(t, x) \in L_2(Q_T)$ для любого $T > 0, j = 0, 1, 2, \dots, n$ и

$$\sup_{m=0,1,2,\dots} \left[\int_m^{m+1} |\varphi(t)|^2 dt + \int_m^{m+1} |\varphi'(t)|^2 dt + \sum_{j=0}^n \int_m^{m+1} \|h_j(t, \cdot)\|^2 dt \right] \leq K_4.$$

Здесь $\Lambda_0, \Lambda_1, g_0, K_1, K_2, K_3, K_4 = \text{const} > 0$.

Ниже через c (возможно, с индексом) будем обозначать любые положительные константы, зависящие только от $n, \Lambda_0, \Lambda_1, g_0, K_1, K_2, K_3, K_4, \alpha, \varkappa, \varphi^\infty, \Omega, \|u_0\|$. В разных местах одной буквой обозначаются, вообще говоря, разные константы.

§ 2. Некоторые вспомогательные предложения и оценки

Рассмотрим обратную задачу (1.1)–(1.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенным решением обратной задачи (1.1)–(1.4) назовем пару функций $\{u(t, x), f(t)\}$ таких, что*

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)), \\ u_t &\in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)), \quad f \in L_2([0, T]) \quad \forall T > 0; \end{aligned}$$

эти функции удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) \psi(x) dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, x) u_{x_i}(t, x) \psi_{x_j}(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(t, x) u_{x_i}(t, x) \psi(x) dx + \alpha \int_{\Omega} u(t, x) \psi(x) dx \\ &= f(t) \int_{\Omega} g(t, x) \psi(x) dx + \int_{\Omega} h_0(t, x) \psi(x) dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} h_j(t, x) \psi_{x_j}(x) dx, \end{aligned} \quad (2.1)$$

которое справедливо как равенство в $L_2([0, T])$ (для любого $T > 0$) при любой функции $\psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$; кроме того, функция $u(t, x)$ удовлетворяет при всех $t \in [0, +\infty)$ соотношению (1.4).

Условия, достаточные для однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4), и некоторые нужные нам оценки устанавливает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия А)–Г). Тогда решение $\{u, f\}$ обратной задачи (1.1)–(1.4) существует, единственно и удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|^2 &\leq \exp(-\beta t) \|u_0\|^2 \\ &+ c_1 \sup_{m=0,1,2,\dots} \left\{ \int_m^{m+1} \left[|\varphi(\tau)|^2 + |\varphi'(\tau)|^2 + \sum_{j=0}^n \|h_j(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau \right\}, \\ &t \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sup_{m=0,1,2,\dots} \left\{ \int_m^{m+1} \|u_x(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \right\} \leq c_2, \quad (2.3)$$

$$\sup_{m=0,1,2,\dots} \left\{ \int_m^{m+1} |f(\tau)|^2 d\tau \right\} \leq c_3. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку на исходные данные обратной задачи (1.1)–(1.4) наложены условия А)–Е), Г), то обобщенное решение $\{u(t, x), f(t)\}$ этой задачи существует и единственно (см., например, [4]). Перейдем к выводу оценок (2.2)–(2.4).

Полагая в интегральном тождестве (2.1) $\psi(x) = \eta(x)$ и учитывая переопределение (1.4), выводим для $f(t)$ соотношение

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{G(t)} & \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i} \eta_{x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} \eta dx \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} h_0(t, x) \eta dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n h_j(t, x) \eta_{x_j} dx + \alpha \varphi(t) + \varphi'(t) \right], \\ & t \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (1.1), получим для функции $u(t, x)$ интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(t, x) u_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} + \alpha u \\ = \frac{g(t, x)}{G(t)} \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i} \eta_{x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_{x_i} \eta dx \right. \\ \left. - \int_{\Omega} h_0(t, x) \eta dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n h_j(t, x) \eta_{x_j} dx \right] + \frac{\alpha \varphi(t) + \varphi'(t)}{G(t)} g(t, x) \\ + h_0(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j(t, x)}{\partial x_j}, \quad (t, x) \in Q_{\infty}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

которому эта функция удовлетворяет в смысле модифицированного интегрального тождества, получающегося из (2.1) после подстановки (2.5). Стандартные рассуждения, применяемые при выводе энергетического неравенства (см., например, [13, с. 164–169]), приводят к оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t, \cdot)\|^2) + \Lambda_0 \|u_x(t, \cdot)\|^2 + \alpha \|u(t, \cdot)\|^2 \\ \leq \sqrt{n} K_3 \|u(t, \cdot)\| \cdot \|u_x(t, \cdot)\| \\ + \frac{K_1 K_2}{g_0} \|u(t, \cdot)\| \left[n \Lambda_1 \|u_x(t, \cdot)\| + \sqrt{n} K_3 \|u_x(t, \cdot)\| + \sum_{j=0}^n \|h_j(t, \cdot)\| \right] \\ + \frac{K_2}{g_0} [|\alpha| |\varphi(t)| + |\varphi'(t)|] \|u(t, \cdot)\| + \|h_0(t, \cdot)\| \|u(t, \cdot)\| \\ + \left[\sum_{j=1}^n \|h_j(t, \cdot)\|^2 \right]^{1/2} \|u_x(t, \cdot)\|, \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если воспользоваться неравенством Коши

$$2|\xi\eta| \leq \varepsilon |\xi|^2 + \varepsilon^{-1} |\eta|^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^1, \quad (2.8)$$

и учесть неравенство (1.8), то из (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|u(t, \cdot)\|^2) + \beta\|u(t, \cdot)\|^2 &\leq c \left[|\varphi(t)|^2 + |\varphi'(t)|^2 + \sum_{j=0}^n \|h_j(t, \cdot)\|^2 \right], \\ t &\in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) в силу леммы Гронуолла вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|^2 &\leq \exp(-\beta t) \|u_0\|^2 \\ &+ c \sup_{m=0,1,2,\dots} \int_m^{m+1} \left[|\varphi(\tau)|^2 + |\varphi'(\tau)|^2 + \sum_{j=0}^n \|h_j(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau \\ &\times \sum_{0 \leq m \leq t} \exp\{-\beta[t - (m+1)]\}, \quad t \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (2.10)$$

непосредственным следствием которого и является оценка (2.2).

Для получения оценки (2.3) следует проинтегрировать соотношение (2.7) по t в пределах от m до $m+1$. Отбрасывая слагаемое $\frac{1}{2}\|u(m+1, \cdot)\|^2$ в левой части полученного неравенства, перенося член $\alpha\|u\|_{L_2(Q_{m+1}^m)}^2$ направо и преобразуя затем правую часть с помощью неравенства (2.8), находим, что

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} \|u_x(\tau, \cdot)\|^2 d\tau &\leq c_1 \|u(m, \cdot)\|^2 + c_2 \int_m^{m+1} \|u(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \\ &+ c_3 \int_m^{m+1} \left[|\varphi(\tau)|^2 + |\varphi'(\tau)|^2 + \sum_{j=0}^n \|h_j(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Применяя уже доказанную оценку (2.2) и условие G), из (2.11) получаем (2.3).

Наконец, оценка (2.4) является следствием формулы (2.5) и уже доказанных оценок (2.2) и (2.3). Теорема 1 доказана.

В дальнейших рассуждениях нам потребуются сведения о разрешимости в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ следующей прямой задачи

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^\infty(x) z_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) z_{x_i} + \alpha z &= h_0^\infty(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^\infty(x)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad (2.12) \\ z(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Под *обобщенным решением* задачи (2.12)–(2.13) мы понимаем функцию $z(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\infty(x) z_{x_i} \psi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) z_{x_i} \psi + \alpha z \psi \right] dx \\ = \int_\Omega h_0^\infty(x) \psi dx - \sum_{j=1}^n \int_\Omega h_j^\infty(x) \psi_{x_j} dx \\ \forall \psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия A), C), D) и F). Тогда решение прямой задачи (2.12), (2.13) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|z\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c \sum_{j=0}^n \|h_j^\infty\|^2. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (2.14) $\psi(x) = z(x)$ и учитывая условия A), C), D), получаем для любого возможного решения задачи (2.12)–(2.13) неравенство

$$\Lambda_0 \|z_x\|^2 + \alpha \|z\|^2 \leq \sqrt{n} K_3 \|z\| \cdot \|z_x\| + \|h_0^\infty\| \cdot \|z\| + \left(\sum_{j=1}^n \|h_j^\infty\| \right) \|z_x\|. \quad (2.16)$$

Воспользовавшись для оценки первого и третьего слагаемых в правой части (2.16) неравенством (2.8) с $\varepsilon = \Lambda_0/2$, а затем неравенством (1.8), находим, что

$$\left(\frac{\Lambda_0}{2\varepsilon^2} + \alpha \right) \|z\|^2 \leq \frac{nK_3^2}{\Lambda_0} \|z\|^2 + \|h_0^\infty\| \cdot \|z\| + c_1 \sum_{j=1}^n \|h_j^\infty\|^2.$$

Из последнего неравенства с учетом условия F) получаем оценку

$$\|z\|^2 \leq c_2 \sum_{j=0}^n \|h_j^\infty\|^2, \quad (2.17)$$

а тогда из (2.16) выводим также оценку

$$\|z_x\|^2 \leq c_3 \sum_{j=0}^n \|h_j^\infty\|^2. \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) вытекает (2.15) и единственность решения задачи (2.12)–(2.13). Но тогда, следуя доказательству теоремы 8.3 из [14, с. 174–176], получаем существование решения этой задачи. Теорема 2 доказана.

В дальнейшем через $p^*(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ обозначим обобщенное решение следующей прямой задачи

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^\infty(x) p_{x_i}^*) + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) p_{x_i}^* + \alpha p^* = g^\infty(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.19)$$

$$p^*(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.20)$$

Отметим, что согласно теореме 2 такое решение $p^*(x)$ существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|p^*\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c. \quad (2.21)$$

Перейдем к изучению обратной задачи (1.5)–(1.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Обобщенным решением задачи (1.5)–(1.7) называется пара $\{v(x), q\}$, состоящая из функции $v(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ и константы $q \in \mathbb{R}^1$ таких, что при любой $\psi(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ справедливо интегральное тождество*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\infty}(x) v_{x_i} \psi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^{\infty}(x) v_{x_i} \psi + \alpha v \psi \right] dx \\ = q \int_{\Omega} g^{\infty}(x) \psi dx + \int_{\Omega} h_0^{\infty}(x) \psi dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} h_j^{\infty}(x) \psi_{x_j} dx; \end{aligned} \quad (2.22)$$

при этом функция $v(x)$ удовлетворяет также и соотношению (1.7).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия А)–D) и F). Предположим, что функция $\eta(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} p^*(x) \eta(x) dx \neq 0. \quad (2.23)$$

Тогда обобщенное решение $\{v(x), q\}$ обратной задачи (1.5)–(1.7) существует, единственно и справедлива оценка

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение обратной задачи (1.5)–(1.7) будем искать в виде

$$\{v(x), q\} = \{z(x), 0\} + \{p(x), q\}, \quad (2.25)$$

где функция $z(x)$ является обобщенным решением прямой задачи (2.12)–(2.13) (существование которого гарантировано теоремой 2), а пара $\{p(x), q\}$ является обобщенным решением обратной задачи

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^{\infty}(x) p_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i^{\infty}(x) p_{x_i} + \alpha p = q g^{\infty}(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.26)$$

$$p(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.27)$$

$$\int_{\Omega} p(x) \eta(x) dx = \varphi^{\infty} - \int_{\Omega} z(x) \eta(x) dx \equiv \zeta^{\infty}. \quad (2.28)$$

Положим $\zeta^* = \int_{\Omega} p^*(x) \eta(x) dx$, где $p^*(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ – обобщенное решение задачи (2.19), (2.20). В силу (2.23) $\zeta^* \neq 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что пара

$$p(x) \equiv p^*(x) \zeta^{\infty} / \zeta^*, \quad q \equiv \zeta^{\infty} / \zeta^* \quad (2.29)$$

является решением обратной задачи (2.26)–(2.28).

Тем самым, мы установили, что решение исходной обратной задачи (1.5)–(1.7) существует.

Покажем, что оно единственно. Предположим, что существуют два решения $\{v_1(x), q_1\}$ и $\{v_2(x), q_2\}$ задачи (1.5)–(1.7). Тогда пара $\hat{p}(x) \equiv v_1(x) - v_2(x)$, $\hat{q} \equiv q_1 - q_2$ удовлетворяет соотношениям

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^\infty(x) \hat{p}_{x_i}) + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) \hat{p}_{x_i} + \alpha \hat{p} = \hat{q} g^\infty(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.30)$$

$$\hat{p}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.31)$$

$$\int_{\Omega} \hat{p}(x) \eta(x) dx = 0. \quad (2.32)$$

Сравнивая соотношения (2.19)–(2.20) и (2.30)–(2.31), убеждаемся, что функции $p^*(x)$ и $\hat{p}(x)/\hat{q}$ являются решениями одной и той же прямой задачи (2.19), (2.20), и поэтому в силу единственности такого решения $\hat{p}(x) \equiv \hat{q} p^*(x)$. Но тогда в соответствии с (2.32)

$$0 = \int_{\Omega} \hat{p}(x) \eta(x) dx = \hat{q} \int_{\Omega} p^*(x) \eta(x) dx,$$

откуда следует, что $\hat{q} = 0$, ибо $p^*(x)$ и $\eta(x)$ удовлетворяют соотношению (2.23). Таким образом, $q_1 = q_2$. Совпадение функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ вытекает теперь из единственности решения соответствующей прямой задачи (1.5)–(1.6).

Итак, решение обратной задачи (1.5)–(1.7) существует и единственно. Наконец, оценка (2.24) является следствием представления (2.25), формул (2.29) и оценок (2.15), (2.21). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (2.23) является необходимым для единственности решения обратной задачи (1.5)–(1.7). Действительно, предположим, что

$$\int_{\Omega} p^*(x) \eta(x) dx = 0,$$

и пусть пара $\{v(x), q\}$ является обобщенным решением задачи (1.5)–(1.7). Тогда, очевидно, любая пара вида $\{v(x) + \theta p^*(x), q + \theta\}$ (где $p^*(x)$ – решение задачи (2.19), (2.20), а θ – произвольная константа из $\mathbb{R}^1$) также является решением обратной задачи (1.5)–(1.7). Более того, если (2.23) не выполнено, то решение задачи (1.5)–(1.7) существует не при всех исходных данных, удовлетворяющих условиям А)–D) и F). Необходимо еще, как нетрудно видеть, выполнение условия

$$\int_{\Omega} z(x) \eta(x) dx = \varphi^\infty,$$

где $z(x)$ – решение прямой задачи (2.12), (2.13).

§ 3. Основной результат

Всюду ниже будем использовать обозначения

$$F^k(t, x) \equiv F(t + k, x), \quad F^k(t) \equiv F(t + k), \quad k = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия А)–G) и (2.23). Предположим, что при $k \rightarrow \infty$ слабо в $L_2(Q_1)$

$$\begin{aligned} a_{ij}^k(t, x) &\rightharpoonup a_{ij}^\infty(x), & i, j = 1, 2, \dots, n; \\ b_i^k(t, x) &\rightharpoonup b_i^\infty(x), & i = 1, 2, \dots, n; \\ h_j^k(t, x) &\rightharpoonup h_j^\infty(x), & j = 0, 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (3.1)$$

слабо в $L_2(\Omega)$ при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$

$$g^k(t, x) \rightharpoonup g^\infty(x); \quad (3.2)$$

в норме $L_2([0, 1])$

$$\varphi^k(t) \rightarrow \varphi^\infty. \quad (3.3)$$

Кроме того, пусть существует последовательность $\mu(k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, такая, что для любой функции $\sigma(t, x) \in C^\infty(Q_1)$, равной нулю на боковой поверхности цилиндра Q_1 , справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \int_{Q_1} \sum_{i=1}^n [a_{ij}^k(t, x) - a_{ij}^\infty(x)] \sigma_{x_i}(t, x) dx dt \right| \\ + \left| \int_{Q_1} \sum_{i=1}^n [b_i^k(t, x) - b_i^\infty(x)] \sigma_{x_i}(t, x) dx dt \right| \leq \mu(k) \|\sigma\|_{Q_1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда при любой начальной функции $u_0(x) \in L_2(\Omega)$ в условии (1.2) обобщенное решение $\{u(t, x), f(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.4) сходится к решению $\{v(x), q\}$ обратной задачи (1.5)–(1.7) в следующем смысле:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_m^{m+1} \|u(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt = 0; \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_m^{m+1} \int_{\Omega} [u_{x_i}(t, x) - v_{x_i}(x)] \psi(x) dx dt = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \psi(x) \in L_2(\Omega); \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_m^{m+1} f(t) dt = q. \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (3.1) выполнено в цилиндре Q_N , а условия (3.2), (3.3) выполнены на отрезке $[0, N]$ при любом $N = 1, 2, \dots$. Условие (3.4) также выполнено в Q_N при любом $N = 1, 2, \dots$ с заменой нормы $\|\sigma\|_{Q_1}$ на норму $\|\sigma\|_{Q_N}$ и с некоторой другой бесконечно малой последовательностью $\mu_N(k)$ (зависящей от N) в правой части (3.4). Доказательство этих утверждений аналогично доказательству лемм 2.1 и 2.2 из [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ представим решение $\{u(t, x), f(t)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.4), рассматриваемой при $t \geq k$, в виде суммы

$$\{u(t, x), f(t)\} = \{p^{(k)}(t, x), r^{(k)}(t)\} + \{w^{(k)}(t, x), s^{(k)}(t)\}. \quad (3.8)$$

Здесь $\{w^{(k)}(t, x), s^{(k)}(t)\}$ есть решение в Q_∞^k обратной задачи

$$\begin{aligned} w_t^{(k)} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(t, x) w_{x_i}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) w_{x_i}^{(k)} + \alpha w^{(k)} &= s^{(k)}(t) g(t, x), \\ (t, x) &\in Q_\infty^k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$w^{(k)}(k, x) = u(k, x) - v(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.10)$$

$$w^{(k)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [k, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} w^{(k)}(t, x) \eta(x) dx = 0, \quad t \in [k, +\infty), \quad (3.12)$$

а через $\{p^{(k)}(t, x), r^{(k)}(t)\}$ обозначено решение в Q_∞^k обратной задачи

$$\begin{aligned} p_t^{(k)} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(t, x) p_{x_i}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) p_{x_i}^{(k)} + \alpha p^{(k)} \\ = r^{(k)}(t) g(t, x) + h_0(t, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j(t, x)}{\partial x_j}, \quad (t, x) \in Q_\infty^k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$p^{(k)}(k, x) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$p^{(k)}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [k, +\infty) \times \partial\Omega, \quad (3.15)$$

$$\int_{\Omega} p^{(k)}(t, x) \eta(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [k, +\infty). \quad (3.16)$$

Согласно теореме 1 решения этих обратных задач существуют и единственны. Рассмотрим задачу (3.9)–(3.12). В силу теорем 1 и 2

$$\|w^{(k)}(t, \cdot)\| \leq \|u(k, \cdot) - v(\cdot)\| \exp \left[\frac{-\beta(t-k)}{2} \right] \leq c_1 \exp \left[\frac{-\beta(t-k)}{2} \right], \quad (3.17)$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от t и k . Неравенство (3.17) позволяет подобрать такое положительное число $N_1(\varepsilon)$, что при любом $t \geq N_1(\varepsilon) + k$ будет справедлива оценка

$$\|w^{(k)}(t, \cdot)\| < \varepsilon. \quad (3.18)$$

Запишем неравенство (2.11) применительно к функции $w^{(k)}(t, x)$ и воспользуемся оценкой (3.17). В результате получим

$$\int_m^{m+1} \|w_x^{(k)}(t, \cdot)\|^2 dt \leq c_2 \exp[-\beta(m-k)], \quad (3.19)$$

где константа $c_2 > 0$ не зависит от m и k . Следовательно, существует положительное число $N_2(\varepsilon)$ такое, что при любом $m \geq N_2(\varepsilon) + k$ имеет место оценка

$$\int_m^{m+1} \|w_x^{(k)}(t, \cdot)\|^2 dt < \varepsilon. \quad (3.20)$$

Рассмотрим теперь функцию $s^{(k)}(t)$. Соотношение типа (2.5), записанное для $s^{(k)}(t)$, выглядит так:

$$s^{(k)}(t) = \frac{1}{G(t)} \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) w_{x_i}^{(k)} \eta_{x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(t, x) w_{x_i}^{(k)} \eta dx \right]. \quad (3.21)$$

Тогда из (3.21) с учетом (3.19) получим

$$\int_m^{m+1} |s^{(k)}(t)|^2 dt \leq c_3 \int_m^{m+1} \|w_x^{(k)}(t, \cdot)\|^2 dt \leq c_4 \exp[-\beta(t-k)], \quad (3.22)$$

где $c_4 = \text{const} > 0$ не зависит от m и k . Исходя из оценки (3.22), можно выбрать такое положительное число $N_3(\varepsilon)$, что при $m \geq N_3(\varepsilon) + k$

$$\int_m^{m+1} |s^{(k)}(t)|^2 dt < \varepsilon. \quad (3.23)$$

Положим

$$N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\} + 1 \quad (3.24)$$

и рассмотрим задачу (3.13)–(3.16) в цилиндре Q_{k+N}^k . Сделав замену $t = \tau + k$, введем следующие обозначения:

$$z^{(k)}(\tau, x) = p^{(k)}(\tau + k, x) \equiv p^{(k)}(t, x), \quad y^{(k)}(\tau) = r^{(k)}(\tau + k) \equiv r^{(k)}(t). \quad (3.25)$$

Тогда пара функций $\{z^{(k)}(\tau, x), y^{(k)}(\tau)\}$ является в Q_N решением обратной задачи

$$\begin{aligned} z_{\tau}^{(k)} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^k(\tau, x) z_{x_i}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n b_i^k(\tau, x) z_{x_i}^{(k)} + \alpha z^{(k)} \\ = y^{(k)}(\tau) g^k(\tau, x) + h_0^k(\tau, x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^k(\tau, x)}{\partial x_j}, \quad (\tau, x) \in Q_N, \end{aligned} \quad (3.26^k)$$

$$z^{(k)}(0, x) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.27)$$

$$z^{(k)}(\tau, x) = 0, \quad (\tau, x) \in [0, N] \times \partial\Omega, \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} z^{(k)}(\tau, x) \eta(x) dx = \varphi^k(\tau), \quad \tau \in [0, N]. \quad (3.29^k)$$

В силу теоремы 1 с учетом (2.24) и условия G) справедливы следующие равномерные относительно k оценки

$$\sup_{\tau \in [0, N]} \|z^{(k)}(\tau, \cdot)\| \leq c_1, \quad (3.30)$$

$$\|z_x^{(k)}\|_{L_2(Q_N)} \leq c_2(N), \quad (3.31)$$

$$\|y^{(k)}\|_{L_2([0, N])} \leq c_3(N). \quad (3.32)$$

Кроме того, из результатов работы [4] вытекает равномерная по k оценка

$$\|z_\tau^{(k)}\|_{L_2(0, N; W_2^{-1}(\Omega))} \leq c_4(N). \quad (3.33)$$

Согласно (3.30)–(3.33) найдутся подпоследовательность $k_\nu \rightarrow \infty$, функции $z^{(\infty)}(\tau, x) \in C(0, N; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, N; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $z_\tau^{(\infty)}(\tau, x) \in L_2(0, N; W_2^{-1}(\Omega))$, а также функция $y^{(\infty)}(\tau) \in L_2([0, N])$ такие, что при $\nu \rightarrow \infty$ в норме $L_2(Q_N)$

$$z^{(k_\nu)}(\tau, x) \rightarrow z^{(\infty)}(\tau, x), \quad (3.34)$$

слабо в $L_2(Q_N)$

$$z_x^{(k_\nu)}(\tau, x) \rightharpoonup z_x^{(\infty)}(\tau, x), \quad (3.35)$$

слабо в $L_2(0, N; W_2^{-1}(\Omega))$

$$z_\tau^{(k_\nu)}(\tau, x) \rightharpoonup z_\tau^{(\infty)}(\tau, x), \quad (3.36)$$

слабо в $L_2([0, N])$

$$y^{(k_\nu)}(\tau) \rightharpoonup y^{(\infty)}(\tau). \quad (3.37)$$

В силу условий (3.1)–(3.4) к задаче (3.26^k)–(3.29^k) можно применить теорему 2 работы [4], согласно которой пара $\{z^{(\infty)}(\tau, x), y^{(\infty)}(\tau)\}$ является обобщенным решением в Q_N обратной задачи

$$\begin{aligned} z_\tau^{(\infty)} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}^\infty(x) z_{x_i}^{(\infty)}) + \sum_{i=1}^n b_i^\infty(x) z_{x_i}^{(\infty)} + \alpha z^{(\infty)} \\ = y^{(\infty)}(\tau) g^\infty(x) + h_0^\infty(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^\infty(x)}{\partial x_j}, \quad (\tau, x) \in Q_N, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$z^{(\infty)}(0, x) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.39)$$

$$z^{(\infty)}(\tau, x) = 0, \quad (\tau, x) \in [0, N] \times \partial\Omega, \quad (3.40)$$

$$\int_\Omega z^{(\infty)}(\tau, x) \eta(x) dx = \varphi^\infty. \quad (3.41)$$

С другой стороны, пара $\{v(x), q\}$, очевидно, также является обобщенным решением этой задачи в Q_N . В силу единственности обобщенного решения задачи (3.38)–(3.41) (см. [4]) имеем

$$z^{(\infty)}(\tau, x) \equiv v(x), \quad y^{(\infty)}(\tau) \equiv q, \quad (3.42)$$

и, кроме того, сходимость в (3.34)–(3.37) осуществляется по всей последовательности индексов $k \rightarrow \infty$.

Следовательно, в силу (3.34) мы можем указать такой номер $k_1(\varepsilon)$, что при любом $k \geq k_1(\varepsilon)$

$$\int_0^N \int_\Omega |z^{(k)}(\tau, x) - v(x)|^2 dx d\tau \equiv \int_k^{k+N} \|p^{(k)}(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt < \varepsilon. \quad (3.43)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{k+N-1}^{k+N} \|u(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt \\ & \leq 2 \int_{k+N-1}^{k+N} \|w^{(k)}(t, \cdot)\|^2 dt + 2 \int_{k+N-1}^{k+N} \|p^{(k)}(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Пусть $k \geq k_1(\varepsilon)$. Тогда из (3.43) следует, что второе слагаемое в правой части (3.44) будет меньше 2ε . Поскольку в силу (3.24) $N-1 \geq N_1(\varepsilon)$, то первое слагаемое в правой части (3.44) будет меньше $2\varepsilon^2$ согласно (3.18).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_4(\varepsilon) \equiv k_1(\varepsilon) + N - 1$ такое, что при $m \geq N_4(\varepsilon)$

$$\int_m^{m+1} \|u(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt \leq 2(\varepsilon + \varepsilon^2),$$

откуда и вытекает (3.5).

Аналогично, в силу (3.35) для любой $\psi(x) \in L_2(\Omega)$ найдется $k_2(\varepsilon)$ такое, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ при $k \geq k_2(\varepsilon)$

$$\left| \int_{N-1}^N \int_{\Omega} [z_{x_i}^{(k)}(\tau, x) - v_{x_i}(x)] \psi(x) dx d\tau \right| < \varepsilon,$$

и потому

$$\left| \int_{k+N-1}^{k+N} \int_{\Omega} [p_{x_i}^{(k)}(t, x) - v_{x_i}(x)] \psi(x) dx dt \right| < \varepsilon. \quad (3.45)$$

Но тогда при $k \geq k_2(\varepsilon)$ с учетом (3.20), (3.45) и (3.24) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k+N-1}^{k+N} \int_{\Omega} [u_{x_i}(t, x) - v_{x_i}(x)] \psi(x) dx dt \right| \\ & \leq c(\psi) \int_{k+N-1}^{k+N} \|w_x^{(k)}(t, \cdot)\| dt + \left| \int_{k+N-1}^{k+N} \int_{\Omega} [p_{x_i}^{(k)}(t, x) - v_{x_i}(x)] \psi(x) dx dt \right| \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} c(\psi) + \varepsilon, \end{aligned}$$

из которой, очевидно, следует (3.6).

Пусть, наконец, $\chi_{[N-1, N]}(\tau)$ — характеристическая функция отрезка $[N-1, N]$. В силу (3.37) найдется число $k_3(\varepsilon)$ такое, что для любого $k \geq k_3(\varepsilon)$

$$\left| \int_0^N [y^{(k)}(\tau) - q] \chi_{[N-1, N]}(\tau) d\tau \right| \equiv \left| \int_{N-1}^N [y^{(k)}(\tau) - q] d\tau \right| < \varepsilon$$

или в другой записи (см. (3.25))

$$\left| \int_{k+N-1}^{k+N} [r^{(k)}(t) - q] dt \right| < \varepsilon. \quad (3.46)$$

Тогда при $k \geq k_3(\varepsilon)$, учитывая (3.23), (3.46) и (3.24), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k+N-1}^{k+N} [f(t) - q] dt \right| \leq \int_{k+N-1}^{k+N} |s^{(k)}(t)| dt + \left| \int_{k+N-1}^{k+N} [r^{(k)}(t) - q] dt \right| \\ & \leq \left\{ \int_{k+N-1}^{k+N} |s^{(k)}(t)|^2 dt \right\}^{1/2} + \left| \int_{k+N-1}^{k+N} [r^{(k)}(t) - q] dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда вытекает (3.7). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 4 близость $f(t)$ и q удастся доказать только в достаточно слабом смысле (см. соотношение (3.7)). Это связано с весьма слабыми предположениями о близости коэффициентов уравнений (1.1) и (1.5) в виде условий (3.1), (3.2), (3.4). Если потребовать выполнения более сильных условий сходимости при $t \rightarrow \infty$ коэффициентов уравнения (1.1) к соответствующим коэффициентам уравнения (1.5), то можно доказать и сходимость $f(t)$ к q в более сильном смысле. Соответствующим результатам будет посвящена другая статья. Один из таких результатов в краткой форме анонсирован в [5].

В рамках данной работы, несколько усилив предположения о правых частях уравнений (1.1) и (1.5), получим ниже более сильное, нежели в теореме 4, утверждение о близости функции $u(t, x)$ к $v(x)$. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть в дополнение к условиям теоремы 4 известно, что

$$|g(t, x)|, |g^\infty(x)|, |h_j(t, x)|, |h_j^\infty(t, x)| \leq K_5, \quad (3.47)$$

$j = 0, 1, 2, \dots, n$; $(t, x) \in Q_\infty$, $K_5 = \text{const} > 0$. Тогда в теореме 4 вместо (3.5) будет выполнено соотношение

$$\sup_{x \in \Omega} |u(t, x) - v(x)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условие (3.47) и теорему 8.1 из [13, с. 225], примененную к уравнению (1.1), выводим оценку

$$\sup_{(t, x) \in Q_{m+1}^m} |u(t, x)| \leq c_1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.49)$$

где $c_1 = \text{const} > 0$ зависит от $\Lambda_0, \Lambda_1, K_2, K_3, K_5, n, \alpha, \|u\|_{L_2(Q_{m+2}^{m-1})}$ и $\|f\|_{L_2([m-1, m+2])}$. В свою очередь, согласно (2.2) и (2.4) получаем, что нормы $\|u\|_{L_2(Q_{m+2}^{m-1})}$ и $\|f\|_{L_2([m-1, m+2])}$ оцениваются сверху константами, не зависящими от m . Поэтому константа c_1 в (3.49) не зависит от m и из (3.49) следует, очевидно, оценка

$$\sup_{(t, x) \in Q_\infty} |u(t, x)| \leq c_2, \quad (3.50)$$

где $c_2 = \text{const} > 0$ также не зависит от m .

В силу сделанных предположений и доказанной оценки (3.50) из теоремы 10.1 (см. [13, с. 238]) вытекает оценка

$$|u|_{C^{0,\gamma}(Q_{m+1}^m)} \leq c_3, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (3.51)$$

Здесь $\gamma = \text{const} \in (0, 1)$ и $c_3 = \text{const} > 0$ не зависят от m .

Рассмотрим последовательность $u^k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots$, считая, что $(t, x) \in Q_2^1$. Напомним, что $u^k(t, x) \equiv u(t + k, x)$. В силу (3.51) эта последовательность является равномерно ограниченной и равномерно непрерывной в цилиндре Q_2^1 . Тогда согласно теореме Арцела найдется подпоследовательность $k_\nu \rightarrow \infty$ и функция $v_1(t, x)$ такие, что равномерно на Q_2^1 при $\nu \rightarrow \infty$

$$u^{k_\nu}(t, x) \rightrightarrows v_1(t, x). \quad (3.52)$$

В то же время, учитывая предельное соотношение (3.5), имеем, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\int_1^2 \|u^{k\nu}(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt \equiv \int_{k\nu+1}^{k\nu+2} \|u(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt \rightarrow 0.$$

Следовательно, $v_1(t, x) \equiv v(x)$ и, кроме того, сходимость в (3.52) будет осуществляться по всей последовательности $k \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{(t, x) \in Q_{\frac{1}{2}}} |u^k(t, x) - v(\cdot)| = 0,$$

что немедленно приводит к предельному соотношению (3.48).

Теорема 5 доказана.

Список литературы

1. Прилепко А. И., Орловский Д. Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. II // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 4. С. 694–700.
2. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.
3. Костин А. Б. Обратная задача для уравнения теплопроводности с интегральным переопределением // Обратные задачи для математического моделирования физических процессов. Сб. научных трудов. М.: МИФИ, 1991. С. 45–49.
4. Katsynin V. L. On convergence of the solutions of inverse problems for parabolic equations with weakly converging coefficients // Elliptic and Parabolic Problems, Pont-a-Mousson. 1994; // Pitman Res. Notes Math. Ser. 1995. V. 325. P. 130–151.
5. Васин И. А., Камынин В. Л. Об асимптотическом поведении слабых решений обратных задач для параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50. № 4. С. 144.
6. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
7. Зеленьяк Т. И., Михайлов В. П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \rightarrow \infty$ // Труды симпозиума, посвящ. 60-летию С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С. 96–119.
8. Гуцин А. К., Михайлов В. П., Муравей Л. А. О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Динамика сплошной среды. Т. 23. Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1975. С. 57–91.
9. Вишневский М. П., Зеленьяк Т. И., Лаврентьев М. М. Поведение решений нелинейных параболических уравнений при большом времени // Сибирский матем. журнал. 1995. Т. 36. № 3. С. 510–530.
10. Arosio A. Asymptotic behavior as $t \rightarrow \infty$ of solutions of linear parabolic equations with discontinuous coefficients in a bounded domain // Comm. Part. Diff. Equations. 1979. V. 4. № 7. P. 769–794.
11. Камынин В. Л. Асимптотическое поведение решений квазилинейных параболических уравнений в ограниченной области // Сибирский матем. журнал. 1994. Т. 35. № 2. С. 340–358.
12. Riganti R., Savateev E. Solution of an inverse problem for the nonlinear heat equation // Comm. Partial Differential Equations. 1994. V. 19. № 9, 10. P. 1611–1628.
13. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
14. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.